Trabajo Práctico

Programación Lineal

19 de mayo de 2025 | Intro a IO y Optimización

Integrante	LU	Correo electrónico
Bakal, Ariel	1014/22	bakalariel2002@gmail.com
Bronfman, Dino	868/22	dinobronfman@gmail.com
Stabile, Delfina	819/22	delfistabile18@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón Cero + Infinito)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Conmutador: (+54 11) 5285-9721 / 5285-7400
https://dc.uba.ar

1. Calcular la ganancia o pérdida (prorrateando los gastos fijos) de cada producto que se obtuvo en el mes anterior (cuando se produjeron 500.000 litros de combustible para aviones, 3.000.000 de combustible para vehículos y 6.000.000 litros de kerosene) y la ganancia (o pérdida) total de la compañia.

Para calcular esta ganancia o pérdida proponemos el siguiente modelo que maximiza el beneficio solo considerando precios de venta y costos. Luego le restaremos los gastos fijos prorrateados.

x_A : 1000 litros de combustible para aviones.

x_V : 1000 litros de combustible para vehículos.

x_K : 1000 litros de kerosene.

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 16000x_A + 8000x_V + 4000x_K \\
& -(4000+4100+1000+1000)x_A \\
& -(1000+3000+600+500)x_V \\
& -(500+1500+400+400)x_K \\
\text{s.a.} \quad & 10x_A + 5x_V + 3x_K \leq 38000 \\
& 20x_A + 10x_V + 6x_K \leq 80000 \\
& 4x_A \leq 4000 \\
& 2x_V \leq 6000 \\
& x_K \leq 7000 \\
& x_A,\, x_V,\, x_K \geq 0
\end{aligned}
$$

En la función objetivo están sumando los litros vendidos multiplicados por sus respectivos precios de venta, y restan los costos (sin contar los gastos fijos, ya que estos son una constante siempre y cuando ninguno de los 3 productos tenga una producción nula) necesarios para la producción de estos mismos.

Como restricciónes tomamos en cuenta la cantidad de horas máxima que se puede utilizar cada uno de los sectores (embalaje de cada producto, fraccionador, refinador) teniendo en cuenta la cantidad de horas que requieren los mil litros de cada producto.

Para calcular el balance de cada producto nosotros le restamos a la ganancia neta (la de venta de producto) los costos y los gastos fijos prorrateados. Esto último lo hicimos de la siguiente manera:

En este caso particular las variables estan representadas en 1000 litros y valen

$$x_A = 500, x_V = 3000, x_K = 6000$$

ya que cada uno representa 1000 litros.

Para prorreatar los gastos dividimos

$$\frac{\text{Costo fijo de refinado}}{10x_a + 5x_v + 3x_k}$$

que reemplazando nos queda en el caso del refinador

$$\frac{5000000}{10 \cdot 500 + 5 \cdot 3000 + 3 \cdot 6000} = 131{,}57 \text{ (cada hora de uso)}$$

Análogamente, para el fraccionador nos quedo

$$\frac{5000000}{20 \cdot 500 + 10 \cdot 3000 + 6 \cdot 6000} = 65,78 \text{ (cada hora de uso)}$$

Por lo tanto, cuando calculamos el balance de cada producto hay que multiplicar a 131,57 y a 65,78 por la cantidad de horas que ese producto utilizó. Además, hay que restarle el costo de embalaje de cada producto.

Así, llegamos a:

$$\begin{aligned}\textbf{Combustible aviones} &= 5900.500 - 131,57.10.500 - 65,78.20.500 - 2000000\\ &= \textbf{-365.650}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{Combustible vehículos} &= 2900.3000 - 131,57.5.3000 - 65,78.10.3000 - 1000000\\ &= \textbf{3.753.050}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{Kerosone} &= 1200.6000 - 131,57.3.6000 - 65,78.6.6000 - 500000\\ &= \textbf{1.963.660}\end{aligned}$$

Se puede observar que en el mes pasado el sector de combustible de aviones perdió dinero, mientras que los otros dos productos tuvieron un balance positivo.

Consecuentemente, la ganancia de la empresa ese mes fue de:

$$\textbf{Ganancia total} = \textbf{-365650 + 3753050 + 1963660 = 5351060}$$

Sin embargo, como veremos a continuación, esta producción no fue óptima.

2. Si la empresa no hubiese producido combustible para aviones manteniendo en los mismos valores los otros productos, ¿la ganancia de la compañía habría sido mejor? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Para evaluar esto tuvimos que volver a prorratear los gastos, dado que en este caso la variable $x_A = 0$. Por lo tanto, llegamos (haciendo la misma cuenta que en el item 1) a que el gasto por hora de refinado es de 151,51 y el de fraccionado de 75,76 por hora.

Así, llegamos a estos nuevos balances:

$$\begin{aligned}\textbf{Combustible vehículos} &= 2900.3000 - 151,51.5.3000 - 75,76.10.3000 - 1000000 \\ &= \mathbf{3.154.550}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{Kerosene} &= 1200.6000 - 151,51.3.6000 - 75,76.6.6000 - 500000 \\ &= \mathbf{1.245.460}\end{aligned}$$

Se puede ver que en este caso las ganancias fueron menores, ya que el gasto fijo por hora aumentó al estar repartiendoselo entre solo dos productos.

Así, el balance mensual nos quedó:

$$\mathbf{3154550 + 1245460 = 4400010}$$

La respuesta es **no, la ganancia de la compañía no habría sido mejor.**

3. ¿Y si hubiese aumentado lo máximo posible la producción de los otros productos? Suponer que se cierra el sector de embalaje de combustibles para aviones.

Para esto primero tenemos que averiguar cuál es el máximo posible de producción de cada producto. Acá utilizamos las restricciones de nuestro modelo. Además, tomamos $x_A = 0$.

$$\begin{aligned}\text{s.a.}\quad & 5x_V + 3x_K \leq\ 38000 \\ & 10x_V + 6x_K \leq\ 80000 \\ & 2x_V \leq\ 6000 \\ & x_K \leq\ 7000 \\ & x_V,\ x_K \geq\ 0\end{aligned}$$

De las últimas dos restricciones notamos que x_V es como mucho 3000 y que x_K como mucho es 7000. Ahora chequeamos que estos valores cumplen con las otras restricciones:

$$\begin{aligned}&5{,}3000 + 3{,}7000 = 38000 \\ &10{,}3000 + 6{,}7000 \leq\ 80000\end{aligned}$$

por lo tanto, concluímos que los valores máximos de producción son:

$$x_V = 3000, x_K = 7000$$

Ahora que ya sabemos esto volvemos a prorratear los gastos fijos, y esta vez llegamos a que el refinador tiene un costo de 138,89 por hora y el fraccionador de 69,44 por hora.

Finalmente, volvemos a calcular el balance de cada uno:

$$\begin{aligned}\textbf{Combustible vehículos} &= 2900.3000 - 138,89.5.3000 - 69,44.10.3000 - 1000000 \\ &= \mathbf{3.533.450}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{Kerosene} &= 1200.7000 - 138,89.3.6000 - 69,44.6.7000 - 500000 \\ &= \mathbf{2.066.830}\end{aligned}$$

Notamos que ahora las ganancias mejoraron respecto al item 2 y al item 1. Así, la ganancia general de la empresa fue de

$$\mathbf{3533450 + 2066830 = 5300280}$$

Esta ganancia es mayor a las calculadas previamente, por lo que llegamos a la conclusión de que si se fuera a cerrar el sector de combustible de aviones habría que producir la mayor cantidad posible de los otros productos para llegar a una ganancia óptima. Esto se puede deducir de que al aumentar la cantidad de producción baja el gasto fijo por hora y aumenta la ganancia neta de las ventas.

4. Determinar la cantidad óptima de producción mensual de cada producto para maximizar la ganancia de la compañía.

Para calcular esto corrimos CPLEX utilizando el LP escrito anteriormente (donde se tienen en cuenta los costos pero no los gastos fijos. Estos últimos fueron tomados como una constante) y llegamos a que la cantiad óptima de producción mensual es de:

$$x_A = \mathbf{1000}, x_V = \mathbf{3000}, x_K = \mathbf{13000/3}$$

5. Indicar al director estas cantidades, el costo por 1000 litros de cada producto (prorrateando los costos fijos) y la ganancia total de la empresa.

Como indicamos en el punto 4, la cantidad óptima de producción mensual de cada producto resultó ser de:

$$x_A = \mathbf{1000}, x_V = \mathbf{3000}, x_K = \mathbf{13000/3}$$

(teniendo en cuenta que cada unidad de estas variables representa 1000 litros. Por ejemplo, $x_A = 1000$ significa 1 millon de litros).

Para calcular los gastos prorreateamos una vez más los gastos fijos de la misma manera que en los items anteriores, reemplazando las variables por sus valores actuales. Obtuvimos que por cada hora el costo del refinado fue de 131,57 y el del fraccionado 65,78. Cómo el embalaje era propio de cada producto este no hubo que prorreatearlo. Además, sumamos los costos generales de cada producto.

Primeramente calculamos el gasto total de cada producto:

Combustible de aviones : 14.731.300

Combustible de vehículos : 20.246.950

Kerosene : 16.054.023

y llegamos a que el costo total fue de **51.032273**.

Ahora bien, para calcular el costo cada 1000 litros de cada producto, dividimos cada costo total por la cantidad de miles de litros que fueron producidos

Combustible de aviones : 14.731.300 / 1000 = **14731,30**

Combustible de vehículos : 20.246.950 / 3000 = **6749**

Kerosene : 16.054.023 / (13000/3) = **3704,77**

La ganancia sin contar costos fue de 57.333.333,33. Así, la ganancia total de la empresa fue de **6.301.060**.

6. Al escuchar esto, el gerente de producción propuso aumentar la producción contratando 500 horas extras al mes del personal del sector de fraccionado. Asesorar al director sobre esta propuesta.

Para este punto, primeramente formulamos el dual y obtuvimos su solución óptima.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 38000y_1 + 80000y_2 + 4000y_3 + 6000y_4 + 7000y_5 \\ \text{s.a.} & 10y_1 + 20y_2 + 4y_3 \geq \ 5900 \\ & 5y_1 + 10y_2 + 2y_4 \geq \ 2900 \\ & 3y_1 + 6y_2 + y_5 \geq \ 1200 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \geq \ 0 \end{array}$$

$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (400, 0, 475, 45)$

Para evaluar esta propuesta, realizamos un análisis de sensibilidad utilizando la variable dual asociada a la restricción de horas del sector de fraccionado (identificada como y_2.). En este caso, dicha variable dual tiene valor 0, lo cual indica que un aumento en las horas disponibles de fraccionado no generará un incremento en la ganancia óptima del modelo. Además, en la solución óptima actual, notamos que la variable de holgura asociada a esta restricción es s2=4000, lo que significa que ya existen 4000 horas de fraccionado que no están siendo utilizadas, que "sobran". Por lo tanto, aumentar en 500 horas más (llevando el total de horas disponibles a 80.500) no aportará ningún beneficio adicional, ya que esas horas también quedarían ociosas.

Desde el punto de vista técnico, esta conclusión es válida mientras el nuevo término independiente (en este caso, $b_2 = 80{,}500$) se mantenga dentro del rango de factibilidad de la base óptima. Verificamos esta condición aplicando la fórmula $B^{-1} \cdot b \geq 0$, y confirmamos que con el nuevo valor, la base sigue siendo factible.

De esta manera, tenemos B = $(x_A, x_V, x_K, s_2, s_5)$ óptima.

B y su inversa quedan:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que $B^{-1} \cdot b \geq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 38000 \\ 80500 \\ 4000 \\ 6000 \\ 7000 \end{bmatrix} \geq 0$$

siendo b el vector columna.

En conclusión, **no recomendamos aceptar la propuesta del gerente**, ya que el aumento de horas de fraccionado no impactará positivamente en la ganancia y solo generará un costo innecesario.

7. Otra propuesta del gerente es contratar 1000 horas extras al mes del personal del sector de refinado. Indicar al director si es conveniente aceptar esta nueva propuesta y hasta cuánto debería pagar por cada hora extra de este sector.

Al igual que en el punto anterior, podemos analizar esta propuesta a través del valor de la variable dual asociada a la restricción de horas del sector de refinado, identificada como y_1. En este caso, dicha variable tiene un valor de 400, lo cual indica que por cada hora adicional disponible en el sector de refinado, la ganancia aumentará en 400.

Esto es válido siempre que el nuevo valor del término independiente, en este caso b_1 = 39.000, se mantenga dentro del rango de validez de la base óptima. Al aplicar la condición de factibilidad $B^{-1} \cdot b \geq 0$, verificamos que dicho valor sigue manteniendo la base factible.

Por lo tanto, sí es conveniente aceptar la propuesta de contratar 1000 horas extras de refinado, ya que esto implicará un incremento en la ganancia total de 400.000. Además, el director debería estar dispuesto a pagar hasta 400 por cada hora extra, ya que cualquier costo menor a ese valor sigue representando un aumento neto en la ganancia.

8. Si el director decide pagar por hora extra la mitad del valor máximo indicado en el punto anterior, ¿en cuánto aumentaría la ganancia mensual de la compañía?

En el punto anterior determinamos que el valor máximo que se debería pagar por cada hora extra del sector de refinado es de 400, ya que es en lo que aumenta el valor óptimo por cada hora adicional.
Si el director decide pagar solo la mitad de ese valor, es decir, 200 por hora, entonces cada hora extra sigue generando una ganancia neta de 200 (ya que sería 400 de beneficio menos 200 de costo). Como se planea contratar 1000 horas extras, el aumento total en la ganancia mensual será: 1000 horas $\times$ 200 = 200.000
Por lo tanto la ganancia mensual de la compañía aumentaría en 200.000.

9. Por otro lado, el gerente de compras propone cambiar algunos proveedores, lo que permitiría bajar el costo de la materia prima del aceite para vehículos de $1000 a $800 por cada 1000 litros procesados. ¿Cambiaría el plan de producción óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

Reducir el costo de $1000 a $800 implica aumentar el coeficiente del objetivo de x_V en $200, ya que pasamos de:

$$8000x_V - (1000 + 3000 + 600 + 500)x_V = 2900x_V$$

a:

$$8000x_V - (800 + 3000 + 600 + 500)x_V = 3100x_V$$

Calculamos los costos reducidos $\bar{\mathbf{c}}_N = c_N - c_B B^{-1} A_N$ con:

$$c_B = \begin{bmatrix} 5900 \\ 3100 \\ 1200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\bar{\boldsymbol{c}}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5900 \\ 3100 \\ 1200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot B^{-1} \cdot A_N = \begin{bmatrix} -400 \\ -475 \\ -550 \end{bmatrix}$$

Como $\bar{\boldsymbol{c}}_N \leq 0$, la base sigue siendo óptima y no necesitamos reoptimizar.
Por lo tanto, el plan de producción óptimo no cambia ante la reducción del costo de \$1000 a \$800 de la materia prima para vehículos, y se mantiene en:

$$(x_A, x_V, x_K) = (1000,\ 3000,\ \tfrac{13000}{3})$$

Notar que habría un aumento en la ganancia, ya que tenemos la misma solución óptima pero con un coeficiente del objetivo de x_V mayor que el anterior.

10. Y si se modificara el proceso de refinado de kerosene para bajar de \$1500 a \$900 por cada 1000 litros procesado, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima.

En este caso, aumentaríamos el coeficiente del objetivo de x_K en \$600 obteniendo:

$$c_B = \begin{bmatrix} 5900 & 2900 & 1800 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, nuestros nuevos costos reducidos serían:

$$\bar{\boldsymbol{c}}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5900 \\ 2900 \\ 1800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot B^{-1} \cdot A_N = \begin{bmatrix} -600 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Observamos que tenemos costos reducidos positivos, lo cual nos indica que la base dejó de ser óptima y necesitamos reoptimizar.
En otras palabras, nuestro plan actual ya no es el óptimo y debemos hallar una nueva planificación.

Pivoteamos a partir de la base óptima actual y llegamos a una nueva solución óptima:

$$(x_A, x_V, x_K) = (1000,\ 1400,\ 7000)$$

Siendo esta nuestra nueva planificación óptima.

11. La empresa está evaluando comenzar a procesar gasoil. El tiempo requerido para refinar 1000 litros de gasoil es de 4 horas, mientras que para fraccionarlos son necesarias 8 horas y para su embalaje 1.5 horas. El costo de la materia prima para mil litros de gasoil es de 4000, el de refinado de 4100, el de fraccionado de 1000. El embalaje de gasoil lo realizaría el sector de embalaje de kerosene. ¿Cuál debería ser el menor precio de venta de los 1000 litros de gasoil para que su producción sea conveniente para la empresa?

Agregamos una nueva variable x_G. Esto modificó el LP, que nos quedó:

$$\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & 10x_A + 5x_V + 3x_K + 4x_G \leq\ 38000 \\
& 20x_A + 10x_V + 6x_K + 8x_G \leq\ 80000 \\
& 4x_A \leq\ 4000 \\
& 2x_V \leq\ 6000 \\
& x_K + 1{,}5x_G \leq\ 7000 \\
& x_A,\ x_V,\ x_K,\ x_G \geq\ 0
\end{aligned}$$

y el coeficiente de la nueva variable en la función objetivo solo teniendo en cuenta costos sería:

$$\textbf{-}x_G\ \mathbf{(4000{+}4100{+}1000{+}400) = -9500}x_G$$

Para saber cuánto debe valer el coeficiente de x_G en la función objetivo la tomamos como no básica y chequeamos si la base sigue siendo óptima o no, con la fórmula

$$c_N - c_B B^{-1} A_N$$

Para que sea conveniente la producción el costo reducido de la variable debe ser $\geq\ 0$.
De esta manera, x_G entraría a la base porque va a mejorar el valor de la función objetivo.
Calculamos reemplazando $c_B.\ B^{-1} = y$ (la solución óptima dual): c_N - $y.A_N$.

$$c_{x_G} - \begin{bmatrix} 400 & 0 & 475 & 450 & 0 \end{bmatrix} .A_{x_G}$$

$$c_{x_G} - \begin{bmatrix}400 & 0 & 475 & 450 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\8\\0\\0\\1,5\end{bmatrix} \geq 0$$

c_{x_G} - 1600 $\geq$ 0

$c_{x_G} \geq$ 1600

El coeficiente de x_G en la función objetivo tiene que ser $\geq$ 1600.

Entonces calculo el menor precio de venta de los 1000lt teniendo en cuenta los costos:

$$\begin{aligned}&x_G(-9500 + PV) = 1600\\&-9500 + PV = 1600\\&PV = 11100\end{aligned}$$

Con PV = precio de venta.

Si el precio de venta del gasoil es 11100 los 1000lt entonces el coeficiente de la función objetivo queda

$$11100x_G - 9500x_G = 1600x_G$$

Con este coeficiente el valor de x_G en la fila Z pasa a ser positivo lo que hace que entre en la base óptima. Es decir, **convenga producirlo**.

12. La empresa va a agregar un control de calidad a todos sus productos. Controlar los 1000 litros de combustible para aviones requiere 5 horas, los de combustible para vehículos 3 horas y 2 horas los 1000 litros de kerosene. Si el sector de control de calidad dispone de 20000 horas mensuales, ¿cambiaría el plan óptimo? Si es así, dar la nueva planificación óptima

Al agregar una nueva restricción se ve modificado el LP y consecuentemente la condición de factibilidad. Quedaría:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max} & 5900x_A + 2900x_V + 1200x_K \\
\text{s.a.} & 10x_A + 5x_V + 3x_K \leq \ 38000 \\
& 20x_A + 10x_V + 6x_K \leq \ 80000 \\
& 4x_A \leq \ 4000 \\
& 2x_V \leq \ 6000 \\
& x_K \leq \ 7000 \\
& 5x_A + 3x_V + 2x_k \leq \ 20000 \\
& x_A, \, x_V, \, x_K \geq \ 0
\end{array}
$$

Agregamos una nueva variable de holgura, llamada s_6. La sumamos a la base y ahora chequeamos la condición de factibilidad.

Tenemos B $= (x_A, x_V, x_K, s_2, s_5, s_6)$

$$
B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

y $b =$ (38000,80000,4000,6000,7000,20000).

Debemos chequear si $B^{-1} \cdot b \geq 0$.

Calculando esto nos dió

$$
B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 13000/3 \\ 4000 \\ 8000/3 \\ -8000/3 \end{bmatrix}
$$

y como el último término es negativo, notamos que al haber agregado esta nueva restricción llegamos a que ya no es factible primal. Por este motivo debemos reoptimizar, volviendolo a correr en CPLEX con la nueva restricción.

Y es así que llegamos a que la planificación óptima es

$$
x_A = \mathbf{1000}, x_V = \mathbf{3000}, x_K = \mathbf{3000}
$$