

Taller de Álgebra I

Clase 12 - Polinomios

Segundo cuatrimestre 2022

Nuevo tipo

Vamos a trabajar con polinomios con coeficientes en \mathbb{R} (o \mathbb{Q}), pero todo lo que haremos se puede llevar al contexto de polinomios con coeficientes en otros **cuerpos** como \mathbb{C} o \mathbb{Z} .

Para eso definimos un renombre de tipos para polinomios en $\mathbb{R}[X]$:

```
type Polinomio = [Float]
```

donde el elemento i de la lista **contando desde cero y empezando desde la cola** corresponde al coeficiente a_i del polinomio $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

Por ejemplo el polinomio $4X^3 + 3X - 2$ se representa por $[4, 0, 3, (-2)]$.

- Invariante del tipo: la lista de coeficientes no empieza con cero.
 - Se puede suponer que el invariante se cumple en los polinomios que reciben nuestras funciones.
 - Se debe garantizar que el invariante se cumple en los polinomios que devuelven nuestras funciones.

Ejercicio

Implementar las siguientes funciones:

- 1 `limpiar :: [Float] -> Polinomio`, que dada una lista cualquiera de números reales, le borra los 0s iniciales si los hubiera (luego el resultado cumple el invariante del tipo `Polinomio`).
- 2 `grado :: Polinomio -> Int` (en general se usa la convención $\text{grado}(0) = -\infty$, en la implementación se puede dejar `grado []` indefinido).
- 3 `evaluar :: Polinomio -> Float -> Float`, que dados $P \in \mathbb{R}[X]$ y $a \in \mathbb{R}$ calcula $P(a)$.

Suma de polinomios

Para sumar polinomios, queremos implementar la función

```
suma :: Polinomio -> Polinomio -> Polinomio.
```

No es difícil, pero hay que hacerlo con cuidado...

```
suma [2, 1, 3] [1, 4, 0, 1] = [1, 6, 1, 4]
```

```
suma [2, 1, 3] [-2, 5, 0] = [6, 3]
```

Ejercicio

Implementar la función `suma :: Polinomio -> Polinomio -> Polinomio.`

Sugerencia: Tener en cuenta las funciones `init` y `last` del Prelude, para hacer la recursión de atrás hacia adelante.

Nuevo tipo

Definimos también un renombre de tipos para monomios en $\mathbb{R}[X]$:

```
type Monomio = (Float, Int)
```

donde el monomio aX^n se representa con (a, n) .

El invariante de este tipo es que $a \neq 0$.

Producto de polinomios

Ejercicios

- 1 `productoPorEscalar :: Float -> Polinomio -> Polinomio`, que calcula el producto de un escalar por un polinomio.

```
Ejemplo> productoPorEscalar 5 [2, 3, (-1)]  
[10.0,15.0,-5.0]
```

- 2 `resta :: Polinomio -> Polinomio -> Polinomio`, que calcula la resta de polinomios.

```
Ejemplo> resta [8, -4, 2, 7] [8, 1, 1, 0]  
[-5.0, 1.0, 7.0]
```

- 3 `productoPorMonomio :: Monomio -> Polinomio -> Polinomio`, que calcula el producto de un monomio por un polinomio.

```
Ejemplo> productoPorMonomio (5, 2) [2, 3, (-1)]  
[10,15.0,-5.0,0.0,0.0]
```

- 4 `producto :: Polinomio -> Polinomio -> Polinomio`, que calcula el producto de dos polinomios.

```
Ejemplo> producto [2, 3, (-1)] [1, (-3)]  
[2.0,-3.0,-10.0,3.0]
```

Ejercicios

Implementar las siguientes funciones:

- 1 `hacerPolinomio :: Monomio -> Polinomio`, que “convierte” un monomio en un polinomio (considerando sus respectivas codificaciones).
- 2 `derivadaMonomio :: Monomio -> Monomio`, que deriva un monomio.
- 3 `derivada :: Polinomio -> Polinomio`
- 4 `derivadaNEsima :: Polinomio -> Int -> Polinomio`, que dados $P \in \mathbb{R}[X]$ y $n \in \mathbb{N}$ calcula la derivada n -ésima de P .

División de polinomios

$$\begin{array}{r} 6X^3 + 5X^2 - 7X + 3 \\ - 6X^3 + 9X^2 - 3X \\ \hline -4X^2 - 4X + 3 \\ - 4X^2 - 6X + 2 \\ \hline 2X + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2X^2 + 3X - 1 \\ \hline 3X - 2 \end{array} \right.$$

Ejercicios

Implementar las siguientes funciones:

- 1 `primerCociente :: Polinomio -> Polinomio -> Monomio`, que calcula el primer monomio del cociente de la división de dos polinomios.

```
Ejemplo> primerCociente [6, 5, -7, 3] [2, 3, -1]  
(3.0, 1)
```

- 2 `primerResto :: Polinomio -> Polinomio -> Polinomio`, que calcula la resta entre el dividendo y el producto del divisor por el primer cociente.

```
Ejemplo> primerResto [6, 5, -7, 3] [2, 3, -1]  
[-4.0, -4.0, 3]
```


División de polinomios

$$\begin{array}{r} 6X^3 + 5X^2 - 7X + 3 \\ - 6X^3 + 9X^2 - 3X \\ \hline -4X^2 - 4X + 3 \\ - -4X^2 - 6X + 2 \\ \hline 2X + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2X^2 + 3X - 1 \\ \hline 3X - 2 \end{array} \right.$$

Ejercicios

- 3 `division :: Polinomio -> Polinomio -> (Polinomio, Polinomio)`, que dados polinomios $P(X)$ y $Q(X)$ calcule el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ de la división (se debe verificar $P(X) = C(X)Q(X) + R(X)$ y $\deg R(X) < \deg Q(X)$ o $R(X) = 0$).

```
Ejemplo> division [6, 5, -7, 3] [2, 3, -1]  
([3.0, -2.0], [2.0, 1.0])
```

Algoritmo de Euclides para polinomios

Ejercicio

- 1 Implementar el algoritmo de Euclides para calcular el MCD de dos polinomios.

`mcdP :: Polinomio -> Polinomio -> Polinomio`

```
Ejemplo> mcdP [1, 0, 2, 0, 1, 0] [1, 0, 0, 0, -1]  
[1.0, 0.0, 1.0]
```

Raíces múltiples de polinomios

Ejercicios

Implementar las siguientes funciones:

- 1 `multiplicidad :: Float -> Polinomio -> Int`, que dados un real x y un polinomio $P(X)$ determine la multiplicidad de x como raíz de P .

```
Ejemplo> multiplicidad 3 [1, -6, 9]
2
Ejemplo> multiplicidad 3 [1, -6, 10]
0
Ejemplo> multiplicidad (-2) [1, 9, 30, 44, 24]
3
```

- 2 `raicesMultiples :: Polinomio -> Bool`, que determina si un polinomio tiene raíces múltiples.

Sugerencia: Pensar qué condición tiene que cumplir el resultado del MCD entre el polinomio pasado como parámetro y su derivada.

```
Ejemplo> raicesMultiples [1, -6, 10]
False
Ejemplo> raicesMultiples [1, 9, 30, 44, 24]
True
```