1)

PROC

05/06/20

Rappels :

1) Étant donné une expérience aléatoire, Ω l'ensemble des résultats possibles.

2) Variable aléatoire X = une fonction

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

3) La distribution de X :

$$P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$A \subset \mathbb{R} \mapsto P(X \in A)$$

Fonction de répartition de X : $P(X \leq x)$

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto P_X(]-\infty, x])$$

F est croissante avec $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ || $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Variable continue à densité :

↪ S'il $\exists$ une fonction de répartition F continue ou continue par morceaux, $\exists$ la densité de X.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

⚠ Si l'on demande a prouver que f peut être une densité :

- Prouve que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (Converge et $= 1$)

Densité de $\alpha X + \beta = Y$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ et :

$$f_Y(x) = \frac{1}{|\alpha|} \times f_X\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right)$$

⚠ Si l'on demande de retrouver la fonction de densité d'une variable aléatoire $Y = \varphi(X)$:

- On trouve $F_Y(x) = P(Y \leq x)$
- On trouve $P(Y \leq x) = P(X \leq ???)$
- Dérive ~~ffx~~ sa dérivé.

Distribution uniforme : $X \rightsquigarrow \text{Unif}(a,b)$

a et b, sont les bornes.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

$x < a \to F(x) = 0$

si $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} \, dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \boxed{\frac{x-a}{b-a}}$

$x > b, \to F(x) = 1$

1) Si $X \rightsquigarrow \text{Unif}(a,b)$, $Z = \frac{X-a}{b-a}$ then $Z \rightsquigarrow \text{Unif}(0,1)$

⚠ Exo type :

2) $Z \rightsquigarrow \text{Unif}(0,1)$ then $X = a + (b-a)Z$ then $X \rightsquigarrow \text{Unif}(a,b)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

2)

PROC

05/06/20

Distribution exponentielle : $X \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\cancel{F(\lambda x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt & \text{si } \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(\lambda)$, then $\lambda X \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(1)$

2) Si $Z \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(1)$, then $\frac{Z}{\lambda} \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(\lambda)$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

Distribution normale : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$(m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$m = 0$ et $\sigma^2 = 1$
<> normale centrée réduite

1) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, then $Y = aX + b \rightsquigarrow \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$

2) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, then $Z = \frac{X-m}{\sigma}$, then $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

3) $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, then $X = m + \sigma Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

4) X et Y 2 variables indépendantes :
$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \mid Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) \mid (X+Y) \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

pour $X \rightsquigarrow N(0,1)$:

$$F_X(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = \Phi(1,96) = 95\%$$

$E(X) = m$ $\quad Var(X) = \sigma^2$ $\quad \sigma(X) = \sigma$

Espérance de X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$ (si DV, X n'a pas d'espérance)

↳ centre de gravité de la distribution.

1) $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

3) $\forall \varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue,

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx$$ (if it CV)

Variance de X :

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$$ (if it CV)

Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Inegalité de Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

3)

PROC

05/06/20

1) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

2) $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$

$\sigma(\alpha X + b) = |\alpha| \sigma(X)$

3) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ (si X et Y indé)

End Pdf 1.

Distribution à 2 variables : X et Y

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to [0,1] \\ (x,y) \mapsto P((X,Y) \in]-\infty, x] \times]-\infty, y]) \end{cases}$$

$$= P(X \leq x \text{ } \underline{\text{et}} \text{ } Y \leq y)$$

$P(a < X \leq b \text{ et } c \leq Y \leq d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$

$\lim\limits_{y \to -\infty} F(a,y) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x,b) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1.$

f est une densité jointe du couple (X,Y)

$$F(a,b) = \int_{x=-\infty}^{a} \int_{y=-\infty}^{b} f(x,y) \, dy dx$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

$$P(a \leq X \leq b \text{ et } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dy dx$$

Densité marginale de X et Y :

Densité marginale de X : $f_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

de Y : $f_Y : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

Densité X+Y : $f_{X+Y} : x_0 \mapsto \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x_0-y, y)\,dy$

Variable indépendantes :

X et Y indépendante $\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

$P(X \in [a,b] \text{ et } Y \in [c,d]) = P(X \in [a,b]) \times P(Y \in [c,d])$
$= \left(\int_a^b f_X(x)\,dx\right) \times \left(\int_c^d f_Y(y)\,dy\right)$

$f_{X+Y}(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0-y, y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_0-y) f_Y(y)\,dy$

Types de convergence

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Convergence 1 : Vers une constante

$\bar{X}_n$: ~~Y_n~~ $Y = E(X_n)$:

$$Y : \begin{vmatrix} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto C \end{vmatrix}$$

$P(Y = c) = 1$ (une cst).

PROC.

Convergence 2 : convergence presque sûre

(X_n) converge presque sûrement vers Y si :

$$P(\lim_{n \to +\infty} X_n = Y) = 1$$

$$\hookrightarrow \exists \, \Omega' \subset \Omega \text{ tq } \left| \begin{array}{l} P(\Omega') = 1 \\ \forall \omega \in \Omega', X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} Y(\omega) \end{array} \right.$$

$$(X_n) \xrightarrow{ps} Y$$

Convergence 3 : convergence en probabilité.

La suite (X_n) cv en probabilité vers Y si, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - Y| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$P(|X_n - Y| \leqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$(X_n) \xrightarrow{prob} Y.$$

Convergence 4 : convergence L2

La suite (X_n) converge vers Y au sens L2 si

$$E((X_n - Y)^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$(X_n) \xrightarrow{L_2} Y$$

Convergence 5 : convergence en distribution

$\forall I \subset \mathbb{R}$, $P(X_n \in I) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(Y \in I)$

$(X_n) \xrightarrow{d} Y$

Théorème central limite

- C_1 : Les variables X_i admettent une variance notée σ^2.
- C_2 : Les variables X_i sont indépendantes deux à deux.

alors on peut définir :

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - E(X_1)}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

on a alors :

$$(Z_n) \xrightarrow{d} Z$$