

1)

## PROC

05/06/20

Rappels:

1) Étant donné une expérience aléatoire,  $\Omega$  l'ensemble des résultats possibles.

2) Variable aléatoire  $X$  = une fonction  
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

3) La distribution de  $X$ :

$$P_X: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \subset \mathbb{R} \mapsto P(X \in A)$$

Fonction de répartition de  $X$ :  $P(X \leq x)$

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto P_X([-\infty, x])$$

$F$  est croissante avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$   $\parallel$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Variable continue à densité:

$\Leftrightarrow$  S'il  $\exists$  une fonction de répartition  $F$  continue ou continue par morceaux,  $\exists$  la densité de  $X$ .

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = P(a \leq X \leq b)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

⚠ Si l'on demande à prouver que  $f$  peut être une densité:

- Prouve que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  (converge et = 1)

Densité de  $\alpha X + \beta = Y$ , alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$  et:

$$f_Y(x) = \frac{1}{|\alpha|} \times f_X\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right)$$

⚠ Si l'on demande de retrouver la fonction de densité d'une variable aléatoire  $Y = \varphi(X)$ :

- On trouve  $F_Y(x) = P(Y \leq x)$
- On trouve  $P(Y \leq x) = P(X \leq ???)$
- Dérive ~~la~~ sa dérivée.

Distribution uniforme:  $X \rightsquigarrow \text{Unif}(a, b)$   
 $a$  et  $b$ , sont les bornes.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

$$x < a \rightarrow F(x) = 0$$

$$\text{si } x \in [a, b], \quad F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[ \frac{t}{b-a} \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$x > b, \rightarrow F(x) = 1$$

1) Si  $X \rightsquigarrow \text{Unif}(a, b)$ ,  $Z = \frac{X-a}{b-a}$  then  $Z \rightsquigarrow \text{Unif}(0, 1)$

⚠ Exo type:

2)  $Z \rightsquigarrow \text{Unif}(0, 1)$  then  $X = a + (b-a)Z$  then  $X \rightsquigarrow \text{Unif}(a, b)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



Distribution exponentielle:  $X \rightsquigarrow \text{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Si  $X \rightsquigarrow \text{Exp}(\lambda)$ , then  $\lambda X \rightsquigarrow \text{Exp}(1)$

2) Si  $Z \rightsquigarrow \text{Exp}(1)$ , then  $\frac{Z}{\lambda} \rightsquigarrow \text{Exp}(\lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

⑥ Distribution normale:  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$(m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$m=0$  et  $\sigma^2=1$   
 $\hookrightarrow$  normale centrée  
 réduite

1)  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , then  $Y = aX + b \rightsquigarrow \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$

2)  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , then  $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ , then  $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

3)  $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , then  $X = m + \sigma Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

4) X et Y 2 variables indépendantes:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \mid Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) \mid (X+Y) \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

pour  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ :

$$F_X(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

si  $X \sim \mathcal{P}(m, \sigma^2)$ ,

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) = 95\%$$

$$E(X) = m \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad \sigma(X) = \sigma$$

Espérance de X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (\text{si DV, } X \text{ n'a pas d'espérance})$$

↪ centre de gravité de la distribution.

$$1) E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

$$2) E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

3)  $\forall \varphi \in \mathcal{C}^0$  continue,

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad (\text{if it CV})$$

Varianace de X :

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \quad (\text{if it CV})$$

Écart-type de X :  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Inégalité de Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$



$$1) \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$2) \text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X) \\ \sigma(\alpha X + \beta) = |\alpha| \sigma(X)$$

$$3) \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \quad (\text{si } X \text{ et } Y \text{ indé})$$

End Pdf 1 -

Distribution à 2 variables:  $X$  et  $Y$

$$F: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \\ (x, y) \mapsto P(X, Y) \in ]-\infty, x] \times ]-\infty, y] \\ = P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) \end{cases}$$

$$P(a < X \leq b \text{ et } c \leq Y \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(a, y) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, b) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1$$

$f$  est une densité  
jointe du couple  $(X, Y)$

$$F(a, b) = \int_{x=-\infty}^a \int_{y=-\infty}^b f(x, y) dy dx$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$$

$$P(a \leq X \leq b \text{ et } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Densité marginale de  $X$  et  $Y$  :

Densité marginale de  $X$  :  $f_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

de  $Y$  :  $f_Y : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

Densité  $X+Y$  :  $f_{X+Y} : x_0 \mapsto \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x_0 - y, y) dy$

Variable indépendantes :

$X$  et  $Y$  indépendantes  $\Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

$$P(X \in [a, b] \text{ et } Y \in [c, d]) = P(X \in [a, b]) \times P(Y \in [c, d]) \\ = \left( \int_a^b f_X(x) dx \right) \times \left( \int_c^d f_Y(y) dy \right)$$

$$f_{X+Y}(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 - y, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_0 - y) f_Y(y) dy$$

Types de convergence :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Convergence 1 : Vers une constante :

$$\bar{X}_n : \mathbb{P} \rightarrow Y = E(X_n) :$$

$$Y : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto C \end{cases}$$

$$P(Y = c) = 1 \quad (\text{une cst}).$$



4)

TPROC

05/06/20

Convergence 2: convergence presque sûre $(X_n)$  converge presque sûrement vers  $Y$  si :

$$P(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = Y) = 1$$

$$\hookrightarrow \exists \Omega' \subset \Omega \text{ s.t.}$$

$$P(\Omega') = 1$$

$$\forall \omega \in \Omega', X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Y(\omega)$$

$$(X_n) \xrightarrow{ps} Y$$

Convergence 3: convergence en probabilitéLa suite  $(X_n)$  cv en probabilité vers  $Y$  si,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$P(|X_n - Y| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$P(|X_n - Y| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$(X_n) \xrightarrow{\text{prob}} Y$$

Convergence 4: convergence  $L_2$ La suite  $(X_n)$  converge vers  $Y$  au sens  $L_2$  si

$$E((X_n - Y)^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$(X_n) \xrightarrow{L_2} Y$$

Convergence 5 : convergence en distribution

$$\forall I \subset \mathbb{R}, \quad P(X_n \in I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(Y \in I)$$
$$(X_n) \xrightarrow{d} Y$$

Théorème central limite

- $C_1$  : Les variables  $X_i$  admettent une variance notée  $\sigma^2$ .
- $C_2$  : Les variables  $X_i$  sont indépendantes deux à deux.

alors on peut définir :

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(X_1)}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad Z \sim \mathcal{P}(0,1)$$

on a alors :

$$(Z_n) \xrightarrow{d} Z$$



