Álgebra Lineal I E
spacios Vectoriales(
Semana I)

Armando Abraham Aquino Chapa 317058163
Kevin Ariel Merino Peña 317031326D
iego Ríos Hernández 314327011

1. Revisa cuáles de los conjuntos que has trabajado en semestres pasados se comportan de manera similar a los espacios $\mathbb{R}^n$.

Podemos ver que el conjunto de polinomios sobre una indeterminada X tiene una estructura similar a los espacios en R^n

También el conjunto de matrices con coeficientes en los reales

2. a) Investiga qué es un campo y qué es un subcampo de un campo.

b) Determina si todo subcampo de $\mathbb{C}$ contiene a $\mathbb{Q}$.

c) Verifica si $\left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$ es o no un subcampo de $\mathbb{C}$.

a) Un campo vectorial es un conjunto (F), con operaciones binarias $(*, +)$ tal que:

- Si $a, b \in F \rightarrowtail a + b \in F$ (Cerradura)
- Si $a, b \in F \rightarrowtail a * b \in F$
- Si $a, b \in F \rightarrowtail a + b = b + a$ (Conmutatividad)
- Si $a, b \in F \rightarrowtail a * b = b * a$
- Si $a, b, c \in F \rightarrowtail (a + b) + c = a + (b + c)$. (Asociatividad)
- Si $a, b, c \in F \rightarrowtail (a * b) * c = a * (b * c)$
- $\exists 0 \in F$ tal que $a + 0 = a \ \forall a \in F$ (Neutro)
- $\exists 1 \in F$ tal que $a * 1 = a \ \forall a \in F$
- $\forall a \in F, \exists \hat{a}$ tal que $a + \hat{a} = 0$ (Inverso)
- $\forall a \in F - \{0\}, \exists \hat{a}$ tal que $a * \hat{a} = 1$

b) Si F_1 es un subconjunto de un campo F que es también un campo bajo las mismas operaciones e identidades que F, decimos que F_1 es un subcampo de F

b) ¿Creen que así este bien?

Para determinarlo tomamos en cuenta las características anteriores.
Para ser el subcampo de C es necesario que contenga al 1 y al 0 para cumplir con el neutro aditivo y multiplicativo. Debido a lo anterior también sabemos que debe cumplir con asociatividad, conmutatividad y distributividad en la multiplicación y en la suma.
En el caso del inverso aditivo debemos tomar en cuenta que contiene a los Z negativos ya que intuitivamente para que $a + b = 1, b = (-a) \ \forall a, b \in C$. En el caso del inverso multiplicativo para que se cumpla se deben incluir los escalares $\frac{1}{x}$ tal que $x \in Z$ y $x \neq 0$.
En el caso de la cerradura se toman en cuenta dos cosas, $\frac{1}{z} * y \ z, y \in Z$ con $z \neq 0$ y también se toma en cuenta que los Z positivos deben pertenecer al subcampo para la cerradura aditiva.
Si se toma en cuenta lo anterior tenemos que cualquier subcampo de $\mathbb{C}$ debe contener mínimo a $\mathbb{Q}$.

Mmmm, a lo mejor y nos pide que expresemos más a detalle las propiedades, así como "el 0 está en Q porque lo podemos ver de la forma 0/n para toda n en C" o ¿qué opinan?

Talvez, también nos pida que desarrollemos un poquito mas las condiciones. :(

3. En $\mathbb{R}^n$ definimos las operaciones $u \oslash v = u - v, \lambda \diamond v = -\lambda v$, donde $u, v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.
¿Qué axiomas de espacio vectorial se cumplen para $(\mathbb{R}, \oslash, \diamond)$?

Las propiedades que cumplen son asosiatividad, tienen neutro multiplicativo y las leyes distributivas.

Ahorita que los estaba demostrando, creo que tampoco se puede la asociativa xD

En proceso de formalizarlo chido en Latex

Por qué no se cumple asociatividad: Básicamente por la regla de correspondencia dada, si quisieramos multiplicar por un escalar, al sustituir, los cambios de signo nos

Por que no cumple que sea conmutativo: Sencillo, si tuviesemos un vector u igual al neutro asociativo, el resultado difiere cuando queremos mostrar que u - v = v - u, ya que resultaría

De la misma manera a la notita anterior, no poseemos un neutro "aditivo" ya que no hay un vector que cumpla la función de un 0v.

4. *Sea* $V = \mathbb{R}^3$ *con la suma usual. Considera ahora* $K = \mathbb{Q}$ *y el producto de un escalar* $\lambda \in \mathbb{Q}$ *por* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, dado por* $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$*. ¿Es V un* $\mathbb{Q}$*-espacio vectorial? Y si ahora se hace algo análogo con* $K = \mathbb{C}$ *¿es V un* $\mathbb{C}$ *-espacio vectorial?*

gg ýo tmb ago este

Cuando tomamos K= Q sí cumple ser un Q-espacio vectorial porque satisface los axiomas de un e.v. pero cuando se trata de C no es así, pues justo no siempre se puede asegurar la

5. Considera el ejemplo $\{f \mid f : K \to K\}$, determina si este ejemplo se puede generalizar y en vez de considerar las funciones con dominio y codominio en el campo K. consideramos $\{f \mid f : A \to B\}$. ¿Tiene estructura de espacio vectorial para cualesquiera conjuntos A y B o qué se requiere pedir a estos conjuntos para que lo sea?

No. Sólo con pedir que el conjunto B sea un campo resulta que $F = \{f|f : A \to B\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ utilizando la suma y multiplicación habitual

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in F, \forall \alpha \in K \\ (f+g)(a) &= f(a) + g(a) \\ (\alpha f)(w) &= \alpha(f)(a) \end{aligned}$$

Resta probar las 8 propiedades de espacio vectorial para determinar lo anterior.
Cerradura: Para $f, g \in F$ y $c, d \in K$ $cf + dg$ es otra función con dominio en A dado por:

$$(cf + dg)(a) = cf(a) + dg(a) \in V \text{ for all } a \in A.$$

Asociatividad en la suma: Para $f, g, h \in F$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(a) &= (f+g)(a) + h(a) \\ &= (f(a) + g(a)) + h(a) \\ &= f(a) + (g(a) + h(a)) \\ &= f(a) + (g+h)(a) \\ &= (f + (g+h))(s). \end{aligned}$$

Conmutatividad. Sea $a \in A$, entonces:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = g(a) + f(a) = (g+f)(a)$$

Vector cero. EL vector cero es la función 0, definida por $0(a) = 0 \in V$ para cada $a \in A$. Veamos que para $f \in F$ y $a \in A$:

$$(f+0)(a) = f(a) + 0(a) = f(a) + 0 = f(a)$$

Inverso: Para $f \in F$, el inverso aditivo es la función $(-f)$ definida por $(-f)(a) = -f(a) \forall a \in A$. Para verificar que $-f$ es el inverso de f veamos que para cada $a \in A$

$$(f + (-f))(a) = f(a) + (-f)(a) = f(a) - f(a) = 0 = 0(a)$$

Asociatividad en la multiplicación Para $c, d \in K f \in F$ y $a \in A$ tenemos:

$$((cd)(f))(a) = (cd)f(a) = c(df)(a) = (c(df))(a)$$

Neutro: Sea $1 \in K$ la identidad multiplicativa. Entonces $f \in F$ y $a \in A$

$$(1f)(a) = 1f(a) = f(a)$$

Distributividad: Para $c, d \in K, f \in F$ y $a \in a$

$$((c+d)(f))(a) = (c+d)f(a) = cf(a) + df(a) = (cf + df)(a)$$

Por $c \in K, f, g \in F$ y $a \in A$ tenemos:

$$\begin{aligned} (c(f+g))(a) &= c((f+g)(a)) \\ &= c(f(a) + g(a)) \\ &= cf(a) + cg(a) \\ &= (cf + cg)(a). \end{aligned}$$

6. *Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Determina si dados $v \in V, \lambda \in K$, el hecho de que $\lambda v = \theta_V$ implica necesariamente que $v = \theta_V$ o $\lambda = 0_K$.*

Lo anterior es cierto.

Dem:

Sea $v \in V$ y $\lambda \in K$ tal que $\lambda \cdot_v v = \theta_v$

Pd: $v = \theta_v$ ó $\lambda = O_k$

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $\lambda \neq 0_k$

Sea $\lambda^{-1} \in K$, entonces:

$$\lambda^{-1} \cdot_v (\lambda \cdot_v v) = \theta_v \cdot_v \lambda^{-1} \qquad \text{(Multiplicando por } \lambda^{-1}\text{)}$$

$$\Rightarrow v = \theta_V \cdot_v \lambda^{-1} \qquad \text{(Definición de espacio vectorial)}$$

Utilizando la siguiente proposición:

Sea V un espacio vectorial, entonces:

$$a\theta_v = \theta_v \ \forall a \in K$$

Regresando a lo anterior tenemos que:

$$v = \theta_v \cdot_v \lambda^{-1} = \theta_v \qquad \text{(Proposición)}$$

$$\therefore v = \theta_v$$

Caso 2: Si $\lambda = 0_k$

Este caso es trivial.

$$\therefore \lambda \cdot_v v = 0_k \cdot_v v = \theta_v \quad \square$$