Espacios vectoriales

◆ **Definición:**

Sea V un K espacio vectorial, S un subconjunto de V. El SUBESPACIO DE V GENERADO POR S es el conjunto de combinaciones lineales de S, si $S \neq \phi$, o $\{\theta_V\}$ si $S = \phi$. Lo denotaremos por $\langle S \rangle$ (span(S) en algunos libros).

Decimos que S GENERA A V o que S ES UN CONJUNTO GENERADOR DE V si $\langle S \rangle = V$.

NOTACIÓN $v_1, \dots, v_n \in V$

$\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ se denota por $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Ejemplos

1. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

Claramente $\langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ y si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \in \langle S \rangle$

$\therefore \langle S \rangle = \mathbb{R}^3$ y S genera a $\mathbb{R}^3$

Espacios vectoriales

2\. $K = \mathbb{R}$ $\quad V = \wp_2(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$S = \{1, \; 1-x, \; 1-x-x^2\}$

¿ $2 - 5x + x^2 \in \langle S \rangle$?

¿ $\exists \; \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda(1) + \mu(1-x) + \nu(1-x-x^2) = 2 - 5x + x^2 \; ?$$

Esta igualdad es equivalente a

$$(\lambda+\mu+\nu) + (-\mu-\nu)x + (-\nu)x^2 = 2 - 5x + x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &= 2 \\ -\mu - \nu &= -5 \\ -\nu &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \nu &= -1 \\ \mu &= -\nu + 5 = 1 + 5 = 6 \\ \lambda &= 2 - \mu - \nu = 2 - 5 = -3 \end{aligned}$$

así

$$-3(1) + 6(1-x) + (-1)(1-x-x^2) = 2 - 5x + x^2$$

$$\therefore \; 2 - 5x + x^2 \in \langle S \rangle$$

Espacios vectoriales

3. $K=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3$

$S=\{(1,0,0),(1,-1,0),(1,1,-1)\}$

Claramente $\langle S\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Ahora si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ ¿$(a,b,c)\in\langle S\rangle$? Esto es equivalente a que $\exists\, \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tales que

$$\lambda(1,0,0)+\mu(1,-1,0)+\nu(1,1,-1)=(a,b,c)$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu+\nu,\ -\mu+\nu,\ -\nu)=(a,b,c)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \lambda+\mu+\nu &= a \\ -\mu+\nu &= b \\ -\nu &= c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \nu &= -c \\ \mu &= \nu-b=-c-b \\ \lambda &= a-\mu-\nu = a-(-c-b)-(-c) \\ &= a+b+2c \end{aligned}$$

Así, para todo $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

$$(a+b+2c)(1,0,0)+(-c-b)(1,-1,0)+(-c)(1,1,-1)=(a,b,c)$$

y entonces $\mathbb{R}^3\subseteq\langle S\rangle$

$\therefore\ \langle S\rangle=\mathbb{R}^3$

S genera a $\mathbb{R}^3$

Espacios vectoriales

4. $K=\mathbb{R}$ $V=\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ $\langle S\rangle = ?$

$$\langle S\rangle = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\lambda&\lambda\\\lambda&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu&\mu\\0&\mu\end{pmatrix} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\lambda+\mu&\lambda+\mu\\\lambda&\lambda+\mu\end{pmatrix} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

Entonces $\langle S\rangle \neq V$ porque toda matriz en $\langle S\rangle$ tiene las entradas del primer renglón iguales y así $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\notin\langle S\rangle$

Tenemos $\langle S\rangle \subseteq \left\{\begin{pmatrix}a&a\\b&a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$

además para $a,b\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}a&a\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a-b)+b&(a-b)+b\\b&(a-b)+b\end{pmatrix}\in\langle S\rangle$$

$$\therefore \langle S\rangle = \left\{\begin{pmatrix}a&a\\b&a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Espacios vectoriales

$\boxed{\text{IMPORTANTE}}$

Si $W \subseteq \langle S \rangle$ pero $W \neq \langle S \rangle$, S NO genera a W

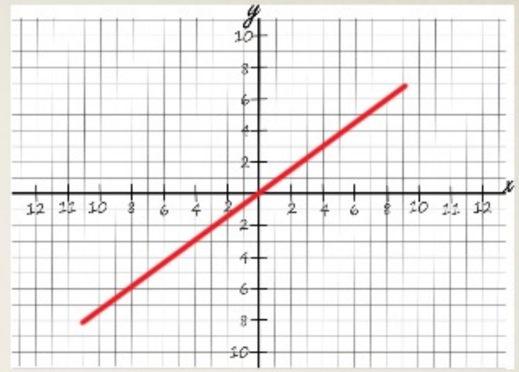
Por ejemplo

$W = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$S = \{e_1, e_2\}$

S no genera a W

S genera a $\mathbb{R}^2$



Para que $W = \langle S \rangle$ es necesario verificar primero que

$$S \subseteq W$$

en ese caso siempre $\langle S \rangle \subseteq W$, así que restaría probar que $W \subseteq \langle S \rangle$, es decir que todo vector en W es una combinación lineal de vectores de S

Espacios vectoriales

◆ Definición:

Sea V un K-espacio vectorial.
Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es una LISTA LINEALMENTE DEPENDIENTE si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Decimos que es una LISTA LINEALMENTE INDEPENDIENTE en caso contrario, es decir si

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V, \ \lambda_i \in K \ \forall i \Rightarrow \lambda_i = 0_K \ \forall i$$

NOTA Abreviaremos l.d. o l.i. respectivamente

Ejemplo

1. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$
$v_1 = 1 + x - x^2 + 2x^3$, $v_2 = 2 - 3x + x^3$, $v_3 = 4 - x - 2x^2 + 5x^3$
La lista v_1, v_2, v_3 es l.d. ya que

$$2v_1 + v_2 - v_3 = (2 + 2x - 2x^2 + 4x^3) + (2 - 3x + x^3) - (4 - x - 2x^2 + 5x^3)$$
$$= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = \theta_V$$

2. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = v_3 = (2,-4)$, $v_2 = (-1,5)$, $v_4 = (2,1)$
Como $(0,0) = v_1 - v_3 = 1v_1 + 0v_2 + (-1)v_3 + 0v_4$, la lista v_1, v_2, v_3, v_4 es l.d.

Espacios vectoriales

- **Definición.-**

Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto S de V es un CONJUNTO LINEALMENTE DEPENDIENTE si podemos encontrar $m \in \mathbb{N}^+$ y $v_1, \ldots, v_m \in S$ <u>distintos</u> y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ <u>no</u> todos nulos tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Decimos que S es un CONJUNTO LINEALMENTE INDEPENDIENTE en caso contrario, es decir si para cualquier $m \in \mathbb{N}^+$ y cualesquiera $v_1, \ldots, v_m \in S$ <u>distintos</u>

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V \quad \lambda_i \in K \ \forall i \quad \Rightarrow \lambda_i = 0_K \ \forall i$$

Obs

Si S es un conjunto finito con m vectores distintos, digamos $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$, para ver si S es l.d. o l.i. debemos ver si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ no todos nulos tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$ o si la única forma en que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ es que todos los λ_i's sean cero (en el primer caso es l.d., en el segundo l.i.)

Espacios vectoriales

Ejemplos

1. K campo, $V = K[x]$

$S = \{1, x, \ldots, x^m\}$ es l.i., ya que si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ son tales que

$$\lambda_0(1) + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_m x^m = \theta_V$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_m x^m = 0 + 0x + \cdots + 0x^m$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

2. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$S = \{(1,3,-7), (2,1,-2), (5,10,-23)\}$ ¿es l.i. o l.d.?

Sean $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda(1,3,-7) + \mu(2,1,-2) + \nu(5,10,-23) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2\mu + 5\nu, 3\lambda + \mu + 10\nu, -7\lambda - 2\mu - 23\nu) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda + 2\mu + 5\nu &= 0 \\ 3\lambda + \mu + 10\nu &= 0 \\ -7\lambda - 2\mu - 23\nu &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ -7 & -2 & -23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda + 3\nu &= 0 \\ \mu + \nu &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda &= -3\nu \\ \mu &= -\nu \\ \nu &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\therefore$ S es l.d.

Espacios vectoriales

3. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ¿es l.d o l.i.?

Sean $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \theta_V$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \lambda+\mu \\ \nu & \mu+\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ \lambda+\mu = 0 \\ \nu = 0 \\ \mu+\nu = 0 \end{array} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

$\therefore$ S es l.i.

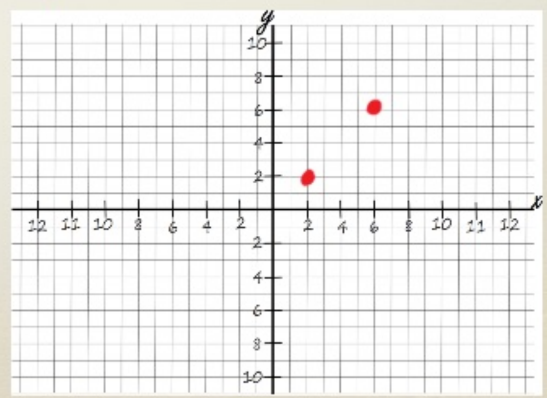
4. $K = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}^2$

$S = \{ (n,n) \mid n \in \mathbb{Z} \}$

Como $(2,2), (6,6) \in S$ y

$1(2,2) + (-\frac{1}{3})(6,6) = (0,0)$

entonces S es l.d.



Espacios vectoriales

- **Lema.-** DEPENDENCIA LINEAL

Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \dots, v_m$ una lista de vectores en V.

Si $v_1, \dots, v_m$ es una lista l.d. y $v_1 \neq \theta_V$, existe $j \in \{2, \dots, m\}$ tal que:

a) $v_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$

b) $\langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

NOTACIÓN

$\langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m \rangle$ se denotará por $\langle v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m \rangle$

Dem.-

Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \dots, v_m$ una lista l.d con $v_1 \neq \theta_V$

a) Como la lista es l.d. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Si $\lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, $\lambda_1 v_1 = \theta_V \underset{v_1 \neq \theta_V}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0$ ¡! (no todos los λ_i's son 0)

entonces $\{ i \in \{2, \dots, m\} \mid \lambda_i \neq 0 \} \neq \emptyset$. Consideremos

$$j = \max \{ i \in \{2, \dots, m\} \mid \lambda_i \neq 0 \}$$

Espacios vectoriales

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_j v_j = \theta_V$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_j v_j = -\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{j-1} v_{j-1}$$

$$\Rightarrow \quad v_j = \lambda_j^{-1}(-\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{j-1} v_{j-1}) = -\lambda_j^{-1}\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_j^{-1}\lambda_{j-1} v_{j-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} -\lambda_j^{-1}\lambda_i v_i \quad \ldots *$$

$$\in \langle v_1, \ldots, v_{j-1} \rangle$$

b) Además como $\{v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots v_m\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_m\}$ entonces

$$\langle v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_m \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_m \rangle$$

Ahora, si $w \in \langle v_1, \cdots, v_j, \ldots, v_m \rangle$, existen $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ tales que

$$w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_j v_j + \cdots + \mu_m v_m$$

$$\underset{\text{por } *}{=} \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_j \left(\sum_{i=1}^{j-1} -\lambda_j^{-1}\lambda_i v_i \right) + \cdots + \mu_m v_m$$

$$\in \langle v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_m \rangle$$

$$\therefore \langle v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_m \rangle$$

Espacios vectoriales

- Teorema:

Sea V un K-espacio vectorial. Si $v_1, \dots, v_m$ es una lista de vectores en V l.i., entonces todo conjunto generador de V tiene al menos m elementos.

Dem

Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \dots, v_m$ una lista l.i. Sea S tal que $\langle S \rangle = V$.

Si S es infinito, entonces tiene más de m elementos.

Supongamos que S es finito $S = \{w_1, \dots, w_\ell\}$

Pd $\ell \geq m$

$$v_1, w_1, \dots, w_\ell \text{ es l.d pues } v_1 \in V = \langle S \rangle$$

y como $v_1 \neq \theta_V$ $(v_1, \dots, v_m$ es l.i$)$

$$\underset{\text{Lema}}{\Rightarrow} \quad \exists\, j \in \{1, \dots, \ell\} \text{ tal que}$$

$$V = \langle v_1, w_1, \dots, w_\ell \rangle = \langle v_1, w_1, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_\ell \rangle$$

Consideremos ahora

$v_2, v_1, w_1, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_\ell$ es l.d. pues $v_2 \in V = \langle v_1, w_1, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_\ell \rangle$

y $v_2 \neq \theta_V$ $(v_1, \dots, v_m$ es l.i.$)$

Espacios vectoriales

$v_2\, v_1\, w_1 \ldots \hat{w}_j \ldots w_l$

$\Rightarrow$ v_1 o algún elemento de $w_1, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_l$ está generado por los vectores anteriores y se puede quitar sin que afecte al generado. Como $v_1, \ldots v_m$ es l.i., no puede ser v_1

Lema

$\Rightarrow$ $\exists\ w_k \in \{w_1, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_l\}$ tal que

$$\langle v_2, v_1, w_1, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, \hat{w}_k, \ldots, w_l \rangle = \langle v_2, v_1, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_l \rangle = V$$

Si $l < m$, continuando de este modo, en l pasos habremos quitado todas las w's y obtenido que

$$\langle v_l, \ldots, v_2, v_1 \rangle = V$$

$\Rightarrow v_{l+1} \in \langle v_l, \ldots, v_2, v_1 \rangle \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_m$ es l.d. ¡!

$$\therefore\ l \geq m$$

Espacios vectoriales

- Corolario.-

Sea V un K-espacio vectorial. Si existe S un subconjunto finito de V generador con l elementos, entonces todo conjunto linealmente independiente tiene a lo más l elementos. En consecuencia no existen conjuntos linealmente independientes infinitos en V.

Dem.-

Sea V un K-espacio vectorial, $S \subseteq V$ finito con l elementos tal que $\langle S \rangle = V$. Sea $T \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente.

Si T tuviera más de l elementos podríamos tomar $v_1, \ldots, v_{l+1} \in T$ distintos y como T es l.i. entonces $\{v_1, \ldots, v_{l+1}\}$ es l.i.

$\Rightarrow \quad l+1 \leq \#S = l$ ¡

Teo

$\therefore$ todo conjunto l.i. tiene a lo más l elementos