Espacios vectoriales

NOTACIÓN K denotará siempre un campo

◆ Definición.- SUBESPACIO

Sea V un K-espacio vectorial y W un subconjunto de V. Decimos que W es un SUBESPACIO de V si:

i) $\theta_V \in W$

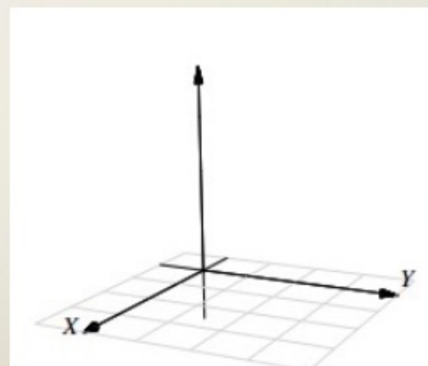
ii) $u+v \in W \quad \forall\, u,v \in W$

iii) $\lambda w \in W \quad \forall\, \lambda \in K,\ \forall\, w \in W$

NOTACION $W \leq V$ denotará que W es subespacio de V

Ejemplos

1. $\{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$



Plano XY

2. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\} \leq \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$

Espacios vectoriales

- Proposición.-

Sea V un K-espacio vectorial y W un subconjunto de V. W es un subespacio de V si y sólo si W con las operaciones restringidas de V es un K-espacio vectorial.

Dem

Sea V un K espacio vectorial, W subconjunto de V.

$\Rightarrow$ Supongamos que W es un subespacio de V. Por ii y iii la suma y el producto por escalar son cerrados en W, entonces las operaciones restringidas de V dan una suma y un producto por escalar en W.

Como $u+v=v+u \ \forall u,v\in V$, en particular $u+v=v+u \ \forall u,v\in W$, entonces la suma en W es conmutativa. Decimos en este caso que la conmutatividad de la suma se hereda de V. Análogamente se heredan la asociatividad y las propiedades 5, 6, 7 y 8 de espacio vectorial

Espacios vectoriales

Por hipótesis $\theta_V \in W$, así θ_V funciona como neutro en W. Además para cada $w \in W$ $-w = (-1)w \in W$ ya que el producto es cerrado en W, por lo tanto se cumple la propiedad 4 de espacio vectorial

$\therefore$ W con las operaciones restringidas de V es un K-espacio vectorial

$\Leftarrow$) Supongamos que W es un K-espacio vectorial con las operaciones restringidas de V, entonces la suma y el producto por escalar son cerradas en W y se tienen ii y iii.

Además W tiene un neutro, digamos θ_W

$$\theta_V + \cancel{\theta_W} = \theta_W = \theta_W + \cancel{\theta_W}$$

θ_V neutro en V $\qquad$ θ_W neutro en W

$\Rightarrow$ $\theta_V = \theta_W$ y se cumple i

cancelación

$\therefore$ W es un subespacio de V

Espacios vectoriales

Obs.- V k-espacio vectorial, W subconjunto de V

$W \leq V$ si y sólo si se cumplen:

i') $W \neq \emptyset$

ii') $\lambda u + v \in W \quad \forall \lambda \in K, \forall u, v \in W$

Ejemplos

1. $V = \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$

$W = \{ X \in V \mid AX = 0 \}$ las soluciones del sistema homogeneo dado por A

Pd $W \leq V$

i) $\theta_V = 0$

$A0 = 0 \Rightarrow 0 \in W$

ii) Sean $X_1, X_2 \in W$, veamos que $X_1 + X_2 \in W$

$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0 \quad \therefore X_1 + X_2 \in W$

dist. de matrices $\qquad X_1, X_2 \in W$

iii) Sean $X \in W$, $\lambda \in K$, veamos que $\lambda X \in W$

$A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda 0 = 0 \qquad \therefore \lambda X \in W$

Prop. de matrices $\qquad X \in W \qquad \therefore W \leq V$

Espacios vectoriales

- **Proposición:**

  La intersección de una familia no vacía de subespacios es un subespacio.

Dem

Sea V un k-espacio vectorial y $\{W_i \mid i \in I\}$ una familia no vacía de subespacios de V

Pd $\bigcap_{i\in I} W_i \leq V$

i) Como $W_i \leq V \; \forall i \in I$, $\theta_V \in W_i \; \forall i \in I \Rightarrow \theta_V \in \bigcap_{i\in I} W_i$

ii) Sean $u, v \in \bigcap_{i\in I} W_i$, veamos que $u+v \in \bigcap_{i\in I} W_i$.

Como $u, v \in \bigcap_{i\in I} W_i$ entonces $u, v \in W_i \; \forall i \in I$

$\underset{W_i \leq V \, \forall i}{\Rightarrow}$ $u+v \in W_i \; \forall i \in I \Rightarrow u+v \in \bigcap_{i\in I} W_i$

iii) Sean $v \in \bigcap_{i\in I} W_i$, $\lambda \in k$, veamos que $\lambda v \in \bigcap_{i\in I} W_i$

Como $v \in \bigcap_{i\in I} W_i$ entonces $v \in W_i \; \forall i \in I \underset{W_i \leq V \, \forall i}{\Rightarrow} \lambda v \in W_i \; \forall i \in I$

$\Rightarrow \lambda v \in \bigcap_{i\in I} W_i$ $\therefore \bigcap_{i\in I} W_i \leq V$

Espacios vectoriales

◆ Definición: COMBINACIÓN LINEAL

Sea V un K-espacio vectorial. Consideremos $m \in \mathbb{N}^+$ y $v_1, \dots, v_m \in V$. Una COMBINACIÓN LINEAL DE $v_1, \dots, v_m$ es una expresión de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$$

De modo más general, si S es un subconjunto de V, una COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES DE S es un vector de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \quad \text{con } m \in \mathbb{N}^+,\ v_1, \dots, v_m \in S,\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$$

Ejemplos

1. $S = \{(1,0,0), (1,-1,0), (1,1,-1)\}$

$$2(1,0,0) - (1,-1,0) + 5(1,1,-1) = (6,6,-5)$$

$$-3(1,0,0) + 0(1,-1,0) + (1,1,-1) = (-2,1,-1)$$

$$0(1,0,0) + (1,-1,0) + 0(1,1,-1) = (1,-1,0)$$

son combinaciones lineales de vectores de S

Espacios vectoriales

2. $S = \{(1,1), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{3},\frac{1}{3}), \dots\}$

$= \{(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

$2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) - 4(\frac{1}{12},\frac{1}{12}) = (\frac{7}{6},\frac{7}{6})$

es una combinación lineal de vectores de S

3. $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\frac{1}{2}x + (1 - 2x + 5x^2) - (8 + 3x) + 3(4 - 2x + x^2) = 5 - \frac{21}{2}x + 8x^2$

es una combinación lineal de vectores de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

IMPORTANTE

Aunque el conjunto S sea infinito, sólo consideraremos combinaciones lineales en las que se use una cantidad <u>finita</u> de vectores de S.

Espacios vectoriales

- Proposición.-

Sea V un K-espacio vectorial, $S \neq \phi$ un subconjunto de V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S cumple lo siguiente:

i) es un subespacio de V.

ii) contiene a S.

iii) está contenido en cualquier subespacio de V que contenga a S.

Dem.-

Sea V un K-espacio vectorial, $S \subseteq V$, $S \neq \phi$.

Denotemos por $\mathcal{C}(S)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.

i) Pd $\mathcal{C}(S) \leq V$

Como $S \neq \phi$, sea $v \in S$. Tenemos $\theta_V = 0v \in \mathcal{C}(S)$.

Sean $v, w \in \mathcal{C}(S)$

Pd $v + w \in \mathcal{C}(S)$

$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \quad n \in \mathbb{N}^+,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$
$\qquad v_1, \ldots, v_n \in S$

$w = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m \quad m \in \mathbb{N}^+\ \mu_1, \ldots, \mu_m \in K$
$\qquad w_1, \ldots, w_m \in S$

$\Rightarrow v + w = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m) \in \mathcal{C}(S)$

Espacios vectoriales

Sean $v \in \mathcal{L}(S)$, $\lambda \in K$ Pd $\lambda v \in \mathcal{L}(S)$

$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ $n \in \mathbb{N}^+$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$
$v_1, \ldots, v_n \in S$

$\Rightarrow \lambda v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)$
$= \lambda(\lambda_1 v_1) + \cdots + \lambda(\lambda_n v_n)$ $n \in \mathbb{N}^+$ $v_1, \ldots, v_n \in S$
$= (\lambda\lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n) v_n$ $\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_n \in K$

$\Rightarrow \lambda v \in \mathcal{L}(S)$

$\therefore \mathcal{L}(S) \leq V$

ii) Pd $S \subseteq \mathcal{L}(S)$

Sea $v \in S$

Pd $v \in \mathcal{L}(S)$

$v = 1v \in \mathcal{L}(S)$ $\therefore S \subseteq \mathcal{L}(S)$

iii) Sea W un subespacio de V que contiene a S

Pd $\mathcal{L}(S) \subseteq W$

Sea $v \in \mathcal{L}(S)$, $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ $n \in \mathbb{N}^+$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$
$v_1, \ldots, v_n \in S$

Para cada i, $v_i \in S$ y $S \subseteq W$, entonces $v_i \in W$ $\forall i$
Como W es un subespacio el producto por escalar es cerrado y $\lambda_i v_i \in W$ $\forall i$, además la suma es cerrada en W

$\Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in W$ $\therefore \mathcal{L}(S) \subseteq W$