Espacios vectoriales

- Definición.- CAMPO

Sea K un conjunto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$. Decimos que K es un campo si se cumplen las siguientes propiedades:

$+$ es asociativa
conmutativa
existe 0_K neutro aditivo
todo elemento $\alpha \in K$ tiene inverso aditivo $-\alpha \in K$

$\cdot$ es asociativa
conmutativa
existe $1_K \neq 0_K$ neutro mult.
todo elemento $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0_K$ tiene inverso multiplicativo $\alpha^{-1} \in K$

$\cdot$ distribuye a la $+$

En este caso llamamos a los elementos de K escalares.

Espacios vectoriales

Ejemplos de campos:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$

$\{x+y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ se denota por $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ p primo $\quad \bar{x}+\bar{y} = \overline{x+y}$, $\bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{xy}$

◇ Definición.-

Sean K un campo, $\tilde{K} \subseteq K$.
Decimos que $\tilde{K}$ es un subcampo de K si $\tilde{K}$ con las operaciones restringidas de K es por sí mismo un campo.

Ejemplos de subcampos:

$\mathbb{Q}$ es un subcampo de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

Espacios vectoriales

Definición: ESPACIO VECTORIAL

Sean V un conjunto y K un campo. Si $+: V \times V \rightarrow V$ y $\cdot : K \times V \rightarrow V$ son operaciones tales que:

1. $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u,v,w \in V$ ASOCIATIVA
2. $u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$ CONMUTATIVA
3. $\exists\, \theta_v \in V$ tal que $v+\theta_V = \theta_V + v = v \quad \forall v \in V$ NEUTRO ADITIVO
4. Para todo $v \in V$ existe $\tilde{v} \in V$ tal que $v+\tilde{v} = \tilde{v}+v = \theta_V$ INVERSO ADITIVO
5. $1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu)\cdot v \quad \forall \lambda,\mu \in K, \forall v \in V$
7. $(\lambda+\mu) v = \lambda . v + \mu . v \quad \forall \lambda,\mu \in K, \forall v \in V$
8. $\lambda \cdot (v+u) = \lambda . v + \lambda . u \quad \forall \lambda \in K, \forall u,v \in V$

(7 y 8: DISTRIBUTIVAS)

decimos que $V,+,\cdot$ es un espacio vectorial sobre el campo K o un K-espacio vectorial. A los elementos de K les llamamos vectores.

Espacios vectoriales

Ejemplos de espacios vectoriales:

1. $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones usuales
2. K campo

$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$

$(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in K^n, \lambda \in K$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

es un K-espacio vectorial

3. K campo

$K^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in K \ \forall i \in \mathbb{N}^+\}$

$(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in K^\infty, \lambda \in K$

$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$

$\lambda(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$

es un K-espacio vectorial

4. K campo

$\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ matrices con m renglones y n columnas con las operaciones usuales de suma y producto por escalar es un K espacio vectorial

5. K campo, $K[x]$ polinomios en x con coeficientes en K con las operaciones usuales es un K-espacio vectorial.

Espacios vectoriales

6. K campo

$V = \{ f \mid f : K \to K \}$ es un K-espacio vectorial

$f, g \in V$, $\lambda \in K$

$f +_V g : K \to K$ $\qquad$ $\lambda \cdot_V f : K \to K$

$x \mapsto f(x) +_K g(x)$ $\qquad$ $x \mapsto \lambda \cdot_K f(x)$

Dem

1. $f, g, h \in V$

Pd $(f+g)+h = f+(g+h)$

Por construcción $(f+g)+h$, $f+(g+h)$ son funciones de K en K

Veamos que tienen la misma regla de correspondencia

Pd $((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x) \quad \forall x \in K$

Sea $x \in K$

$((f +_V g) +_V h)(x) = (f +_V g)(x) +_K h(x) = (f(x) +_K g(x)) +_K h(x)$

$(f +_V (g +_V h))(x) = f(x) +_K (g +_V h)(x) = f(x) +_K (g(x) +_K h(x))$

Por la asociatividad de la suma en K

$(f(x) +_K g(x)) +_K h(x) = f(x) +_K (g(x) +_K h(x))$

$\therefore (f +_V g) +_V h = f +_V (g +_V h)$

Espacios vectoriales

2. $f, g \in V$

Pd $f +_v g = g +_v f$

$f +_v g : K \to K$, $g +_v f : K \to K$

Pd $(f +_v g)(x) = (g +_v f)(x) \quad \forall x \in K$

$(f +_v g)(x) = f(x) +_K g(x) = g(x) +_K f(x) = (g +_v f)(x)$

$\therefore \; f +_v g = g +_v f$

3. Proponemos $\theta_v : K \longrightarrow K$

$x \longmapsto 0_K$

Pd $f +_v \theta_v = \theta_v + f = f \quad \forall f \in V$

Sea $f \in V$, sabemos que $f +_v \theta_v : K \to K$, $f : K \to K$.

Sea $x \in K$

$(f +_v \theta_v)(x) = f(x) +_K \theta_v(x) = f(x) +_K 0_K = f(x)$

$\therefore \; f +_v \theta_v = f$

análogamente $\theta_v +_v f = f$.

Espacios vectoriales

4. Sea $f \in V$. Proponemos $\tilde{f} : K \to K$, $x \mapsto -f(x)$

Pd $f +_V \tilde{f} = \tilde{f} +_V f = \theta_V$

Sabemos que $f +_V \tilde{f} : K \to K$, $\theta_V : K \to K$.

Sea $x \in K$

Pd $(f +_V \tilde{f})(x) = \theta_V(x)$

$(f +_V \tilde{f})(x) = f(x) +_K \tilde{f}(x) = f(x) +_K (-f(x)) = 0_K = \theta_V(x)$

$\therefore f +_V \tilde{f} = \theta_V$

análogamente $\tilde{f} +_V f = \theta_V$

5. Sea $f \in V$

Pd $1_K \cdot f = f$

Sabemos que $1_K \cdot f : K \to K$, $f : K \to K$.

Sea $x \in K$

$(1_K \cdot_V f)(x) = 1_K \cdot_K f(x) = f(x)$

$\therefore 1_K \cdot_V f = f$

Espacios vectoriales

6. $\lambda, \mu \in K$, $f \in V$

Pd $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f$

Sabemos que $\lambda \cdot (\mu \cdot f) : K \to K$, $(\lambda\mu)\cdot f : K \to K$.

Sea $x \in K$

$$(\lambda \underset{V}{\cdot} (\mu \underset{V}{\cdot} f))(x) = \lambda \underset{K}{\cdot} (\mu \underset{V}{\cdot} f)(x) = \lambda \underset{K}{\cdot} (\mu \underset{K}{\cdot} f(x)) = (\lambda \underset{K}{\cdot} \mu) \underset{K}{\cdot} f(x)$$

$$= ((\lambda \underset{K}{\cdot} \mu) \underset{V}{\cdot} f)(x)$$

$$\therefore \lambda \underset{V}{\cdot} (\mu \underset{V}{\cdot} f) = (\lambda \underset{K}{\cdot} \mu) \underset{V}{\cdot} f$$

7. $\lambda, \mu \in K$, $f \in V$

Pd $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$

Sabemos que $(\lambda + \mu) f : K \to K$, $\lambda f + \mu f : K \to K$.

Sea $x \in K$

$$((\lambda \underset{K}{+} \mu) \underset{V}{\cdot} f)(x) = (\lambda \underset{K}{+} \mu) \underset{K}{\cdot} f(x) = \lambda \underset{K}{\cdot} f(x) \underset{K}{+} \mu \underset{K}{\cdot} f(x)$$

Por otro lado

$$(\lambda \underset{V}{\cdot} f \underset{V}{+} \mu \underset{V}{\cdot} f)(x) = (\lambda \underset{V}{\cdot} f)(x) \underset{K}{+} (\mu \underset{V}{\cdot} f)(x) = \lambda \underset{K}{\cdot} f(x) \underset{K}{+} \mu \underset{K}{\cdot} f(x)$$

Así $((\lambda +_K \mu) \cdot_V f)(x) = (\lambda \cdot_V f +_V \mu \cdot_V f)(x)$

$$\therefore (\lambda \underset{K}{+} \mu) \cdot_V f = \lambda \cdot_V f \underset{V}{+} \mu \cdot_V f$$

Espacios vectoriales

8. $\lambda \in K$, $f, g \in V$

Pd $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

Sabemos que $\lambda(f+g) : K \to K$, $\lambda f + \lambda g : K \to K$.

Sea $x \in K$

Pd $(\lambda \cdot_V (f +_V g))(x) = (\lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g)(x)$

$$(\lambda \cdot_V (f +_V g))(x) = \lambda \cdot_K (f +_V g)(x) = \lambda \cdot_K (f(x) +_K g(x))$$

Por otro lado

$$(\lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g)(x) = (\lambda \cdot_V f)(x) +_K (\lambda \cdot_V g)(x) = \lambda \cdot_K f(x) +_K \lambda \cdot_K g(x)$$

$$= \lambda \cdot_K (f(x) +_K g(x))$$

Así $(\lambda \cdot_V (f +_V g))(x) = (\lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g)(x)$

$$\therefore \lambda \cdot_V (f +_V g) = \lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g$$

Concluimos que V es un K-espacio vectorial.

Espacios vectoriales

- Proposición.-
  En un espacio vectorial el neutro es único.

Dem.-
Sean K un campo y V un K espacio vectorial. Supongamos que θ y θ' son dos neutros de V.

$$\underset{\theta' \text{ es neutro}}{\theta = \theta + \theta'} \underset{\theta \text{ es neutro}}{= \theta'} \qquad \therefore\ \theta = \theta'$$

- Proposición.-
  En un espacio vectorial los inversos aditivos son únicos.

Dem.-
Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Sea $v \in V$. Supongamos que $\tilde{v}, \hat{v}$ son inversos de v.

Pd $\tilde{v} = \hat{v}$

$$\hat{v} \underset{\theta \text{ neutro}}{=} \tilde{v} + \theta \underset{\hat{v} \text{ inv de } v}{=} \tilde{v} + (v + \hat{v}) \underset{\text{asoc } +_V}{=} \tilde{v} + v + \hat{v} \underset{\text{asoc } +_V}{=} (\tilde{v} + v) + \hat{v} \underset{\tilde{v} \text{ inv. de } v}{=} \theta + \hat{v} \underset{\theta \text{ neutro}}{=} \hat{v}$$

$$\therefore\ \tilde{v} = \hat{v}$$

Espacios vectoriales

- Propiedades de cancelación.-

Sean K un campo y V un K-espacio vectorial.
Sean $u, v, w \in V$

i) Si $u+v = w+v$, entonces $u = w$.

ii) Si $v+u = v+w$, entonces $u = w$.

Dem.

i) Supongamos que $u+v = w+v$. Sumando $\tilde{v}$ el inverso de v tenemos

$$(u+v)+\tilde{v} = (w+v)+\tilde{v}$$

$$\Rightarrow u+(v+\tilde{v}) = w+(v+\tilde{v})$$

asoc

$$\Rightarrow u+\theta = w+\theta$$

inv.

$$\Rightarrow u = w$$

neutro

$\therefore u = w$

ii) Supongamos que $v+u = v+w$, por la conmutatividad de la suma $u+v = w+v$ y entonces por i) $u = w$.

Espacios vectoriales

- **Proposición:**

Sean K un campo y V un K-espacio vectorial.

1. $0_K v = \theta_V \quad \forall v \in V.$
2. $\lambda \theta_V = \theta_V \quad \forall \lambda \in K.$

Dem.

1. Sea $v \in V$

$$\theta_V + \cancel{0_K \cdot_V v} \underset{\theta_V \text{ neutro}}{=} 0_K \cdot_V v \underset{0_K \text{ neutro en } K}{=} (0_K +_K 0_K) \cdot_V v \underset{\text{dist}}{=} 0_K \cdot_V v +_V \cancel{0_K \cdot_V v}$$

$$\underset{\text{cancelación}}{\Rightarrow} \quad \theta_V = 0_K \cdot_V v$$

2. Sea $\lambda \in K$

$$\theta_V + \cancel{\lambda \cdot_V \theta_V} \underset{\theta_V \text{ neutro}}{=} \lambda \cdot_V \theta_V \underset{\theta_V \text{ neutro}}{=} \lambda \cdot_V (\theta_V +_V \theta_V) \underset{\text{dist.}}{=} \lambda \cdot_V \theta_V +_V \cancel{\lambda \cdot_V \theta_V}$$

$$\underset{\text{cancelación}}{\Rightarrow} \quad \theta_V = \lambda \cdot_V \theta_V$$

Espacios vectoriales

- Proposición :-

Sea k un campo y V un k-espacio vectorial. Para todo $v \in V$, $(-1_k)v$ es el inverso aditivo de v.

Dem.

Sea $v \in V$. Veamos que $(-1_k) \cdot_V v$ es su inverso aditivo

$$v +_V (-1_k) \cdot_V v = 1_k \cdot_V v +_V (-1_k) \cdot_V v$$

prop 5.

$$= (1_k +_k (-1_k)) \cdot_V v$$

dist.

$$= 0_k \cdot_V v$$

inv. en k

$$= \theta_V$$

prop. anterior

$\therefore$ $(-1_k) \cdot_V v$ es el inverso aditivo de v

NOTACIÓN :-

Dado $v \in V$ denotaremos por $-v$ a su inverso aditivo.

Espacios vectoriales

- **Corolario.-**

Sean K un campo y V un K espacio vectorial.

$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v) \quad \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$

Dem.

Sean $\lambda \in K$, $v \in V$.

$$\lambda \cdot_V (-v) \underset{\text{prop. anterior}}{=} \lambda \cdot_V ((-1_K) \cdot_V v) \underset{\text{prop. 6}}{=} (\lambda \cdot_K (-1_K)) \cdot_V v \underset{\text{prop en } K}{=} (-\lambda) \cdot_V v$$

$$\underset{\text{prop en } K}{=} ((-1_K) \cdot_K \lambda) \cdot_V v \underset{\text{prop. 6}}{=} (-1_K) \cdot_V (\lambda \cdot_V v) \underset{\text{prop anterior}}{=} -(\lambda \cdot_V v)$$

Espacios vectoriales

- **Corolario.-**

Sean K un campo y V un K espacio vectorial.

$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v) \quad \forall \lambda \in K, \forall v \in V.$

Dem.

Sean $\lambda \in K$, $v \in V$.

$$\lambda \cdot_V (-v) \underset{\text{prop. anterior}}{=} \lambda \cdot_V ((-1_K) \cdot_V v) \underset{\text{prop. 6}}{=} (\lambda \cdot_K (-1_K)) \cdot_V v \underset{\text{prop en } K}{=} (-\lambda) \cdot_V v$$

$$\underset{\text{prop en } K}{=} ((-1_K) \cdot_K \lambda) \cdot_V v \underset{\text{prop. 6}}{=} (-1_K) \cdot_V (\lambda \cdot_V v) \underset{\text{prop anterior}}{=} -(\lambda \cdot_V v)$$