Matemáticas para las Ciencias II
Semestre 2020-2
Prof. Pedro Porras Flores
Ayud. Irving Hernández Rosas
Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña[1] Armando Abraham Aquino Chapa[2] José Manuel Pedro Méndez[3]

4 de octubre de 2020

Instrucciones: Realice las siguientes ejercicios escribiéndolos de manera clara, los puede realizar en LaTeX, en un cuaderno etc, pero debe de subir el archivo en la sesión de classrroom en formato pdf para su revisión.

Métodos de integración

Integración por partes (2.5 pts.)

1. Realice las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x\sin(x)\,dx$

$$f = x \qquad df = dx$$
$$g = -\cos(x) \qquad dg = \sin(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= f\cdot g - \int g\cdot df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)dx && \text{Reemplazando con los valores elegidos}\\
&= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx && \text{Porque la integral es un operador lineal}\\
&= -x\cos(x) + \sin(x) && \text{La integral de } \cos(x) = \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\therefore \int x\sin(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + C, C\in\mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

$$f = x^2 \qquad df = 2xdx$$
$$g = e^x \qquad dg = e^x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f\cdot g - \int g\cdot df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= x^2\cdot e^x - \int e^x\cdot 2xdx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas}\\
&= e^x x^2 - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{\text{Otra integral}} && \text{Sacando escalares por la linealidad de la integral}
\end{aligned}$$

$$\int xe^x dx =$$

$$f = x \qquad df = dx$$
$$g = e^x \qquad dg = e^x dx$$

---

[1]Número de cuenta 317031326
[2]Número de cuenta 317058163
[3]Número de cuenta 315073120

$$
\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g \cdot df && \text{Empleando integración por partes} \\
&= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\
&= xe^x - e^x && \text{Conocemos de Mate I la integral de } e \\
&= e^x(x-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^x x^2 - 2\int xe^x dx &= e^x x^2 - 2e^x(x-1) && \text{Reemplazando en el resultado anterior} \\
&= e^x(x^2 - 2(x-1)) && \text{Factorizando}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int xe^x dx = e^x(x^2 - 2(x-1)) + C, C \in \mathbb{R}
$$

c) $\int x^2 \sin(x)\, dx$

$$
\begin{aligned}
f &= x^2 & df &= 2x\, dx \\
g &= -\cos(x) & dg &= \sin(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes} \\
&= -x^2\cos(x) - \int -\cos(x) 2x\, dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\
&= -x^2\cos(x) + \underbrace{2\int x\cos(x)dx}_{\text{Integración por partes}} && \text{Sabemos que la integral es un operador lineal}
\end{aligned}
$$

$$
\int x\cos(x)dx =
$$

$$
\begin{aligned}
f &= x & df &= dx \\
g &= \sin(x) & dg &= \cos(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes} \\
&= x\sin(x) - \int \sin(x)\, dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\
&= x\sin(x) - (-\cos(x)) && \text{De Mate I conocemos las integrales de las f. trigonométricas} \\
&= x\sin(x) + \cos(x) && \text{Operando signos}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sin(x)\, dx &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)dx && \text{Reemplazando en el resultado anterior} \\
&= -x^2\cos(x) + 2(x\sin(x) + \cos(x)) && \text{Factorizando} \\
&= \cos(x)(2 - x^2) + 2x\sin(x)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int x^2\sin(x)\, dx = \cos(x)(2 - x^2) + 2x\sin(x) + C, C \in \mathbb{R}
$$

$d)$ $\int x \ln(x)\, dx$

$$f = \ln(x) \qquad df = \frac{1}{x} dx$$
$$g = \frac{x^2}{2} \qquad dg = x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx && \text{Reemplazando por las funciones seleccionadas}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x}{2}\, dx && \text{Opernado}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int x\, dx && \text{Por la linealidad de la integral}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} && \text{Integración de polinomios}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} && \text{Opernado}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int x \ln(x)\, dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C, C \in \mathbb{R}$$

$e)$ $\int e^x \sin(x)\, dx$

$$f = \sin(x) \qquad df = \cos(x) dx$$
$$g = e^x \qquad dg = e^x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= \sin(x) e^x - \underbrace{\int e^x \cos(x)\, dx}_{\text{Integración por partes}} && \text{Reemplazando por las funciones seleccionadas}
\end{aligned}$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

$$f = \cos(x) \qquad df = -\sin(x) dx$$
$$g = e^x \qquad dg = e^x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= \cos(x) e^x - \underbrace{\int e^x \sin(x)\, dx}_{\text{igual que la inicial}} && \text{Reemplazando por las funciones seleccionadas}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(x)\, dx &= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \int e^x \sin(x) && \text{Regresando a la integral incial}\\
2 \int e^x \sin(x)\, dx &= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x && \text{Sumando en ambos miembros}\\
&= \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Integración por sustitución (2.5 pts.)

2. Realice las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

$$u = \ln(x) \qquad\qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \int u\,du && \text{Empleando sustitución de variable}\\ &= \frac{u^2}{2} && \text{Por integración en polinomios}\\ &= \frac{\ln(x)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{\ln(x)^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

   b) $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx$

$$u = e^x \qquad\qquad du = e^x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int sen(u)du && \text{Empleando la sustitución}\\ &= -cos(u)\\ &= -cos(e^x) + c && \text{Regresando a la variable original} \end{aligned}$$

$$\therefore \int e^x \sin(e^x)\,dx = -cos(e^x) + c$$

   c) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$

$$u = -x^2 \qquad\qquad \frac{du}{dx} = -2x \to dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\begin{aligned} &= \int xe^u(\frac{du}{-2x}) && \text{Empleando la sustitución}\\ &= \int e^u(\frac{du}{-2}) = \int \frac{e^u}{-2}du\\ &= -\frac{1}{2}\int e^u du && \text{Utilizando las propiedades de la integral}\\ &= -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c && \text{Regresando a la variable original} \end{aligned}$$

$$\therefore \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

   d) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$u = 1 - x^2 \qquad\qquad du = -2xdx \to \frac{du}{-2} = xdx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{u}\frac{du}{-2} && \text{Empleando la sustitución}\\
&= -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du && \text{Propiedades de la integral}\\
&= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du\\
&= -\frac{1}{2}(\frac{u^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}})\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\\
&= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\\
&= -\frac{1}{3}\cdot(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c && \text{Regresando a la variable original}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

$$f=\frac{1}{g(x)} \qquad\qquad g(x)=\ln(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{1}{u}\,du && \text{Empeando sustitución de variable}\\
&= \ln|u|\Big|_{\ln(a)}^{\ln(b)} && \text{Pues conocemos la integral de } \frac{1}{x}\\
&= \ln|\ln(b)|-\ln|\ln(a)|
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln|\ln(b)|-\ln|\ln(a)|+C, C\in\mathbb{R}$$

Integración por sustitución trigonométrica (2.5 pts.)

3. Realice las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Tomemos el siguiente cambio de variables con sustituciones trigonométricas

$$\begin{bmatrix} x=\cos(x)\\ dx=-\sin(x)\end{bmatrix}$$

Y recordemos las siguientes identidades trigonométricas

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x)+\cos^2(x)&=1\\
\sin^2(x)&=1-\cos^2(x)\\
\sin(x)&=\sqrt{1-\cos^2(x)} \qquad (\alpha)\\
&y\\
\sin^2(x)&=\frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad (\beta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{1-\cos^2(x)} - \sin(x)\, dx && \text{Sustituyendo en la integral original} \\
&= -\int \sin(x)\sin(x) && \text{Empleando } \alpha \\
&= -\int \sin^2(x) && \text{Operando} \\
&= -\int \frac{1-\cos(2x)}{2} && \text{Empleando } \beta \\
&= -\frac{1}{2}\int 1-\cos(2x) && \text{Usando la linealidad de la integral} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int 1 - \int \cos(2x)\right) && \text{Nuevamente usando la linealidad de la integral} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) && \text{Integrando las funciones que ya conocemos}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int \sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}$$

b) $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$ Tomemos la siguiente sustitución:

$$\begin{bmatrix} x = \sec(\theta) \\ dx = \sec(\theta)\tan(\theta) \end{bmatrix}$$

También recordemos que $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta) d\theta && \text{Realizando la sustitución} \\
&= \int \sqrt{tan^2(\theta)} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta) d\theta && \text{Utilizando la propiedad mencionada} \\
&= \int \tan(\theta) \cdot \sec(\theta)\tan(\theta) d\theta \\
&= \int \tan^2(\theta) \cdot \sec(\theta) d\theta \\
&= \int (\sec^2(\theta) - 1) \cdot \sec(\theta) d\theta && \text{Propiedad anterior} \\
&= \int \sec^3(\theta) - \sec(\theta) d\theta \\
&= \int \sec^3(\theta) d\theta - \int \sec(\theta) d\theta && \text{Propiedades de la integral} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2}\ln(sec(\theta) + \tan(\theta)) - \int \sec(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2}\ln(sec(\theta) + \tan(\theta)) - \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta) - \frac{1}{2}\ln(sec(\theta) + \tan(\theta))
\end{aligned}
$$

Notemos (según la propiedad mencionada al comienzo del ejercicio) que: $\tan(\theta) = \sqrt{\sec^2(\theta) - 1}$. Y además $x = \sec(\theta)$. Entonces: $\tan(\theta) = \sqrt{x^2-1}$

$$\therefore \int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$

c) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$

d) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ Tomemos la siguiente sustitución:

$$\begin{bmatrix} x = \sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} \\ dx = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \end{bmatrix}$$

También recordemos que $\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2(\theta)-1}} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta && \text{Realizando la sustitución} \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\theta)}} \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta && \text{Utilizando la propiedad anterior} \\
&= \int \frac{1}{\tan(\theta)} \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\
&= \int \sec(\theta)d\theta = \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta))
\end{aligned}$$

Notemos (según la propiedad mencionada al comienzo del ejercicio) que: $\tan(\theta) = \sqrt{\sec^2(\theta)-1}$. Y además $x = \sec(\theta)$. Entonces: $\tan(\theta) = \sqrt{x^2-1}$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$

Integración por fracciones parciales (2.5 pts.)

4. Realice las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+5x+6} &= \frac{x}{(x+2)(x+3)} && \text{Factorizando el dividendo} \\
&= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)} && \text{Expresando en forma de suma el dividendo} \\
&= \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)} && \text{Sumando ambas fracciones} \\
&= \frac{x(A+B)+2B+3A}{(x+2)(x+3)} && \text{Reordenando el numerador}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A + B &= 1 && \text{Obteniendo las ecuaciones} \\
3A + 2B &= 0 \\
A &= 1 - B \\
\\
B &= 3 \implies A = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx = \int \left(-\frac{2}{(x+2)} + \frac{3}{(x+3)}\right) && \text{Sustituyendo en la integral inicial} \\
= -\int \frac{2}{(x+2)} + \int \frac{3}{(x+3)} && \text{Empleando la linealidad de la integral} \\
= -2\int \frac{1}{(x+2)} + 3\int \frac{3}{(x+3)} && \text{Nuevamente empleando la linealidad de la integral} \\
= -2\ln(x+2) + 3\ln(x+3) && \text{Calculando las integrales que ya conocemos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx = -2\ln(x+2) + 3\ln(x+3) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)}\,dx$
Utilizando el método de fracciones parciales tenemos que:

$$\frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \qquad \textbf{(1)}$$

$$(x(x+2)(x-1))(\frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1})$$

$$x^2+2 = (x+2)(x-1)A + x(x-1)B + x(x+2)C$$
$$x^2+2 = Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 2Cx$$
$$x^2+2 = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + Ax - Bx + 2Cx - 2A$$
$$x^2+2 = (A+B+C)x^2 + (A-B+2C)x - 2A$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= A+B+C \\ 0 &= A-B+2C \\ 2 &= -2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-B &= C \\ 1 &= -B+2C \\ A &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-B &= C \\ 1 &= -B+4-2B \\ A &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ B &= 1 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

Sustituyendo en **(1)**, tenemos que $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-1}$
Por lo tanto, tenemos que resolver la siguiente integral.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)}\,dx &= \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1}dx \\ &= -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx \quad \text{Utilizando propiedades de la} \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)}\,dx = -\ln(x) + \ln(x+2)\ln(x-1) + c$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x-1)^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x+3}{x^2(x+1)^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx$