Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores

Ayud. Irving Hernández Rosas

Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña[1] Armando Abraham Aquino Chapa[2] José Manuel Pedro Méndez[3]

1 de octubre de 2020

Instrucciones: Realice las siguientes ejercicios escribiéndolos de manera clara, los puede realizar en LaTeX, en un cuaderno etc, pero debe de subir el archivo en la sesión de classrroom en formato pdf para su revisión.

Métodos de integración

Integración por partes (2.5 pts.)

1. Realice las siguientes integrales:

a) $\int x\sin(x)\,dx$

$$\begin{aligned} f &= x & df &= dx \\ g &= -\cos(x) & dg &= \sin(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f\cdot g - \int g\cdot df && \text{Empleando integración por partes} \\ &= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)dx && \text{Reemplazando con los valores elegidos} \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx && \text{Porque la integral es un operador lineal} \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) && \text{La integral de } \cos(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \int x\sin(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

b) $\int x^2 e^x\,dx$

$$\begin{aligned} f &= x^2 & df &= 2xdx \\ g &= e^x & dg &= e^x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f\cdot g - \int g\cdot df && \text{Empleando integración por partes} \\ &= x^2\cdot e^x - \int e^x\cdot 2xdx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\ &= e^x x^2 - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{\text{Otra integral}} && \text{Sacando escalares por la linealidad de la integral} \end{aligned}$$

$$\int xe^x dx =$$

$$\begin{aligned} f &= x & df &= dx \\ g &= e^x & dg &= e^x dx \end{aligned}$$

---

[1]Número de cuenta 317031326
[2]Número de cuenta n
[3]Número de cuenta n

$$
\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g \cdot df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas}\\
&= xe^x - e^x && \text{Conocemos de Mate I la integral de } e\\
&= e^x(x-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^x x^2 - 2\int xe^x dx &= e^x x^2 - 2e^x(x-1) && \text{Reemplazando en el resultado anterior}\\
&= e^x(x^2 - 2(x-1)) && \text{Factorizando}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int xe^x dx = e^x(x^2 - 2(x-1)) + C, C \in \mathbb{R}$$

c) $\int x^2 \sin(x)\, dx$

$$
\begin{aligned}
f &= x^2 & df &= 2x\, dx\\
g &= -\cos(x) & dg &= \sin(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= -x^2\cos(x) - \int -\cos(x) 2x\, dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas}\\
&= -x^2\cos(x) + \underbrace{2\int x\cos(x)dx}_{\text{Integración por partes}} && \text{Sabemos que la integral es un operador lineal}
\end{aligned}
$$

$$\int x\cos(x)dx =$$

$$
\begin{aligned}
f &= x & df &= dx\\
g &= \sin(x) & dg &= \cos(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= x\sin(x) - \int \sin(x)\, dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas}\\
&= x\sin(x) - (-\cos(x)) && \text{De Mate I conocemos las integrales de las f. trigonométricas}\\
&= x\sin(x) + \cos(x) && \text{Operando signos}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sin(x)\, dx &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)dx && \text{Reemplazando en el resultado anterior}\\
&= -x^2\cos(x) + 2(x\sin(x) + \cos(x)) && \text{Factorizando}\\
&= \cos(x)(2 - x^2) + 2x\sin(x)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int x^2\sin(x)\, dx = \cos(x)(2 - x^2) + 2x\sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

d) $\int x \ln(x)\, dx$

$$f = \ln(x) \qquad df = \frac{1}{x} dx$$

$$g = \frac{x^2}{2} \qquad dg = x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx && \text{Reemplazando por las funciones seleccionadas}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x}{2}\, dx && \text{Opernado}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int x\, dx && \text{Por la linealidad de la integral}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} && \text{Integración de polinomios}\\
&= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} && \text{Opernado}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int x \ln(x)\, dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C, C \in \mathbb{R}$$

e) $\int e^x \sin(x)\, dx$

$$f = \sin(x) \qquad df = \cos(x) dx$$
$$g = e^x \qquad dg = e^x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= \sin(x) e^x - \underbrace{\int e^x \cos(x)\, dx}_{\text{Integración por partes}} && \text{Reemplazando por las funciones seleccionadas}
\end{aligned}$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

$$f = \cos(x) \qquad df = -\sin(x) dx$$
$$g = e^x \qquad dg = e^x dx$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g\, df && \text{Empleando integración por partes}\\
&= \cos(x) e^x - \underbrace{\int e^x \sin(x)\, dx}_{\text{igual que la inicial}} && \text{Reemplazando por las funciones seleccionadas}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(x)\, dx &= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \int e^x \sin(x) && \text{Regresando a la integral incial}\\
2 \int e^x \sin(x)\, dx &= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x && \text{Sumando en ambos miembros}\\
&= \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Integración por sustitución (2.5 pts.)

2. Realice las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

$$u = \ln(x) \qquad\qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \int u\,du && \text{Empleando sustitución de variable} \\ &= \frac{u^2}{2} && \text{Por integración en polinomios} \\ &= \frac{\ln(x)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{\ln(x)^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

   b) $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx$

   c) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

$$f = \frac{1}{g(x)} \qquad\qquad g(x) = \ln(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{1}{u}\,du && \text{Empeando sustitución de variable} \\ &= \ln|u| \Big|_{\ln(a)}^{\ln(b)} && \text{Pues conocemos la integral de } \frac{1}{x} \\ &= \ln|\ln(b)| - \ln|\ln(a)| \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln|\ln(b)| - \ln|\ln(a)| + C, C \in \mathbb{R}$$

Integración por sustitución trigonométrica (2.5 pts.)

3. Realice las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

   Tomemos el siguiente cambio de variables con sustituciones trigonométricas

$$\begin{bmatrix} x = \cos(x) \\ dx = -\sin(x) \end{bmatrix}$$

   Y recordemos las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \\ \sin(x) &= \sqrt{1-\cos^2(x)} && (\alpha) \\ &y \\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} && (\beta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{1-\cos^2(x)} - \sin(x)\, dx && \text{Sustituyendo en la integral original} \\
&= -\int \sin(x)\sin(x) && \text{Empleando } \alpha \\
&= -\int \sin^2(x) && \text{Operando} \\
&= -\int \frac{1-\cos(2x)}{2} && \text{Empleando } \beta \\
&= -\frac{1}{2}\int 1-\cos(2x) && \text{Usando la linealidad de la integral} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int 1 - \int \cos(2x)\right) && \text{Nuevamente usando la linealidad de la integral} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) && \text{Integrando las funciones que ya conocemos}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int \sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}
$$

b) $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

c) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$

d) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$

Integración por fracciones parciales (2.5 pts.)

4. Realice las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}\, dx$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+5x+6} &= \frac{x}{(x+2)(x+3)} && \text{Factorizando el dividendo} \\
&= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)} && \text{Expresando en forma de suma el dividendo} \\
&= \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)} && \text{Sumando ambas fracciones} \\
&= \frac{x(A+B)+2B+3A}{(x+2)(x+3)} && \text{Reordenando el numerador}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A+B &= 1 && \text{Obteniendo las ecuaciones} \\
3A+2B &= 0 \\
A &= 1-B \\
\\
B = 3 &\implies A = -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{(x+2)} + \frac{3}{(x+3)}\right) && \text{Sustituyendo en la integral inicial}\\
&= -\int \frac{2}{(x+2)} + \int \frac{3}{(x+3)} && \text{Empleando la linealidad de la integral}\\
&= -2\int \frac{1}{(x+2)} + 3\int \frac{3}{(x+3)} && \text{Nuevamente empleando la linealidad de la integral}\\
&= -2\ln(x+2) + 3\ln(x+3) && \text{Calculando las integrales que ya conocemos}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx = -2\ln(x+2) + 3\ln(x+3) + C, C \in \mathbb{R} + C, C \in \mathbb{R}
$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x-1)^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x+3}{x^2(x+1)^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\,dx$