



# Matemáticas para las Ciencias II

Semestre 2020-2

Prof. Pedro Porras Flores  
Ayud. Irving Hernández Rosas

## Tarea Examen III

Kevin Ariel Merino Peña<sup>1</sup> Armando Abraham Aquino Chapa<sup>2</sup> José Manuel Pedro Méndez<sup>3</sup>

7 de octubre de 2020



**Instrucciones:** Realice las siguientes ejercicios escribiéndolos de manera clara, los puede realizar en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, en un cuaderno etc, pero debe de subir el archivo en la sesión de classroom en formato pdf para su revisión.

## Métodos de integración

### Integración por partes (2.5 pts.)

1. Realice las siguientes integrales:

$$a) \int x \sin(x) dx$$

$$f = x$$

$$df = dx$$

$$g = -\cos(x)$$

$$dg = \sin(x)dx$$

$$= f \cdot g - \int g \cdot df$$

Empleando integración por partes

$$= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)dx$$

Reemplazando con los valores elegidos

$$= -x \cos(x) + \int \cos(x)dx$$

Porque la integral es un operador lineal

$$= -x \cos(x) + \sin(x)$$

La integral de  $\cos(x) = \sin(x)$

$$\therefore \int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$b) \int x^2 e^x dx$$

$$f = x^2$$

$$df = 2x dx$$

$$g = e^x$$

$$dg = e^x dx$$

$$= f \cdot g - \int g \cdot df$$

Empleando integración por partes

$$= x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx$$

Haciendo uso de las funciones elegidas

$$= e^x x^2 - 2 \underbrace{\int x e^x dx}_{\text{Otra integral}}$$

Sacando escalares por la linealidad de la integral

$$\int x e^x dx =$$

$$f = x$$

$$df = dx$$

$$g = e^x$$

$$dg = e^x dx$$

<sup>1</sup>Número de cuenta 317031326

<sup>2</sup>Número de cuenta 317058163

<sup>3</sup>Número de cuenta 315073120

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g \cdot df && \text{Empleando integración por partes} \\
&= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\
&= xe^x - e^x && \text{Conocemos de Mate I la integral de } e \\
&= e^x(x - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^x x^2 - 2 \int x e^x dx &= e^x x^2 - 2e^x(x - 1) && \text{Reemplazando en el resultado anterior} \\
&= e^x(x^2 - 2(x - 1)) && \text{Factorizando}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int x e^x dx = e^x(x^2 - 2(x - 1)) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$c) \int x^2 \sin(x) dx$$

$$\begin{aligned}
f &= x^2 && df = 2x dx \\
g &= -\cos(x) && dg = \sin(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g df && \text{Empleando integración por partes} \\
&= -x^2 \cos(x) - \int -\cos(x) 2x dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\
&= -x^2 \cos(x) + \underbrace{2 \int x \cos(x) dx}_{\text{Integración por partes}} && \text{Sabemos que la integral es un operador lineal}
\end{aligned}$$

$$\int x \cos(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
f &= x && df = dx \\
g &= \sin(x) && dg = \cos(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f \cdot g - \int g df && \text{Empleando integración por partes} \\
&= x \sin(x) - \int \sin(x) dx && \text{Haciendo uso de las funciones elegidas} \\
&= x \sin(x) - (-\cos(x)) && \text{De Mate I conocemos las integrales de las f. trigonométricas} \\
&= x \sin(x) + \cos(x) && \text{Operando signos}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x) dx &= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx && \text{Reemplazando en el resultado anterior} \\
&= -x^2 \cos(x) + 2(x \sin(x) + \cos(x)) && \text{Factorizando} \\
&= \cos(x)(2 - x^2) + 2x \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\therefore \int x^2 \sin(x) dx = \cos(x)(2 - x^2) + 2x \sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$d) \int x \ln(x) dx$$

$$f = \ln(x)$$

$$df = \frac{1}{x} dx$$

$$g = \frac{x^2}{2}$$

$$dg = x dx$$

$$= f \cdot g - \int g df$$

Empleando integración por partes

$$= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx$$

Reemplazando por las funciones seleccionadas

$$= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x}{2} dx$$

Opernado

$$= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \int x dx$$

Por la linealidad de la integral

$$= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

Integración de polinomios

$$= \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Opernado

$$\therefore \int x \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$e) \int e^x \sin(x) dx$$

$$f = \sin(x)$$

$$df = \cos(x) dx$$

$$g = e^x$$

$$dg = e^x dx$$

$$= f \cdot g - \int g df$$

Empleando integración por partes

$$= \sin(x) e^x - \underbrace{\int e^x \cos(x) dx}_{\text{Integración por partes}}$$

Reemplazando por las funciones seleccionadas

$$\int e^x \cos(x) dx$$

$$f = \cos(x)$$

$$df = -\sin(x) dx$$

$$g = e^x$$

$$dg = e^x dx$$

$$= f \cdot g - \int g df$$

Empleando integración por partes

$$= \cos(x) e^x - \underbrace{\int e^x \sin(x) dx}_{\text{igual que la inicial}}$$

Reemplazando por las funciones seleccionadas

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \int e^x \sin(x) dx$$

Regresando a la integral inicial

$$2 \int e^x \sin(x) dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x$$

Sumando en ambos miembros

$$= \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

$$\therefore \int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Integración por sustitución (2.5 pts.)

2. Realice las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$u = \ln(x)$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int u du$$

Empleando sustitución de variable

$$= \frac{u^2}{2}$$

Por integración en polinomios

$$= \frac{\ln(x)^2}{2}$$

$$\therefore \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln(x)^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$b) \int e^x \sin(e^x) dx$$

$$u = e^x$$

$$du = e^x dx$$

$$= \int \sin(u) du$$

Empleando la sustitución

$$= -\cos(u)$$

$$= -\cos(e^x) + c$$

Regresando a la variable original

$$\therefore \int e^x \sin(e^x) dx = -\cos(e^x) + c$$

$$c) \int x e^{-x^2} dx$$

$$u = -x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x \rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$= \int x e^u \left( \frac{du}{-2x} \right)$$

Empleando la sustitución

$$= \int e^u \left( \frac{du}{-2} \right) = \int \frac{e^u}{-2} du$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^u du$$

Utilizando las propiedades de la integral

$$= -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

Regresando a la variable original

$$\therefore \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$d) \int x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$u = 1 - x^2$$

$$du = -2x dx \rightarrow \frac{du}{-2} = x dx$$

$$= \int \sqrt{u} \frac{du}{-2} \quad \text{Empleando la sustitución}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du \quad \text{Propiedades de la integral}$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{u^{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{Regresando a la variable original}$$

$$\therefore \int x \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \cdot (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$e) \int \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$f = \frac{1}{g(x)}$$

$$g(x) = \ln(x)$$

$$= \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \frac{1}{u} du$$

Empeando sustitución de variable

$$= \ln |u| \Big|_{\ln(a)}^{\ln(b)}$$

Pues conocemos la integral de  $\frac{1}{x}$

$$= \ln |\ln(b)| - \ln |\ln(a)|$$

$$\therefore \int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln |\ln(b)| - \ln |\ln(a)| + C, C \in \mathbb{R}$$

### Integración por sustitución trigonométrica (2.5 pts.)

3. Realice las siguientes integrales:

$$a) \int \sqrt{1 - x^2} dx$$

Tomemos el siguiente cambio de variables con sustituciones trigonométricas

$$\begin{bmatrix} x = \cos(x) \\ dx = -\sin(x) \end{bmatrix}$$

Y recordemos las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \quad (\alpha)$$

$y$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (\beta)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{1 - \cos^2(x)} - \sin(x) dx && \text{Sustituyendo en la integral original} \\
&= - \int \sin(x) \sin(x) && \text{Empleando } \theta \\
&= - \int \sin^2(x) && \text{Operando} \\
&= - \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} && \text{Empleando } \beta \\
&= -\frac{1}{2} \int 1 - \cos(2x) && \text{Usando la linealidad de la integral} \\
&= -\frac{1}{2} \left( \int 1 - \int \cos(2x) \right) && \text{Nuevamente usando la linealidad de la integral} \\
&= -\frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) && \text{Integrando las funciones que ya conocemos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C, C \in \mathbb{R}$$

b)  $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$  Tomemos la siguiente sustitución:

$$\begin{bmatrix} x = \sec(\theta) \\ dx = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \end{bmatrix}$$

También recordemos que  $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta && \text{Realizando la sustitución} \\
&= \int \sqrt{\tan^2(\theta)} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta && \text{Utilizando la propiedad mencionada} \\
&= \int \tan(\theta) \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\
&= \int \tan^2(\theta) \cdot \sec(\theta) d\theta \\
&= \int (\sec^2(\theta) - 1) \cdot \sec(\theta) d\theta && \text{Propiedad anterior} \\
&= \int \sec^3(\theta) - \sec(\theta) d\theta \\
&= \int \sec^3(\theta) d\theta - \int \sec(\theta) d\theta && \text{Propiedades de la integral} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) - \int \sec(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) - \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) - \frac{1}{2} \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta))
\end{aligned}$$

Notemos (según la propiedad mencionada al comienzo del ejercicio) que:  $\tan(\theta) = \sqrt{\sec^2(\theta) - 1}$ . Y además  $x = \sec(\theta)$ . Entonces:  $\tan(\theta) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\therefore \int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c$$

c)  $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$  Tomemos el siguiente cambio de variables con sustituciones trigonométricas

$$\begin{bmatrix} x = \cos(\theta) \\ dx = -\sin(\theta) d\theta \end{bmatrix}$$

Y recordemos las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \quad (\alpha)$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \quad (\theta)$$

y

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \sec^2(\theta) \quad (\beta)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}}{\cos^2\theta} - \sin(\theta) && \text{Sustituyendo en la integra original.} \\ &= \int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2\theta} - \sin(\theta) && \text{Empleando } \beta. \\ &= \int \frac{-\sin^2(\theta)}{\cos^2\theta} && \text{Resolviendo la multiplicación.} \\ &= \int \frac{\cos^2(\theta) - 1}{\cos^2\theta}, d\theta && \text{Ya que: } \cos^2(\theta) - 1 = \sin^2(\theta). \\ &= \int \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2\theta} d\theta - \int \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta && \text{Por propiedad de derivada.} \\ &= \int d\theta - \int \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta \\ &= \theta - \int \sec^2(\theta) d\theta && \text{Empleando } \alpha. \\ &= \theta - \tan(\theta) + c && \text{Resolviendo la integral.} \end{aligned}$$

Como  $x = \cos(\theta)$  entonces  $\arccos(x) = \arccos(\theta)$  por lo que:  $\arccos(x) = \theta$ .

$$\begin{aligned} &= \arccos(x) - \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} + c && \text{Sustituyendo } \theta. \\ &= \arccos(x) - \frac{\sin(\arccos(x))}{x} + c && \text{Ya que } \cos(x) \text{ y } \arccos(x) \text{ son funciones inversas.} \\ &= \arccos(x) - \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}}{x} + c \\ &= \arccos(x) - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + c && \text{Ya que } \cos(x) \text{ y } \arccos(x) \text{ son funciones inversas.} \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx = \arccos(x) - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C, C \in \mathbb{R}$$

d)  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

Tomemos el siguiente cambio de variables con sustituciones trigonométricas:

$$\left[ \begin{array}{l} x = \sin(\theta) \\ dx = \cos(\theta) \end{array} \right]$$

Y recordemos las siguientes identidades trigonométricas

$$\csc^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \quad (\alpha)$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \quad (\theta)$$

$$\cot(\arcsin(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (\beta)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{\sin^2(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta && \text{Sustituyendo en la integral original.} \\ &= \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)\cos(\theta)} d\theta && \text{Empleando } \theta. \\ &= \int \frac{1}{\sin^2(\theta)} d\theta \\ &= \int \csc^2(\theta) d\theta && \text{Empleando } \alpha. \\ &= -\cot(\theta) && \text{Resolviendo la integral.} \end{aligned}$$

Como  $x = \sin(\theta)$  entonces  $\arcsin(x) = \arcsin(\sin(\theta))$  por lo que:  $\arcsin(x) = \theta$ .

$$\begin{aligned} &= -\cot(\arcsin(x)) && \text{Sustituyendo } \theta. \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} && \text{Empleando } \beta. \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C, C \in \mathbb{R}$$

e)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$  Tomemos la siguiente sustitución:

$$\left[ \begin{array}{l} x = \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \\ dx = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \end{array} \right]$$

También recordemos que  $\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2(\theta)-1}} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta && \text{Realizando la sustitución} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\theta)}} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta && \text{Utilizando la propiedad anterior} \\ &= \int \frac{1}{\tan(\theta)} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \sec(\theta) d\theta = \ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) \end{aligned}$$

Notemos (según la propiedad mencionada al comienzo del ejercicio) que:  $\tan(\theta) = \sqrt{\sec^2(\theta)-1}$ . Y además  $x = \sec(\theta)$ . Entonces:  $\tan(\theta) = \sqrt{x^2-1}$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$



## Integración por fracciones parciales (2.5 pts.)

4. Realice las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x}{(x+2)(x+3)}$$

Factorizando el dividendo

$$= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

Expresando en forma de suma el dividendo

$$= \frac{Ax + 3A + Bx + 2B}{(x+2)(x+3)}$$

Sumando ambas fracciones

$$= \frac{x(A+B) + 2B + 3A}{(x+2)(x+3)}$$

Reordenando el numerador

$$A + B = 1$$

Obteniendo las ecuaciones

$$3A + 2B = 0$$

$$A = 1 - B$$

$$B = 3 \implies A = -2$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx = \int \left( -\frac{2}{(x+2)} + \frac{3}{(x+3)} \right)$$

Sustituyendo en la integral inicial

$$= -\int \frac{2}{(x+2)} + \int \frac{3}{(x+3)}$$

Empleando la linealidad de la integral

$$= -2 \int \frac{1}{(x+2)} + 3 \int \frac{1}{(x+3)}$$

Nuevamente empleando la linealidad de la integral

$$= -2 \ln(x+2) + 3 \ln(x+3)$$

Calculando las integrales que ya conocemos

$$\therefore \int \frac{x}{x^2 + 5x + 6} dx = -2 \ln(x+2) + 3 \ln(x+3) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$b) \int \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x-1)} dx$$

Utilizando el método de fracciones parciales tenemos que:

$$\frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \quad (1)$$

$$(x(x+2)(x-1)) \left( \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x-1)} \right) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= (x+2)(x-1)A + x(x-1)B + x(x+2)C \\ x^2 + 2 &= Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 2Cx \\ x^2 + 2 &= Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + Ax - Bx + 2Cx - 2A \\ x^2 + 2 &= (A+B+C)x^2 + (A-B+2C)x - 2A \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 = A + B + C$$

$$0 = A - B + 2C$$

$$2 = -2A$$

$$\begin{aligned}2 - B &= C \\1 &= -B + 2C \\A &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 - B &= C \\1 &= -B + 4 - 2B \\A &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 1 \\B &= 1 \\A &= -1\end{aligned}$$

Sustituyendo en **(1)**, tenemos que  $\frac{-1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1}$   
 Por lo tanto, tenemos que resolver la siguiente integral.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x-1)} dx &= \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} dx \\&= -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx \quad \text{Utilizando propiedades de la integral}\end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x-1)} dx = -\ln(x) + \ln(x+2) + \ln(x-1) + c$$

$$c) \int \frac{x+1}{x^2(x-1)^3} dx$$

$$d) \int \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2(x+1)^2} dx$$

$$e) \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx$$