Álgebra Superior II
Tarea 3

- Las tareas se entregan a más tardar el día del examen parcial, que será el 21 de marzo.
- Si entregas la tarea el día del examen, deberás hacerlo **al comienzo de éste**.
- Para tener calificada esta tarea un día antes del examen, deberás entregarla a más tardar el día viernes 13 de marzo.
- Para tener derecho a presentar el segundo examen parcial, es necesario entregar al menos el 50% de esta tarea. **Si un ejercicio tiene incisos, para que éste cuente como entregado deberás hacer por lo menos la mitad de tales incisos.**

. . . .

1. Considera una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea el conjunto $\mathcal{A}_n = \{C \in \mathcal{A} : n \in C\}$ (observa que este conjunto es no vacío), y define

$$U_n = \bigcap_{C \in \mathcal{A}_n} C$$

Es decir, U_n es la intersección de todos los conjuntos de la familia $\mathcal{A}$ que tienen al elemento n.
Se define la relación $\sim_{\mathcal{A}}$ en $\mathbb{N}$ dada por $n \sim_{\mathcal{A}} m$ si y solo si $n \in U_m$. Demuestra o da contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

   - $\sim_{\mathcal{A}}$ es reflexiva;
   - $\sim_{\mathcal{A}}$ es transitiva;
   - $\sim_{\mathcal{A}}$ es antisimétrica.

2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathcal{A}$ como

$$B + C = B \triangle C \quad \text{y} \quad B \cdot C = B \cap C$$

Demuestra que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.
(Puedes utilizar, sin demostrarlo, que la diferencia simétrica $\triangle$ es asociativa).

3. Demuestra que el conjunto de matrices de 3×3 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ (denotado $M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$) forma un anillo con la suma y producto de matrices definidas en la tarea 2. Con un ejemplo, muestra que este anillo no cumple la ley de cancelación del producto.

4. Recuerda el anillo $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ definido en el problema 4 de la tarea 2. ¿Este anillo es un dominio entero? Demuestra tus afirmaciones.

5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo cualquiera y sean $u, v \in A$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Demuestra o da contraejemplo.

   - Si u y v son unidades, entonces uv es unidad.
   - Si u y v son unidades, entonces $u + v$ es unidad.
   - Si $u + v$ es unidad, entonces u es unidad o v es unidad.
   - Si u es unidad, entonces su inverso aditivo es unidad.

6. Considera el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ con operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como aparece en las siguientes tablas:

$\oplus$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\odot$	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

Se puede probar, pero no es necesario que lo hagas, que $(A, \oplus, \odot)$ es un anillo. Responde las siguientes preguntas demostrando todas tus afirmaciones.

a) ¿Cuál es el neutro aditivo?
b) ¿Cuál es el neutro multiplicativo?
c) ¿Este anillo es conmutativo?
d) ¿Este anillo es dominio entero?
e) ¿Cuáles son las unidades?

7. ¿Falso o verdadero? Demuestra o da contraejemplo:

   a) $(\mathcal{C}, \leq)$ es COTO.
   b) $(\mathcal{C}, \leq)$ es COBO.

8. Sea $a = [(a_1, a_2)] \in \mathcal{C}$. Si $-a$ denota el inverso aditivo de a, muestra que:

   a) $[(1,2)] \cdot [(a_1, a_2)] = -a$.
   b) $-(-a) = [(a_1, a_2)]$.

9. Sean $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)], [(g,h)] \in \mathcal{C}$. Demuestra lo siguiente:

   a) Si $[(a,b)] \leq [(1,1)]$ y $[(c,d)] \leq [(e,f)]$, entonces $[(a,b)] \cdot [(e,f)] \leq [(a,b)] \cdot [(c,d)]$.
   b) Si $[(a,b)] \leq [(c,d)]$ y $[(e,f)] \leq [(g,h)]$, entonces $[(a,b)] + [(e,f)] \leq [(c,d)] + [(g,h)]$.
   c) Si $[(1,1)] < [(a,b)] \leq [(c,d)]$ y $[(1,1)] < [(e,f)] \leq [(g,h)]$, entonces $[(a,b)] \cdot [(e,f)] \leq [(c,d)] \cdot [(g,h)]$.

10. Demuestra que existe una función $i : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$ que tiene las siguientes propiedades:

    a) i es inyectiva.
    b) i preserva la suma. $\Big(\forall n, m \in \mathbb{N} : i(n+m) = i(n) + i(m)\Big)$.
    c) i preserva el producto. $\Big(\forall n, m \in \mathbb{N} : i(n \cdot m) = i(n) \cdot i(m)\Big)$.
    d) i preserva el orden. $\Big(\forall n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \iff i(n) \leq i(m)\Big)$.

    La función i muestra que el conjunto $\mathcal{C}$ contiene una «copia exacta» del conjunto $\mathbb{N}$, en el sentido de que las propiedades fundamentales de los números naturales – su aritmética y su orden usual, se transfieren de manera adecuada al conjunto $\mathcal{C}$.

11. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demuestra que:

    a) $|-a| = |a|$ y $a \leq |a|$,
    b) $|a| \geq 0$,
    c) $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$,
    d) $|ab| = |a||b|$,
    e) $||b| - |c|| \leq |b - c|$,
    f) $2\text{máx}\{a, b\} = a + b + |a - b|$,
    g) $2\text{mín}\{a, b\} = a + b - |a - b|$.

12. Encuentra el cociente q y el residuo r que satisfagan el Algoritmo de la División para escribir $a = bq + r$, donde a y b son los siguientes:

    a) $a = 7392$, $b = -43$
    b) $a = -7392$, $b = -43$
    c) $a = -37$, $b = 3$
    d) $a = -12$, $b = -90$
    e) $a = -90$, $b = -12$

13. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Demuestra lo siguiente:

    a) Si $0|a$, entonces $a = 0$.
    b) Si $a|b$, entonces $a|bc$.
    c) Si $a|b$ y $c|d$, entonces $ac|bd$.
    d) Si $a|b$, entonces $ac|bc$.
    e) Si $a|b$, entonces $a|-b$, $-a|b$ y $-a|-b$.
    f) Si $a|2b$ y $a|-5b$, entonces $a|b$.