Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Superior II

2^{do} Parcial Tarea 1
Kevin Ariel Merino Peña 317031326
12 de marzo de 2020

---

2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathcal{A}$ como

$$B + C = B \triangle C \quad \text{y} \quad B \cdot C = B \cap C$$

Demuestra que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo *(Puedes utilizar, sin demostrarlo que la diferencia simétrica $\triangle$ es asociativa)*

Definición 1. $(A, +, \cdot)$ es un anillo si cumple

1. Asociatividad para la suma
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \qquad a + (b + c) = (a + b) + c$$
2. Conmutatividad para la suma
$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad a + b = b + a$$
3. Existencia del neutro aditivo
$$\exists \hat{0} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a + \hat{0} = a$$
4. Existencia de inversos aditivos
$$\forall a \in A \quad \exists \hat{a} \quad \cdot \ni \cdot \quad a + \hat{a} = \hat{0}$$
5. Asociatividad para el producto
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
6. Existencia del neutro multiplicativo
$$\exists \hat{1} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a \cdot \hat{1} = a = \hat{1} \cdot a$$
7. Distributividad por la izquierda
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
8. Distributividad por la derecha
$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

$$A + (B + C)$$

P.d $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$\begin{aligned}
A + (B + C) &= A + (B \triangle C) && \text{Por definición de } + \text{ en } \mathcal{A} \\
A + (B \triangle C) &= A \triangle (B \triangle C) && \text{Esto sgignifica } + \\
A \triangle (B \triangle C) &= (A \triangle B) \triangle C && \text{Porque } \triangle \text{ es asociativa} \\
(A \triangle B) \triangle C &= (A + B) + C && \text{Por definición de } +\text{, de nuevo}
\end{aligned}$$

$$\therefore + \text{ es asociativa en } \mathcal{A}$$

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

$$A + B$$

P.d $A + B = B + A$

$$\begin{aligned}
A + B &= A \triangle B && \text{Por definición de } + \text{ en } A \\
A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) && \text{Por definición de } \triangle \\
(A - B) \cup (B - A) &= (B - A) \cup (A - B) && \text{Porque } \cup \text{ es conmitativa} \\
(B - A) \cup (A - B) &= B \triangle A && \text{Por definición de } \triangle \\
B \triangle A &= B + A && \text{Por definición de } +
\end{aligned}$$

$$\therefore + \text{ es conmutativa en } \mathcal{A}$$

Proponemos $\hat{0} = \varnothing$, entonces
Sea $A \in \mathcal{A}$, Pd. $A + \varnothing = A$

$$\begin{aligned}
A + \varnothing &= A \triangle \varnothing && \text{Por definición de } + \\
A \triangle \varnothing &= (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) && \text{Por definición de } \triangle \\
(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) &= A \cup \varnothing && \text{Obs. } A - \varnothing = A, \quad \varnothing - A = \varnothing \\
A \cup \varnothing &= A && \text{Por propiedades del vacío}
\end{aligned}$$

$$\therefore \varnothing \text{ es el neutro aditivo en } \mathcal{A}$$

Sea $A \in A$ Pd. $A + \hat{A} = \varnothing$
Proponemos $\hat{A} = A$

$$\begin{aligned}
A + A &= A \triangle A && \text{Definición de } + \text{ en } \mathcal{A} \\
A \triangle A &= (A - A) \cup (A - A) && \text{Definición de } \triangle \\
(A - A) \cup (A - A) &= \varnothing && \text{Por propiedades de } \triangle
\end{aligned}$$

$$\therefore A \text{ es el inverso aditivo de } A \text{ en } \mathcal{A}$$

Definición 2. En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo, si $\cdot$ es asociativo entonces decimos que es anillo conmutativo

3. Demuestra que el conjunto de matrices de 3 x 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ (denotado M_{3x3})