

2^{do} Parcial Tarea 1
Kevin Ariel Merino Peña 317031326
15 de marzo de 2020

2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Definimos las operaciones $+$ y \cdot en \mathcal{A} como

$$B + C = B \triangle C \quad \text{y} \quad B \cdot C = B \cap C$$

Demuestra que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo (*Puedes utilizar, sin demostrarlo que la diferencia simétrica \triangle es asociativa*)

Definición 1. $(A, +, \cdot)$ es un anillo si cumple

1. Asociatividad para la suma

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

2. Conmutatividad para la suma

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad a + b = b + a$$

3. Existencia del neutro aditivo

$$\exists \hat{0} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a + \hat{0} = a$$

4. Existencia de inversos aditivos

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad \exists \hat{a} \quad \cdot \ni \cdot \quad a + \hat{a} = \hat{0}$$

5. Asociatividad para el producto

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

6. Existencia del neutro multiplicativo

$$\exists \hat{1} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a \cdot \hat{1} = a = \hat{1} \cdot a$$

7. Distributividad por la izquierda

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

8. Distributividad por la derecha

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

$$A + (B + C)$$

P.d $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$A + (B + C) = A + (B \triangle C)$$

Por definición de $+$ en \mathcal{A}

$$A + (B \triangle C) = A \triangle (B \triangle C)$$

Esto significa $+$

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

Porque \triangle es asociativa

$$(A \triangle B) \triangle C = (A + B) + C$$

Por definición de $+$, de nuevo

$\therefore +$ es asociativa en \mathcal{A}

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

$$A + B$$

P.d $A + B = B + A$

$$A + B = A \triangle B$$

Por definición de $+$ en \mathcal{A}

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Por definición de \triangle

$$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$$

Porque \cup es conmutativa

$$(B - A) \cup (A - B) = B \triangle A$$

Por definición de \triangle

$$B \triangle A = B + A$$

Por definición de $+$

$\therefore +$ es conmutativa en \mathcal{A}

Proponemos $\hat{0} = \emptyset$, entonces
Sea $A \in \mathcal{A}$, Pd. $A + \emptyset = A$

$$\begin{aligned} A + \emptyset &= A \Delta \emptyset && \text{Por definici3n de } + \\ A \Delta \emptyset &= (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) && \text{Por definici3n de } \Delta \\ (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) &= A \cup \emptyset && \text{Obs. } A - \emptyset = A, \quad \emptyset - A = \emptyset \\ A \cup \emptyset &= A && \text{Por propiedades del vac3o} \end{aligned}$$

$\therefore \emptyset$ es el neutro aditivo en \mathcal{A}

Sea $A \in \mathcal{A}$ Pd. $A + \hat{A} = \emptyset$
Proponemos $\hat{A} = A$

$$\begin{aligned} A + A &= A \Delta A && \text{Definici3n de } + \text{ en } \mathcal{A} \\ A \Delta A &= (A - A) \cup (A - A) && \text{Definici3n de } \Delta \\ (A - A) \cup (A - A) &= \emptyset && \text{Por propiedades de } \Delta \end{aligned}$$

$\therefore A$ es el inverso aditivo de A en \mathcal{A}

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$
 $A \cdot (C \cdot D)$ Pd. $A \cdot (C \cdot D) = (A \cdot C) \cdot D$

$$\begin{aligned} A \cdot (C \cdot D) &= A \cdot (C \cap D) && \text{Por definici3n de } \cdot \\ A \cdot (C \cap D) &= A \cap (C \cap D) && \text{Por definici3n de } \cdot \\ A \cap (C \cap D) &= (A \cap C) \cap D && \text{Porque } \cap \text{ es asociativa} \\ (A \cap C) \cap D &= (A \cdot C) \cap D && \text{Por definici3n de } \cdot \\ (A \cdot C) \cap D &= (A \cdot C) \cdot D && \text{Por definici3n de } \cdot \end{aligned}$$

$\therefore \cdot$ es asociativo en \mathcal{A}

Proponemos $\hat{1} = A$
Sea $A \in \mathcal{A}$ Pd. $A \cdot A = A = A \cdot A$

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A \cup A && \text{Por definici3n de } \cdot \\ A \cup A &= A && \text{Por idempotencia de } \cup \end{aligned}$$

La otra igualdad se prueba exactamente de la misma manera, $\therefore A$ es el inverso multiplicativo en \mathcal{A}

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$
Pd. $A \cdot (B + C) = A \cdot C + A \cdot D$

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot (B \Delta C) && \text{Por definici3n de } + \\ A \cdot (B \Delta C) &= A \cap (B \Delta C) && \text{Por definici3n de } \cdot \\ A \cap (B \Delta C) &= (A \cap B) \Delta (A \cap C) && \text{Por propiedades de } \cap, \Delta \\ (A \cap B) \Delta (A \cap C) &= (A \cdot B) \Delta (A \cdot C) && \text{Por definici3n de } \cdot \\ (A \cdot B) \Delta (A \cdot C) &= (A \cdot B) + (A \cdot C) && \text{Por definici3n de } + \end{aligned}$$

\therefore se cumple 7

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{A}$

Pd. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$

$$(X + Y) \cdot Z = (X \Delta Y) \cdot Z$$

Por definición de $+$

$$(X \Delta Y) \cdot Z = (X \Delta Y) \cap Z$$

Por definición de \cdot

$$(X \Delta Y) \cap Z = (X \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$$

Por propiedades de \cap, Δ

$$(X \cap Z) \Delta (Y \cap Z) = (X \cdot Z) \Delta (Y \cdot Z)$$

Por definición de \cdot

$$(X \cdot Z) \Delta (Y \cdot Z) = (X \cdot Z) + (Y \cdot Z)$$

Por definición de $+$

\therefore se cumple 8

$\therefore (\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo

Definición 2. En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo, si \cdot es asociativo entonces decimos que es anillo conmutativo

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

Pd. $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = A \cap B$$

Por definición de \cdot

$$A \cap B = B \cap A$$

Porque \cap es conmutativa

$$B \cap A = B \cdot A$$

Por definición de \cdot

$\therefore \cdot$ es conmutativo en \mathcal{A}

3. Demuestra que el conjunto de matrices de 3×3 con coeficientes en \mathbb{Z} (denotado $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$) forma un anillo con la suma y producto de matrices definidas en la tarea 2. Con un ejemplo muestra que este anillo no cumple la ley de cancelación del producto.

$$\text{Sean } M, N, P \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

$$\text{Pd. } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j + \alpha & k + \beta & l + \gamma \\ m + \epsilon & n + \eta & o + \theta \\ p + \xi & q + \omega & r + \delta \end{pmatrix}$$

Por definición de $+$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j + \alpha & k + \beta & l + \gamma \\ m + \epsilon & n + \eta & o + \theta \\ p + \xi & q + \omega & r + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + j + \alpha & b + k + \beta & c + l + \gamma \\ d + m + \epsilon & e + n + \eta & f + o + \theta \\ g + p + \xi & h + q + \omega & i + r + \delta \end{pmatrix}$$

Por definición de $+$

$$\begin{pmatrix} a + j + \alpha & b + k + \beta & c + l + \gamma \\ d + m + \epsilon & e + n + \eta & f + o + \theta \\ g + p + \xi & h + q + \omega & i + r + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + j) + \alpha & (b + k) + \beta & (c + l) + \gamma \\ (d + m) + \epsilon & (e + n) + \eta & (f + o) + \theta \\ (g + p) + \xi & (h + q) + \omega & (i + r) + \delta \end{pmatrix}$$

Pues $+$ en \mathbb{Z} es asociativa

$$\begin{pmatrix} (a + j) + \alpha & (b + k) + \beta & (c + l) + \gamma \\ (d + m) + \epsilon & (e + n) + \eta & (f + o) + \theta \\ (g + p) + \xi & (h + q) + \omega & (i + r) + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + j & b + k & c + l \\ d + m & e + n & f + o \\ g + p & h + q & i + r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

Por def de $+$ en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} a + j & b + k & c + l \\ d + m & e + n & f + o \\ g + p & h + q & i + r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

Por def de $+$ en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$\therefore +$ es asociativa en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

Sean $M, N \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

Por demostrar $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix}$$

Por definición de +

$$\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix}$$

Porque en \mathbb{Z} , + es conmutativa

$$\begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Por definición de +

$\therefore +$ es conmutativa en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

Proponemos $\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

Pd. $M + \hat{0} = M$, i.e. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix}$$

Por definición de +

$$\begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Porque 0 es neutro ad. en \mathbb{Z}

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es el neutro aditivo en } M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$$

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$, Por demostrar

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proponemos $\hat{M} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix}$$

Por definición de +

$$\begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pues en \mathbb{Z} existen inversos aditivos

$$\therefore \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M \text{ es la inversa aditiva de } M$$

La prueba de Asociatividad para el producto se anexa en una página diferente debido a su dimensión