Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Superior II

2^{do} Parcial Tarea 1

Kevin Ariel Merino Peña 317031326

13 de marzo de 2020

---

2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathcal{A}$ como

$$B + C = B \vartriangle C \quad \text{y} \quad B \cdot C = B \cap C$$

Demuestra que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo *(Puedes utilizar, sin demostrarlo que la diferencia simétrica $\vartriangle$ es asociativa)*

Definición 1. $(A, +, \cdot)$ es un anillo si cumple

1. Asociatividad para la suma
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \qquad a + (b + c) = (a + b) + c$$
2. Conmutatividad para la suma
$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad a + b = b + a$$
3. Existencia del neutro aditivo
$$\exists \hat{0} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a + \hat{0} = a$$
4. Existencia de inversos aditivos
$$\forall a \in A \quad \exists \hat{a} \quad \cdot \ni \cdot \quad a + \hat{a} = \hat{0}$$
5. Asociatividad para el producto
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
6. Existencia del neutro multiplicativo
$$\exists \hat{1} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a \cdot \hat{1} = a = \hat{1} \cdot a$$
7. Distributividad por la izquierda
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
8. Distributividad por la derecha
$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

$$A + (B + C)$$

P.d $A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + (B + C) = A + (B \vartriangle C)$	Por definición de $+$ en $\mathcal{A}$
$A + (B \vartriangle C) = A \vartriangle (B \vartriangle C)$	Esto sginifica $+$
$A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$	Porque $\vartriangle$ es asociativa
$(A \vartriangle B) \vartriangle C = (A + B) + C$	Por definición de $+$, de nuevo

$$\therefore + \text{ es asociativa en } \mathcal{A}$$

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

$$A + B$$

P.d $A + B = B + A$

$A + B = A \vartriangle B$	Por definición de $+$ en A
$A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$	Por definición de $\vartriangle$
$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$	Porque $\cup$ es conmitativa
$(B - A) \cup (A - B) = B \vartriangle A$	Por definición de $\vartriangle$
$B \vartriangle A = B + A$	Por definición de $+$

$$\therefore + \text{ es conmutativa en } \mathcal{A}$$

Proponemos $\hat{0} = \varnothing$, entonces
Sea $A \in \mathcal{A}$, Pd. $A + \varnothing = A$

$$\begin{aligned}
A + \varnothing &= A \vartriangle \varnothing && \text{Por definición de } + \\
A \vartriangle \varnothing &= (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) && \text{Por definición de } \vartriangle \\
(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) &= A \cup \varnothing && \text{Obs. } A - \varnothing = A, \quad \varnothing - A = \varnothing \\
A \cup \varnothing &= A && \text{Por propiedades del vacío}
\end{aligned}$$

$$\therefore \varnothing \text{ es el neutro aditivo en } \mathcal{A}$$

Sea $A \in A$ Pd. $A + \hat{A} = \varnothing$
Proponemos $\hat{A} = A$

$$\begin{aligned}
A + A &= A \vartriangle A && \text{Definición de } + \text{ en } \mathcal{A} \\
A \vartriangle A &= (A - A) \cup (A - A) && \text{Definición de } \vartriangle \\
(A - A) \cup (A - A) &= \varnothing && \text{Por propiedades de } \vartriangle
\end{aligned}$$

$$\therefore A \text{ es el inverso aditivo de } A \text{ en } \mathcal{A}$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$
$A \cdot (C \cdot D)$ Pd. $A \cdot (C \cdot D) = (A \cdot C) \cdot D$

$$\begin{aligned}
A \cdot (C \cdot D) &= A \cdot (C \cap D) && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cdot (C \cap D) &= A \cap (C \cap D) && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cap (C \cap D) &= (A \cap C) \cap D && \text{Porque } \cap \text{ es asosciativa} \\
(A \cap C) \cap D &= (A \cdot C) \cap D && \text{Por definición de } \cdot \\
(A \cdot C) \cap D &= (A \cdot C) \cdot D && \text{Por definición de } \cdot
\end{aligned}$$

$$\therefore \cdot \text{ es asociativo en } \mathcal{A}$$

Proponemos $\hat{1} = A$
Sea $A \in \mathcal{A}$ Pd. $A \cdot A = A = A \cdot A$

$$\begin{aligned}
A \cdot A &= A \cup A && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cup A &= A && \text{Por idempotencia de } \cup
\end{aligned}$$

La otra igualdad se prueba exactamente de la misma manera, $\therefore A$ es el inverso multiplicativo en $\mathcal{A}$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$
Pd. $A \cdot (B + C) = A \cdot C + A \cdot D$

$$\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= A \cdot (B \vartriangle C) && \text{Por definición de } + \\
A \cdot (B \vartriangle C) &= A \cap (B \vartriangle C) && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cap (B \vartriangle C) &= (A \cap B) \vartriangle (A \cap D) && \text{Por porpiedades de } \cap, \vartriangle \\
(A \cap B) \vartriangle (A \cap D) &= (A \cdot B) \vartriangle (A \cdot D) && \text{Por definición de } \cdot \\
(A \cdot B) \vartriangle (A \cdot D) &= (A \cdot B) + (A \cdot D) && \text{Por definición de } +
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ se cumple 7}$$

Sean $X, Y, Z \in A$
Pd. $(X+Y)\cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$

$$
\begin{aligned}
(X+Y)\cdot Z &= (X \vartriangle Y)\cdot Z && \text{Por definición de } + \\
(X \vartriangle Y)\cdot Z &= (X \vartriangle Y)\cap Z && \text{Por definición de } \cdot \\
(X \vartriangle Y)\cap Z &= (X \cap Z) \vartriangle (Y \cap Z) && \text{Por propiedades de } \cap, \vartriangle \\
(X \cap Z) \vartriangle (Y \cap Z) &= (X \cdot Z) \vartriangle (Y \cdot Z) && \text{Por definición de } \cdot \\
(X \cdot Z) \vartriangle (Y \cdot Z) &= (X \cdot Z) + (Y \cdot Z) && \text{Por definición de } +
\end{aligned}
$$

$\therefore$ se cumple 8
$\therefore \quad (\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo

Definición 2. En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo, si $\cdot$ es asociativo entonces decimos que es anillo conmutativo

Sean $A, B \in \mathcal{A}$
Pd. $A \cdot B = B \cdot A$

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= A \cap B && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cap B &= B \cap A && \text{Porque } \cap \text{ es conmutativa} \\
B \cap A &= B \cdot A && \text{Por definición de } \cdot
\end{aligned}
$$

$\therefore \cdot$ es conmutativo en $\mathcal{A}$

3. Demuestra que el conjunto de matrices de 3 x 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ (denotado $M_{3x3}(\mathbb{Z})$) forma un anillo con la suma y producto de matrices definidas en la tarea 2. Con un ejemplo muestra que este anillo no cumple la ley de cancelación del producto.

Sean $M, N, P \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$

Pd. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ p+\xi & q+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \right) && \text{Por definición de } + \\
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ p+\xi & q+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a+j+\alpha & b+k+\beta & c+l+\gamma \\ d+m+\epsilon & e+n+\eta & f+o+\theta \\ g+p+\xi & h+q+\omega & i+r+\delta \end{pmatrix} && \text{Por definición de } + \\
\begin{pmatrix} a+j+\alpha & b+k+\beta & c+l+\gamma \\ d+m+\epsilon & e+n+\eta & f+o+\theta \\ g+p+\xi & h+q+\omega & i+r+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (a+j)+\alpha & (b+k)+\beta & (c+l)+\gamma \\ (d+m)+\epsilon & (e+n)+\eta & (f+o)+\theta \\ (g+p)+\xi & (h+q)+\omega & (i+r)+\delta \end{pmatrix} && \text{Pues } + \text{ en } \mathbb{Z} \text{ es asociativa} \\
\begin{pmatrix} (a+j)+\alpha & (b+k)+\beta & (c+l)+\gamma \\ (d+m)+\epsilon & (e+n)+\eta & (f+o)+\theta \\ (g+p)+\xi & (h+q)+\omega & (i+r)+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} && \text{Por def de } + \text{ en } M_{3x3}(\mathbb{Z}) \\
\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} && \text{Por defde } + \text{ en } M_{3x3}(\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

$\therefore +$ es asociativa en $M_{3x3}(\mathbb{Z})$

Sean $M, N \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$

$$
M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}
$$

Por demostrar $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} \qquad \text{Porque en } \mathbb{Z}, + \text{ es conmutativa}$$

$$\begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\therefore + \text{ es conmutativa en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Proponemos $\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$

Pd. $M + \hat{0} = M$, $\quad i.e \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{Porque 0 es neutro ad. en } \mathbb{Z}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es el neutro aditivo en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$, Por demostrar

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proponemos $\hat{M} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Pues en } \mathbb{Z} \text{ existen inversos aditivos}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M \text{ es la inversa aditiva de } M$$

La prueba de Asociatividad para el producto se anexa en una página diferente debido a su dimensión