



Álgebra Superior II

Tarea 3

Prof. Patricia Pellicer Covarruvias

Ayud. Irving Hernández Rosas

Kevin Ariel Merino Peña



1. Considera una familia \mathcal{A} de subconjunto no vacíos de \mathbb{N} tal que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, sea el conjunto $\mathcal{A}_n = \{C \in \mathcal{A} : n \in C\}$ (Observa que este conjunto es no vacío), y define

$$U_n = \bigcap_{C \in \mathcal{A}_n} C$$

Es decir, U_n es la intersección de todos los conjuntos de la familia \mathcal{A} que tiene al elemento n .

Se define la relación $\sim_{\mathcal{A}}$ en \mathbb{N} dada por $n \sim_{\mathcal{A}} m$ si y sólo si $n \in U_m$. Demuestra o da contraejemplo de las siguientes afirmaciones

- $\sim_{\mathcal{A}}$ es reflexiva;
- $\sim_{\mathcal{A}}$ es transitiva;
- $\sim_{\mathcal{A}}$ es antisimétrica;

2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Definimos las operaciones $+$ y \cdot en \mathcal{A} como

$$B + C = B \Delta C \quad \text{y} \quad B \cdot C = B \cap C$$

Demuestra que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo (*Puedes utilizar, sin demostrarlo que la diferencia simétrica Δ es asociativa*)

Definición 1. $(A, +, \cdot)$ es un anillo si cumple

1. Asociatividad para la suma

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

2. Conmutatividad para la suma

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad a + b = b + a$$

3. Existencia del neutro aditivo

$$\exists \hat{0} \in \mathcal{A} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a + \hat{0} = a$$

4. Existencia de inversos aditivos

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad \exists \hat{a} \quad \cdot \cdot \cdot \quad a + \hat{a} = \hat{0}$$

5. Asociatividad para el producto

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

6. Existencia del neutro multiplicativo

$$\exists \hat{1} \in \mathcal{A} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a \cdot \hat{1} = a = \hat{1} \cdot a$$

7. Distributividad por la izquierda

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

8. Distributividad por la derecha

$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

$$A + (B + C)$$

P.d $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$A + (B + C) = A + (B \triangle C)$$

Por definición de $+$ en \mathcal{A}

$$A + (B \triangle C) = A \triangle (B \triangle C)$$

Esto significa $+$

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

Porque \triangle es asociativa

$$(A \triangle B) \triangle C = (A + B) + C$$

Por definición de $+$, de nuevo

$\therefore +$ es asociativa en \mathcal{A}

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

$$A + B$$

P.d $A + B = B + A$

$$A + B = A \triangle B$$

Por definición de $+$ en \mathcal{A}

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Por definición de \triangle

$$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$$

Porque \cup es conmutativa

$$(B - A) \cup (A - B) = B \triangle A$$

Por definición de \triangle

$$B \triangle A = B + A$$

Por definición de $+$

$\therefore +$ es conmutativa en \mathcal{A}

Proponemos $\hat{0} = \emptyset$, entonces

Sea $A \in \mathcal{A}$, Pd. $A + \emptyset = A$

$$A + \emptyset = A \triangle \emptyset$$

Por definición de $+$

$$A \triangle \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$$

Por definición de \triangle

$$(A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset$$

Obs. $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$

$$A \cup \emptyset = A$$

Por propiedades del vacío

$\therefore \emptyset$ es el neutro aditivo en \mathcal{A}

Sea $A \in \mathcal{A}$ Pd. $A + \hat{A} = \emptyset$

Proponemos $\hat{A} = A$

$$A + A = A \triangle A$$

Definición de $+$ en \mathcal{A}

$$A \triangle A = (A - A) \cup (A - A)$$

Definición de \triangle

$$(A - A) \cup (A - A) = \emptyset$$

Por propiedades de \triangle

$\therefore A$ es el inverso aditivo de A en \mathcal{A}

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

$A \cdot (C \cdot D)$ Pd. $A \cdot (C \cdot D) = (A \cdot C) \cdot D$

$$A \cdot (C \cdot D) = A \cdot (C \cap D)$$

Por definición de \cdot

$$A \cdot (C \cap D) = A \cap (C \cap D)$$

Por definición de \cdot

$$A \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap D$$

Porque \cap es asociativa

$$(A \cap C) \cap D = (A \cdot C) \cap D$$

Por definición de \cdot

$$(A \cdot C) \cap D = (A \cdot C) \cdot D$$

Por definición de \cdot

$\therefore \cdot$ es asociativo en \mathcal{A}

Proponemos $\hat{1} = A$

Sea $A \in \mathcal{A}$ Pd. $A \cdot A = A = A \cdot A$

$$A \cdot A = A \cup A$$

Por definición de \cdot

$$A \cup A = A$$

Por idempotencia de \cup

La otra igualdad se prueba exactamente de la misma manera, $\therefore A$ es el inverso multiplicativo en \mathcal{A}

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

Pd. $A \cdot (B + C) = A \cdot C + A \cdot D$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot (B \Delta C)$$

Por definición de $+$

$$A \cdot (B \Delta C) = A \cap (B \Delta C)$$

Por definición de \cdot

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap D)$$

Por propiedades de \cap, Δ

$$(A \cap B) \Delta (A \cap D) = (A \cdot B) \Delta (A \cdot D)$$

Por definición de \cdot

$$(A \cdot B) \Delta (A \cdot D) = (A \cdot B) + (A \cdot D)$$

Por definición de $+$

\therefore se cumple 7

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{A}$

Pd. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$

$$(X + Y) \cdot Z = (X \Delta Y) \cdot Z$$

Por definición de $+$

$$(X \Delta Y) \cdot Z = (X \Delta Y) \cap Z$$

Por definición de \cdot

$$(X \Delta Y) \cap Z = (X \cap Z) \Delta (Y \cap Z)$$

Por propiedades de \cap, Δ

$$(X \cap Z) \Delta (Y \cap Z) = (X \cdot Z) \Delta (Y \cdot Z)$$

Por definición de \cdot

$$(X \cdot Z) \Delta (Y \cdot Z) = (X \cdot Z) + (Y \cdot Z)$$

Por definición de $+$

\therefore se cumple 8

$\therefore (\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo

Definición 2. En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo, si \cdot es asociativo entonces decimos que es anillo conmutativo

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

Pd. $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = A \cap B$$

Por definición de \cdot

$$A \cap B = B \cap A$$

Porque \cap es conmutativa

$$B \cap A = B \cdot A$$

Por definición de \cdot

$\therefore \cdot$ es conmutativo en \mathcal{A}

3. Demuestra que el conjunto de matrices de 3×3 con coeficientes en \mathbb{Z} (denotado $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$) forma un anillo con la suma y producto de matrices definidas en la tarea 2. Con un ejemplo muestra que este anillo no cumple la ley de cancelación del producto.

$$\text{Sean } M, N, P \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{Pd. } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ p+\xi & q+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \quad \text{Por definici3n de } + \\
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ p+\xi & q+\omega & r+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+j+\alpha & b+k+\beta & c+l+\gamma \\ d+m+\epsilon & e+n+\eta & f+o+\theta \\ g+p+\xi & h+q+\omega & i+r+\delta \end{pmatrix} \quad \text{Por definici3n de } + \\
\begin{pmatrix} a+j+\alpha & b+k+\beta & c+l+\gamma \\ d+m+\epsilon & e+n+\eta & f+o+\theta \\ g+p+\xi & h+q+\omega & i+r+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (a+j)+\alpha & (b+k)+\beta & (c+l)+\gamma \\ (d+m)+\epsilon & (e+n)+\eta & (f+o)+\theta \\ (g+p)+\xi & (h+q)+\omega & (i+r)+\delta \end{pmatrix} \quad \text{Pues } + \text{ en } \mathbb{Z} \text{ es asociativa} \\
\begin{pmatrix} (a+j)+\alpha & (b+k)+\beta & (c+l)+\gamma \\ (d+m)+\epsilon & (e+n)+\eta & (f+o)+\theta \\ (g+p)+\xi & (h+q)+\omega & (i+r)+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \quad \text{Por def de } + \text{ en } M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}) \\
\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \quad \text{Por def de } + \text{ en } M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$\therefore +$ es asociativa en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

Sean $M, N \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

$$\text{Por demostrar } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} \quad \text{Por definici3n de } +$$

$$\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} \quad \text{Porque en } \mathbb{Z}, + \text{ es conmutativa}$$

$$\begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{Por definici3n de } +$$

$\therefore +$ es conmutativa en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$$\text{Proponemos } \hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Sea } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$$

$$\text{Pd. } M + \hat{0} = M, \quad \text{i.e. } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} \quad \text{Por definici3n de } +$$

$$\begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{Porque } 0 \text{ es neutro ad. en } \mathbb{Z}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es el neutro aditivo en } M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$$

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$, Por demostrar

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Proponemos } \hat{M} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} \quad \text{Por definici3n de } +$$

$$\begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Pues en } \mathbb{Z} \text{ existen inversos aditivos}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M \text{ es la inversa aditiva de } M$$

La prueba de Asociatividad para el producto se anexa en una p1gina diferente debido a su dimensi3n

$$\therefore \cdot \text{ es asociativo en } M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$$

$$\text{Proponemos } \hat{1} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y sea } M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Por demostrar: } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(0)b+(0)c & +(0)a+b+(0)c & (0)a+(0)b+c \\ d+(0)e+(0)f & (0)d+e+(0)f & (0)d+(0)e+f \\ g+(0)h+(0)i & (0)g+h+(0)i & (0)g+(0)h+i \end{pmatrix} \text{ Por def. de } \cdot$$

$$\begin{pmatrix} a+(0)b+(0)c & +(0)a+b+(0)c & (0)a+(0)b+c \\ d+(0)e+(0)f & (0)d+e+(0)f & (0)d+(0)e+f \\ g+(0)h+(0)i & (0)g+h+(0)i & (0)g+(0)h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ En } \mathbb{Z} \text{ el producto de } 0 \text{ por un elemento es } 0$$

Por otra parte veamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1)+b(0)+c(0) & a(0)+b(1)+c(0) & a(0)+b(0)+c(1) \\ d(1)+e(0)+f(0) & d(0)+e(1)+f(0) & d(0)+e(0)+f(0) \\ g(1)+h(0)+i(0) & g(0)+h(1)+i(0) & g(0)+h(0)+i(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(1)+b(0)+c(0) & a(0)+b(1)+c(0) & a(0)+b(0)+c(1) \\ d(1)+e(0)+f(0) & d(0)+e(1)+f(0) & d(0)+e(0)+f(0) \\ g(1)+h(0)+i(0) & g(0)+h(1)+i(0) & g(0)+h(0)+i(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la matriz neutra multiplicativa en } M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$$

$$\text{Sean } M, N, P \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

Por demostrar
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ q+\xi & p+\omega & r+\delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(j+\alpha) + b(m+\epsilon) + c(q+\xi) & a(k+\beta) + b(n+\eta) + c(p+\omega) & a(l+\gamma) + b(o+\theta) + c(r+\delta) \\ d(j+\alpha) + e(m+\epsilon) + f(q+\xi) & d(k+\beta) + e(n+\eta) + f(p+\omega) & d(l+\gamma) + e(o+\theta) + f(r+\delta) \\ g(j+\alpha) + h(m+\epsilon) + i(q+\xi) & g(k+\beta) + h(n+\eta) + i(p+\omega) & g(l+\gamma) + h(o+\theta) + i(r+\delta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aj + a\alpha + bm + b\epsilon + cq + c\xi & ak + a\beta + bn + b\eta + cp + c\omega & al + a\gamma + bo + b\theta + cr + c\delta \\ dj + d\alpha + em + e\epsilon + fq + f\xi & dk + d\beta + en + e\eta + fp + f\omega & dl + d\gamma + eo + e\theta + fr + f\delta \\ gj + g\alpha + hm + h\epsilon + iq + i\xi & gk + g\beta + hn + h\eta + ip + i\omega & gl + g\gamma + ho + h\theta + ir + r\delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aj + bm + cq & ak + bn + cp & al + bo + cr \\ dj + em + fq & dk + en + fp & dl + eo + fr \\ gj + hm + iq & gk + hn + ip & gl + ho + ir \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\alpha + b\epsilon + c\xi & a\beta + b\eta + c\omega & a\gamma + b\theta + c\delta \\ d\alpha + e\epsilon + f\xi & d\beta + e\eta + f\omega & d\gamma + e\theta + f\delta \\ g\alpha + h\epsilon + i\xi & g\beta + h\eta + i\omega & g\gamma + h\theta + r\delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

\therefore se cumple (7) en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$$\text{Sean } X, Y, Z \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}), \quad X = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Por demostrar: } (X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z \text{ i.e. } \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ q+\xi & p+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ & = \\ & \begin{pmatrix} (j+\alpha)a + (m+\epsilon)b + (q+\xi)c & (k+\beta)a + (n+\eta)b + (p+\omega)c & (l+\gamma)a + (o+\theta)b + (r+\delta)c \\ (j+\alpha)d + (m+\epsilon)e + (q+\xi)f & (k+\beta)d + (n+\eta)e + (p+\omega)f & (l+\gamma)d + (o+\theta)e + (r+\delta)f \\ (j+\alpha)g + (m+\epsilon)h + (q+\xi)i & (k+\beta)g + (n+\eta)h + (p+\omega)i & (l+\gamma)g + (o+\theta)h + (r+\delta)i \end{pmatrix} \\ & = \\ & \begin{pmatrix} aj + a\alpha + bm + b\epsilon + cq + c\xi & ak + a\beta + bn + b\eta + cp + c\omega & al + a\gamma + bo + b\theta + cr + c\delta \\ dj + d\alpha + em + e\epsilon + fq + f\xi & dk + d\beta + en + e\eta + fp + f\omega & dl + d\gamma + eo + e\theta + fr + f\delta \\ gj + g\alpha + hm + h\epsilon + iq + i\xi & gk + g\beta + hn + h\eta + ip + i\omega & gl + g\gamma + ho + h\theta + ir + r\delta \end{pmatrix} \\ & = \\ & \begin{pmatrix} aj + bm + cq & ak + bn + cp & al + bo + cr \\ dj + em + fq & dk + en + fp & dl + eo + fr \\ gj + hm + iq & gk + hn + ip & gl + ho + ir \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\alpha + b\epsilon + c\xi & a\beta + b\eta + c\omega & a\gamma + b\theta + c\delta \\ d\alpha + e\epsilon + f\xi & d\beta + e\eta + f\omega & d\gamma + e\theta + f\delta \\ g\alpha + h\epsilon + i\xi & g\beta + h\eta + i\omega & g\gamma + h\theta + r\delta \end{pmatrix} \\ & = \\ & \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\therefore se cumple (8) en $M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$

$\therefore (M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ es un **Anillo**

Definición 3. Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo, decimos que cumple la ley de cancelación del producto si

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \neq 0, \quad ab = ac \implies b = c$$

$$\text{En nuestro contraejemplo tomemos } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se puede observar que } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y notemos que $C \neq B$, \therefore No se cumple la ley de la cancelación para el producto

4. Recuerda el anillo $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ definido en el problema 4 de la tarea 2. ¿Este anillo es un dominio entero? Demuestra tus afirmaciones.

5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo cualquiera y sean $u, v \in A$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Demuestra o da contraejemplo.

- Si u u v son unidades, entonces uv es unidad.
- Si u u v son unidades, entonces $u + v$ es unidad.
- Si $u + v$ es unidad, entonces u es unidad o v es unidad.
- Si u es unidad, entonces su inverso aditivo es unidad.

6. Considera el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ con operaciones \oplus y \odot definidas como aparece en las siguientes tablas: Se puede

\oplus	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

\odot	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

probar, pero no es necesario que lo hagas, que (A, \oplus, \odot) es un anillo. Responde las siguientes preguntas demostrando todas tus afirmaciones

- ¿Cuál es el neutro aditivo?
 - ¿Cuál es el neutro multiplicativo?
 - ¿Este anillo es conmutativo?
 - ¿Este anillo es dominio entero?
 - ¿Cuáles son las unidades?
7. ¿Falso o verdadero? Demuestra o da contraejemplo:

- (\mathcal{C}, \leq) es COTO
- (\mathcal{C}, \leq) es COBO

8. Sea $a = [(a_1, a_2)] \in \mathcal{C}$. Si $-a$ denota el inverso aditivo de a , muestra que:

- $[(1, 2)] \cdot [(a_1, a_2)] = -a$
- $-(-a) = [(a_1, a_2)]$

9. Sean $[(a, b)], [(c, d)], [(e, f)], [(g, h)] \in \mathcal{C}$. Demuestra lo siguiente:

- Si $[(a, b)] \leq [(1, 1)]$ y $[(c, d)] \leq [(e, f)]$, entonces $[(a, b)] \cdot [(e, f)] \leq [(a, b)] \cdot [(c, d)]$.
- Si $[(a, b)] \leq [(c, d)]$ y $[(e, f)] \leq [(g, h)]$, entonces $[(a, b)] + [(e, f)] \leq [(c, d)] + [(g, h)]$.
- Si $[(1, 1)] < [(a, b)] \leq [(c, d)]$ y $[(1, 1)] < [(e, f)] \leq [(g, h)]$, entonces $[(a, b)] \cdot [(e, f)] \leq [(c, d)] \cdot [(g, h)]$.

10. Demuestra que existe una función $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ que tiene las siguientes propiedades:

- i es inyectiva
- i preserva la suma ($\forall n, m \in \mathbb{N} : i(n + m) = i(n) + i(m)$)
- i preserva el producto ($\forall n, m \in \mathbb{N} : i(n \cdot m) = i(n) \cdot i(m)$)
- i preserva el orden ($\forall n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \iff i(n) \leq i(m)$)

La función i muestra que el conjunto \mathcal{C} contiene una « copia exacta » del conjunto \mathbb{N} , en el sentido de que las propiedades fundamentales de los números naturales - su aritmética y su orden usual, se transfieren de manera adecuada al conjunto \mathcal{C} .

11. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demuestre que: a) $|-a| = |a|$ y $|a|$,

- $|a| \geq 0$,
- $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$,
- $|ab| = |a||b|$,
- $||b| - |c|| \leq |b - c|$,
- $2\max\{a, b\} = a + b + |a - b|$
- $2\min\{a, b\} = a + b - |a - b|$

12. Encuentra el cociente q y el residuo r que satisfagan el Algoritmo de la División para escribir $a = bq + r$, donde a y b son los siguientes:

- $a = 7392, b = -43$
- $a = -7392, b = -43$
- $a = -37, b = 3$
- $a = -12, b = -90$
- $a = -90, b = -12$

13. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Demuestra lo siguiente:

- Si $0|a$ entonces $a = 0$
- Si $a|b$, entonces $a|bc$.
- Si $a|b$ y $c|d$, entonces $ac|bd$
- Si $a|b$, entonces $ac|bc$.
- Si $a|b$, entonces $a|-b, -a|b$ y $-a|-b$
- Si $a|2b$, y $a|-5b$, entonces $a|b$.