Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra Superior II

2^{do} Parcial Tarea 1
Kevin Ariel Merino Peña 317031326
16 de marzo de 2020

---

2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathcal{A}$ como

$$B + C = B \bigtriangleup C \quad \text{y} \quad B \cdot C = B \cap C$$

Demuestra que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo *(Puedes utilizar, sin demostrarlo que la diferencia simétrica $\bigtriangleup$ es asociativa)*

Definición 1. $(A, +, \cdot)$ es un anillo si cumple

1. Asociatividad para la suma
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \qquad a + (b + c) = (a + b) + c$$
2. Conmutatividad para la suma
$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad a + b = b + a$$
3. Existencia del neutro aditivo
$$\exists \hat{0} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a + \hat{0} = a$$
4. Existencia de inversos aditivos
$$\forall a \in A \quad \exists \hat{a} \quad \cdot \ni \cdot \quad a + \hat{a} = \hat{0}$$
5. Asociatividad para el producto
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
6. Existencia del neutro multiplicativo
$$\exists \hat{1} \in \mathcal{A} \quad \cdot \ni \cdot \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad a \cdot \hat{1} = a = \hat{1} \cdot a$$
7. Distributividad por la izquierda
$$\forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
8. Distributividad por la derecha
$$\forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$

$$A + (B + C)$$

P.d $A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + (B + C) = A + (B \bigtriangleup C)$	Por definición de $+$ en $\mathcal{A}$
$A + (B \bigtriangleup C) = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$	Esto sginifica $+$
$A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$	Porque $\bigtriangleup$ es asociativa
$(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = (A + B) + C$	Por definición de $+$, de nuevo

$$\therefore + \text{ es asociativa en } \mathcal{A}$$

Sean $A, B \in \mathcal{A}$

$$A + B$$

P.d $A + B = B + A$

$A + B = A \bigtriangleup B$	Por definición de $+$ en A
$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A)$	Por definición de $\bigtriangleup$
$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$	Porque $\cup$ es conmitativa
$(B - A) \cup (A - B) = B \bigtriangleup A$	Por definición de $\bigtriangleup$
$B \bigtriangleup A = B + A$	Por definición de $+$

$$\therefore + \text{ es conmutativa en } \mathcal{A}$$

Proponemos $\hat{0} = \varnothing$, entonces
Sea $A \in \mathcal{A}$, Pd. $A + \varnothing = A$

$$\begin{aligned}
A + \varnothing &= A \bigtriangleup \varnothing && \text{Por definición de } + \\
A \bigtriangleup \varnothing &= (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) && \text{Por definición de } \bigtriangleup \\
(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) &= A \cup \varnothing && \text{Obs. } A - \varnothing = A, \quad \varnothing - A = \varnothing \\
A \cup \varnothing &= A && \text{Por propiedades del vacío}
\end{aligned}$$

$$\therefore \varnothing \text{ es el neutro aditivo en } \mathcal{A}$$

Sea $A \in A$ Pd. $A + \hat{A} = \varnothing$
Proponemos $\hat{A} = A$

$$\begin{aligned}
A + A &= A \bigtriangleup A && \text{Definición de } + \text{ en } \mathcal{A} \\
A \bigtriangleup A &= (A - A) \cup (A - A) && \text{Definición de } \bigtriangleup \\
(A - A) \cup (A - A) &= \varnothing && \text{Por propiedades de } \bigtriangleup
\end{aligned}$$

$$\therefore A \text{ es el inverso aditivo de } A \text{ en } \mathcal{A}$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$
$A \cdot (C \cdot D)$ Pd. $A \cdot (C \cdot D) = (A \cdot C) \cdot D$

$$\begin{aligned}
A \cdot (C \cdot D) &= A \cdot (C \cap D) && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cdot (C \cap D) &= A \cap (C \cap D) && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cap (C \cap D) &= (A \cap C) \cap D && \text{Porque } \cap \text{ es asosciativa} \\
(A \cap C) \cap D &= (A \cdot C) \cap D && \text{Por definición de } \cdot \\
(A \cdot C) \cap D &= (A \cdot C) \cdot D && \text{Por definición de } \cdot
\end{aligned}$$

$$\therefore \cdot \text{ es asociativo en } \mathcal{A}$$

Proponemos $\hat{1} = A$
Sea $A \in \mathcal{A}$ Pd. $A \cdot A = A = A \cdot A$

$$\begin{aligned}
A \cdot A &= A \cup A && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cup A &= A && \text{Por idempotencia de } \cup
\end{aligned}$$

La otra igualdad se prueba exactamente de la misma manera, $\therefore A$ es el inverso multiplicativo en $\mathcal{A}$

Sean $A, B, C \in \mathcal{A}$
Pd. $A \cdot (B + C) = A \cdot C + A \cdot D$

$$\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= A \cdot (B \bigtriangleup C) && \text{Por definición de } + \\
A \cdot (B \bigtriangleup C) &= A \cap (B \bigtriangleup C) && \text{Por definición de } \cdot \\
A \cap (B \bigtriangleup C) &= (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap D) && \text{Por porpiedades de } \cap, \bigtriangleup \\
(A \cap B) \bigtriangleup (A \cap D) &= (A \cdot B) \bigtriangleup (A \cdot D) && \text{Por definición de } \cdot \\
(A \cdot B) \bigtriangleup (A \cdot D) &= (A \cdot B) + (A \cdot D) && \text{Por definición de } +
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ se cumple 7}$$

Sean $X, Y, Z \in A$
Pd. $(X+Y)\cdot Z = X\cdot Z + Y\cdot Z$

$$
\begin{aligned}
(X+Y)\cdot Z &= (X \vartriangle Y)\cdot Z && \text{Por definición de } + \\
(X \vartriangle Y)\cdot Z &= (X \vartriangle Y)\cap Z && \text{Por definición de } \cdot \\
(X \vartriangle Y)\cap Z &= (X\cap Z) \vartriangle (Y\cap Z) && \text{Por propiedades de } \cap, \vartriangle \\
(X\cap Z) \vartriangle (Y\cap Z) &= (X\cdot Z) \vartriangle (Y\cdot Z) && \text{Por definición de } \cdot \\
(X\cdot Z) \vartriangle (Y\cdot Z) &= (X\cdot Z) + (Y\cdot Z) && \text{Por definición de } +
\end{aligned}
$$

$\therefore$ se cumple 8
$\therefore \quad (\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo

Definición 2. En $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo, si $\cdot$ es asociativo entonces decimos que es anillo conmutativo

Sean $A, B \in \mathcal{A}$
Pd. $A\cdot B = B\cdot A$

$$
\begin{aligned}
A\cdot B &= A\cap B && \text{Por definición de } \cdot \\
A\cap B &= B\cap A && \text{Porque } \cap \text{ es conmutativa} \\
B\cap A &= B\cdot A && \text{Por definición de } \cdot
\end{aligned}
$$

$\therefore \cdot$ es conmutativo en $\mathcal{A}$

3. Demuestra que el conjunto de matrices de 3 x 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ (denotado $M_{3x3}(\mathbb{Z})$) forma un anillo con la suma y producto de matrices definidas en la tarea 2. Con un ejemplo muestra que este anillo no cumple la ley de cancelación del producto.

Sean $M, N, P \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$

Pd. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ p+\xi & q+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \right) && \text{Por definición de } + \\
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ p+\xi & q+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a+j+\alpha & b+k+\beta & c+l+\gamma \\ d+m+\epsilon & e+n+\eta & f+o+\theta \\ g+p+\xi & h+q+\omega & i+r+\delta \end{pmatrix} && \text{Por definición de } + \\
\begin{pmatrix} a+j+\alpha & b+k+\beta & c+l+\gamma \\ d+m+\epsilon & e+n+\eta & f+o+\theta \\ g+p+\xi & h+q+\omega & i+r+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (a+j)+\alpha & (b+k)+\beta & (c+l)+\gamma \\ (d+m)+\epsilon & (e+n)+\eta & (f+o)+\theta \\ (g+p)+\xi & (h+q)+\omega & (i+r)+\delta \end{pmatrix} && \text{Pues } + \text{ en } \mathbb{Z} \text{ es asociativa} \\
\begin{pmatrix} (a+j)+\alpha & (b+k)+\beta & (c+l)+\gamma \\ (d+m)+\epsilon & (e+n)+\eta & (f+o)+\theta \\ (g+p)+\xi & (h+q)+\omega & (i+r)+\delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} && \text{Por def de } + \text{ en } M_{3x3}(\mathbb{Z}) \\
\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} && \text{Por defde } + \text{ en } M_{3x3}(\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

$\therefore +$ es asociativa en $M_{3x3}(\mathbb{Z})$

Sean $M, N \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$

$$
M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}
$$

Por demostrar $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} \qquad \text{Porque en } \mathbb{Z}, + \text{ es conmutativa}$$

$$\begin{pmatrix} j+a & k+b & l+c \\ m+d & n+e & o+f \\ p+g & q+h & r+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\therefore + \text{ es conmutativa en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Proponemos $\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$

Pd. $M + \hat{0} = M$, $\quad i.e \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\begin{pmatrix} a+0 & b+0 & c+0 \\ d+0 & e+0 & f+0 \\ g+0 & h+0 & i+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{Porque 0 es neutro ad. en } \mathbb{Z}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es el neutro aditivo en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{Z})$, Por demostrar

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proponemos $\hat{M} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} \qquad \text{Por definición de } +$$

$$\begin{pmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Pues en } \mathbb{Z} \text{ existen inversos aditivos}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -M \text{ es la inversa aditiva de } M$$

La prueba de Asociatividad para el producto se anexa en una página diferente debido a su dimensión

$$\therefore \cdot \text{ es asociativo en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Proponemos $\hat{1} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y sea $M \in M_{3x3}(\mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Por demostrar: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (0)b + (0)c & +(0)a + b + (0)c & (0)a + (0)b + c \\ d + (0)e + (0)f & (0)d + e + (0)f & (0)d + (0)e + f \\ g + (0)h + (0)i & (0)g + h + (0)i & (0)g + (0)h + i \end{pmatrix} \text{ Por def. de } \cdot$$

$$\begin{pmatrix} a + (0)b + (0)c & +(0)a + b + (0)c & (0)a + (0)b + c \\ d + (0)e + (0)f & (0)d + e + (0)f & (0)d + (0)e + f \\ g + (0)h + (0)i & (0)g + h + (0)i & (0)g + (0)h + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ En } \mathbb{Z} \text{ el producto de 0 por un elemento es 0}$$

Por otra parte veamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1) + b(0) + c(0) & a(0) + b(1) + c(0) & a(0) + b(0) + c(1) \\ d(1) + e(0) + f(0) & d(0) + e(1) + f(0) & d(0) + e(0) + f(0) \\ g(1) + h(0) + i(0) & g(0) + h(1) + i(0) & g(0) + h(0) + i(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(1) + b(0) + c(0) & a(0) + b(1) + c(0) & a(0) + b(0) + c(1) \\ d(1) + e(0) + f(0) & d(0) + e(1) + f(0) & d(0) + e(0) + f(0) \\ g(1) + h(0) + i(0) & g(0) + h(1) + i(0) & g(0) + h(0) + i(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la matriz neutra multiplicativa en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

Sean $M, N, P \in M_{3x3}(\mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$

Por demostrar $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ q+\xi & p+\omega & r+\delta \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} a(j+\alpha) + b(m+\epsilon) + c(q+\xi) & a(k+\beta) + b(n+\eta) + c(p+\omega) & a(l+\gamma) + b(o+\theta) + c(r+\delta) \\ d(j+\alpha) + e(m+\epsilon) + f(q+\xi) & d(k+\beta) + e(n+\eta) + f(p+\omega) & d(l+\gamma) + e(o+\theta) + f(r+\delta) \\ g(j+\alpha) + h(m+\epsilon) + i(q+\xi) & g(k+\beta) + h(n+\eta) + i(p+\omega) & g(l+\gamma) + h(o+\theta) + i(r+\delta) \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} aj + a\alpha + bm + b\epsilon + cq + c\xi & ak + a\beta + bn + b\eta + cp + c\omega & al + a\gamma + bo + b\theta + cr + c\delta \\ dj + d\alpha + em + e\epsilon + fq + f\xi & dk + d\beta + en + e\eta + fp + f\omega & dl + d\gamma + eo + e\theta + fr + f\delta \\ gj + g\alpha + hm + h\epsilon + iq + i\xi & gk + g\beta + hn + h\eta + ip + i\omega & gl + g\gamma + ho + h\theta + ir + r\delta \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} aj + bm + cq & ak + bn + cp & al + bo + cr \\ dj + em + fq & dk + en + fp & dl + eo + fr \\ gj + hm + iq & gk + hn + ip & gl + ho + ir \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\alpha + b\epsilon + c\xi & a\beta + b\eta + c\omega & a\gamma + b\theta + c\delta \\ d\alpha + e\epsilon + f\xi & d\beta + e\eta + f\omega & d\gamma + e\theta + f\delta \\ g\alpha + h\epsilon + i\xi & g\beta + h\eta + i\omega & g\gamma + h\theta + r\delta \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \cdot \text{ se cumple (7) en } M_{3x3}(\mathbb{Z})$$

$$\text{Sean } X,Y,Z \in M_{3x3}(\mathbb{Z}), \qquad X = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Por demostrar: $(X+Y)\cdot Z = X\cdot Z + Y * Z$ i.e.

$$\left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j+\alpha & k+\beta & l+\gamma \\ m+\epsilon & n+\eta & o+\theta \\ q+\xi & p+\omega & r+\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} (j+\alpha)a+(m+\epsilon)b+(q+\xi)c & (k+\beta)a+(n+\eta)b+(p+\omega)c & (l+\gamma)a+(o+\theta)b+(r+\delta)c \\ (j+\alpha)d+(m+\epsilon)e+(q+\xi)f & (k+\beta)d+(n+\eta)e+(p+\omega)f & (l+\gamma)d+(o+\theta)e+(r+\delta)f \\ (j+\alpha)g+(m+\epsilon)h+(q+\xi)i & (k+\beta)g+(n+\eta)h+(p+\omega)i & (l+\gamma)g+(o+\theta)h+(r+\delta)i \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} aj+a\alpha+bm+b\epsilon+cq+c\xi & ak+a\beta+bn+b\eta+cp+c\omega & al+a\gamma+bo+b\theta+cr+c\delta \\ dj+d\alpha+em+e\epsilon+fq+f\xi & dk+d\beta+en+e\eta+fp+f\omega & dl+d\gamma+eo+e\theta+fr+f\delta \\ gj+g\alpha+hm+h\epsilon+iq+i\xi & gk+g\beta+hn+h\eta+ip+i\omega & gl+g\gamma+ho+h\theta+ir+r\delta \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} aj+bm+cq & ak+bn+cp & al+bo+cr \\ dj+em+fq & dk+en+fp & dl+eo+fr \\ gj+hm+iq & gk+hn+ip & gl+ho+ir \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\alpha+b\epsilon+c\xi & a\beta+b\eta+c\omega & a\gamma+b\theta+c\delta \\ d\alpha+e\epsilon+f\xi & d\beta+e\eta+f\omega & d\gamma+e\theta+f\delta \\ g\alpha+h\epsilon+i\xi & g\beta+h\eta+i\omega & g\gamma+h\theta+r\delta \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ q & p & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \eta & \theta \\ \xi & \omega & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$\therefore$ se cumple (8) en $M_{3x3}(\mathbb{Z})$

$\therefore$ $(M_{3x3}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ es un **Anillo**

Definición 3. Sea $(\mathcal{A},+,\cdot)$ un anillo, decimos que cumple la ley de cancelación del producto si

$$\forall a,b,c \in \mathcal{A} \qquad a \neq 0, \qquad ab = ac \implies b = c$$

$$\text{En nuestro contraejemplo tomemos } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se puede observar que } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y notemos que $C \neq B$, $\quad\therefore$ No se cumple la ley de la cancelación para el producto