Tarea 02

Matemáticas para las ciencias aplicadas I

Beristain Hernández Daniel, García Vázquez Ian Israel Merino Peña Kevin Ariel

1 de octubre de 2019

Continuidad

1. Determine si las siguientes funciones son continuas en x_0

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \text{ si } x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1, \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$ en $x_0 = 1$

b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

c) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, \text{ si } x \in [0,1] \\ -\sqrt{1-(x-2)^2}, \text{ si } x \in [1,2] \end{cases}$ en $x_0 = 1$

2. Se inyecta una fármaco a un paciente cada 12 horas. En la Fig. 1 se muestra la concentración $c(t)$ del fármaco en el torrente sanguíneo después de t horas.

a) ¿Para que valores de $t, c(t)$ tiene discontinuidades?

b) ¿Qué tipo discontinuidades tiene?

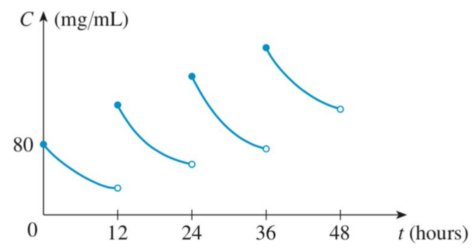


Figura 1: Concentración de un fármaco

Teorema del valor intermedio

3. Mostrar que existe algún número x, tal que:

a) $\sin x = x - 1$

b) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119$

c) $\cos x - \dfrac{1}{2} = x - 1$

d) $(2x^2 - 2)^2 = -x + 1$

4. Vea si en los siguientes incisos se cumple el teorema de valor intermedio y, en ese caso, calcule un valor intermedio.

a) $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$

b) $gf(x) = x^3$ en $[0, 2]$

c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$ en $[0, 1]$

d) $k(x) = 3x^2 - x - 1$ en $[-1, 1]$

5. Pruebe que las ecuaciones dadas, tienen una raíz en el intervalo que se señala

a) $x^3 + 7x^2 - 3x - 5 = 0$ en $[-3{,}2, 0{,}1]$

b) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 1 = 0$ en $[-2{,}1, 1{,}5]$

c) $x \sin x - \dfrac{1}{2} = 0$ en $[-1, 2]$

d) $x \cos x + \dfrac{1}{2} = 0$ en $[-1, 3{,}5]$

Derivada

6. Partiendo de la definición de derivada, mostrar que

a) si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ para $a \neq 0$

La derivada de una función existe si el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe, entonces

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \dfrac{1}{a} & \text{Esta es nuestra función original} \\
\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} & \text{Sustituyendo a por a+h} \\
\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} & \text{Operando la resta de fracciones} \\
\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\dfrac{h}{a(a+h)}}{h} & \text{Por el inverso aditivo de } a \\
\lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{h}{ha(a+h)} & \text{Operanddo la división de fracciones} \\
\lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{a(a+h)} & \text{Por el neutro multimplicativo de } h \\
-\dfrac{1}{a(a+(0))} & \text{Evaluando el límite} \\
-\dfrac{1}{a^2} \forall a \neq 0 & \text{Evaluando el límite}
\end{array}
$$

b) si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, entonces $f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$ para $a \neq 0$

La derivada de una función existe si el límite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe, entonces

$f(x) = \dfrac{1}{a^2}$	Esta es nuestra función original
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h}$	Sustituyendo a por a+h
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{a^2-(a+h)^2}{a^2(a+h)^2}}{h}$	Operando la resta de fracciones
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{a^2-a^2-2ah-h^2}{a^2(a+h)^2}}{h}$	Por el inverso aditivo de a
$\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{h(2a+h)}{ha^2(a+h)^2}$	Por el inverso aditivo de a
$\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{2a+h}{a^2(a+h)^2}$	Por el inverso aditivo de a
$-\dfrac{2a+(0)}{a^2(a+(0))^2}$	Por el inverso aditivo de a
$-\dfrac{2a}{a^4}$	Por el inverso aditivo de a
$-\dfrac{2}{a^3}$	Por el inverso aditivo de a

c) si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ para $a > 0$

7. Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $a \neq 0$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para $a \neq 0$

   c) $f(x) = \sqrt{x}$ para $a > 0$

8. Calcular $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones (sin importar los dominios de fyf').

   a) $f(x) = \sin(x + x^2)$

   b) $f(x) = \sin(x) + \sin(x^2)$

   c) $f(x) = \sin(\cos(x))$

   d) $f(x) = \sin(\sin(x))$

   e) $f(x) = \sin(x + \sin(x))$

   f) $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

   g) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)$

   h) $f(x) = \dfrac{\sin(\cos(x))}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{\cos(\cos(x))}{x}$

Teorema de Rolle

9. Dadas las siguientes funciones, encontrar un punto que satisfaga el teorema de Rolle

a) $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

d) $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

Teorema del Valor Medio

10. Dadas las siguientes funciones, encontrar un punto que satisfaga el teorema del Valor Medio

a) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{4/3}$

b) $f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$

c) $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 2x - 1$

d) $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Regla de L'Hôpital

11. Calcular los siguientes limites. Analice si se puede aplicar la regla de L'Hôpital

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan(x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{b^2 \cos(ax) - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{5x^2 - 10x + 5}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2}$

Derivadas de funciones compuestas

12. Para cada una de las siguientes funciones, hallar $f'(f(x))$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
&= -\frac{1}{(x+1)^2} \\
f'(f(x)) &= -\frac{1}{(f(x)+1)^2} \\
&= -\frac{1}{\left(\dfrac{1}{1+x}+1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{\dfrac{1+x+1}{x+1}} \\
&= -\frac{1}{\dfrac{x+2}{x+1}} \\
&= -\frac{x+1}{x+2}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\sin(x)) \\
&= \cos(x) \\
&= \cos(f(x)) \\
f'(f(x)) &= \cos(\sin(x))
\end{aligned}$$

c) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\
&= 2x \\
f'(f(x)) &= 2(f(x)) \\
&= 2(x^2)
\end{aligned}$$

d) $f(x) = 17$

aaaaa dudaaa, en la compisición de funciones pq, según yo no se puede

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \wedge D_{f \circ g} = \{x | x \in Dom_g \wedge g(x) \in Dom_f\}$$

13. Para cada una de las siguientes funciones, hallar $f(f'(x))$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2} \\
f(f'(x)) &= \left(\frac{1}{f'(x)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{-\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

b) $f(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\
&= 2x \\
f(f'(x)) &= (f'(x))^2 \\
&= (2x)^2 \\
&= 4x^2
\end{aligned}
$$

c) $f(x) = 17x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(17x) \\
&= 17 \\
f(f'(x)) &= 17(f'(x)) \\
&= 17(17) \\
&= 17^2
\end{aligned}
$$

d) $f(x) = 17$

aaaaa dudaaa, en la compisición de funciones pq, según yo no se puede

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \wedge D_{f \circ g} = \{x | x \in Dom_g \wedge g(x) \in Dom_f\}$$

14. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando los puntos del intervalo en que la derivada es cero y comparando los valores en estos puntos con los valores en los extremos.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ sobre $[-2, 2]$

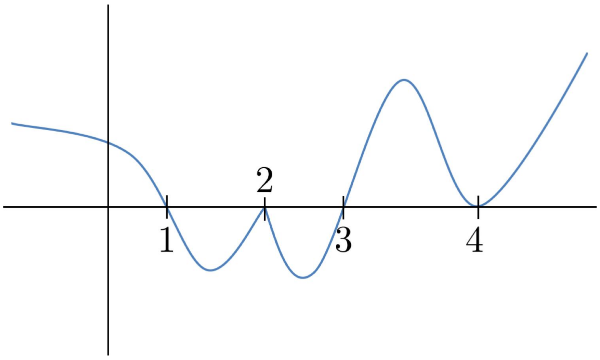
b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ sobre $[-1, \frac{1}{2}]$

c) $f(x) = x^3 + x + 1$ sobre $[-1, 1]$

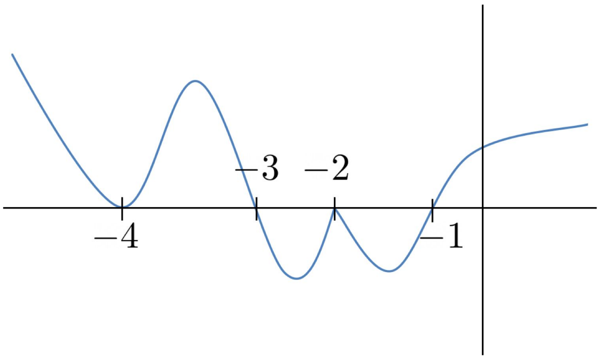
d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sobre $[0, 5]$

Interpretación geométrica de la derivada

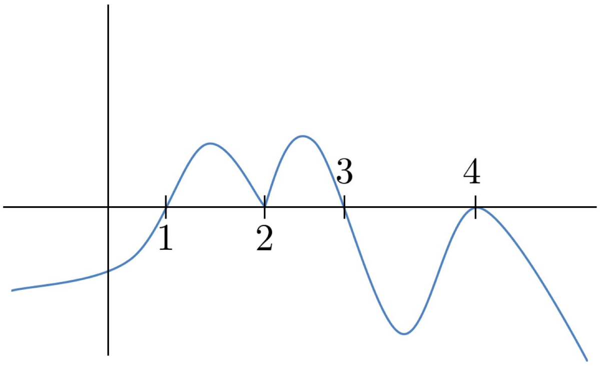
15. Cada una de las figuras siguientes, representan la gráfica de la derivada de una función f . Hallar todos los máximos y mínimos locales de la función f correspondiente, además diga cuando f es creciente o decreciente.



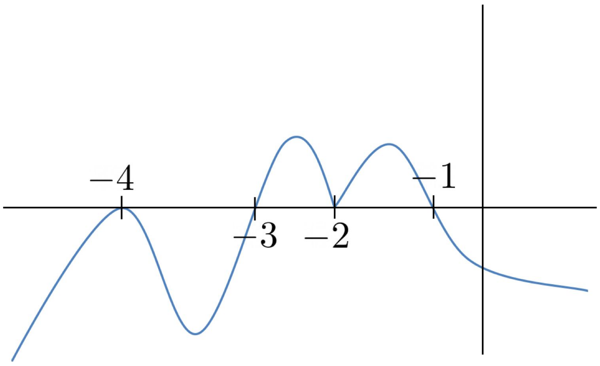
(a) Gráfica de la derivada de f



(b) Gráfica de la derivada de f



(c) Gráfica de la derivada de f



(d) Gráfica de la derivada de f

Figura 2

16. Utilizar los resultados sobre el significado de la derivada para esbozar la gráfica de las siguientes funciones (aplicar criterios de la primera y segunda derivada).

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

17. Mostrar que

a) la suma de un número real positivo y su recíproco es por lo menos 2.

b) Entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

c) Entre todos los rectángulos con la misma área, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

d) Entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en una circunferencia, el cuadrado es el de área máxima.

e) La razón de variación del volumen de una esfera respecto a su radio, es igual a su área.

18. Encuentre el punto para el cual

a) la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - 7x + 3$, es paralela a la recta $5x + 3y - 3 = 0$

b) la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - 7x + 3$, es paralela a la recta $3x - y - 4 = 0$

c) la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - 7x + 3$, es paralela a la recta $2x + 3y - 3 = 0$