16. Demuestre por inducción:

$$1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Caso base: n=1

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la proposición es cierta para $n=k\in\mathbb{N}$.
H.I:

$$1+2+3+....+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

P.D que la proposición es cierta para n=k+1

$$1+2+3+....+k+1=(1+2+3+...+k)+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{k+1[(k+1)+1]}{2}$$

$\therefore Se\ \ cumple\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

17. Demuestre por inducción:

$$1^2+2^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Caso base: n=1

$$1^2=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=\frac{1(2)(3)}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n=k\in\mathbb{N}$.
H.I:

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

P.D. que la proposición es cierta para n=k+1

$$1^2+2^2+...+k+1^2=(1^2+2^2+...+k^2)+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

$\therefore Se \;\; cumple \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

18. Encuentre una fórmula para la siguiente suma, luego demuestre dicha fórmula por inducción:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$$

Fórmula: La suma de n primeros números impares consecutivos es n^2, es decir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1 = n^2$$

Caso base: (Abarcaremos un par de casos)
a) n=1
$2(1) - 1 = 1^2$ (Primer número de impar)
$1 = 1$
b) n=2
$1 + 2(2) - 1 = 2^2$ (Se suma el primer número consecutivo, por eso el resultado es 4)
$4 = 4$
Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2k - 1 = k^2$$

P.D. Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2(k-1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2(k-1) + (2(k+1) - 1) = k^2 + (2(k+1) - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 2 - 1$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

$\therefore Se \;\; cumple \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

19. Mismas instrucciones que antes para:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$$

Fórmula:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Caso base: n=1

$$(2(1) - 1)^2 = \frac{1(2(1)-1)(2(1)+1)}{3}$$

$$1 = \frac{1(1)(3)}{3}$$

$$1 = 1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

P.D que la proposición es cierta para n=k+1

$$1^2+3^2+5^2+....+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2$$

Podemos ver que hay un factor común en ambos términos $((2k+1)y(2k+1)^2)$, así que lo extraemos

$$=(2k+1)[\frac{k(2k-1)}{3}+2k+1]$$

$$=(2k+1)[\frac{k(2k-1)+3(2k+1)}{3}]$$

$$=(2k+1)[\frac{2k^2-k+6k+3}{3}]$$

$$=(2k+1)[\frac{2k^2+5k+3}{3}$$

Factorizamos el trinomio

$$=\frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3}$$

$\therefore Se\ \ cumple\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

20. Demuestre por inducción:

$$1+r+r^2+r^3+...+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Caso base: n=1
El primer sumando del primer miembro es 1 el último es r^1, así tenemos

$$1+r$$

El segundo miembro queda

$$\frac{1-r^2}{1-r}=\frac{(1+r)(1-r)}{1-r}$$

entonces

$$1+r=1+r$$

Se cumple para $n=1$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n=k\in\mathbb{N}$.
H.I

$$1+r+r^2+r^3+...+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

P.D. que la proposición es cierta para n=k+1

$$1+r+r^2+r^3+...+r^k+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}+r^{k+1}...Por H.I$$

$$=\frac{1-r^{k+1}+r^{k+1}-r^{k+2}}{1-r}$$

$$=\frac{1-r^{(k+1)+1}}{1-r}$$

$\therefore Se\ \ cumple\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

21.Pruebe que: