Álgebra Superior I

Semestre 2020-2

Prof. Alejandro Dorantes Aldama

Ayud. Elmer Enrique Tovar Acosta

Ayud. Alejandro Ríos Herrejón

Tarea II

Kevin Ariel Merino Peña[2]

---

3. Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal

$$f(x) = ax + b$$

Es biyectiva siempre que $a \neq 0$

Sean $f(x)$ y $f(z) \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(z) && \text{Tomemos estas dos imágenes} \\ ax + b &= az + b && \text{Por la regla de correspondencia de } f \\ ax &= az && \text{Sumando el inverso aditivo de b en ambos miembros} \\ x &= z && \text{porque } a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f \text{ es inyectiva}$$

Luego, sea $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &= r + b && \text{Esto puede ocurrir para todo número real, con } r, b \in \mathbb{R} \\ x &= rn + b && \text{Además podemos ver a cualquier real como el producto de dos reales } n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\therefore x \in Img(f) \implies \mathbb{R} \subseteq Img(f)$$

La otra contención está dada por definición de la imagen de una función

$$\therefore \quad Img(f) = \mathbb{R} \implies f \text{ es suprayectiva.}$$

$$\therefore f \text{ es biyectiva.}$$

Además, si $g(x) = cx + d$ es otra función lineal, demuestre que

$$f = g$$

si y sólo si $a = c$, $b = d$ si y sólo si

$$f(0) = g(0) \qquad \text{y} \qquad f(1) = g(1)$$

$\Longrightarrow_1$

$$\begin{aligned} f(0) = g(0) \implies a(0) + b &= c(0) + d && \text{Por regla de correspondecia de } f, g \\ b &= d && \text{Porque } a \cdot 0 = 0 \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) = g(1) \implies a(1) + b &= c(1) + d && \text{Por regla de correspondecia de } f, g \\ a + b &= c + d && \text{Porque } x \cdot 1 = 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ a + b &= c + b && \text{Porque de lo anterior dedcimos que } b = d \\ a &= c && \text{Sumando en ambos miembros el inverso aditivo de } b \end{aligned}$$

$\Longleftarrow_1$

$$\begin{aligned} a &= c && \text{Por hipótesis} \\ ax &= cx && \text{multiplicando ambos miembros por } x \\ ax + b &= cx + d && \text{Pues por hipótesis } b = d \\ a(1) + b &= c(1) + d && \text{Sustituyendo } x = 1 \\ a(0) + b &= c(0) + d && \text{Evalando en } x = 0 \end{aligned}$$

[2] Número de cuenta: 317031326

De lo anterior tenemos que

$$a = c \wedge b = d \iff f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)$$

$\implies_2$

$$\begin{aligned} f = g \implies f(1) &= a(1) + b && \text{Por regla de corespondencia de} f \\ &= c(1) + d && \text{por la regla de correspondencia de } g \\ &= g(1) && \text{pues suponemos que } f = g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = g \implies f(0) &= a(0) + b && \text{Por regla de corespondencia de} f \\ &= b && \text{Por propiedades de los reales} \\ &= c(0) + d && \text{por la regla de correspondencia de } g \\ &= g(0) && \text{pues suponemos que } f = g \end{aligned}$$

$\impliedby_2$ (Emplearemos la transitividad de $\iff$)

$$\begin{aligned} a = c \wedge b = d \implies & f(x) = a(x) + b && \text{Por regla de correspondencia de } f \\ \implies & = c(x) + d && \text{Sutituyendo lo que estamos suponiendo} \\ \implies & = g(x) && \text{Por la regla de correspondencia de } g \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f = g \iff a = c \wedge b = d \iff f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)$$

8. Sea $X = \{f : \mathbb{N} \to \{1, 0\} \mid f \text{ es función }\}$. Dé una biyección entre X y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
Sea $g \in X$ y supongamos que

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1, 2, 3, 7 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

entonces sea γ una relación de X en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por:

$$(h, A) \in \gamma \iff A = \{x \in \mathbb{N} \mid h(x) = 1\}$$

Sea $r \in X$, proponemos $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ como $S = \{x \in \mathbb{N} \mid r(x) = 1\}$ entonces $(r, S) \in \gamma$ y como r es arbitrario entonces $Dom(\gamma) = X$.

Sea $t \in X$ y sean $S, W \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ supongamos que $(r, s), (r, w) \in \gamma$ *i.e.* $S = \{x \in \mathbb{N} \mid r(x) = 1\}$ y $W = \{x \in \mathbb{N} \mid r(x) = 1\}$, es claro que sus elementos son los mismos, por lo tanto $S = W$

$$\therefore \quad \gamma \text{ es función.}$$

Así, tenemos $\gamma : X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\gamma(v) = A$ donde $A = \{x \in \mathbb{N} \mid v(x) = 1\}$.

Sean $v(z), v(w) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\gamma(z) = \gamma(w)$	Supongamos esto
$\{x \in \mathbb{N} \mid z(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{N} \mid w(x) = 1\}$	Por la regla de correspondencia de γ
$z = w$	Por la elección del conjunto de funciones

$$\therefore \quad \gamma \text{ es inyectiva}$$

Observemos que $Img(\gamma) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por definición de imagen.
Sea $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, proponemos $f \in X \quad \cdot \ni \cdot \quad Img(f) = V$, entonces $V \in Img(\gamma)$

$$\therefore \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq Img(\gamma)$$
$$\therefore \quad \gamma \text{ es suprayectiva}$$
$$\therefore \quad \gamma \text{ es biyectiva}$$

12. Sea X un conjunto. Defina una relación R en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como sigue

$$(U, V) \in R \iff |U| = |V|$$

Demuestre que R es reflexiva, transitiva y simétrica. (emplearemos $\sim$ para denotar que dos elementos están relacionados)
Sea $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, como $|X| = |X|$, entonces

$$X \sim X$$

$$\text{y como } X \text{ es arbitrario, } \therefore \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \sim X$$
$$\therefore \quad R \text{ es reflexiva}$$

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Supongamos $X \sim Y$ y $Y \sim Z$, lo anterior es $|X| = |Y|$ y $|Y| = |Z|$, como $=$ es una relación binaria transitiva, entonces $|X| = |Z|$ *i.e.* $X \sim Z$

$$\text{y como } X, Y, Z \text{ son arbitrarios, } \therefore \forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \sim Y \wedge Y \sim Z \implies X \sim Z$$
$$\therefore \quad R \text{ es transitiva.}$$

Sean $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ supongamos $X \sim Y$ entonces $|X| = |Y|$ y como $=$ es una relación simétrica, entonces $|Y| = |X|$ *i.e.* $Y \sim X$.

$$\text{y como } X, Y \text{ son arbitrarios, } \therefore \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \sim Y \implies Y \sim X$$
$$\therefore \quad R \text{ es simétrica.}$$

(entonces es relación de equivalencia)

20. Demuestre por inducción:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Caso base

$n = 1$, El primer sumando del primer miembro es 1 el último es r^1, así tenemos:

$$\begin{aligned}
1 + r &= \frac{1 - r^2}{1 - r} \\
1 + r &= \frac{(1 + r)(1 - r)}{1 - r} \\
1 + r &= 1 + r
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple para } n = 1$$

Hipótesis de inducción

Suponemos que la proposición es válida para $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Paso inductivo

P.d. Se cumple para $n = n + 1$

$$\begin{aligned}
1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1}... && \text{Por hipótesis de inducción} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} && \text{Operando suma de fracciones} \\
&= \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} && \text{Reduciendo términos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $x \in A$ es el máximo de A si para todo $y \in A$, se cumple $y \leq x$. Demuestree que todo subconjunto finito de números naturales tiene máximo usando inducción sobre la cardinalidad del conjunto.

24. Usando el ejercicio anterior, demuestre que $\mathbb{N}$ no es finito.

Procederemos por contradicción, suponiendo que $\mathbb{N}$ es finito, entonces por el ejercicio anterior podemos hallar un máximo.
Sea x el elemento máximo, entonces se cumple que

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad y \leq x$$

Ahora veamos al sucesor de x, pues por un axioma de *Peano* sabemos todos los elementos de $\mathbb{N}$ tienen un sucesor, así que

$$\exists x + 1 \in \mathbb{N}$$

luego

$$x \leq x + 1!$$

entonces x ya no sería elemento máximo, esta contradicción vino de suponer que $\mathbb{N}$ es finito

$$\therefore \quad \mathbb{N} \text{ tiene una cantidad infinita de elementos.}$$