Álgebra Superior I

Semestre 2020-2

Prof. Alejandro Dorantes Aldama
Ayud. Elmer Enrique Tovar Acosta
Ayud. Alejandro Ríos Herrejón

Tarea II

Kevin Ariel Merino Peña

---

3. Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal

$$f(x) = ax + b$$

Es biyectiva siempre que $a \neq 0$

Sean $f(x)$ y $f(z) \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(z) && \text{Tomemos estas dos imágenes}\\
ax + b &= az + b && \text{Por la regla de correspondencia de } f\\
ax &= az && \text{Sumando el inverso aditivo de b en ambos miembros}\\
x &= z && \text{porque } a \neq 0
\end{aligned}$$

$$\therefore f \text{ es inyectiva}$$

Luego, sea $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x &= r + b && \text{Esto puede ocurrir para todo número real, con } r, b \in \mathbb{R}\\
x &= rn + b && \text{Además podemos ver a cualquier real como el producto de dos reales } n \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\therefore x \in Img(f) \implies \mathbb{R} \subseteq Img(f)$$

La otra contención está dada por definición de la imagen de una función

$$\therefore \quad Img(f) = \mathbb{R} \implies f \text{ es suprayectiva.}$$

$$\therefore f \text{ es biyectiva.}$$

Además, si $g(x) = cx + d$ es otra función lineal, demuestre que

$$f = g$$

si y sólo si $a = c$, $b = d$ si y sólo si

$$f(0) = g(0) \qquad \text{y} \qquad f(1) = g(1)$$

$\implies_1$

$$\begin{aligned}
f(0) = g(0) \implies a(0) + b &= c(0) + d && \text{Por regla de correspondecia de } f, g\\
b &= d && \text{Porque } a \cdot 0 = 0 \forall a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1) = g(1) \implies a(1) + b &= c(1) + d && \text{Por regla de correspondecia de } f, g\\
a + b &= c + d && \text{Porque } x \cdot 1 = 0 \forall x \in \mathbb{R}\\
a + b &= c + b && \text{Porque de lo anterior dedcimos que } b = d\\
a &= c && \text{Sumando en ambos miembros el inverso aditivo de } b
\end{aligned}$$

$\impliedby_1$

$$\begin{aligned}
a &= c && \text{Por hipótesis}\\
ax &= cx && \text{multiplicando ambos miembros por } x\\
ax + b &= cx + d && \text{Pues por hipótesis } b = d\\
a(1) + b &= c(1) + d && \text{Sustituyendo } x = 1\\
a(0) + b &= c(0) + d && \text{Evalando en } x = 0
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que
$$a = c \wedge b = d \iff f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)$$

$\implies_2$

$$\begin{aligned}
f = g \implies f(1) &= a(1) + b && \text{Por regla de corespondencia de} f \\
&= c(1) + d && \text{por la regla de correspondencia de } g \\
&= g(1) && \text{pues suponemos que } f = g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = g \implies f(0) &= a(0) + b && \text{Por regla de corespondencia de} f \\
&= b && \text{Por propiedades de los reales} \\
&= c(0) + d && \text{por la regla de correspondencia de } g \\
&= g(0) && \text{pues suponemos que } f = g
\end{aligned}$$

$\impliedby_2$ (Emplearemos la transitividad de $\iff$)

$$\begin{aligned}
a = c \wedge b = d \implies f(x) &= a(x) + b && \text{Por regla de correspondencia de } f \\
\implies &= c(x) + d && \text{Sutituyendo lo que estamos suponiendo} \\
\implies &= g(x) && \text{Por la regla de correspondencia de } g
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad f = g \iff a = c \wedge b = d \iff f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)$$

8. Sea $X = \{f : \mathbb{N} \to \{1, 0\} \mid f \text{ es función }\}$. Dé una biyección entre X y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

12. Sea X un conjunto. Defina una relación R en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como sigue

$$(U, V) \in R \iff |U| = |V|$$

Demuestre que R es reflexiva, transitiva y simétrica. (emplearemos $\sim$ para denotar que dos elementos están relacionados)
Sea $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, como $|X| = |X|$, entonces

$$X \sim X$$

y como X es arbitrario, $\therefore \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \sim X$
$\therefore \quad R$ es reflexiva

Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Supongamos $X \sim Y$ y $Y \sim Z$, lo anterior es $|X| = |Y|$ y $|Y| = |Z|$, como $=$ es una relación binaria transitiva, entonces $|X| = |Z|$ *i.e.* $X \sim Z$

y como X, Y, Z son arbitrarios, $\therefore \forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \sim Y \wedge Y \sim Z \implies X \sim Z$
$\therefore \quad R$ es transitiva.

Sean $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ supongamos $X \sim Y$ entonces $|X| = |Y|$ y como $=$ es una relación simétrica, entonces $|Y| = |X|$ *i.e.* $Y \sim X$.

y como X, Y son arbitrarios, $\therefore \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \sim Y \implies Y \sim X$
$\therefore \quad R$ es simétrica.
(entonces es relación de equivalencia)

20. Demuestre por inducción:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Caso base

$n = 1$, El primer sumando del primer miembro es 1 el último es r^1, así tenemos

$$1 + r$$

El segundo miembro de la igualdad, queda

$$\frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 + r)(1 - r)}{1 - r}$$

entonces

$$1 + r = 1 + r$$

$$\therefore \text{ Se cumple para } n = 1$$

Hipótesis de inducción

Suponemos que la proposición es válida para $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Paso inductivo

P.d. Se cumple para $n = n + 1$

$$\begin{aligned}
1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1}... && \text{Por hipótesis de inducción} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} && \text{Operando suma de fracciones} \\
&= \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} && \text{Reduciendo términos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $x \in A$ es el máximo de A si para todo $y \in A$, se cumple $y \leq x$. Demuestree que todo subconjunto finito de números naturales tiene máximo usando inducción sobre la cardinalidad del conjunto.
24. Usando el ejercicio anterior, demuestre que $\mathbb{N}$ no es finito.

Procederemos por contradicción, suponiendo que $\mathbb{N}$ es finito, entonces por el ejercicio anterior podemos hallar un máximo.
Sea x el elemento máximo, entonces se cumple que

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad y \leq x$$

Ahora veamos al sucesor de x, pues por un axioma de *Peano* sabemos todos los elementos de $\mathbb{N}$ tienen un sucesor, así que

$$\exists x + 1 \in \mathbb{N}$$

luego

$$x \leq x + 1!$$

entonces x ya no sería elemento máximo, esta contradicción vino de suponer que $\mathbb{N}$ es finito

$$\therefore \quad \mathbb{N} \text{ tiene una cantidad infinita de elementos.}$$