Álgebra Superior I

Semestre 2020-2

Prof. Alejandro Dorantes Aldama
Ayud. Elmer Enrique Tovar Acosta
Ayud. Alejandro Ríos Herrejón

Tarea II

Carlos Andrade Hernández — Berenice SanJuan Hernández — Carlos Uriel Sánchez Martínez

Edgar Samuel Palacios Crispín — Kevin Ariel Merino Peña

3. Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal

$$f(x) = ax + b$$

Es biyectiva siempre que $a \neq 0$

Además, si $g(x) = cx + d$ es otra función lineal, demuestre que

$$f = g$$

si y solamente si $a = c$, $b = d$ si y solamente si

$$f(0) = g(0) \qquad \text{y} \qquad f(1) = g(1)$$

7. Sea X un conjunto. Demuestre que no hay una biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$ terminando el siguiente argumento:

> Supongamos que existe dicha biyección, digamos $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Dado $x \in X$, dado que $f(x) \subseteq X$ tiene sentido preguntarnos ¿$x \in f(x)$? denote por A al conjunto de los puntos que no cumplen esto, es decir,
>
> $$A = \{x \in X | x \notin f(x)\}$$
>
> Ahora, como $A \subseteq X$ y f es biyectiva $y = f^{-1}(A) \in X$. Entonces ¿$y \in A$ o $y \notin A$?

11.Demuestre que no ha una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$. *Sugerencia: Los ejercicios anteriores pueden servir*
15.Diga si las siguientes son particiones de los conjuntos dados y si lo son, diga cuáles son las relaciones de equivalencia inducidad, justificando bien sus respuestas

- En $\mathbb{Z}$, sea $P = \{\{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m)\}, \{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m + 1\}, \{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m + 2)\}\}$
- En $\mathbb{Z}$, sea $P = \{\{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}, \{n \in \mathbb{Z} : n > 1\}\}$
- En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea $P = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{6\}\}$
- En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea $P = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 6\}, \{5\}\}$
- En $\mathbb{R}$, sea $P = \{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional }\}, \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional } \wedge x \text{ es racional }\}\}$
- En $\mathbb{R}$ sea $P = \{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\}$

16. Demuestre por inducción:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Caso base: n=1

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la proposición es cierta para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

P.D que la proposición es cierta para n=k+1

$$1+2+3+....+k+1=(1+2+3+...+k)+(k+1)$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{k(k+1)}{2}+k+1\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=\frac{k+1[(k+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

17. Demuestre por inducción:

$$1^2+2^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Caso base: n=1

$$1^2=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=\frac{1(2)(3)}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n=k\in\mathbb{N}$.
H.I:

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

P.D. que la proposición es cierta para n=k+1

$$1^2+2^2+...+k+1^2=(1^2+2^2+...+k^2)+(k+1)^2$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
&=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}\\
&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

18. Encuentre una fórmula para la siguiente suma, luego demuestre dicha fórmula por inducción:

$$1+3+5+7+....+2n-1$$

Fórmula: La suma de n primeros números impares consecutivos es n^2, es decir:

$$1+3+5+7+....+2n-1=n^2$$

Caso base: (Abarcaremos un par de casos)
a) n=1
$2(1)-1=1^2$ (Primer número de impar)
$1=1$
b) n=2
$1+2(2)-1=2^2$ (Se suma el primer número consecutivo, por eso el resultado es 4)

$4 = 4$
Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2k - 1 = k^2$$

P.D. Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2(k-1) + (2(k+1) - 1) &= (k+1)^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2(k-1) + (2(k+1) - 1) &= k^2 + (2(k+1) - 1) \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

19. Mismas instrucciones que antes para:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$$

Fórmula:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Caso base: n=1

$$\begin{aligned} (2(1) - 1)^2 &= \frac{1(2(1)-1)(2(1)+1)}{3} \\ 1 &= \frac{1(1)(3)}{3} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

P.D que la proposición es cierta para n=k+1

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

Podemos ver que hay un factor común en ambos términos $((2k+1)y(2k+1)^2)$, así que lo extraemos

$$\begin{aligned} &= (2k+1)[\frac{k(2k-1)}{3} + 2k + 1] \\ &= (2k+1)[\frac{k(2k-1) + 3(2k+1)}{3}] \\ &= (2k+1)[\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3}] \\ &= (2k+1)[\frac{2k^2 + 5k + 3}{3}] \end{aligned}$$

Factorizamos el trinomio

$$= \frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3}$$

$$\therefore \text{Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

20. Demuestre por inducción:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Caso base: n=1
El primer sumando del primer miembro es 1 el último es r^1, así tenemos

$$1 + r$$

El segundo miembro queda

$$\frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 + r)(1 - r)}{1 - r}$$

entonces

$$1 + r = 1 + r$$

Se cumple para $n = 1$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

P.D. que la proposición es cierta para n=k+1

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^k + r^{k+1} &= \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} ...Por H.I \\ &= \frac{1 - r^{k+1} + r^{k+1} - r^{k+2}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{(k+1)+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

21.Pruebe que:
23. Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $x \in A$ es el máximo de A si para todo $y \in A$, se cumple $y \leq x$. Demuestree que todo subconjunto finito de números naturales tiene máximo usando inducción sobre la cardinalidad del conjunto.