Álgebra Superior I

Semestre 2020-2

Prof. Alejandro Dorantes Aldama

Ayud. Elmer Enrique Tovar Acosta

Ayud. Alejandro Ríos Herrejón

Tarea II

Kevin Ariel Merino Peña

3. Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal

$$f(x) = ax + b$$

Es biyectiva siempre que $a \neq 0$

Además, si $g(x) = cx + d$ es otra función lineal, demuestre que

$$f = g$$

si y solamente si $a = c$, $b = d$ si y solamente si

$$f(0) = g(0) \qquad \text{y} \qquad f(1) = g(1)$$

8. Sea $X = \{f : \mathbb{N} \to \{1, 0\} \mid f \text{ es función } \}$. Dé una biyección entre X y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

12. Sea X un conjunto. Defina una relación R en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como sigue

$$(U, V) \in R \iff |U| = |V|$$

Demuestre que R es reflexiva, transitiva y simétrica.

20. Demuestre por inducción:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Caso base

$n = 1$, El primer sumando del primer miembro es 1 el último es r^1, así tenemos

$$1 + r$$

El segundo miembro de la igualdad, queda

$$\frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 + r)(1 - r)}{1 - r}$$

entonces

$$1 + r = 1 + r$$

$$\therefore \text{Se cumple para } n = 1$$

Hipótesis de inducción

Suponemos que la proposición es válida para $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Paso inductivo

P.d. Se cumple para $n = n + 1$

$$\begin{aligned}
1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} ... && \text{Por hipótesis de inducción} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} && \text{Operando suma de fracciones} \\
&= \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} && \text{Reduciendo términos}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $x \in A$ es el máximo de A si para todo $y \in A$, se cumple $y \leq x$. Demuestree que todo subconjunto finito de números naturales tiene máximo usando inducción sobre la cardinalidad del conjunto.
24. Usando el ejercicio anterior, demuestre que $\mathbb{N}$ no es finito.

Procederemos por contradicción, suponiendo que $\mathbb{N}$ es finito, entonces por el ejercicio anterior podemos hallar un máximo.
Sea x el elemento máximo, entonces se cumple que

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad y \leq x$$

Ahora veamos al sucesor de x, pues por un axioma de *Peano* sabemos todos los elementos de $\mathbb{N}$ tienen un sucesor, así que

$$\exists x + 1 \in \mathbb{N}$$

luego

$$x \leq x + 1!$$

entonces x ya no sería elemento máximo, esta contradicción vino de suponer que $\mathbb{N}$ es finito

$$\therefore \quad \mathbb{N} \text{ tiene una cantidad infinita de elementos.}$$