Tarea examen 2

March 22, 2020

1. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones tales que $g \circ f$ es biyectiva. Demuestre que f es inyectiva y g suprayectiva.

2. Encuentre funciones f, g tales que:

   - f es inyectiva pero $g \circ f$ no lo es.
   - g es suprayectiva pero $g \circ f$ no lo es.
   - f es inyectiva, g es suprayectiva pero $g \circ f$ no es ni inyectiva ni suprayectiva.
   - f no es suprayectiva, g no es inyectiva pero $g \circ f$ es biyectiva.

   Al igual que en la tarea anterior, por dar funciones se entiende dar el dominio. contradominio y regla de la correspondencia de cada función.

3. Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal ($f(x) = ax + b$) es biyectiva siempre que $a \neq 0$.

   Además, si $g(x) = cx + d$ es otra función lineal, demuestre que $f = g$ si y solamente si $a = c, b = d$ si y solamente si $f(0) = g(0)$ y $f(1) = g(1)$.

4. Dé una biyección entre $(0, 1)$ y $(0, d)$, dónde $d \in \mathbb{R}$ y $d > 0$.

5. Dé una biyección entre $(0, 1)$ y (c, d), dónde $c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $c < d$.
   Sugerencia para estos dos últimos ejercicios: Use una función lineal conveniente.

6. Dé una biyección entre un intervalo de la forma (c, d) y $\mathbb{R}$. Nota: Para este ejercicio puede dar por hecho todo lo que haya visto en cálculo.

7. Sea X un conjunto. Demuestre que no hay una biyección entre X y $\mathcal{P}(X)$ terminando el siguiente argumento.

   Supongamos que existe dicha biyección, digamos $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Dado $x \in X$, dado que $f(x) \subseteq X$ tiene sentido preguntarnos ¿$x \in f(x)$?, denote por A al conjunto de puntos que no cumplen esto, es decir,

   $$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

   Ahora, como $A \subseteq X$ y f es biyectiva $y = f^{-1}(A) \in X$. Entonces, ¿ $y \in A$ o $y \notin A$?

8. Sea $X = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \mid f \text{ es función}\}$. Dé una biyección entre X y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

9. Sean $\overline{0}, \overline{1}$ las funciones constantes 0, 1 en $\mathbb{N}$ ($\overline{0}(n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y algo análogo para la otra). Dé una biyección entre $X \setminus \{\overline{0}, \overline{1}\}$ y $(0, 1)$. Sugerencia: Puede dar por hecho que todo número real en $(0, 1)$ tiene una expansión decimal en base 2 formada solo por ceros y unos.

10. Dé una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

11. Demuestre que no hay una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$. Sugerencia: Los ejercicios anteriores pueden servir.

12. Sea X un conjunto. Defina una relación R en $\mathcal{P}(X)$ como sigue

    $$(U, V) \in R \leftrightarrow |U| = |V|.$$

    Demuestre que R es reflexiva, transitiva y simétrica.

13. Demuestre que las siguientes relaciones son de equivalencia, determine las clases de equivalencia y dé la partición inducida por ellas.

    - La relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como $x \sim y$ si y sólo si $x + y$ es par.
    - La relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como $a \sim b$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + 5k$.
    - La relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como $n \sim m$ si y sólo si 7 divide a $n - m$.
    - La relación definida sobre $A = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ como $S = \{(x, y) \in A \times A : x^2 = y^2\}$.
    - La relación definida sobre $B = \{1, 2, 3, 4\}$ como $T = \{(x, y) \in B \times B : x = y \vee x + y = 3\}$.

14. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando a detalle su respuesta.

    - Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cup S$ es una relación de equivalencia sobre A.
    - Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A.
    - Si R y S son relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A tales que $R \cup S$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R Como S son relaciones de equivalencia sobre A.
    - Si R y S son relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A tales que $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R Como S son relaciones de equivalencia sobre A.

15. Diga si las siguientes son particiones de los conjuntos dados y si sí lo son, diga cuáles son las relaciones de equivalencia inducidas, justificando bien sus respuestas:

    - En $\mathbb{Z}$, sea $P = \{\{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m)\}, \{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m + 1)\}, \{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m + 2)\}\}$.
    - En $\mathbb{Z}$, sea $P = \{\{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}, \{n \in \mathbb{Z} : n > 1\}\}$.
    - En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea $P = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{6\}\}$.
    - En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea $P = \{\{1, 2\}, \{5\}, \{3, 4, 6\}\}$.
    - En $\mathbb{R}$, sea $P = \{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional } \wedge x \text{ es racional}\}\}$.
    - En $\mathbb{R}$, sea $P = \{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\}$.

16. Demuestre por inducción:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

17. Demuestre por inducción:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

18. Encuentre una fórmula para la siguiente suma, luego demuestre dicha fórmula por inducción:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1$$

19. Mismas instrucciones que antes para

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

20. Demuestre por inducción:

$$1 + r + r^2 + r^3 \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Para todo $r \neq 1$.

21. Pruebe que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Sugerencia: Esto posiblemente se puede hacer por inducción, pero es mejor usar el teorema del binomio.

22. Demuestre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

23. Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $x \in A$ es el máximo de A si para todo $y \in A$ se cumple $x \leq y$. Demuestre que todo subconjunto finito de números naturales tiene máximo usando inducción sobre la cardinalidad del conjunto.

24. Usando el ejercicio anterior, demuestre que $\mathbb{N}$ no es finito.