Álgebra Superior I

Semestre 2020-2

Prof. Alejandro Dorantes Aldama
Ayud. Elmer Enrique Tovar Acosta
Ayud. Alejandro Ríos Herrejón

Reposición examen I

Kevin Ariel Merino Peña[2]

4. Sean A,B conjuntos. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

$$1.\ A \subset B \quad 2.\ A \cap B = A \quad 3.\ A \cup B = B \quad 4.\ A \backslash B = \varnothing$$

1) $\implies$ 2) Supongamos $A \subseteq B$, por demostrar: $A \cap B = A$.
$\subseteq$]

Supongamos que	$a \in A \cap B$
Por definición de intersección	$a \in A \wedge a \in B$
Particularmente a	$\in A$
Entonces	$A \cap B \subseteq A$

$\supseteq$]

Supongamos	$a \in A$
Por hipótesis	$A \subseteq B$
Particularmente	$a \in B$
Entonces	$a \in B \wedge a \in A$
i.e.	$a \in A \cap B$
Por lo tanto	$A \subseteq A \cap B$

$$\text{Como tenemos } A \subseteq A \cap B \text{ y } A \supseteq A \cap B$$

$$\therefore \qquad A = A \cap B$$

2) $\implies$ 3) Supongamos $A \cap B = A$, por demostrar: $A \cup B = B$.
$\subseteq$]

Supongamos que	$a \in A \cup B$
Entonces	$a \in A \vee a \in B$

Caso 1: Si	$a \in A$
Entonces	$a \in A \cup B$
i.e.	$a \in A \wedge a \in B$
En particular	$a \in B$
Caso 2: $a \in B$	

Entonces $A \cup B \subseteq B$
$\supseteq$]

Supongamos	$a \in B$
Entonces	$a \in A \cup B$
Y así	$B \subseteq A \cup B$

$$\text{Como } B \subseteq A \cup B \text{ y } A \cup B \subseteq B$$

$$\therefore \qquad A \cup B = B$$

[2]Número de cuenta: 317031326

3) $\implies$ 4) Supongamos $A \cup B = B$, por demostrar: $A \backslash B = \varnothing$.
Supongamos $x \in A \backslash B$, esto es $a \in A \wedge a \notin B$, entonces, si $x \in A \cup B$ y $A \cup B = B$, entonces $x \in B$! lo cual es una contradicción y vino de suponer que hay algún elemento en $A \backslash B$, por lo que $A \backslash B = \varnothing$.

4) $\implies$ 1) Supongamos $A \backslash B = \varnothing$, por demostrar: $A \subseteq B$.
Supongamos que $a \in A$ y que $a \notin B$, entonces $a \in A \backslash B$ pero $A \backslash B = \varnothing$! esta contradicción vino de suponer que $a \notin B$ por lo tanto $a \in B$ y así $A \subseteq B$

8. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Encuentre todas las parejas ordenadas de $A \times B$.

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4) \end{array} \right\}$$

9. Sean $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$. Demuestre que el producto $A \times B$ tiene nm elementos. Sugerencia: ¿Cuántas parejas tienen como primera coordenada 1?, ¿y 2?

Para cada elemento en A, existirán tantas parejas como elementos de B *i.e.* si A tiene 3 elementos y B tiene sólo uno entonces las parejas lucirán de la sigueinte forma

$$(a, n), (b, n), (c, n)$$

Se podrán combinar tantas veces como elementos haya en B, por lo tanto la cardinalidad de $A \times B$ es nm pues por cada elemento en A se podrán formar tantas parejas como elementos haya en B, puede representarse como:

$$\begin{array}{cc} & \text{Elementos de B} \\ \text{Elementos de A} & \begin{pmatrix} (x_0, y_0) & (x_0, y_1) & \ldots m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \ldots & nm \end{pmatrix} \end{array}$$

16. Encuentre la imagen de las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ dada por } f(n) = n + 1$$

$$Img(f) = \mathbb{N} \backslash \{1\}$$

$\subseteq$]

Supongamos	$f(a) \in Img(f)$
Entonces	$a \in \mathbb{N}$
i.e.	$a \geq 1$
Luego, por la regla de correspondencia de f	$f(a) = a + 1$
Entonces	$f(a) \geq 2$
Así	$f(a) \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$
Por lo que	$Img(f) \subseteq \mathbb{N} \backslash \{1\}$

$\supseteq$]

Supongamos	$x \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$
Sea	$a = x - 1$
Entonces	$f(a) = (x - 1) + 1$
Así,	$f(a) = x$
Por lo que	$\mathbb{N} \backslash \{1\} \subseteq Img(f)$

$$\therefore \mathbb{N} \backslash \{1\} = Img(f)$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ dada por } f(n) = n^2 + 1$$

$$Img(f) = \mathbb{N} \backslash \{1\}$$

$\subseteq$]

Supongamos	$f(a) \in Img(f)$
Entonces	$a \in \mathbb{N}$
i.e.	$a \geq 1$
También veamos que	$a^2 \geq 1 \implies a^2 + 1 \geq 1 + 1$
Luego, por la regla de correspondencia de f	$f(a) = a^2 + 1$
Entonces	$f(a) \geq 2$
Así	$f(a) \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$
Por lo que	$Img(f) \subseteq \mathbb{N} \backslash \{1\}$

$\supseteq$]

Supongamos	$x \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$
Sea	$a = \sqrt{x-1}$
Entonces	$f(a) = (\sqrt{x-1})^2 + 1$
Así,	$f(a) = x$
Por lo que	$\mathbb{N} \backslash \{1\} \subseteq Img(f)$

$$\therefore \mathbb{N} \backslash \{1\} = Img(f)$$

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \text{ dada por } f(n) = n^2 + 1$$

$$Img(f) = \mathbb{N}$$

$\subseteq$]

Supongamos	$f(a) \in Img(f)$
Entonces	$a \in \mathbb{Z}$
También veamos que	$a^2 \geq 0 \implies a^2 + 1 \geq 1$
Luego, por la regla de correspondencia de f	$f(a) = a^2 + 1$
Entonces	$f(a) \geq 1$
Así	$f(a) \in \mathbb{N}$
Por lo que	$Img(f) \subseteq \mathbb{N}$

$\supseteq$]

Supongamos	$x \in \mathbb{N}$
Sea	$a = \pm\sqrt{x-1}$
Entonces	$f(a) = (\pm\sqrt{x-1})^2 + 1$
Así,	$f(a) = x$
Por lo que	$\mathbb{N} \subseteq Img(f)$

$$\therefore \mathbb{N} = Img(f)$$

17. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$. Calcule $f \circ g$ y $g \circ f$.

a) $f \circ g$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ &= (x^2) + 1 \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

b) $g \circ f$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ &= (x + 1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

21. Como siempre, los símbolos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ denotarán al conjunto de número enteros y al conjunto de números racionales, respectivamente, ¿Es cierto que

$$R := \left\{ \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

es una función de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$?
Para probar que una realación binaria es una función, debe satisfacer los siguientes enunciados

- $D_R = \mathbb{Q}$
- Si $(x_0, y_1) \in R$ y $(x_0, y_2) \in R$, entonces $y_1 = y_2$

Primer requerimiento:
$\subseteq$]
Supongamos $x \in D_R$ por demostrar $x \in \mathbb{Q}$

Como	$x \in D_R$
Tiene la forma	$x = \dfrac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$
Así como los elementos de $\mathbb{Q}$	$x \in \mathbb{Q}$
Por lo que	$D_R \subseteq \mathbb{Q}$

$\supseteq$]

Supongamos	$x \in \mathbb{Q}$
Entonces tiene la siguiente forma	$x = \dfrac{m}{n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$
Al igual que D_R	$x \in D_R$
Por lo que	$D_R \supseteq \mathbb{Q}$

Como tenemos $D_R \supseteq \mathbb{Q}$ y $D_R \subseteq \mathbb{Q}$

$$\therefore \qquad D_R = \mathbb{Q}$$

Y así hemos visto que cumple con la primera condición

Para la segunda condición, tomemos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in R$ y $\left(\frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right) \in R$ observemos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, pero $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$

$$\therefore \quad R \text{ no es función}$$