Álgebra Superior I

Semestre 2020-2

Prof. Alejandro Dorantes Aldama

Ayud. Elmer Enrique Tovar Acosta

Ayud. Alejandro Ríos Herrejón

Tarea II

Carlos Andrade Hernández   Berenice SanJuan Hernández   Carlos Uriel Sánchez Martínez

Edgar Samuel Palacios Crispín   Kevin Ariel Merino Peña

16. Demuestre por inducción:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Caso base: n=1

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la proposición es cierta para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

P.D que la proposición es cierta para n=k+1

$$1 + 2 + 3 + ... + k + 1 = (1 + 2 + 3 + ... + k) + (k + 1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{k+1[(k+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

17. Demuestre por inducción:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Caso base: n=1

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

P.D. que la proposición es cierta para n=k+1

$$1^2 + 2^2 + ... + k + 1^2 = (1^2 + 2^2 + ... + k^2) + (k+1)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

18. Encuentre una fórmula para la siguiente suma, luego demuestre dicha fórmula por inducción:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$$

Fórmula: La suma de n primeros números impares consecutivos es n^2, es decir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1 = n^2$$

Caso base: (Abarcaremos un par de casos)
a) n=1
$2(1) - 1 = 1^2$ (Primer número de impar)
$1 = 1$
b) n=2
$1 + 2(2) - 1 = 2^2$ (Se suma el primer número consecutivo, por eso el resultado es 4)
$4 = 4$
Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2k - 1 = k^2$$

P.D. Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2(k-1) + (2(k+1) - 1) &= (k+1)^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2(k-1) + (2(k+1) - 1) &= k^2 + (2(k+1) - 1) \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

19. Mismas instrucciones que antes para:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$$

Fórmula:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Caso base: n=1

$$\begin{aligned} (2(1) - 1)^2 &= \frac{1(2(1) - 1)(2(1) + 1)}{3} \\ 1 &= \frac{1(1)(3)}{3} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

P.D que la proposición es cierta para n=k+1

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

Podemos ver que hay un factor común en ambos términos ($(2k+1)y(2k+1)^2$), así que lo extraemos

$$\begin{aligned}
&= (2k+1)[\frac{k(2k-1)}{3} + 2k + 1] \\
&= (2k+1)[\frac{k(2k-1)+3(2k+1)}{3}] \\
&= (2k+1)[\frac{2k^2-k+6k+3}{3}] \\
&= (2k+1)[\frac{2k^2+5k+3}{3}]
\end{aligned}$$

Factorizamos el trinomio

$$= \frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3}$$

$$\therefore \text{Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

20. Demuestre por inducción:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Caso base: n=1
El primer sumando del primer miembro es 1 el último es r^1, así tenemos

$$1 + r$$

El segundo miembro queda

$$\frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1+r)(1-r)}{1-r}$$

entonces

$$1 + r = 1 + r$$

Se cumple para $n = 1$

Paso Inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para $n = k \in \mathbb{N}$.
H.I

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

P.D. que la proposición es cierta para n=k+1

$$\begin{aligned}
1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^k + r^{k+1} &= \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + r^{k+1} ... Por H.I \\
&= \frac{1-r^{k+1}+r^{k+1}-r^{k+2}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{(k+1)+1}}{1-r}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Se cumple } \forall n \in \mathbb{N}$$

21.Pruebe que: