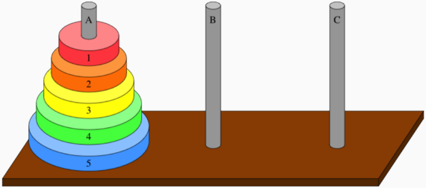
Torres de Hanoi

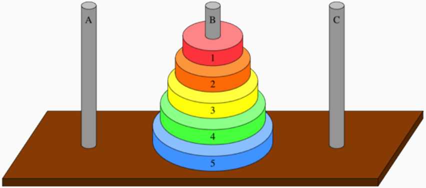
Las Torres de Hanoi son un puzzle que consiste de 3 barras montadas en un tablero y una serie de discos de diferente tamaño. Inicialmente los discos estás dispuestos como se muestran a continuación:



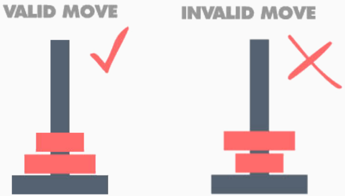
Torres de Hanoi

El objetivo del puzzle es pasar todos los discos a otra de las barras (como muestra la figura de abajo) con las siguientes restricciones:

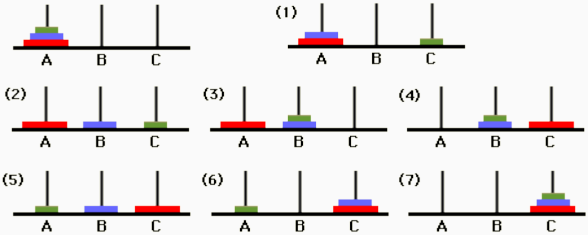
- Los discos deben quedar dispuestos de la misma manera (en orden)
- Los discos se pueden pasar entre las barras, de a uno (por lo que en cada paso se puede mover sólo el disco superior de cada barra)
- Al depositar un disco en otra barra, no puede quedar sobre otro de menor tamaño.



Torres de Hanoi



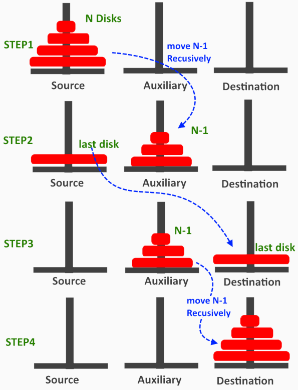
Por ejemplo, podemos resolver el puzzle con 3 discos como sigue:



Torres de Hanoi

Pregunta: ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos h_n que debo hacer para resolver el puzzle desde una configuración inicial con n discos?

Supongamos que $n = 4$. La observación clave es que para mover los 4 discos de la barra origen a la barra destino (de manera óptima), necesariamente va a haber que mover primero los 3 discos más pequeños a la tercer barra (¿por qué?). Luego va a haber que mover el disco mayor a la barra destino y finalmente mover los 3 discos más pequeños de la tercer barra a la barra destino. La manera más eficiente de hacer eso es en $h_3 + 1 + h_3$ pasos.



Torres de Hanoi

En general tenemos que

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 2 \\ h_1 &= 1 \end{aligned}$$

Puede verificarse fácilmente que

$$h_n = 2^n - 1$$

es la forma cerrada (o solución) de la recurrencia.