



**Escuela de Educación Técnica**

ET NRO 9 DE 7 "INGENIERO HUERGO"

# MATEMÁTICA 4

*Unidad 1 Límite de funciones*

Profesor/es:  
Ruiz Diaz Ariel S.

Ciclo lectivo 2022

### **Resumen**

En este apartado se tratarán los conceptos fundamentales de los límites de funciones. El cálculo del límite conlleva mucho trabajo auto-didacta, ya que se trata de reunir habilidades que requieran el uso de propiedades, teoremas, encontrar equivalencias algebraicas, factorizar polinomios, entre otras cosas. Te puede resultar muy difícil al principio, pero si no dejas de practicar verás que a la larga no es tan complicado.

# Capítulo 1

## Unidad I - Límite de funciones

### 1.1. Tangente

La tangente a una curva es una recta que “toca” a dicha curva, específicamente, en un punto.

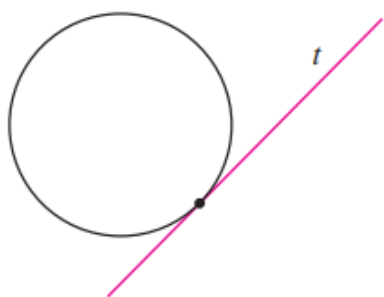


Figura 1.1: Recta tangente a una circunferencia

Para una circunferencia podemos simplemente seguir la idea de Euclides y decir que la tangente es una recta que interseca la circunferencia una y sólo una vez, como se ve en la figura 1.

Para curvas más complicadas esta definición es inadecuada. La figura 2 muestra dos rectas  $l$  y  $t$  que pasan por un punto  $P$  en una curva  $C$ . La recta  $l$  cruza  $C$  sólo una vez, pero ciertamente no es la idea que tenemos de lo que es una tangente. La recta  $t$ , por otro lado, se parece más a una tangente, pero interseca a  $C$  dos veces.

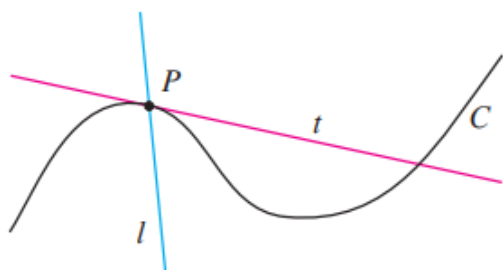


Figura 1.2: Recta tangente a una curva

Para ser más específicos, intentaremos resolver el problema de encontrar una recta  $t$  tangente a la parábola  $y = x^2$  en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 1** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(1, 1)$ .

**SOLUCIÓN** Podremos encontrar la ecuación de la recta tangente  $t$  tan pronto como conozcamos su pendiente  $m$ . La dificultad es que sólo conocemos un punto  $P$  sobre  $t$ , y para calcular la pendiente se necesitan dos puntos. Sin embargo, observamos que podemos calcular una aproximación a  $m$  eligiendo un punto cercano  $Q(x, x^2)$  sobre la parábola (como en la figura 3) y calculando

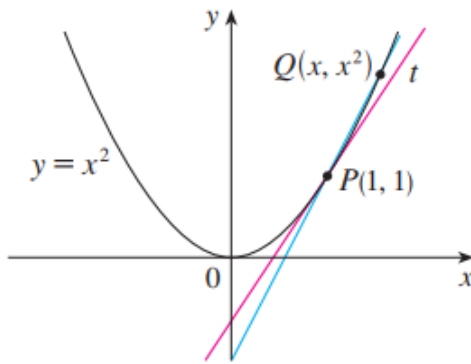


Figura 1.3: Recta secante

la pendiente  $m_{PQ}$  de la recta secante  $PQ$ . [Una **recta secante**, de la palabra latina *secans*, que significa cortar, es una recta que interseca (corta) una curva más de una vez.]

Elegimos  $x \neq 1$  de manera que  $Q \neq P$ . Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto  $Q(1,5; 2,25)$ , tenemos

$$m_{PQ} = \frac{2,25 - 1}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$

Las tablas en el margen muestran los valores de  $m_{PQ}$  para varios valores de  $x$  cercanos a 1. Cuanto más cerca está  $Q$  de  $P$ , la  $x$  es más cercana a 1 y, de las tablas,  $m_{PQ}$  está más cerca de 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente  $t$  debe ser  $m = 2$ .

Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes, y esto lo expresamos simbólicamente escribiendo

$$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

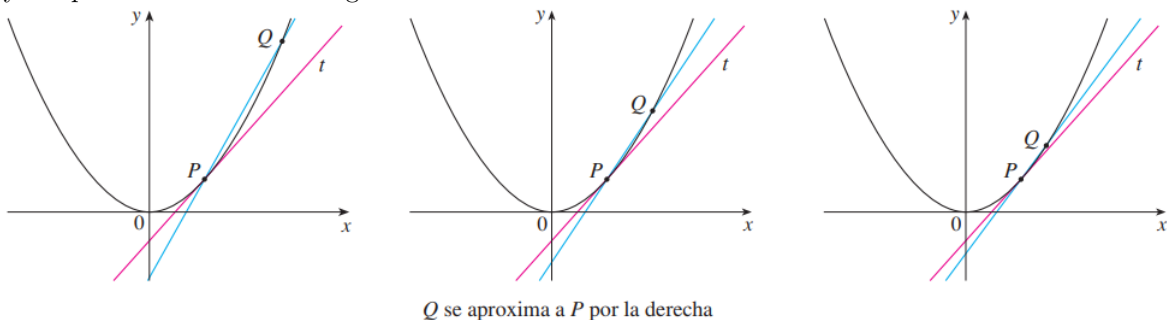
Suponiendo que la pendiente de la recta tangente finalmente es 2, se utiliza la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta tangente en  $(1, 1)$  como

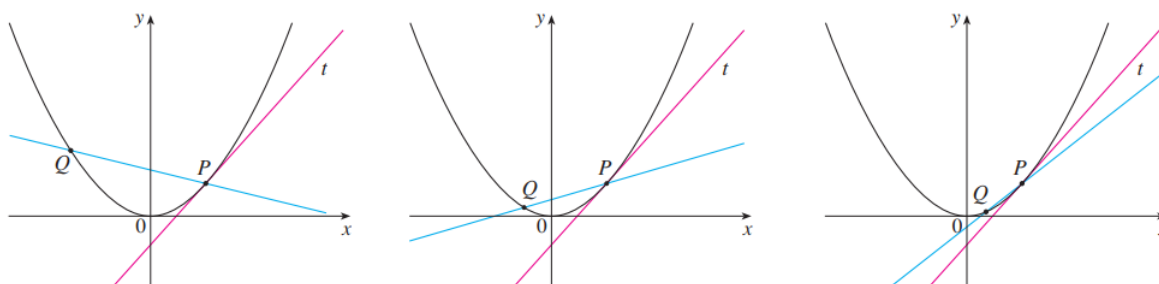
$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1$$

$x$	$m_{PQ}$
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

$x$	$m_{PQ}$
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

La siguiente figura muestra el proceso de límite que se presenta en este ejemplo. Cuando  $Q$  se aproxima a  $P$  a lo largo de la parábola, las correspondientes rectas secantes giran alrededor de  $P$  y se aproximan a la recta tangente  $t$ .





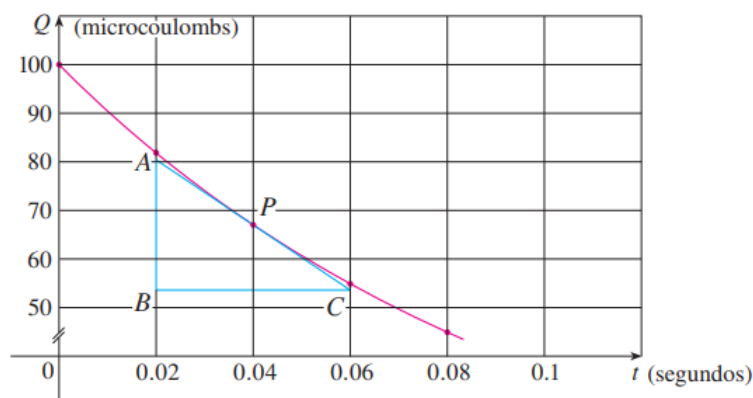
$Q$  se aproxima a  $P$  por la izquierda

Muchas de las funciones que se producen en la ciencia no están descritas por ecuaciones explícitas, sino que están definidas por datos experimentales. El siguiente ejemplo muestra cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de este tipo de funciones.

**EJEMPLO 2** La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga  $Q$  restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo  $t$  (medido en segundos) después de que el flash se dispara. Utilice los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde  $t = 0,04$ . [Nota: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en microamperios) que fluye desde el condensador a la lámpara del flash.]

$t$	$Q$
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

**SOLUCIÓN** En la figura se grafican los datos dados y se usan para trazar una curva que se aproxima a la gráfica de la función.



Dados los puntos  $P(0.04, 67.03)$  y  $R(0.00, 100.00)$  en la gráfica, nos encontramos con que la pendiente de la recta secante  $PR$  es

$$\frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

La tabla de la derecha muestra los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. De esta tabla se esperará que la pendiente de la recta tangente en  $t = 0.04$  se encuentre en algún valor entre  $-742$  y  $-607.5$ . De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$R$	$m_{PR}$
(0.00, 100.00)	-824.25
(0.02, 81.87)	-742.00
(0.04, 67.03)	-607.50
(0.06, 54.88)	-552.50
(0.08, 44.93)	-504.50
(0.10, 36.76)	

$$\frac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Así, por este método, estimamos la pendiente de la recta tangente como  $-675$ .

Otro método consiste en elaborar una aproximación a la tangente en  $P$  y medir los lados del triángulo  $ABC$ , como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

## El problema de la velocidad

Si usted mira el velocímetro de un automóvil mientras viaja en el tráfico de la ciudad, se ve que la aguja no se queda quieta por mucho tiempo, es decir, la velocidad del automóvil no es constante. Suponemos, al ver el velocímetro, que el coche tiene una velocidad determinada en cada instante, pero, ¿cómo se define la velocidad “instantánea”? Vamos a investigar el ejemplo de la caída de una pelota.

**EJEMPLO 3** Supongamos que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

**SOLUCIÓN** Por medio de experimentos llevados a cabo hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (Este modelo de caída libre no considera la resistencia del aire.) Si la distancia de caída después de  $t$  segundos se denota por  $s(t)$  y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa por la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para encontrar la velocidad después de 5 s es que se trata de un solo instante de tiempo ( $t = 5$ ), por lo que no contamos con un intervalo de tiempo. Sin embargo, podemos aproximar la cantidad deseada mediante el cálculo de la velocidad promedio en el breve intervalo de tiempo de una décima de segundo, desde  $t = 5$  hasta  $t = 5.1$ :

$$\begin{aligned}\text{velocidad promedio} &= \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} \\ &= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1} \\ &= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos cada vez más pequeños.

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leq t \leq 6.000$	53.9000
$5 \leq t \leq 5.100$	49.4900
$5 \leq t \leq 5.050$	49.2450
$5 \leq t \leq 5.010$	49.0490
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

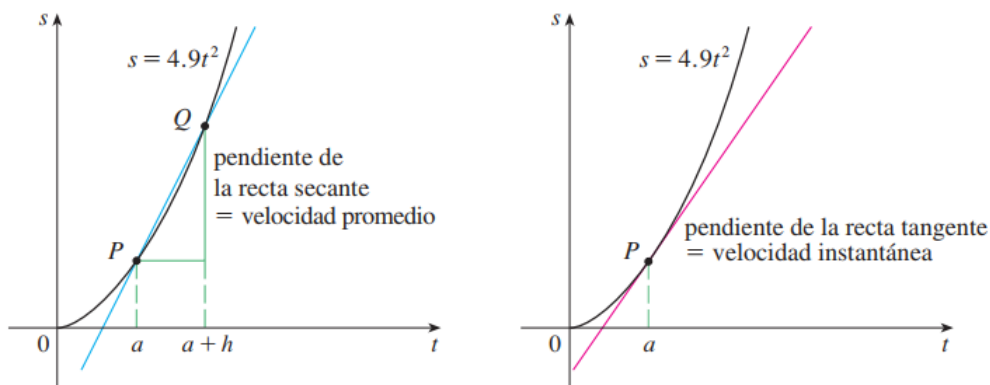
Parece que, a medida que acorta el periodo, la velocidad promedio es cada vez más cercana a 49 m/s. La **velocidad instantánea** cuando  $t = 5$  se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que comienzan en  $t = 5$ . Así, la velocidad (instantánea) después de 5s es

$$v = 49 \text{ m/s}$$

Usted puede sospechar (y no está equivocado) que los cálculos utilizados en la solución de este problema son muy similares a los utilizados anteriormente en esta sección para encontrar tangentes. De hecho, hay una estrecha conexión entre el problema de obtener la tangente y aquel de encontrar la velocidad. Si dibujamos la gráfica de la función de la distancia recorrida por la pelota (como en la figura 5) y consideramos los puntos  $P(a, 4.9a^2)$  y  $Q(a+h, 4.9(a+h)^2)$  sobre la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante  $PQ$  es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{(a+h) - a}$$

que es la misma que la velocidad promedio en el intervalo de tiempo  $[a, a+h]$ . Por tanto, la velocidad en el instante  $t = a$  (el límite de las velocidades promedio cuando  $h$  tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en  $P$  (el límite de las pendientes de las rectas secantes).



Los ejemplos 1 y 3 muestran que, para resolver los problemas de la tangente y la velocidad, debe ser capaz de calcular límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las siguientes secciones, regresaremos a estos problemas de encontrar tangentes y velocidades en la unidad *derivadas*.

## 1.2. Ejercicios

- Un tanque contiene 1000 galones de agua que se drenan por la parte inferior del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen  $V$  de agua que queda en el tanque (en galones) después de  $t$  minutos.

$t$ (min)	5	10	15	20	25	30
$V$ (gal)	694	444	250	111	28	0

- Si  $P$  es el punto  $(15, 250)$  sobre la gráfica de  $V$ , encuentre las pendientes de las rectas secantes  $PQ$  cuando  $Q$  es el punto sobre la gráfica con  $t = 5, 10, 20, 25$  y  $30$ .
  - Estime la pendiente de la recta tangente en  $P$  por medio del promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
  - Utilice una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en  $P$ . (Esta pendiente representa la rapidez a la que fluye el agua del tanque después de 15 minutos.)
- Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El aparato compila el número de latidos del corazón después de  $t$  minutos y se registran en una tabla. Cuando los datos de la tabla se representan gráficamente, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

$t$ (min)	36	38	40	42	44
Latidos del corazón	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Utilice los datos para estimar el ritmo cardiaco del paciente después de 42 minutos, utilizando la recta secante entre los puntos con los valores dados de  $t$ .

- $t = 36$  y  $t = 42$
  - $t = 38$  y  $t = 42$
  - $t = 40$  y  $t = 42$
  - $t = 42$  y  $t = 44$
- El punto  $P(2, -1)$  se encuentra en la curva  $y = \frac{1}{1-x}$ 
    - Si  $Q$  es el punto  $(x, 1/(1-x))$ , utilice la calculadora para hallar la pendiente de la recta secante  $PQ$  (con una precisión de seis decimales) para los siguientes valores de  $x$ :
      - 1.5
      - 1.9
      - 1.99
      - 1.999
      - 2.5
      - 2.1
      - 2.01
      - 2.001

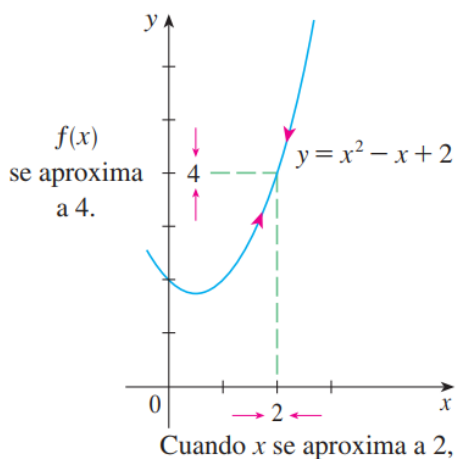
- b) Utilice los resultados del inciso a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en  $P(2, -1)$ .
- c) Utilizando la pendiente del inciso b), obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en  $P(2, -1)$ .
- d) Utilice la aplicación Geogebra para modelar el problema para la función  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , para este caso deberá usar un parámetro  $a$  como variable, ya que Geogebra toma la letra  $x$  como *variable* por defecto.
4. Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies después de  $t$  segundos está dada por  $y = 40t - 16t^2$ .
- a) Encuentre la velocidad promedio para el período que comienza cuando  $t = 2$  y permanece
- i) 0.5 segundos      ii) 0.1 segundos
  - iii) 0.05 segundos    iv) 0.01 segundos
- b) Estime la velocidad instantánea cuando  $t = 2$ .
5. Si una piedra se lanza hacia arriba en el planeta Marte a una velocidad de 10 m/s, su altura en metros  $t$  segundos después está dada por  $y = 10t - 1.86t^2$ .
- a) Encuentre la velocidad promedio en los intervalos de tiempo dados:
- i)  $[1, 2]$       ii)  $[1, 1.5]$       iii)  $[1, 1.1]$
  - iv)  $[1, 1.01]$     v)  $[1, 1.001]$
- b) Estime la velocidad instantánea cuando  $t = 1$ .
6. La tabla muestra la posición de un ciclista.

$t$ (segundos)	0	1	2	3	4	5
$s$ (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

- a) Encuentre la velocidad promedio para cada periodo:
- i)  $[1, 3]$     ii)  $[2, 3]$     iii)  $[3, 5]$     iv)  $[3, 4]$

### 1.3. Límite de una función

En la sección anterior vimos cómo surgen los límites cuando queremos encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto; ahora dirigimos nuestra atención a los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos. Vamos a investigar el comportamiento de la función  $f$  definida por  $f(x) = x^2 - x + 2$  para valores de  $x$  cercanos a 2. La siguiente tabla muestra los valores de  $f(x)$  para valores de  $x$  cercanos a 2, pero no iguales a 2.



$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

De la tabla y la gráfica de  $f$  (una parábola) que se muestra en la figura anterior, vemos que



cuando  $x$  se aproxima a 2 (por ambos lados de 2),  $f(x)$  se aproxima a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de  $f(x)$  estén tan cerca de 4 como queramos, tomando  $x$  suficientemente cercano a 2. Esto lo expresamos diciendo que “el límite de la función  $f(x) = x^2 - x + 2$  cuando  $x$  tiende a 2 es igual a 4”. La notación para esto es

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

**1 Definición** Supongamos que  $f(x)$  está definida cuando  $x$  está cerca del número  $a$ . (Esto significa que  $f$  está definida en algún intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$  misma.) Entonces escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (1.1)$$

y decimos que “el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ , es igual a  $L$ ” si podemos hacer que los valores de  $f(x)$  estén arbitrariamente cercanos a  $L$  (tan cercanos a  $L$  como queramos), tomando valores de  $x$  suficientemente cerca de  $a$  (por ambos lados de  $a$ ), pero no iguales a  $a$ .

En términos generales, esto quiere decir que los valores de  $f(x)$  se aproximan a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $a$ . En otras palabras, los valores de  $f(x)$  tienden a estar más y más cerca del número  $L$  cuando  $x$  se acerca cada vez más al número  $a$  (de ambos lados de  $a$ ), pero  $x \neq a$ . (Más adelante se dará una definición más precisa.) Una notación alternativa para

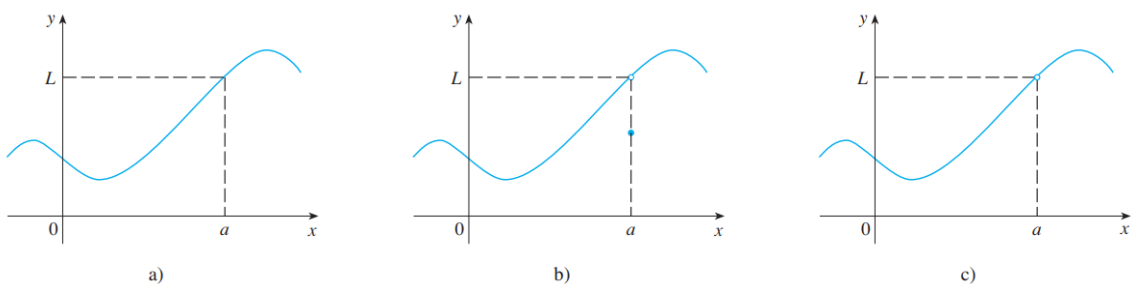
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow a$$

que suele leerse “ $f(x)$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $a$ ”.

Note la frase “pero  $x \neq a$ ” en la definición de límite. Esto significa que al encontrar el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $a$ , no se considera  $x = a$ . De hecho,  $f(x)$  no necesita estar definida cuando  $x = a$ . Lo único que importa es cómo se define  $f$  cerca de  $a$ . La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso c),  $f(a)$  no está definida y, en el inciso b),  $f(a) \neq L$ . Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en  $a$ , es cierto que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

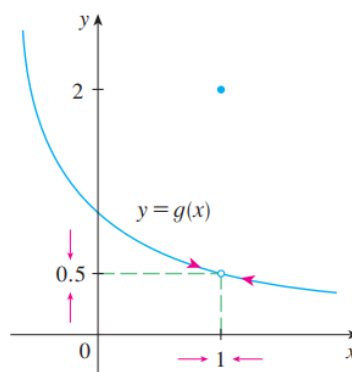
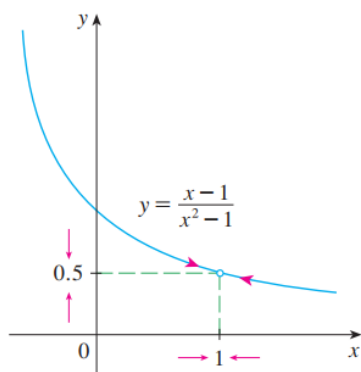
**SOLUCIÓN** Observe que la función  $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$  no está definida cuando  $x = 1$ , pero eso no importa, porque la definición de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  dice que se consideran los valores de  $x$  que están cerca de  $a$ , pero no iguales a  $a$ . Las tablas de la izquierda dan valores de  $f(x)$  (con una precisión de seis decimales) para valores de  $x$  que tienden a 1 (pero no iguales a 1). Sobre la base de los valores en las tablas, hacemos la suposición de que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5$$

El ejemplo 1 se ilustra en la gráfica de  $f$ , en la figura a continuación. Ahora vamos a cambiar un poco  $f$ , dándole el valor de 2 cuando  $x = 1$  y llamando  $g$  a la función obtenida:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función  $g$  conserva el mismo límite cuando  $x$  tiende a 1.



**EJEMPLO 2** Estime el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

**SOLUCIÓN** La tabla enlista los valores de la función para varios valores de  $t$  cercanos a 0.

$t$	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 1,0$	0,16228
$\pm 0,5$	0,16553
$\pm 0,1$	0,16662
$\pm 0,05$	0,16666
$\pm 0,01$	0,16667

A medida que  $t$  se acerca a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.166666..., así que suponemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

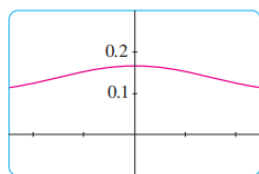
En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiéramos tomado valores aún más pequeños de  $t$ ? La tabla en el margen muestra los resultados de una calculadora; sin duda, ¡algo extraño parece estar sucediendo!

Si trata de obtener estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero al final obtendrá el valor 0 si hace  $t$  suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0, en lugar de  $\frac{1}{6}$ ? No, el valor del límite es  $\frac{1}{6}$  como se demuestra en la siguiente sección. El problema es que la **calculadora dio valores falsos** porque  $\sqrt{t^2+9}$  está muy cerca de 3 cuando  $t$  es pequeña. (De hecho, cuando  $t$  es suficientemente pequeña, una calculadora da el valor de 3,000 para  $\sqrt{t^2+9}$ ... para tantos dígitos como la calculadora sea capaz de aceptar.)

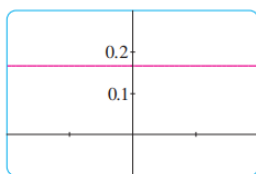
Algo similar sucede cuando tratamos de graficar la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}}{t^2}$$

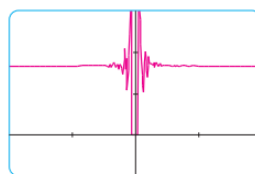
del ejemplo 2, en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos a) y b) de la siguiente figura muestran gráficas bastante precisas de  $f$ , y cuando se utiliza el modo *trace* (si está disponible) puede estimarse fácilmente que el límite es cercano a  $\frac{1}{6}$ . Pero si nos acercamos demasiado, como en los incisos c) y d), entonces obtenemos gráficas incorrectas, de nuevo debido a problemas con la sustracción.



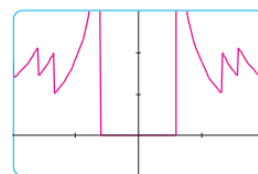
a)  $[-5, 5]$  por  $[-0.1, 0.3]$



b)  $[-0.1, 0.1]$  por  $[-0.1, 0.3]$



c)  $[-10^{-6}, 10^{-6}]$  por  $[-0.1, 0.3]$



d)  $[-10^{-7}, 10^{-7}]$  por  $[-0.1, 0.3]$

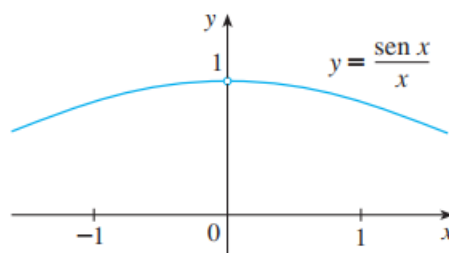
EJEMPLO 3 Obtenga el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

**SOLUCIÓN** La función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  no está definida cuando  $x = 0$ . Usando una calculadora (y recordando que, si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sen } x$  significa el seno del ángulo  $x$  medido en radianes) podemos elaborar una tabla de valores con una precisión de hasta ocho decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica en la siguiente figura suponemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

$x$	$\frac{\text{sen } x}{x}$
$\pm 1.0$	0.84147098
$\pm 0.5$	0.95885108
$\pm 0.4$	0.97354586
$\pm 0.3$	0.98506736
$\pm 0.2$	0.99334665
$\pm 0.1$	0.99833417
$\pm 0.05$	0.99958339
$\pm 0.01$	0.99998333
$\pm 0.005$	0.99999583
$\pm 0.001$	0.99999983

De hecho, esta conjetura es correcta como se demostrará más adelante utilizando un argumento geométrico



EJEMPLO 4 Investigue  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{\pi}{x}$

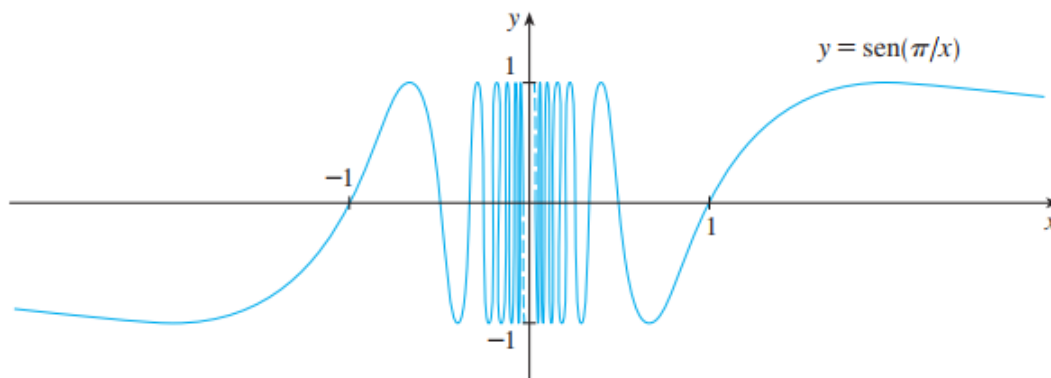
**SOLUCIÓN** Una vez más la función  $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$  no está definida en 0. Evaluando la función para algunos valores pequeños de  $x$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f(1) &= \text{sen} \pi = 0 & f\left(\frac{1}{2}\right) &= \text{sen} 2\pi = 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= \text{sen} 3\pi = 0 & f\left(\frac{1}{4}\right) &= \text{sen} 4\pi = 0 \\ f(0.1) &= \text{sen} 10\pi = 0 & f(0.01) &= \text{sen} 100\pi = 0 \end{aligned}$$

Del mismo modo,  $f(0.001) = f(0.0001) = 0$ . Sobre la base de esta información podríamos estar tentados a suponer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez **nuestra suposición es errónea**. Tenga en cuenta que, aunque  $f(1/n) = \text{sen} n\pi = 0$  para cualquier entero  $n$ , también es cierto que  $f(x) = 1$  para muchos valores de  $x$  cercanos a 0. Esto puede verse en la gráfica de  $f$  que se muestra en la figura.



Las líneas punteadas, cerca del eje  $y$  indican que los valores del  $\text{sen}(\pi/x)$  oscilan infinitamente entre 1 y  $-1$  cuando  $x$  tiende a 0.

Ya que los valores de  $f(x)$  no se acercan a un número fijo cuando  $x$  tiende a 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{\pi}{x} \text{ no existe}$$

$x$	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

$x$	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre el  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 + \frac{\cos 5x}{10000} \right)$

**SOLUCIÓN** Como antes, elaboramos una tabla de valores. De la primera tabla en el margen parece que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 + \frac{\cos 5x}{10000} \right) = 0$$

Pero si perseveramos con valores más pequeños de  $x$ , la segunda tabla sugiere que

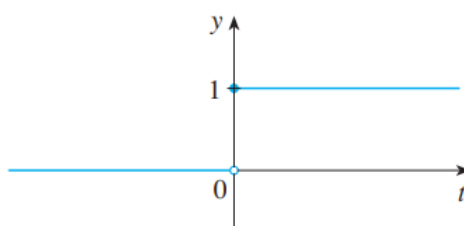
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 + \frac{\cos 5x}{10000} \right) = 0.000100 = \frac{1}{10000}$$

Más adelante veremos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 1$ ; entonces deduciremos que el límite es 0.0001.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos al intentar conjeturar el valor de un límite. Es fácil caer en el valor incorrecto si utilizamos valores inadecuados de  $x$ , pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la discusión después del ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores incorrectos. En la siguiente sección, sin embargo, vamos a desarrollar métodos infalibles para el cálculo de límites.

EJEMPLO 6 La función de Heaviside  $H$  se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



[Esta función lleva el nombre del ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se utiliza para describir una corriente eléctrica en un circuito en el tiempo  $t = 0$ .] Su gráfica se muestra en la figura. Cuando  $t$  se aproxima a 0 por la izquierda,  $H(t)$  se aproxima a 0. Conforme  $t$  se aproxima a 0 por la derecha,  $H(t)$  se aproxima a 1. No hay un único número al que se aproxime  $H(t)$  cuando  $t$  se aproxima a 0. Por tanto,  $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$  no existe.

### 1.3.1. Límites laterales

Hemos notado en el ejemplo 6 que  $H(t)$  tiende a 0 cuando  $t$  se aproxima a 0 por la izquierda y  $H(t)$  tiende a 1 a medida  $t$  se aproxima a 0 por la derecha. Esta situación se indica simbólicamente escribiendo

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo “ $t \rightarrow 0^-$ ” indica que se consideran sólo los valores de  $t$  que son menores que 0. De igual modo, “ $t \rightarrow 0^+$ ” indica que se consideran sólo los valores de  $t$  que son mayores que 0.

#### 2 Definición

Cuando escribimos

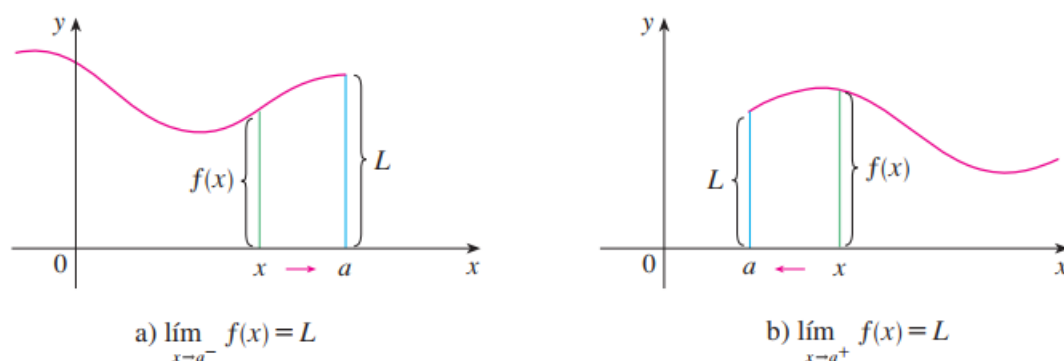
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \tag{1.2}$$

estamos diciendo que el **límite izquierdo de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $a$**  [o el **límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda**] es igual a  $L$  si podemos hacer que los valores de  $f(x)$  se acerquen arbitrariamente a  $L$ , tanto como queramos, tomando  $x$  suficientemente cercanos a  $a$ , pero menores que  $a$ .

Observe que la definición 2 difiere de la definición 1 sólo en el hecho de que  $x$  sea necesariamente menor que  $a$ . Del mismo modo, si se requiere que  $x$  sea mayor que  $a$ , se obtiene “el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha es igual a  $L$ ” y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo “ $x \rightarrow a^+$ ” significa que se consideran sólo  $x > a$ . Estas definiciones se ilustran en la figura



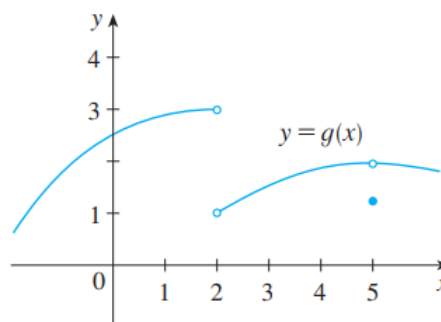
#### 3 Definición

Al comparar la definición 1 con las de los límites laterales, vemos que se cumple con lo siguiente.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \tag{1.3}$$

EJEMPLO 7 La gráfica de una función  $g$  se muestra en la figura. Utilícela para establecer los valores (si existen) de lo siguiente:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$    b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$    c)  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$   
d)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$    e)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$    f)  $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$



**SOLUCIÓN** En la gráfica vemos que los valores de  $g(x)$  tienden a 3 conforme  $x$  tiende a 2 por la izquierda, pero se acercan a 1 a medida  $x$  tiende a 2 por la derecha. Por tanto,

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$$

c) Dado que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, llegamos a la conclusión de (3) que  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = 2$$

f) Esta vez los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos, así que, por (3), tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

A pesar de esto, observe que  $g(5) \neq 2$ .

### 1.3.2. Límites infinitos

EJEMPLO 8 Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ . Si existe.

**SOLUCIÓN** Conforme  $x$  se acerca a 0,  $x^2$  también se acerca a 0, y  $1/x^2$  se hace muy grande. (Véase la tabla en el margen.) De hecho, se desprende de la gráfica de la función  $f(x) = 1/x^2$  en la figura, que los valores de  $f(x)$  pueden ser arbitrariamente grandes, tomando  $x$  lo suficientemente cercano a 0. Así, los valores de  $f(x)$  no se aproximan a un número, por lo que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2$  no existe.

Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo 8, se usa la notación

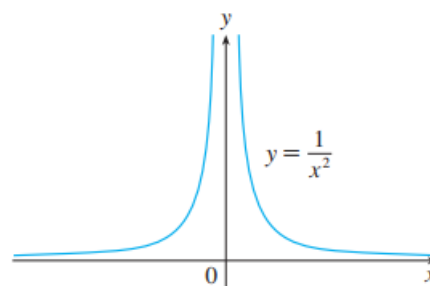
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que estemos considerando a  $\infty$  como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe:  $1/x^2$  puede hacerse tan grande como queramos, tomando a  $x$  suficientemente cerca de 0. En general, podemos escribir simbólicamente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de  $f(x)$  tienden a ser más y más grandes (o “crecen sin límite”) a medida que  $x$  se acerca más y más a  $a$ .

$x$	$\frac{1}{x^2}$
$\pm 1.000$	1.00000
$\pm 0.500$	4.00000
$\pm 0.200$	25.0000
$\pm 0.100$	100.000
$\pm 0.050$	400.000
$\pm 0.010$	10000.0
$\pm 0.001$	1000000



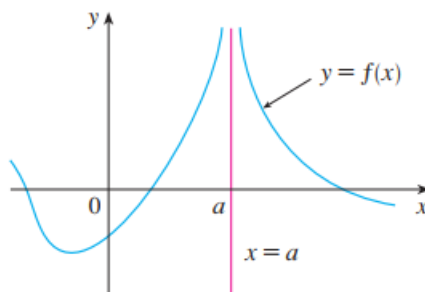
**4 Definición**

Sea  $f$  una función definida por ambos lados de  $a$ , excepto posiblemente en la misma  $a$ .

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (1.4)$$

significa que los valores de  $f(x)$  pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , pero no igual a  $a$ .



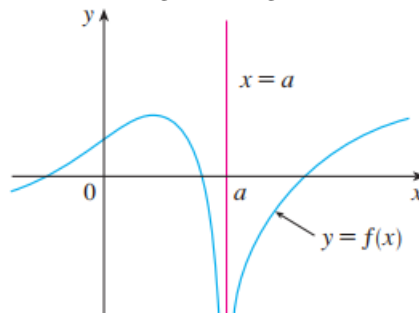
Otra forma de notación para el límite es

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a$$

y se lee: “el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ , es infinito”

Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes conforme  $x$  se aproxima a  $a$ , se precisa en la definición 5 y se ilustra en la siguiente figura

Cuando decimos que un número es “negativo muy grande”, lo que queremos decir que es negativo, pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

**5 Definición**

Sea  $f$  definida por ambos lados de  $a$ , excepto posiblemente en  $a$  misma.

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (1.5)$$

significa que los valores de  $f(x)$  pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , pero no igual a  $a$ .

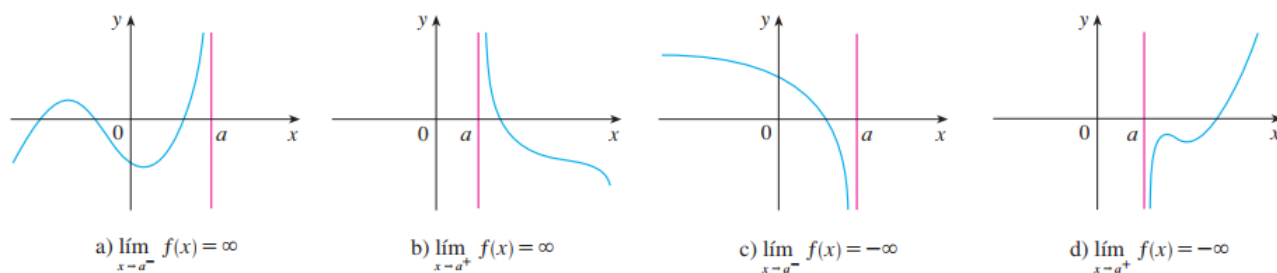
El símbolo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  puede leerse como “el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a  $a$ , es infinito negativo” o “ $f(x)$  decrece sin límite conforme  $x$  tiende a  $a$ ”. Como ejemplo tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty & \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty & \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

recordando que “ $x \rightarrow a^-$ ” significa que se consideran sólo los valores de  $x$  que son menores que  $a$ , y del mismo modo “ $x \rightarrow a^+$ ” significa que se consideran sólo  $x > a$ . En la siguiente figura, se ilustran cuatro de estos casos.



**6 Definición** La recta  $x = a$  se llama **asíntota vertical** de la curva  $y = f(x)$  si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

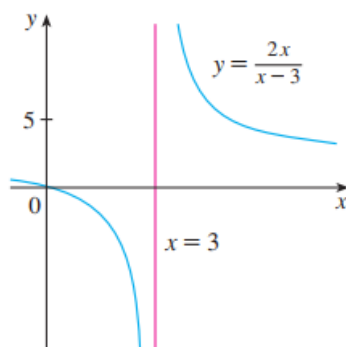
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Por ejemplo, el eje  $y$  es una asíntota vertical de la curva  $y = 1/x^2$  debido a que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = \infty$ . En la figura la recta  $x = a$  es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos que se muestran. En general, el conocimiento de asíntotas verticales es muy útil para dibujar gráficas.

**EJEMPLO 9** Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$  y  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$

**SOLUCIÓN** Si  $x$  tiende a 3 con valores mayores que 3, entonces el denominador  $x - 3$  es un número positivo muy pequeño y  $2x$  está muy cerca de 6, así que el cociente  $2x/(x-3)$  es un número positivo muy grande. Por tanto, intuitivamente, podemos ver que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$



Asimismo, si  $x$  es cercano a 3, pero con valores menores que 3, entonces  $x - 3$  es un número negativo pequeño, pero  $2x$  es aún un número positivo (cercano a 6). Así,  $2x/(x-3)$  es un número *negativo* muy grande. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva  $y = 2x/(x-3)$  se ilustra en la figura anterior. La recta  $x = 3$  es una asíntota vertical.



EJEMPLO 10 Encuentre las asíntotas verticales de  $f(x) = \tan x$

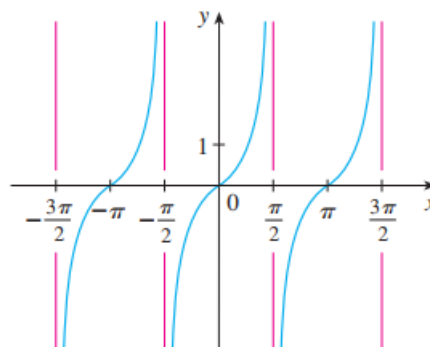
**SOLUCIÓN** Ya que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

hay posibles asíntotas verticales donde  $\cos x = 0$ . De hecho, puesto que  $\cos x \rightarrow a^+$  cuando  $x \rightarrow (\pi/2)^-$  y  $\cos x \rightarrow 0^-$  a medida que  $x \rightarrow (\pi/2)^+$  mientras  $\operatorname{sen} x$  es positivo cuando  $x$  está cerca de  $\pi/2$ , tenemos

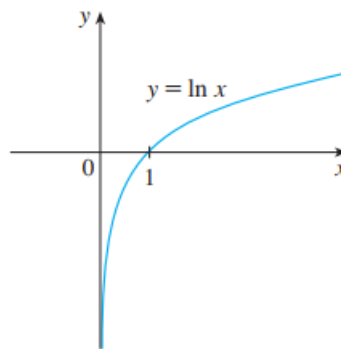
$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto muestra que la recta  $x = \pi/2$  es una asíntota vertical. Un razonamiento similar, muestra que las rectas  $x = (2n+1)\pi/2$ , donde  $n$  es un número entero, son todas asíntotas verticales de  $f(x) = \tan x$ . La gráfica en la figura anterior confirma esto.



Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural  $y = \ln x$ . En la siguiente figura vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



y así, la recta  $x = 0$  (el eje  $y$ ) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es cierto para  $y = \log_a x$  siempre que  $a > 1$ .

## 1.4. Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras cuál es el significado de la ecuación

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla con esta proposición y que aún  $f(2) = 3$  sea verdadero? Explique.

2. Explique qué significa decir que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$$

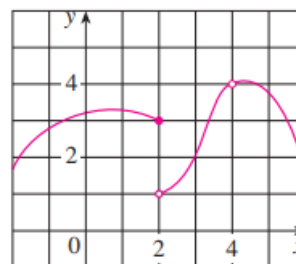
En esta situación, ¿es posible que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  exista? Explique.

3. Explique el significado de cada una de las siguientes proposiciones.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

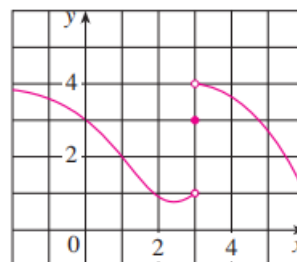
4. Utilice la gráfica de  $f$  para establecer el valor de cada cantidad si ésta existe. Si no existe, explique por qué.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ \text{d) } f(2) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) & \text{f) } f(4) \end{array}$$



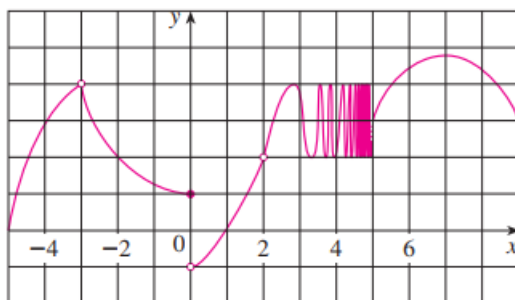
5. Para la función  $f$  cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$    b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$    c)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$   
d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$    f)  $f(3)$



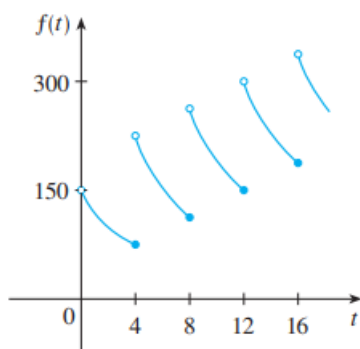
6. Para la función  $h$  cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué

- a)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x)$    b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x)$    c)  $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$   
d)  $h(-3)$    e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$    f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$   
g)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$    h)  $h(0)$    i)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$   
j)  $h(2)$    k)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} h(x)$    l)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} h(x)$



7. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad  $f(t)$  del medicamento en el torrente sanguíneo después de  $t$  horas. Encuentre

$$\lim_{t \rightarrow 12^-} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 12^+} f(t)$$



8. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícela para determinar los valores de  $a$  para los cuales  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe.

a)  $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

9. Utilice la gráfica de la función  $f$  para establecer el valor de cada uno de los siguientes límites, si es que existen. Si no, explique por qué.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$    b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

A)  $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$    B)  $f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3+x^2}}$

10. Conjeture el valor de cada uno de los siguientes límites (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales)

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$   
 $x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$   
 $x = 0, 0.5, 0.9, 0.95, 0.99, 0.999, -2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001$

c)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{5t}-1}{t}$   
 $t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^5-32}{h}$   
 $h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

11. Utilice una tabla de valores para estimar el valor de cada uno de los siguientes límites. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6-1}{x^{10}-1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9^x-5^x}{x}$

12. a) Por medio de la gráfica de la función  $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$  y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje  $y$ , estime el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .  
 b) Verifique su respuesta del inciso a) mediante la evaluación de  $f(x)$  para valores de  $x$  que tiendan a 0.

## 1.5. Indeterminaciones

En la sección anterior vimos que la ecuación  $x = a$  es una asíntota vertical de  $f(x)$  si y solo si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , pero el problema es que hay casos en que no es posible reemplazar a la variable  $x$  por algún valor determinado, por ejemplo, si  $f(x) = \frac{1+x}{x}$  es claro que no existe  $f(0)$ , o por ejemplo si  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , en este caso no existe  $f(1)$  sin embargo en ambos casos sabemos como entender el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

### 1.5.1. Indeterminación del tipo « 0/0 »

EJEMPLO 1 Evaluar el  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

**SOLUCIÓN** Cuando intentamos reemplazar a  $x$  por el valor 1 resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Esto es lo que se denomina indeterminación 0/0, y lo que se debe hacer es convertir algebraicamente la expresión  $\frac{x^2-1}{x-1}$  a otra expresión equivalente donde desaparezca la indeterminación, para hacer esto observamos que tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas, y será posible simplificar el cociente siempre que encontremos factores en común. La expresión  $x^2-1$  es una diferencia de cuadrados por lo que  $x^2-1 = (x+1)(x-1)$  con lo cual el límite resulta

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2 Evaluar el  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

**SOLUCIÓN** Cuando intentamos reemplazar a  $x$  por el valor 1 resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

nuevamente es una indeterminación 0/0 pero en este caso no tenemos un polinomio para factorizar. La estrategia en este caso es aprovecharnos de la propiedad de que el cuadrado de una raíz cuadrada anula la radicación, es decir  $(\sqrt{x})^2 = x$  y para lograr esto aplicamos el artificio de multiplicar y dividir por el conjugado

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

y ahora el límite se convierte en

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

### 1.5.2. Indeterminación del tipo « $\infty/\infty$ »

Dada una función de forma  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \infty$ , entonces el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  constituye una indeterminación de tipo  $\infty/\infty$ . En estos casos el límite se resuelve por ciertas clasificaciones

**$f$  es racional**

1. La función  $f$  es de la forma  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son funciones polinómicas.

EJEMPLO 1 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$

**SOLUCIÓN** Como el numerador y el denominador son polinomios buscamos factores cancelables *a toda costa*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

decir que buscaremos factores cancelables “a toda costa” significa que se factoriza el polinomio como sea, pero de tal forma que se puedan simplificar factores. Es interesante aclarar que como  $x$  tiende a infinito la fracción  $(x+a)/(x+b)$  siempre tiende a  $x/x = 1$  ya que sumarle o restarle 1 a algo que tiende a infinito es como no sumarle o restarle nada, este fenómeno se puede escribir como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} \approx \frac{ax}{cx}$$

con lo cual este límite tiende a  $a/c$ .

En general, si  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios de igual grado, entonces el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{b}$$

donde  $a$  es el coeficiente principal de  $p(x)$  y  $b$  es el coeficiente principal de  $q(x)$ , escrito de un modo general sería

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$

EJEMPLO 2 Evaluar el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1}$

**SOLUCIÓN** Como numerador y denominador son funciones polinómicas, entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$  constituye una indeterminación de tipo  $\infty/\infty$ . Como se pretende cancelar lo más que se pueda tomamos  $x^2$  como factor común a toda costa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+1/x^2)}{x(1+1/x)} = \frac{x(1+1/x^2)}{1+1/x} = \frac{x \cdot 1}{1} = x = \infty$$

En general, si  $gr(p) > gr(q)$  el límite es infinito y si  $gr(p) < gr(q)$  el límite es cero

2. La función  $f$  es de la forma  $g(x) \pm h(x)$ . En este caso lo que se buscará es convertir a  $p/q$ .

EJEMPLO 3 Evaluar el  $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x}$

**SOLUCIÓN** Es muy tentador asumir que  $x > 1/x$  ya que  $1/x$  tiende a 0 conforme  $x$  tiende a infinito, sin embargo no siempre es fácil hacer estas hipótesis. No podemos simplemente asumir que  $x > 1/x$ , más que nada porque no es una buena práctica suponer cosas, para hacer las cosas un poco más fáciles simplemente vamos a **sumar** los términos, luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$

porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

EJEMPLO 4 Evaluar el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x} - \frac{6x^2-x+1}{x-1}$

**SOLUCIÓN** Es claramente una indeterminación “ $\infty - \infty$ ”, pero aquí no podemos asumir qué fracción es más grande, por tal motivo primero **restamos**, luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} \approx \frac{-4x^3}{x^2} \approx -4x = -\infty$$

### 1.5.3. Indeterminación del tipo « $1^\infty$ »

EJEMPLO 1 Dada la sucesión  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  estime el límite de  $a_n$  cuando  $n$  tiende a infinito

**SOLUCIÓN** Haciendo una tabla de valores tomando valores para  $n$  cada vez más grandes se tiene

	$n$	$(1 + 1/n)^n$
	1	2.0000
	10	2.5937
	100	2.7048
	1000	2.7169
	10000	2.7181
	100000	2.7182
	1000000	2.7182

Si nos basamos en los datos de la tabla deberíamos decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx 2.7182$$

más precisamente, tomando muchos más valores para  $n$  este límite es un número muy cercano a 2.718281828459045...

Conocido como el número  $e$ , un número irracional. Volveremos a hablar de éste número en la unidad 3 (derivadas), por el momento sólo conformese con saber que si  $f(x) = (1 + 1/x)^x$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

#### Cómo resolver una indeterminación de tipo “ $1^\infty$ ”

EJEMPLO 2 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

**SOLUCIÓN** No sería prudente asumir que el límite es  $e$ , pero sí podemos afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + 2\frac{1}{x}\right)^x$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x$$

si usted está pensando que la cosa está peor, se equivoca. Si tomamos la función  $y = \frac{x}{2}$  nos queda que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y}$$

y por el álgebra de límites, si  $g(x) = 2y$ , entonces  $[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{2y} = [[f(x)]^y]^2$ , por lo tanto

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^2 = e^2$$

EJEMPLO 3 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$

**SOLUCIÓN** Ya que  $1/x$  tiende a infinito conforme  $x$  tiende a 0 el  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$  es una indeterminación  $1^\infty$ . Nuevamente podemos hacer una sustitución  $y = \frac{1}{x}$  por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

EJEMPLO 4 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x-1} \right)^x$

**SOLUCIÓN** Si tomamos el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{x-1} = 1$  tenemos una indeterminación  $1^\infty$ , pero en este caso la cosa ya no es tan simple como hacer un cambio de variable. Lo que haremos en este caso es una transformación algebraica.

Convertiremos la expresión  $\frac{1+x}{x-1}$  a la forma  $1 + \frac{1}{y}$

1. Escribimos  $\frac{A}{B}$  como  $\frac{B-B+A}{B}$
2. Reordenamos los términos como  $\frac{B+(A-B)}{B}$ , por lo tanto
3.  $\frac{A}{B} = \frac{B}{B} + \frac{A-B}{B} = 1 + \frac{A-B}{B}$ , luego con el recíproco  $y = \frac{1}{1/y}$
4.  $1 + \frac{1}{B/(A-B)}$

De esta forma si  $A = 1 + x$  y  $B = x - 1$  tenemos

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x-1) + x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{x+1-(x-1)}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}$$

por lo tanto tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^x$$

y ahora sí, si tomamos  $y = \frac{x-1}{2}$  tenemos que  $x = 2y + 1$ , por lo tanto tenemos el

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^{2y+1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^{2y} \cdot \left( 1 + \frac{1}{y} \right) = e^2 \cdot 1 = e^2$$

**Definición** Dada la sucesión  $a_n = x^n - 1$  se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \quad (1.6)$$

**Demostración** Primero se puede mostrar que se cumple para  $n = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x$$

$$\text{y por propiedad del logaritmo } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\text{y por álgebra de límites } \ln \left( \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

$$\text{ahora convertimos } x \text{ en } 1 + x - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}$$

$$\text{por lo tanto } \ln \left( \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}} \right)^{\frac{1}{x-1}} \right) = \ln e = 1$$

ahora para el caso  $n \neq 1$  el límite se convierte en

$$\ln \left( \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}} \right)^{\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^n-1}} \right)$$

finalmente nuestro problema se reduce a factorizar el binomio  $x^n - 1$ , algo que no es difícil sabiendo que tiene la raíz  $x = 1$  por lo que su factorización es  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  con lo cual el cociente

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)} = \frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1}$$

por lo tanto

$$\ln e^{\frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1}}} = \frac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1}$$

EJEMPLO Evaluar  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^7-1}$

**SOLUCIÓN**

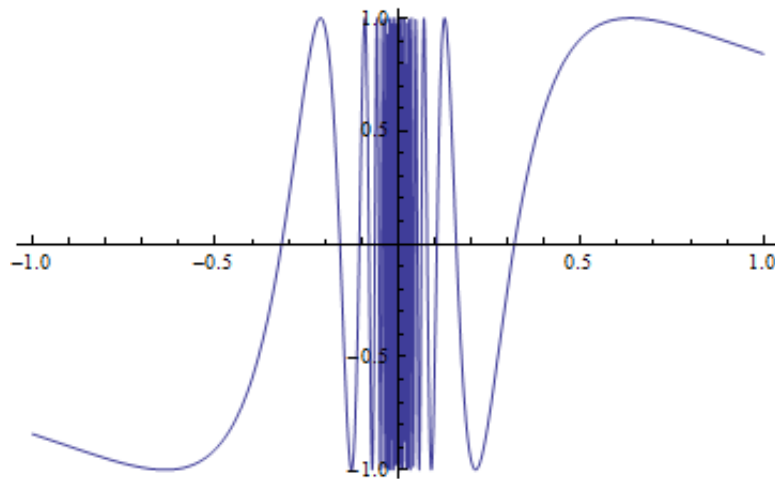
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^7-1} = \frac{1}{1^6+1^5+1^4+1^3+1^2+1+1} = \frac{1}{7}$$

### 1.5.4. Límites especiales

Algunos límites no se pueden determinar solamente convirtiendo expresiones o simplificando términos, veamos el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ya sabemos de la trigonometría que el seno de cualquier número siempre es un número entre -1 y 1, y como  $\frac{1}{x}$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a 0, el  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  no está definido, ya que la función  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  oscila infinitamente cerca de 0, como se ve en el gráfico



Consecuentemente si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin g(x) = [-1, 1]$$

algo similar sucederá con la función coseno.

**Definición**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  y  $f(x)$  es una función acotada entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \quad (1.7)$$

EJEMPLO 1 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**SOLUCIÓN**

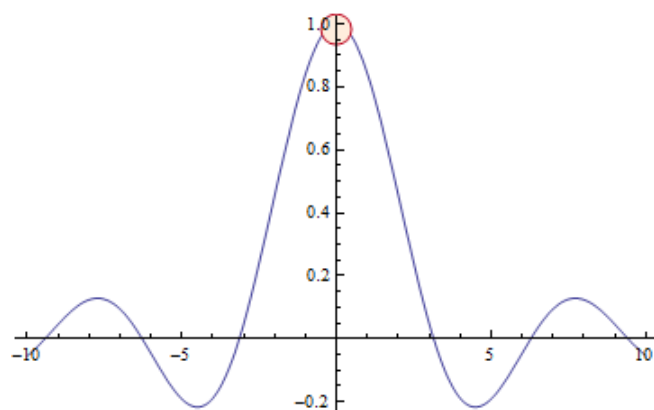
Primero expresamos  $\frac{\sin x}{x}$  como  $\sin x \cdot \frac{1}{x}$  y tomando  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = 1/x$  ahora evaluamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \frac{1}{x} = [-1, 1] \cdot 0 = 0$$



EJEMPLO 2 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

**SOLUCIÓN**



esta función no está definida en  $x = 0$ , pero mediante su gráfica se observa que  $f(x)$  está cada vez más cerca de 1 cuando  $x$  está cada vez más cerca de 0, aunque la demostración no se encuentra en este texto.

### 1 Definición

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (1.8)$$

### 2 Definición

Si  $g$  es una función de  $x$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } [g(x)]}{g(x)} = 1 \quad (1.9)$$

EJEMPLO 3 Evalúe el  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{2x^2-2x}$

**SOLUCIÓN**

Factorizamos el denominador como  $2x(x-1)$ , por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{2x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} \cdot \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

## 1.6. Ejercicios

Resuelve los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-\cos x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\frac{1}{x-1}}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{4x+1}{x}\right)^{5x}$

Recuerde que existen algunas identidades trigonométricas que son muy útiles a la hora de resolver límites, por ejemplo la identidad

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Otra propiedad útil cuando aparecen logaritmos es la propiedad

$$\operatorname{Log}_a x^b = b \cdot \operatorname{Log}_a x$$

y para el caso particular del logaritmo natural se tiene que

$$\operatorname{Ln} e = 1$$

Recuerde que por definición

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Log}_a x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Log}_a x = -\infty$$