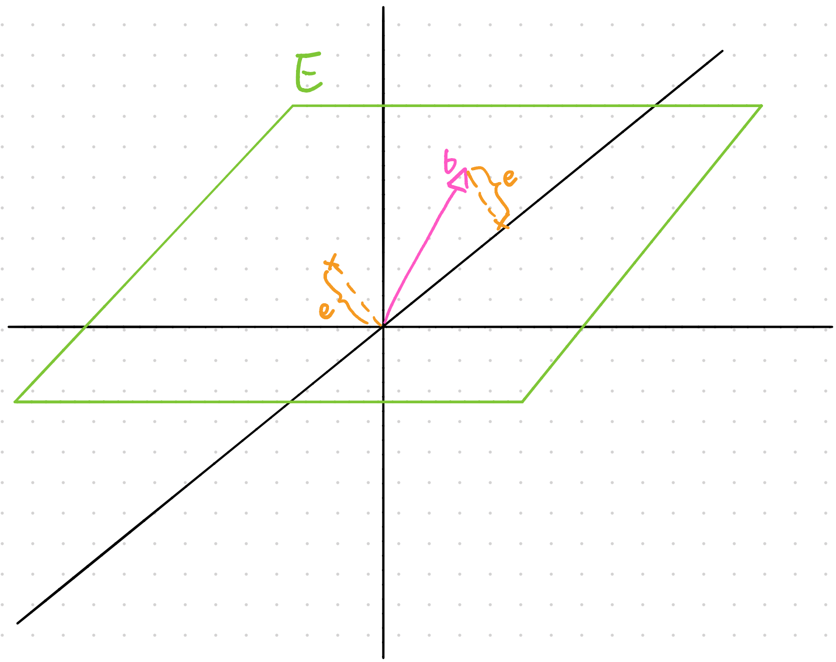
44

$|E - O| =$ Lotfußpunkt?

$|x - E| =$??



45

- Cofactors
- Halbdiagonalform + Produkt der Diag.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

per Laplace: $|A| = -2 \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$$= -2\big(-(-2)(-6)(-3) - 4 \cdot 3 \cdot (-3)\big)$$

$$= -2(36 + 36)$$

$$= -144$$

per Gauss:

#Zeilenvertauschungen: 1
Skalarmultiplikationen: $1/3, -1/2$

$$A \overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III} + \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}\cdot(-1/2)]{\text{III}\cdot 1/3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\left(1/3\,(-1/2)\,|A|\right) = (-2)\cdot 3\cdot(-1)(-4)$$

$$\Leftrightarrow 1/6\,|A| = -24$$

$$\Leftrightarrow |A| = -144$$

46 6x Matrix-Vektor Multiplikation

$$Aa = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -4+4 \\ -2+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a \Rightarrow \lambda_a = 2$$

$Ab \neq \lambda b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ist nun offensichtlich

$$Ac = A(2a) = 2(Aa) = 4a = 2c \Rightarrow \lambda_c = 2$$

$$Ad = \begin{pmatrix} 3-5+8 \\ 6+2-6 \\ 3-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2d \Rightarrow \lambda_d = 2$$

$$Ae = \begin{pmatrix} 1+i-10+8 \\ 2+2i+4-6 \\ 1+i+0-1 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = ie \Rightarrow \lambda_e = i$$

$$Af = \begin{pmatrix} 1-i-10+8 \\ 2-2i+4-6 \\ 1-i+0-1 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i \\ -2i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = -ie \Rightarrow \lambda_f = -i$$

47

$\cdot\ C = 2I$

C

1. $|C - \lambda I| = (2-\lambda)^3$

2. $(2-2)^3 = 0$

3. Die algebraische Vielfachheit ist 3

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5. Die geometrische Vielfachheit ist 3

A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3 - (-1)(2-\lambda) - (2-\lambda)(-1)(-1)$$

$$= (2-\lambda)^3 + (2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^3$$

2. $(z-2)^3 = 0$

3. Die algebraische Vielfachheit ist 3

4. Löse $(A-2I)x = 0$

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}\cdot(-1)]{\mathrm{I}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Basis von } E_{\{2\}}$$

5. Die geometrische Vielfachheit ist 1.

B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda)(-1)$$

$$= 6-3\lambda-6\lambda+3\lambda^2-2\lambda+\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+(2-\lambda)$$

$$= 6-11\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+(2-\lambda)$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8$$

$$= -(\lambda-2)^3$$

2. $-(2-2)^3 = 0$

3. Die algebraische Vielfachheit ist 3

4. Löse $(B-2I)x = 0$

$$B-2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Basis von } E_{\{2\}}$$

5. Die geometrische Vielfachheit ist 2.