অধ্যায়–12

ডেল, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল

DEL, GRADIENT, DIVERGENCE AND CURL

এই অধ্যায়ে প্রথমে del, স্কেলার ফাংশন (বা স্কেলার ফিল্ড) এর gradient, ভেক্টর ফাংশন (বা ভেক্টর ফিল্ড) এর divergence এবং curl এর সংজ্ঞা সহ ইহাদের সম্পর্কি ১৩টি মৌলিক (Fundamental) উপপাদ্যের বর্ণনা সহ প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে। পরে আরো কিছু সংজ্ঞাসহ আরো কিছু উপপাদ্য এবং উদাহরণ নিয়া আলোচনা করা হইয়াছে।

12.1. ভেক্টর অপারেটর ∇ ঃ অপারেটর ∇ কে ডেল **(del)** বলে। ইহাকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \sum \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\equiv \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

∇ কে ন্যাবলা **(nabla)** বা অ্যাটলেড **(atled)** বলে। ইহা একত্রে ভেক্টর ও ডিফারেন্টসিয়াল এই দুই অপারেটর হিসাবেই কাজ করে।

N. B. Δ কে ডেল্টা **(delta)** বলে। ডেল্টার উল্টা হইল ডেল (∇).

12.2. স্কেলার ফাংশনের Gradient ঃ

[NUH–2004, NUH (NM)–2005]

যদি কোন রিজিওন এর প্রত্যেক বিন্দুতে স্কেলার ফাংশন $\phi(x, y, z)$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণ যোগ্য হয়, তবে ϕ এর gradient কে grad ϕ অথবা $\nabla\phi$ লিখা হয় এবং ইহাকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় [Let $\phi(x, y, z)$ be a differentiable sealar function at all point in a region then the gradient of ϕ written grad ϕ or $\nabla\phi$ is defined by]

$$\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

$\nabla\phi$ একটি ভেক্টর ফাংশন বা ভেক্টর ফিল্ড।

$\nabla\phi$ এর অন্য আকার ঃ

(i) $$\nabla\phi = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} = \sum \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi$$

(ii) $$\nabla\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\phi$$

12.3. ভেক্টর ফাংশনের Divergence ঃ

[NUH–2004, 2007, NUH (NM)–2005]

যদি কোন রিজিওন এর প্রত্যেক বিন্দুতে ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণ যোগ্য হয়, তবে $\mathbf{V} = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ এর divergence কে (সংক্ষেপে) div **V** অথবা $\nabla\cdot\mathbf{V}$ লিখা হয় এবং ইহাকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় [Let $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ be differentiable vector valued function at all points in a region, then divergence of **V** is denoted by div **V** or $\nabla\cdot\mathbf{V}$ is defined by]

$$\text{div}\,\mathbf{V} = \nabla\cdot\mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

ইহা পরিষ্কার যে $\nabla\cdot\mathbf{V}$ একটি স্কেলার রাশি এবং V_1, V_2, V_3 ফাংশনগুলি x, y এবং z এর স্কেলার ফাংশন।

$\nabla\cdot\mathbf{V}$ এর অন্য আকার ঃ

(i) $$\nabla\cdot\mathbf{V} = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} = \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}$$

(ii) $$\nabla\cdot\mathbf{V} = \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\sum V_1\,\mathbf{i}\right)$$

(iii) $$\nabla\cdot\mathbf{V} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[V_1, V_2, V_3]$$

12.4. ভেক্টর ফাংশনের Curl ঃ [NUH –2004, 2007, NUH (NM)–2005]

যদি কোন রিজিওন (Region) এর প্রত্যেক বিন্দুতে ভেক্টর ফাংশন $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরীকরণ যোগ্য হয়, তবে $\mathbf{V} = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ এর curl কে curl **V** অথবা $\nabla\times\mathbf{V}$ লিখা হয় এবং ইহাকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় [$\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$ be differentiable vector valued function at all points in a region, then curl of **V** is denoted by curl **V** or $\nabla\times\mathbf{V}$ is defined by]

$$\text{curl}\,\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

ইহা পরিষ্কার যে $\nabla\times\mathbf{V}$ একটি ভেক্টর ফাংশন বা ভেক্টর ফিল্ড এবং V_1, V_2, V_3 ফাংশনগুলি x, y এবং z এর স্কেলার ফাংশন।

curl **V** কে মাঝে মাঝে rot **V** ও লিখা হয় যেখানে rot **V** বলিতে **V** এর rotation (ঘূর্ণন) কে বুঝানো হইয়াছে।

$\nabla\times\mathbf{V}$ এর অন্য আকার ঃ

(i) $$\nabla\times\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_1 & V_2 & V_3\end{vmatrix}$$

(ii) $$\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}=\sum\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}$$

(iii) $$\nabla\times\mathbf{V}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\times[V_1, V_2, V_3]$$

12.5. স্কেলার ফাংশনের যোগ ও বিয়োগের Gradient ঃ

উপপাদ্য–1. দেখাও যে $\nabla(\phi_1\pm\phi_2)=\nabla\phi_1\pm\nabla\phi_2$.

যেখানে $\phi_1(x, y, z)$ এবং $\phi_2(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য স্কেলার ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে, $\nabla(\phi_1\pm\phi_2)=\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1\pm\phi_2)$

$$=\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\pm\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$$

$$=\nabla\phi_1\pm\nabla\phi_2.$$

12.6. স্কেলার ফাংশনের গুণনের Gradient ঃ

উপপাদ্য–2. দেখাও যে $\nabla(\phi_1\phi_2)=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1$

যেখানে $\phi_1(x, y, z)$ এবং $\phi_2(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য স্কেলার ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla(\phi_1\phi_2)=\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1\phi_2)$

$$=\sum\mathbf{i}\left(\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+\phi_2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)$$

$$=\phi_1\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+\phi_2\sum\mathbf{i}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}$$

$$=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1.$$

12.7. স্কেলার ফাংশনের ভাগের Gradient ঃ

উপপাদ্য–3. দেখাও যে $\nabla\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right) = \frac{\phi_2\,\nabla\phi_1 - \phi_1\,\nabla\phi_2}{(\phi_2)^2}$ যেখানে $\phi_1(x, y, z)$ এবং $\phi_2(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য স্কেলার ফাংশন এবং $\phi_2 \neq 0$.

প্রমাণ ঃ $\nabla\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right) = \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$

$$= \sum \mathbf{i}\left\{\frac{\phi_2\,\frac{\partial\phi_1}{\partial x} - \phi_1\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x}}{(\phi_2)^2}\right\}$$

$$= \frac{\phi_2 \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial\phi_1}{\partial x} - \phi_1 \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x}}{(\phi_2)^2}$$

$$= \frac{\phi_2\,\nabla\phi_1 - \phi_1\,\nabla\phi_2}{(\phi_2)^2}$$

12.8. ভেক্টর যোগ ও বিয়োগের Divergence ঃ

উপপাদ্য–4. দেখাও যে $\nabla\cdot(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} \pm \nabla\cdot\mathbf{B}$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla\cdot(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})$

$$= \sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \pm \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \pm \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$$

$$= \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{A} \pm \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{B}$$

$$= \nabla\cdot\mathbf{A} \pm \nabla\cdot\mathbf{B}.$$

12.9. স্কেলার গুণনের Divergence ঃ

উপপাদ্য–5. দেখাও যে $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$

যেখানে $\phi(x, y, z)$ এবং $\mathbf{A}(x, y, z)$ যথাক্রমে অন্তরীকরণ যোগ্য স্কেলার এবং ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\phi\mathbf{A})$

$$= \sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{A} + \phi\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{A} + \phi\left(\sum \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$

$$\therefore \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}\phi A_1 + \mathbf{j}\phi A_2 + \mathbf{k}\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3)$$

$$+ \phi\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3)$$

$$= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

12.10. ভেক্টর ফাংশন যোগ এবং অন্তরের Curl ঃ

উপপাদ্য–6. দেখাও যে $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \pm \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \pm \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}.$$

12.11. স্কেলার গুণনের Curl ঃ

উপপাদ্য–7. 6 দেখাও যে $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$,

যেখানে $\phi(x, y, z)$ এবং $\mathbf{A}(x, y, z)$ যথাক্রমে অন্তরীকরণ যোগ্য স্কেলার এবং ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\phi\mathbf{A})$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{A} + \phi\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\times\mathbf{A} + \phi\left(\sum \mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi\,(\nabla\times\mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$

$$\therefore \nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\mathbf{i}\phi A_1 + \mathbf{j}\phi A_2 + \mathbf{k}\phi A_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)\right\}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3 - \phi\frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right) + \phi\left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} + \phi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi(\nabla\times\mathbf{A}).$$

12.12. Gradient এর Curl ঃ

উপপাদ্য–৪. দেখাও যে curl grad $\phi = \nabla\times\nabla\phi = \mathbf{0}$

যেখানে $\phi(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য স্কেলার ফাংশন।

প্রমাণ ঃ curl grad $\phi = \nabla \times \nabla \phi$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \sum \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right\} \mathbf{i}$$

$$= \sum \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right) \mathbf{i}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

যেহেতু $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$.

12.13. Curl এর Divergence ঃ

[NUH–2004, NUH (NM)–2004, 2006 (Old)]

উপপাদ্য–9. দেখাও যে div curl $\mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ ধরি $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$. তাহা হইলে

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \sum \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) \mathbf{i}$$

সুতরাং $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \left(\sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \sum \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) \mathbf{i}$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)$$

$$= \sum \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y}$$

$$= 0$$

যেহেতু $\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y}$.

12.14. ভেক্টর গুণনের Divergence ঃ

উপপাদ্য–10. দেখাও যে div $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ [NUH (NM)–2005]

$$= \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}).$$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$= \sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}\right) + \sum \mathbf{i}\cdot\left(\mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\cdot\mathbf{B} - \sum \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\times\mathbf{A}\right)\cdot$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\cdot\mathbf{B} - \left(\sum \mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)\cdot\mathbf{A}$$

$$= (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} - (\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}$$

$$= \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ এবং $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$

$$\therefore \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$\therefore \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(A_2B_3 - A_3B_2) + \frac{\partial}{\partial y}(A_3B_1 - A_1B_3) + \frac{\partial}{\partial z}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$= B_3\frac{\partial A_2}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_3}{\partial x} - B_2\frac{\partial A_3}{\partial x} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_3}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial y}$$

$$- B_3\frac{\partial A_1}{\partial y} - A_1\frac{\partial B_3}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial z} + A_1\frac{\partial B_2}{\partial z} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial z} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial z}$$

$$= B_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + B_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$- A_1\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) - A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right) - A_3\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{B} \cdot \left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$- \mathbf{A} \cdot \left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \mathbf{B} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

12.15. স্কেলার গুণনের Gradient ঃ

উপপাদ্য–11. দেখাও যে

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ ঃ $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sum \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{i}$

$$= \sum\left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \sum\left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$

$$= \sum\left\{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} - \mathbf{A} \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \times \mathbf{i}\right)\right\} + \sum\left\{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \mathbf{B} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \times \mathbf{i}\right)\right\}$$

[$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ সূত্র ব্যবহার করিয়া]

$$= \left(\mathbf{A} \cdot \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \left(\sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right)$$

$$+ \left(\mathbf{B} \cdot \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times \left(\sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ এবং $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$

$$\therefore \mathbf{A} \cdot \nabla = A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3)$$

$$= \mathbf{i}A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + \mathbf{j}A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + \mathbf{k}_1A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} + \mathbf{i}A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + \mathbf{j}A_2\frac{\partial B_2}{\partial y}$$

$$+ \mathbf{k}A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + \mathbf{i}A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} + \mathbf{j}A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} + \mathbf{k}A_3\frac{\partial B_3}{\partial z} \cdots (1)$$

(1) এ **A** ও **B** বিনিময় করে পাই,

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} = \mathbf{i}B_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + \mathbf{j}B_1\frac{\partial A_2}{\partial x} + \mathbf{k}B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} + \mathbf{i}B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + \mathbf{j}B_2\frac{\partial A_2}{\partial y}$$

$$+ \mathbf{k}B_2\frac{\partial A_3}{\partial y} + \mathbf{i}B_3\frac{\partial A_1}{\partial z} + \mathbf{j}B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} + \mathbf{k}B_3\frac{\partial A_3}{\partial z} \cdots (2)$$

আবার, $\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} & \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} & \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}A_2\frac{\partial B_2}{\partial x} - \mathbf{i}A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - \mathbf{i}A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} + \mathbf{i}A_3\frac{\partial B_3}{\partial x} + \mathbf{j}A_3\frac{\partial B_3}{\partial y}$$

$$- \mathbf{j}A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - \mathbf{j}A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + \mathbf{j}A_1\frac{\partial B_1}{\partial y} + \mathbf{k}A_1\frac{\partial B_1}{\partial z}$$

$$- \mathbf{k}A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} - \mathbf{k}A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + \mathbf{k}A_2\frac{\partial B_2}{\partial z} \cdots (3)$$

(3) এ **A** ও **B** বিনিময় করে পাই,

$$\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{i}B_2\frac{\partial A_2}{\partial x} - \mathbf{i}B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} - \mathbf{i}B_3\frac{\partial A_1}{\partial z} + \mathbf{i}B_3\frac{\partial A_3}{\partial x} + \mathbf{j}B_3\frac{\partial A_3}{\partial y}$$

$$- \mathbf{j}B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} - \mathbf{j}B_1\frac{\partial A_2}{\partial x} + \mathbf{j}B_1\frac{\partial A_1}{\partial y} + \mathbf{k}B_1\frac{\partial A_1}{\partial z} - \mathbf{k}B_1\frac{\partial A_3}{\partial x}$$

$$- \mathbf{k}B_2\frac{\partial A_3}{\partial y} + \mathbf{k}B_2\frac{\partial A_2}{\partial z} \cdots (4)$$

(1), (2), (3) এবং (4) যোগ করি,

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$=\mathbf{i}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x}+B_1\frac{\partial A_1}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_2}{\partial x}+B_2\frac{\partial A_2}{\partial x}+A_3\frac{\partial B_3}{\partial x}+B_3\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$

$$+\mathbf{j}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial y}+B_1\frac{\partial A_1}{\partial y}+A_2\frac{\partial B_2}{\partial y}+B_2\frac{\partial A_2}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_3}{\partial y}+B_3\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)$$

$$+\mathbf{k}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial z}+B_1\frac{\partial A_1}{\partial z}+A_2\frac{\partial B_2}{\partial z}+B_2\frac{\partial A_2}{\partial z}+A_3\frac{\partial B_3}{\partial z}+B_3\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$

$$+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$

$$=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$

$$=\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\Rightarrow\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

12.16. ভেক্টর গুণনের Curl ঃ

উপপাদ্য–12. যদি $\mathbf{A}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{B}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

[NUH (NM)–2006]

প্রমাণ ঃ $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\sum\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$=\sum\mathbf{i}\times\left(\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}\right)$$

$$=\sum\mathbf{i}\times\left(\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right)+\sum\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}\right)$$

$$=\sum\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{A}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{A})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right\}+\sum\left\{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}-\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{B}\right\}$$

$$=\left(\sum\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{A}-\sum(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}+\sum(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}-\left(\sum\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{B}$$

$$=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\sum\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{B}+\sum\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

$$=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}).$$

অন্যভাবে ঃ ধরি $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3$ এবং $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$

এখানে $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$\therefore \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_2B_3 - A_3B_2 & A_3B_1 - A_1B_3 & A_1B_2 - A_2B_1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial y} - A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} - B_1\frac{\partial A_3}{\partial z} + A_1\frac{\partial B_3}{\partial z}\right.$$

$$\left. + B_3\frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(A_2\frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - B_2\frac{\partial A_3}{\partial z} - A_1\frac{\partial B_2}{\partial x}\right.$$

$$\left. - B_2\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(A_3\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} - A_1\frac{\partial B_3}{\partial x}\right.$$

$$\left. - B_3\frac{\partial A_1}{\partial x} - A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} - B_3\frac{\partial A_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial y} + A_1\frac{\partial B_3}{\partial z} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - A_3\frac{\partial B_1}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(A_2\frac{\partial B_3}{\partial z} +\right.$$

$$\left. A_2\frac{\partial B_1}{\partial x} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - A_1\frac{\partial B_2}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(A_3\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial y} - A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} - A_2\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)$$

$$+ \mathbf{i}\left(B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + B_3\frac{\partial A_1}{\partial z} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial y} - B_1\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial x}\right.$$

$$\left. - B_2\frac{\partial A_3}{\partial z} - B_2\frac{\partial A_1}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} + B_2\frac{\partial B_3}{\partial y} - B_3\frac{\partial A_1}{\partial x} - B_3\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}A_1\left(\frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) + \mathbf{k}A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\right)$$

$$-\left(A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}B_1 - \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}B_2 - \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{k}B_3$$

$$+\left(B_2\frac{\partial}{\partial y} + B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}A_1 + \left(B_1\frac{\partial}{\partial x} + B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}A_2 + \left(B_1\frac{\partial}{\partial x} + B_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{k}A_3$$

$$-\mathbf{i}B_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \mathbf{j}B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \mathbf{k}B_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{i}A_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)+\mathbf{j}A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{k}A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}B_1$$

$$-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}B_2-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}B_3$$

$$+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{i}A_1+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_2\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j}A_2$$

$$+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}A_3-\mathbf{i}B_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$-\mathbf{j}B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)-\mathbf{k}B_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=(\mathbf{i}A_1+\mathbf{j}A_2+\mathbf{k}A_3)\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)$$

$$-\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}B_1+\mathbf{j}B_2+\mathbf{k}B_3)$$

$$+\left(B_1\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+B_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}A_1+\mathbf{j}A_2+\mathbf{k}A_3)$$

$$-(\mathbf{i}B_1+\mathbf{j}B_2+\mathbf{k}B_3)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

12.17. Curl এর Cul :

[NUH-2004, 2007, NUH (NM)-2004, 2006 (Old)]

উপপাদ্য-13. দেখাও যে $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$

যেখানে $\mathbf{A}(x, y, z)$ অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর ফাংশন।

প্রমাণ : ধরি $\mathbf{A}=[A_1, A_2, A_3]$. তাহা হইলে

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\, \partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x\, \partial y}\right)$$

$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\, \partial z}\right)$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\mathbf{i}A_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}A_2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{k}A_3$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$+ \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{i}A_1$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}A_2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}A_3$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3)$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

12.18. স্কেলার ফিল্ডের গ্রেডিয়েন্ট এর তাৎপর্য [Significance of the gradient of scalar field] ঃ ধরি $\phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার ফিল্ড, তবে $\nabla\phi$ ভেক্টর ফিল্ড হইবে যাহা একটি বিন্দুতে ভেক্টর নির্দেশ করে। যাহার দিকে স্কেলার ফিল্ড দ্রুত পরিবর্তন এবং পরিবর্তন হারের মান দ্বারা উহার মান নির্ধারিত হয়।

$\nabla\phi$ এর উপাদান দ্বারা যে কোন দিকে ϕ এর স্থানান্তরে পরিবর্তন হার নির্দেশ করে।

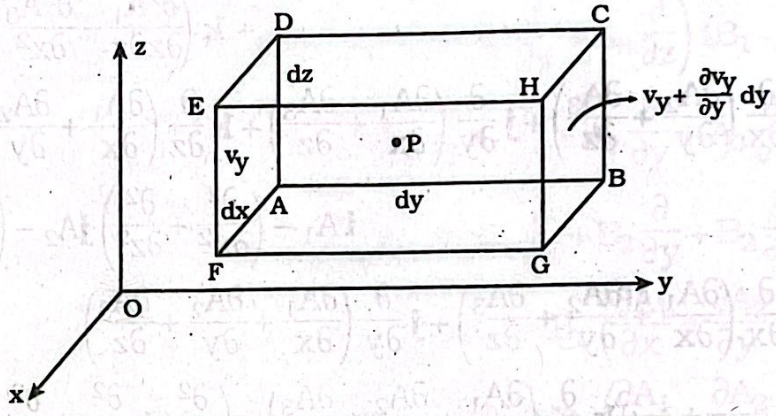
আরও গ্রেডিয়েন্ট এর মাধ্যমে যে কোন পরিবর্তন $d\mathbf{r}$ এর জন্য $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ সম্পর্ক দ্বারা $\phi(x, y, z)$ এর পূর্ণ অন্তরক পাওয়া যায়।

[Let $\phi(x, y, z)$ be a scalar field, then $\nabla\phi$ is a vector field which at a given point defines a vector whose direction is that in which the scalar field changes most rapidly and whose magnitude is the magnitude of that rate of change. The component of $\nabla\phi$ in any direction is the rate of change of ϕ with respect to displacement in that direction.

The gradient also gives the total differential of $\phi(x, y, z)$ for an arbitrary differential displacement $d\mathbf{r}$ by the relation

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}]$$

12.19. ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স এর তাৎপর্য [Significance of the divergence of vector field] ঃ



মনে করি স্পেসে একটি এলাকায় প্রবাহিত সংকোচনশীল প্রবাহ দ্বারা পূর্ণ আছে। P কেন্দ্র বিশিষ্ট ক্ষুদ্র সামন্তরিক আকারের ঘনবস্তু ABCDEFGH এর ধারসমূহ অক্ষত্রয়ের সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য dx, dy, dz. $\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$ বিন্দু ভেক্টর ফাংশন P বিন্দুতে বেগ নির্দেশ করে।

টেলর উপপাদ্য হইতে জানি, $v_y(y + dy) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \cdots \approx v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$

সুতরাং y অক্ষ বরাবর ADEF ও BCHG তলে প্রবাহ হইবে $v_y\, dz\, dx$ ও $\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) dz\, dx$.

∴ y ও y + dy দূরত্বে dz dx ক্ষেত্র দিয়া নীট প্রবাহ ঃ

$$= \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy - v_y\right) dz\, dx = \frac{\partial v_y}{\partial y} dx\, dy\, dz$$

অনুরূপে dx dy এবং dy dz ক্ষেত্রগুলি দিয়া নীট প্রবাহ হইবে, $\frac{\partial v_z}{\partial z} dx\, dy\, dz$ এবং $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$.

$$\therefore dv = dx\, dy\, dz \text{ আয়তন দিয়া মোট প্রবাহ} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \text{div}\, \mathbf{v}\, dv \Rightarrow \text{div}\, \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

সুতরাং প্রতি একক ঘন আয়তনে প্রবাহের মাত্রাকে ভেক্টর **v** এর ডাইভারজেন্স বলা হয়।

[Let a region in space be filled up with a moving compresible fluid. P be the centre of a small parallelopiped ABCDEFGH with edges parallel to co-ordinate axes having length dx, dy, dz. The vector point function $\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$ represent the velocity at the point P.

From Taylor's theorem, we know

$$v_y(y+dy) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \cdots \approx v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy$$

So the flow on the faces ADEF and BCHG paralled to y-axis will be $v_y\,dz\,dx$ and $\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)dz\,dx$.

$\therefore$ The net flow on the area dz dx at distance y and y + dy

$$= \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy - v_y\right)dz\,dx = \frac{\partial v_y}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

Similarly the net flow of fluid on the area dx dy and dy dz are $\frac{\partial v_z}{\partial z}dx\,dy\,dz$ and $\frac{\partial v_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$

Hence the total flux out of the volume dv = dx dy dz is

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \text{div}\,\mathbf{v}\,dv$$

$$\Rightarrow \text{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

So the divergence of **v** is the net outward volume flow rate per unit volume.]

12.20 ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল এর তাৎপর্য [Significance of the curl of vector field] : [NUH (NM)–2007]

মনে করি **o** এর সাপেক্ষে একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = (x, y, z)$ এবং **r** এ বেগ $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. যদি **o** এর সাপেক্ষে $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ কৌণিক বেগ হয় তবে আমরা পাই,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_y z - w_z y,\ w_z x - w_x z,\ w_x y - w_y x)$$

এখন $$\nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_y z - w_z y & w_z x - w_x z & w_x y - w_y x \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(w_x y - w_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_z x - w_x z)\right\}$$

$$+ \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(w_y z - w_z y) - \frac{\partial}{\partial x}(w_x y - w_y x)\right\}$$

$$+ \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(w_z x - w_x z) - \frac{\partial}{\partial y}(w_y z - w_z y)\right\}$$

$= \mathbf{i}(w_x + w_x) + \mathbf{j}(w_y + w_y) + \mathbf{k}(w_z + w_z)$ যেখানে $\mathbf{w} = (w_x, w_y, x_z)$ ধ্রুবক কৌণিক বেগ।

$= 2\{\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y + \mathbf{k}w_z\} = 2\mathbf{w} \Rightarrow \text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$

সুতরাং কোন দৃঢ় বস্তুর বেগ ভেক্টরের কার্ল উহার সমকৌণিক বেগের দ্বিগুণ।

[Let $\mathbf{r} = (x, y, z)$ be the position vector of a moving particle with respect to $\mathbf{o}$ and $\mathbf{v} = (v_x, v_y, w_z)$ be the velocity at $\mathbf{r}$. If $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ be the angular velocity about $\mathbf{o}$, then we have $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_y z - w_z y, w_z x - w_x z, w_x y - w_y x)$$

$$\text{Now, } \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_y z - w_z y & w_z x - w_x z & w_x y - w_y x \end{vmatrix}$$

$= \mathbf{i}(w_x + w_x) + \mathbf{j}(w_y + w_y) + \mathbf{k}(w_z + w_z)$ where $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ is constant angular velocity.

$= 2(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y + \mathbf{k}w_z) = 2\mathbf{w} \Rightarrow \text{carl } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$

Thus the carl of the velocity vector of a rigid body is twice its angular velocity vector.]

12.21. দিক অন্তরক [Directional derivative]

[NUH (NM)–2006]

ধরি x, y, z এর ফাংশন $\phi(x, y, z)$ যাহা শূন্যে c রেখার (x, y, z) বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত। c রেখার উপর (x, y, z) বিন্দুর কাছাকাছি বিন্দু $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ এ ϕ বিদ্যমান এবং বিন্দুদ্বয়ের চাপদৈর্ঘ্য Δs হইলে

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$$ দ্বারা চাপ দৈর্ঘ্য বরাবর ϕ এর গড় পরিবর্তন হার নির্দেশিত হয়।

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$$

বিদ্যমান হইলে ইহাকে (x, y, z) বিন্দুতে c রেখা বারবর ϕ এর দিক অন্তরক বলে যাহা নিম্নরূপে লেখা হয় ঃ $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi . \mathbf{T}$$

যেখানে $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ অবস্থান ভেক্টর এবং $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ঐ বিন্দুতে স্পর্শ ভেক্টর।

সুতরাং c রেখার (x, y, z) বিন্দুতে স্পর্শকের দিকে $\nabla\phi$ এর উপাদান দ্বারা দিক অন্তরক সূচিত হয়। আবার **a** যে কোন ভেক্টর বরাবর (x, y, z) বিন্দুতে $\phi(x, y, z)$ এর দিক অন্তরক $\nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

নোট : $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ এর দিকে $\nabla\phi$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$.

[Let $\phi(x, y, z)$ be a function of x, y, z which is defined at a point (x, y, z) on a space curve c. Let $\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ be the value of the function at a neighboring point on c and suppose Δs denote the arc length of the curve between these two points.

Then $\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ represents the average rate of change of ϕ with respect to the arc length.

If $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$

exists, then it is called the directional derivative of ϕ at the point (x, y, z) along the curve c and it is given by

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi . \mathbf{T}$$

Where $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ is the position vector and $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ is the tangent vector at the point. So the directional derivative is given by the component of $\nabla\phi$ in the direction of the tangent to the curve at the point (x, y, z). Again the direction derivative of $\phi(x, y, z)$ of an arbitrary point (x, y, z) in the direction **a** is

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

N. B. Here $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ is the projection of $\nabla\phi$ in the direction $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$.]

12.22. দিক অন্তরকের গরিষ্ঠমান [The maximum value of the directional derivative] : আমরা জানি, c রেখা বরাবর $\phi(x, y, z)$ ফাংশনের (x, y, z) বিন্দুতে দিক অন্তরক

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T},\ \mathbf{T} = \text{স্পর্শ একক ভেক্টর।}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = |\nabla\phi \cdot \mathbf{T}|$$

$$= |\nabla\phi| \cos\theta \text{ যেখানে } \nabla\phi \text{ ও } \mathbf{T} \text{ এর মধ্যবর্তী কোণ } \theta.$$

এখন $\cos\theta$ এর গরিষ্ঠমান = 1, সুতরাং সর্বোচ্চ দিক অন্তরক $|\nabla\phi|$

[We know, the directional derivative of the function $\phi(x, y, z)$ at the point (x, y, z) along the curve c is

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T},\ \mathbf{T} = \text{unit tangent vector.}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = |\nabla\phi| \cos\theta \text{ when } \theta \text{ be the angle betwean } \nabla\phi \text{ and } \mathbf{T}.$$

Now the maximum value of $\cos\theta$ is 1. So the required maximum value $|\nabla\phi|$]

12.23. বক্রতলের স্পর্শক সমতল ও অভিলম্ব [Tangent plane and normal line to a surface] : ধরি s বক্রতলের সমীকরণ $\phi(x, y, z) = c$ এবং বক্রতলে $\mathbf{r}_0 = (x_1, y_1, z_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $\mathbf{r}_0$ বিন্দুতে বক্রতলের একক অভিলম্ব ভেক্টর $\mathbf{n}_0 = \nabla\phi(\mathbf{r}_0)$ যেখানে $\phi(\mathbf{r}_0) = \phi(x_1, y_1, z_1)$.

সুতরাং $\mathbf{r}_0$ বিন্দুতে স্পর্শক তলের সমীকরণ

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \text{ বা } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0$$

এবং অভিলম্ব রেখার সমীকরণ

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}_0 = \mathbf{0} \text{ বা } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0$$

[Let $\phi(x, y, z) = c$ be the equation of the surface s and $\mathbf{r}_0 = (x_1, y_1, z_1)$ be a fixed point on the surface s, then $\nabla\phi(\mathbf{r}_0) = \mathbf{n}_0$ be the unit normal to the surface at the point $\mathbf{r}_0$. Now the equation of tangent plane at the point $\mathbf{r}_0$ in the vector form is

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \text{ or } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Where $\mathbf{r} = (x, y, z)$ is any arbitrary point on the surface and $\phi(\mathbf{r}_0) = \phi(x_1, y_1, z_1)$ and the equation of normal line at the point $\mathbf{r}_0$ in vector form is

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}_0 = \mathbf{0} \text{ or } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$$

12.24. বক্রতলের অন্তঃস্থ কোণ [Angle between two surfaces] ঃ মনে করি $\phi(x, y, z) = c_1$ এবং $\psi(x, y, z) = c_2$ দুইটি বক্রতল যেখানে c_1 ও c_2 যে কোন ধ্রুবক।

অতএব $\nabla\phi$ এবং $\nabla\psi$ যথাক্রমে বক্রতলদ্বয়ের অভিলম্ব ভেক্টর হইবে। এখন $\nabla\phi$ ও $\nabla\psi$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = |\nabla\phi|\ |\nabla\psi| \cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}\right)$$

[Let $\phi(x, y, z) = c_1$ and $\psi(x, y, z) = c_2$ be two surfaces where c_1 and c_2 are two arbitrary constants. So $\nabla\phi$ and $\nabla\psi$ are the normal vectors to the surfaces respectively. Now the angle between the two given surfaces is the angle between their normals. If θ be the angle between $\nabla\phi$ and $\nabla\psi$

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = |\nabla\phi|\ |\nabla\psi| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}\right)$$]

নোট ঃ (i) div $\mathbf{V} = 0$ হইলে $\mathbf{V}$ কে সলিনয়ডাল ভেক্টর বলে। [A vector is called solenoidal if div $\mathbf{V} = 0$]

(ii) div $\mathbf{V} > 0$ হইলে ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{V}$ কে সোর্স ফিল্ড বলা হয় [A vetor field $\mathbf{V}$ is called a source field if div $\mathbf{V} > 0$]

(iii) div $\mathbf{V} < 0$ হইলে ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{V}$ কে সিঙ্ক ফিল্ড বলা হয় [A vector field $\mathbf{V}$ is called a sink field if div $\mathbf{V} < 0$]

(iv) Curl $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ হইলে $\mathbf{V}$ কে ঘূর্ণননীল বা ভর্টিসিটি ভেক্টর বলে। [A vector is called rotational or vorticity if curl $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$]

(v) Curl $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ হইলে $\mathbf{V}$ কে অঘূর্ণশীল ভেক্টর বলে। [A vector $\mathbf{V}$ is called irrotational if curl $\mathbf{V} = \mathbf{0}$]

(vi) $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ কে ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর এবং $\nabla^2\phi = 0$ কে ল্যাপলাসের সমীকরণ বলা হয়। [$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is called the Laplacian operator and $\nabla^2\phi = 0$ is called Laplace's equation].

Gradient, Divergence এবং Curl এর কিছু সংখ্যক উদাহরণ ঃ

সমাধানকৃত উদাহরণমালা

উদাহরণ–1. দেখাও যে $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ যেখানে $\phi(x, y, z)$ একটি স্কেলার ফাংশন।
[Show that $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ where $\phi(x, y, z)$ is a sealer function.]

সমাধান ঃ $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \nabla\phi . d\mathbf{r} \quad [\because \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$$

উদাহরণ–2. দেখাও যে $\nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

এবং $r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}.\mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2 \cdots (1)$

এখন (1) $\Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad 2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y, \quad 2r\frac{\partial r}{\partial z} = 2z$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \text{ এবং } \sum\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x} = \sum\mathbf{i}\frac{x}{r} = \frac{\sum x\mathbf{i}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

L. H. S. $= \nabla r^n$

$$= \sum\mathbf{i}\frac{\partial r^n}{\partial x}$$

$$= \sum\mathbf{i}\, nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= nr^{n-1}\sum\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$= nr^{n-2}\mathbf{r} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–3. দেখাও যে $\nabla u = \frac{2\mathbf{r}}{r^2}$ যেখানে $u = \log_e(x^2 + y^2 + z^2)$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং $r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$

দেওয়া আছে $u = \log_e(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow u = \log_e r^2 = 2\log_e r$

$$\Rightarrow \nabla u = 2\nabla\log_e r = \frac{2}{r}\nabla r = \frac{2\mathbf{r}}{r^2} \qquad [\because \nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}]$$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–4. দেখাও যে $\nabla f(r) = f'(r)\, r^{-1}\mathbf{r}$. [NUH–1997]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং $r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$

ইহা হইতে পাই $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ যথাক্রমে।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\nabla f(r) = \sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} f(r)$

$$= \sum \mathbf{i} f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \sum \mathbf{i} \frac{x}{r}$$

$$= \frac{1}{r} f'(r) \sum x\mathbf{i}$$

$$= r^{-1} f'(r)\, \mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–5. যদি **a** এবং **b** ধ্রুবক ভেক্টর হয় তবে দেখাও যে $\nabla[\mathbf{rab}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

[If **a** and **b** are constant vectors then show that $\nabla[\mathbf{rab}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

এখন ধরি $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$

তাহা হইলে পাই $\nabla[\mathbf{rab}] = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) = \nabla(c_1 x + c_2 y + c_3 z)$

$= \sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(c_1 x + c_2 y + c_3 z) = \sum c_1 \mathbf{i} = \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$

উদাহরণ–6. দেখাও যে $\mathbf{a} \cdot \nabla r^{-1} = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) r^{-3}$ যেখানে **a** একটি ধ্রুবক ভেক্টর।

সমাধান ঃ $\mathbf{a} \cdot \nabla r^{-1} = \mathbf{a} \cdot (-r^{-3}\mathbf{r})$ $[\because \nabla r^n = n r^{n-2}\, \mathbf{r}]$

$$= -r^{-3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–7. যদি **A** একটি ধ্রুবক ভেক্টর হয়, তবে দেখাও যে [If **A** is a constant vector then show that]

(i) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}$ (ii) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\, \mathbf{r} = \mathbf{A}$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = [x, y, z]$. ধরি $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$

(i) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \nabla(A_1 x + A_2 y + A_3 z)$

$$= \sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(A_1 x + A_2 y + A_3 y)$$

$$= \sum \mathbf{i} A_1 = \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

(ii) $$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{r}$$

$$= A_1\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + A_2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + A_3\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$$

$$= A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \quad \left[\because \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}\right]$$

$$= \mathbf{A}$$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–৪. দেখাও যে $\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$ যেখানে $\mathbf{a} = \alpha x\mathbf{i} + \beta y\mathbf{j} + \gamma z\mathbf{k}$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\mathbf{r} = [x, y, z]$. তাহা হইলে $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) = 2\sum \alpha x\mathbf{i} = 2\mathbf{a}$$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–9. দেখাও যে

(i) $\nabla\cdot\mathbf{A} = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$ (ii) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$.

সমাধান ঃ (i) ধরি $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

তাহা হইলে $\mathbf{i}\cdot\mathbf{A} = A_1, \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} = A_2, \mathbf{k}\cdot\mathbf{A} = A_3 \cdots (1)$

আবার সংজ্ঞানুসারে $\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \cdots (2)$

এখন (1) এবং (2) হইতে পাই

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})$$

$$= \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

(ii) এখানে $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. তাহা হইলে

$$\nabla\cdot\mathbf{r} = \left(\frac{\mathbf{i}\,\partial}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}\partial}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}\partial}{\partial z}\right)\cdot(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–10. দেখাও যে

(i) $\nabla\cdot(r^n\mathbf{r}) = (n+3)r^n$ **[NUH–2005]**

(ii) $\nabla\cdot(\mathbf{r}r^{-3}) = 0$

(iii) $\nabla\cdot(r^3\mathbf{r}) = 6r^3$

(iv) $\nabla\cdot(\mathbf{r}\,r^{-1}) = 2r^{-1}$

সমাধান ঃ (i) $\nabla\cdot(r^n\mathbf{r}) = (\nabla r^n)\cdot\mathbf{r} + r^n(\nabla\cdot\mathbf{r})$

$= (nr^{n-2}\,\mathbf{r})\cdot\mathbf{r} + 3r^n$ $[\because \nabla.r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$ এবং $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3]$

$= nr^{n-2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) + 3r^n$

$= nr^{n-2}(r^2) + 3r^n$

$= nr^n + 3r^n$

$= (n+3)\,r^n$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

(ii) $n = -3$ (iii) $n = 3$ (iv) $n = -1$ বসিয়ে প্রমাণ করতে হবে।

উদাহরণ–11. দেখাও যে $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$

সমাধান ঃ এখানে $\nabla\times\mathbf{r} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\times[x, y, z]$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right]$$

$= [0, 0, 0] = \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ এর curl সব সময় শূন্য ভেক্টর।

উদাহরণ–12. দেখাও যে $[x, y, z]$ অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

সমাধান ঃ এখানে $\mathbf{r} = [x, y, z]$. উপরের উদাহরণের সাহায্যে $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{r} = [x, y, z]$ অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

উদাহরণ–13. $[y, z, x]$, $[z, x, y]$, $[x, z, y]$, $[y, x, z]$ এবং $[z, y, x]$ ভেক্টর গুলির কোনটি কোনটি ভর্টিসিটি ভেক্টর তাহা বাহির কর।

সমাধান ঃ যে ভেক্টরের curl শূন্য নয় অর্থাৎ যে ভেক্টর ঘূর্ণনশীল তাহাকে ভর্টিসিটি ভেক্টর বলে।

এখানে $\nabla\times[y, z, x] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right]$$

$= [-1, -1, -1] \neq \mathbf{0}$

$\Rightarrow [y, z, x]$ একটি ভর্টিসিটি ভেক্টর।

$$\nabla \times [z, x, y] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$= [1, 1, 1] \neq \mathbf{0}$$

$\Rightarrow [z, x, y]$ একটি-ভর্টিসিটি ভেক্টর।

$$\nabla \times [x, z, y] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right]$$

$$= [1 - 1, 0, 0] = [0, 0, 0] = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow [x, z, y]$ ভর্টিসিটি ভেক্টর নয় অর্থাৎ ইহা অঘূর্ণশীল ভেক্টর।

একইভাবে $\nabla \times [y, x, z] = \mathbf{0}$ এবং $\nabla \times [z, y, x] = \mathbf{0}$

অর্থাৎ $[y, x, z]$ এবং $[z, y, x]$ ভেক্টর দুইটি ভর্টিসিটি ভেক্টর নয়।

উদাহরণ–14. যদি $\mathbf{A} = [axy - z^3, \ (a-2)\, x^2, \ (1-a)\, xz^2]$ অঘূর্ণনশীল হয়, তবে দেখাও যে $a = 4$.

সমাধান ঃ যেহেতু $\mathbf{A}$ অঘূর্ণনশীল সেহেতু $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial y}\{(1-a)\, xz^2\} - \frac{\partial}{\partial z}\{(a-2)\, x^2\}, \frac{\partial}{\partial z}(axy - z^3) - \frac{\partial}{\partial x}\{(1-a)\, xz^2\}, \frac{\partial}{\partial x}\{(a-2)\, x^2 - \frac{\partial}{\partial y}(axy - z^3)\right] = [0, 0, 0]$$

$\Rightarrow [0, -3z^2 - (1-a)z^2, 2(a-2)x - ax] = [0, 0, 0]$

$\Rightarrow -3z^2 - (1-a)\, z^2 = 0$ এবং $2(a-2)\, x - ax = 0$

$\Rightarrow 3 + 1 - a = 0$ এবং $2a - 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$.

উদাহরণ–15. দেখাও যে

(i) $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = \mathbf{0}$ (ii) $\nabla \times (\mathbf{r}\, r^{-2}) = \mathbf{0}$ (iii) $\nabla \times \{f(r)\, \mathbf{r}\} = \mathbf{0}$

সমাধান ঃ (i) $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = (\nabla r^n) \times \mathbf{r} + r^n (\nabla \times \mathbf{r})$

$= (nr^{n-2}\, \mathbf{r}) \times \mathbf{r} + \mathbf{0}$ $[\because \nabla r^n = nr^{n-2}\, \mathbf{r}$ এবং $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

$= nr^{n-2}\, (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$ $[\because \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

(i) $n = -2$ বসিয়ে পাই $\nabla \times (\mathbf{r}r^{-2}) = 0$

(iii) $\nabla \times \{f(r)\,\mathbf{r}\} = \{\nabla f(r)\} \times \mathbf{r} + f(r)\,(\nabla \times \mathbf{r})$

$= \{f'(r)\,\nabla r\} \times \mathbf{r} + \mathbf{0}$ $\quad [\because \nabla f(r) = f'(r)\,\nabla r$ এবং $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

$= \{f'(r)\,r^{-1}\,\mathbf{r}\} \times \mathbf{r}$ $\quad [\because \nabla r = r^{-1}\,\mathbf{r}]$

$= f'(r)\,r^{-1}\,(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}.$ $\quad [\because \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

উদাহরণ–16. দেখাও যে $\nabla \times \nabla r^n = \mathbf{0}.$ **[NUH–2005]**

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$

L. H. S. $= \nabla \times \nabla r^n = \nabla \times (nr^{n-2}\,\mathbf{r}) = n\,[(\nabla r^{n-2}) \times \mathbf{r} + r^{n-2}\,\nabla \times \mathbf{r}]$

$= n[\{(n-2)\,r^{n-4}\,\mathbf{r}\} \times \mathbf{r} + \mathbf{0}]$ $\quad [\because \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

$= n(n-2)\,r^{n-4}\,(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$ $\quad [\because \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}]$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–17. দেখাও যে $\nabla \cdot (\phi\,\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$ $\cdots$ (1)

এখন (1) এ $\mathbf{A} = \nabla\psi$ বসাইয়া পাই

$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \phi(\nabla \cdot \nabla\psi)$

$= \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–18. যদি $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ ধ্রুব ভেক্টর হয় তবে দেখাও যে

$$\nabla \times [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\nabla \times [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$

$$= \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}[(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \mathbf{a}\right) \times \mathbf{b}\right] \quad \left[\because \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} = \mathbf{0} \text{ এবং } \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} = \mathbf{0}\right]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [(\mathbf{i} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times [(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{i}]$$

$$= \sum \mathbf{i} \times (b_1\mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \sum \mathbf{i} \times \mathbf{i} \quad [\text{ধরি } \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}]$$

$$= \sum \mathbf{i}b_1 \times \mathbf{a} \quad [\because \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}]$$

$$= \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–28. দেখাও যে $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{u}) = -\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})$, যেখানে $\mathbf{a}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর।

সমাধান ঃ এখানে $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{0} - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})$$

$$= -\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})$$

যেহেতু $\mathbf{a}$ ধ্রুবক সেহেতু $\nabla\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–29. দেখাও যে $\nabla\cdot(\nabla r^m) = m(m+1)r^{m-2}$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\nabla r^m = mr^{m-2}\,\mathbf{r}$ এবং $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$

ইহাদেরকে ব্যবহার করিয়া পাই

$$\nabla\cdot(\nabla r^m) = \nabla\cdot(mr^{m-2}\mathbf{r})$$

$$= (m\,\nabla r^{m-2})\cdot\mathbf{r} + mr^{m-2}(\nabla\cdot\mathbf{r})$$

$$= \{m(m-2)\,r^{m-4}\,\mathbf{r}\}\cdot\mathbf{r} + 3mr^{m-2}$$

$$= m(m-2)r^{m-4}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) + 3mr^{m-2}$$

$$= m(m-2)r^{m-4}(r^2) + 3mr^{m-2}$$

$$= m(m-2)r^{m-2} + 3mr^{m-2}$$

$$= m(m-2+3)\,r^{m-2}$$

$$= m(m+1)r^{m-2}$$

$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

N. B. $\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi$.

উদাহরণ–30. দেখাও যে (i) $\nabla^2 r^{-1} = 0$ **[MUH–2007]** (ii) $\nabla^2 r^3 = 12r$.

সমাধান ঃ (i) $\nabla^2 r^{-1} = \nabla\cdot\nabla r^{-1}$

$$= \nabla\cdot(-r^{-3}\mathbf{r})$$

$$= -\{(\nabla r^{-3})\cdot\mathbf{r} + r^{-3}(\nabla\cdot\mathbf{r})\}$$

$$= -(-3r^{-5}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-3})$$

$$= -(3r^{-5}r^2 + 3r^{-3})$$

$$= -(-3r^{-3} + 3r^{-3}) = 0$$

$$\Rightarrow \text{L. H. S.} = \text{R. H. S.}$$

(ii) $\nabla^2(r^3) = \nabla \cdot \nabla(r^3)$

$= \nabla \cdot (3r\mathbf{r})$

$= \nabla(3r) \cdot \mathbf{r} + 3r(\nabla \cdot \mathbf{r})$

$= \frac{3\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + 9r$

$= 3r + 9r$

$= 12r.$

উদাহরণ–31. দেখাও যে

(i) $\nabla^2 \, ln\, r = r^{-2}$

(ii) $\nabla^2 f(r) = 2r^{-1} f'(r) + f''(r)$ **[NUH–2006]**

যদি $\nabla^2 f(r) = 0$ হয় তবে f(r) বাহির কর। **[NUH (NM) 2005]**

(iii) $\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2}) = 2r^{-4}$

(iv) $\nabla^2\{\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n)\} = n(n+1)(n+3)r^{n-2}$

সমাধান ঃ (i) আমরা জানি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং

$r^2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$. ইহা হইতে পাই

$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ যথাক্রমে। এখন ইহাদেরকে ব্যবহার করে পাই

$$\nabla\, ln\, r = \sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(ln\, r) = \sum \mathbf{i} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\sum x\mathbf{i} = \mathbf{r}r^{-2}$$

$\therefore \nabla^2 (ln\, r) = \nabla \cdot (\nabla ln\, r)$

$= \nabla \cdot (\mathbf{r}r^{-2})$

$= (\nabla r^{-2}) \cdot \mathbf{r} + r^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{r})$

$= -2r^{-4}\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-2}$

$= -2r^{-2} + 3r^{-2}$

$= r^{-2}$ $[\because \nabla \cdot \mathbf{r} = 3]$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

(ii) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$\therefore \nabla f(r) = \mathbf{i}f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}$

$= (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\frac{f'(r)}{r} = \mathbf{r}\frac{f'(r)}{r}$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(r) = \nabla \cdot \left(\mathbf{r}\frac{f'(r)}{r}\right) = \frac{f'(r)}{r}(\nabla \cdot \mathbf{r}) + \nabla\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\} \cdot \mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \left[f'(r)\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\nabla f'(r)\right] \cdot \mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \left[f'(r) \cdot \frac{-\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} f''(r)\right] \cdot \mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{f''(r)}{r^2}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r} + f''(r)$$

$$= 2r^{-1} f'(r) + f''(r).$$

২য় অংশ ঃ $\nabla^2 f(r) = 0 \Rightarrow \frac{2}{r} f'(r) + f''(r) = 0$

$$\Rightarrow r^2 f''(r) + 2rf'(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\{r^2 f'(r)\} = 0$$

$\Rightarrow r^2 f'(r) = -A$ (সমাকলন করে)

$$\Rightarrow f'(r) = -\frac{A}{r^2}$$

$\Rightarrow f(r) = \frac{A}{r} + B$ (আবার সমাকলন করে)

(iii) $\nabla \cdot (\mathbf{r}r^{-2}) = \nabla(r^{-2}) \cdot \mathbf{r} + r^{-2}(\nabla \cdot \mathbf{r})$

$$= -\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^4} + \frac{1}{r^2} \cdot 3$$

$$= -\frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2}) = \nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2\mathbf{r}}{r^4}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2}) = \nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r}r^{-2})$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{2\mathbf{r}}{r^4}\right)$$

$$= -\nabla\left(\frac{2}{r^4}\right) \cdot \mathbf{r} - \frac{2}{r^4}(\nabla \cdot \mathbf{r})$$

$$= \frac{8}{r^6}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{6}{r^4} = \frac{8}{r^4} - \frac{6}{r^4} = 2r^{-4}$$

(iv) $\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n) = \nabla(r^n) \cdot \mathbf{r} + r^n (\nabla \cdot \mathbf{r})$

$= nr^{n-2}\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + r^n \cdot 3$

$= nr^n + 3r^n$

$= (n + 3)\, r^n$

$\Rightarrow \nabla\{\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n)\} = (n + 3)\, \nabla(r^n)$

$= n(n + 3)r^{n-2}\mathbf{r}$

$\Rightarrow \nabla^2\{\nabla \cdot (\mathbf{r}r^n)\} = n(n + 3)\, \nabla \cdot (r^{n-2}\mathbf{r})$

$= n(n + 3)\, [\nabla(r^{n-2}) \cdot \mathbf{r} + r^{n-2}\, (\nabla \cdot \mathbf{r})]$

$= n(n + 3)\, [(n - 2)\, r^{n-4}\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{n-2}]$

$= n(n + 3)\, [(n - 2)\, r^{n-2} + 3r^{n-2}]$

$= n(n + 1)\, (n + 3)r^{n-2}.$

উদাহরণ–32. দেখাও যে $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$

[NUH (NM)–2007, DUH–1968]

সমাধান ঃ আমরা জানি

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\, \mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \cdots (1)$$

এখন (1) এ $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{V}$ বসাইয়া পাই

$$\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\, \mathbf{V} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

$\Rightarrow \nabla V^2 = 2(\mathbf{V} \cdot \nabla)\, \mathbf{V} + 2\{\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})\}$

$\Rightarrow (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$

$\Rightarrow$ L. H. S. = R. H. S.

উদাহরণ–33. যদি $\mathbf{V} = [x + 3y,\, y - 2z,\, x + az]$

ভেক্টরটি সলিনোয়িডাল হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\mathbf{V}$ ভেক্টরটি সলিনোয়িডাল ভেক্টর হইবে যদি $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + az) = 0$

$\Rightarrow 1 + 1 + a = 0$

$\Rightarrow a = -2.$

উদাহরণ–34. $x = t^2 + 1, y = 4t - 3, z = 2t^2 - 6t$ বক্ররেখার একক স্পর্শক ভেক্টর নির্ণয় কর। আরও $t = 2$ বিন্দুতে একক স্পর্শক ভেক্টর নির্ণয় কর। [Find the unit tangent vector to any point on the curve $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$ and determine the unit tangent at the point $t = 2$]

সমাধান ঃ অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = [x, y, z] = [t^2 + 1, 4t - 3, 2t^2 - 6t]$

যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর।

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [2t, 4, 4t - 6]$$

এখন, $$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2 + 16 + (4t - 6)^2}$$

$$= \sqrt{(20t^2 - 48t + 52)}$$

সুতরাং নির্ণেয় একক স্পর্শক ভেক্টর $$\mathbf{t} = \frac{[2t, 4, 4t - 6]}{\sqrt{20t^2 - 48t + 52}}$$

$$= \frac{[t, 2, 2t - 3]}{\sqrt{5t^2 - 12t + 13}}$$

আবার, $t = 2$ বিন্দুতে একক স্পর্শক ভেক্টর $$\mathbf{t}_0 = \frac{[2, 2, 1]}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

উদাহরণ–35. $\phi(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ এর $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর দিক অন্তরক নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $\phi(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ at the point $(2, -1, 2)$ in the direction $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$

$$\therefore \nabla\phi = \mathbf{i}(4z^3 - 6xy^2z) + \mathbf{j}(-6x^2yz) + \mathbf{k}(12xz^2 - 3x^2y^2)$$

$(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $\nabla\phi = 8\mathbf{i} + 48\mathbf{j} + 84\mathbf{k}$.

ধরি $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{49} = 7$$

সুতরাং $\mathbf{a}$ বরাবর ϕ এর দিক অন্তরক $$= \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

$$= \frac{1}{7}(16 - 144 + 504)$$

$$= \frac{376}{7}.$$

উদাহরণ–36. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ফাংশনের P(–2, 2) বিন্দুতে $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ভেক্টরের দিকে দিক বিভেদক সহগ নির্ণয় কর। [Find the directional derivative of $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ at P(–2, 2) in the direction of $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$]

[NUH (NM)–2004, 2007]

সমাধান ঃ এখানে $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\therefore \nabla f = \mathbf{i}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \mathbf{j}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\mathbf{i}y}{x^2+y^2} + \frac{\mathbf{j}x}{x^2+y^2}$$

P(–2, 2) বিন্দুতে $\nabla f = -\frac{\mathbf{i}}{4} - \frac{\mathbf{j}}{4}$

এখন প্রদত্ত ফাংশনের P(–2, 2) বিন্দুতে $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ভেক্টরের দিকে দিক বিভেদক সহগ $= \nabla f \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

$$= \left(-\frac{\mathbf{i}}{4} - \frac{\mathbf{j}}{4}\right)\cdot\frac{-\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

উদাহরণ–37. (1, 1, 1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ তলের একক অভিলম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [Find the unit normal vector to the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ at the point (1, 1, 1)]

সমাধান ঃ ধরি $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$

$$\therefore \nabla\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

(1, 1, 1) বিন্দুতে $(\nabla\phi)_0 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

সুতরাং প্রদত্ত তলের উপর নির্ণেয় একক অভিলম্ব ভেক্টর

$$\mathbf{n} = \frac{(\nabla\phi)_0}{|(\nabla\phi)_0|}$$

$$= \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4+4+4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

উদাহরণ-38. $(1, -2, 1)$ বিন্দুতে $xy^2z = 3x + z^2$ এবং $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ তলদ্বয়ের অন্তস্থ্ কোণ নির্ণয় কর। [Find the angle between the surfaces $xy^2z = 3x + z^2$ and $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ at the point $(1, -2, 1)$]

সমাধান ঃ ধরি $\phi = xy^2z - 3x - z^2$ এবং $\psi = 3x^2 - y^2 + 2z$

$\therefore \nabla\phi = \mathbf{i}(y^2z - 3) + \mathbf{j}(2xyz) + \mathbf{k}(xy^2 - 2z)$

এবং $\nabla\psi = \mathbf{i}(6x) + \mathbf{j}(-2y) + \mathbf{k}(2)$

$(1, -2, 1)$ বিন্দুতে।

$$\nabla\phi = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ এবং } \nabla\psi = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$\Rightarrow |\nabla\phi| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$

এবং $|\nabla\psi| = \sqrt{(36 + 16 + 4)} = 2\sqrt{14}$

তলদ্বয়ের অন্তঃস্থ্ কোণ θ হইলে $\cos\theta = \dfrac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{|\nabla\phi|\ |\nabla\psi|}$

$$= \frac{6 - 16 + 4}{\sqrt{21}\,.\,2\sqrt{14}}$$

$$= -\frac{3}{7\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7\sqrt{6}}\right).$$

উদাহরণ-39. $x^2 + y^2 = z$ তলের $(2, -1, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শক তল এবং অভিলম্ব রেখায় সমীকরণ নির্ণয় কর। [Find the equation of the tangent plane and normal line to the surface $x^2 + y^2 = z$ at the point $(2, -1, 5)$]

[NUH (NM) 2005, 2006]

সমাধান ঃ ধরি $\phi = x^2 + y^2 - z$ এবং $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

$\therefore \nabla\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$, এখন, $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

$\therefore \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

স্পর্শক তলের সমীকরণ, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = 0$

$\Rightarrow \{\mathbf{i}(x - 2) + \mathbf{j}(y + 1) + \mathbf{k}(z - 5)\} \cdot (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y - z = 5.$

২য় অংশ ঃ অভিলম্ব রেখার সমীকরণ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla\phi(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow [\mathbf{i}(x-2) + \mathbf{j}(y+1) + \mathbf{k}(z-5)] \times (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-2 & y+1 & z-5 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}\{-(y+1) + 2(z-5)\} + \mathbf{j}\{4(z-5) + (x-2)\}$$
$$+ \mathbf{k}\{-2(x-2) - 4(y+1)\} = \mathbf{0}$$

যেহেতু $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ অনির্ভরশীল ভেক্টর, সুতরাং $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ এর সহগ পৃথকভাবে শূন্য হইবে।

$$\therefore -(y+1) + 2(z-5) = 0 \cdots (1)$$
$$4(z-5) + (x-2) = 0 \cdots (2)$$
$$-2(x-2) - 4(y+1) = 0 \cdots (3)$$

$$(1) \Rightarrow y + 1 = 2(z-5)$$
$$\Rightarrow \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{-1} \cdots (4)$$

$$(2) \Rightarrow 4(z-5) = -(x-2)$$
$$\Rightarrow \frac{z-5}{-1} = \frac{x-2}{4} \cdots (5)$$

(4) ও (5) হতে পাই, $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{-1}$.

অনুশীলনী–12

1. যদি $\mathbf{A} = [yz^2, -3xz^2, 2xyz]$ এবং $\mathbf{B} = [2x, 4z, -xy]$ এবং $\phi(x, y, z) = xyz$ হয় তবে প্রমাণ কর।

(i) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla\phi$

(ii) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \neq \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$

(iii) $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\phi = \mathbf{B} \cdot (\nabla\phi)$

(iv) $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \neq \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

(v) $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi = \mathbf{A} \times \nabla\phi$

(vi) $(\mathbf{B} \times \nabla)\phi = \mathbf{B} \times \nabla\phi$

(vii) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \neq \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla)$

(viii) $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

(ix) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} \neq \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(x) $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$

সমাধানকৃত উদাহরণমালা

উদাহরণ–1. যদি $\phi = 2xyz^2$ এবং $\mathbf{F} = [xy, -z, x^2]$ হয় তবে (i) $\int_c \phi\, d\mathbf{r}$ (ii) $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (iii) $\int_c \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ এর মান নির্ণয় কর যেখানে c বক্ররেখার সমীকরণ $x = t^2, y = 2t, z = t^3$ এবং $0 \le t \le 1$. [If $\phi = 2xyz^2$ and $\mathbf{F} = [xy, -z, x^2]$, then find (i) $\int_c \phi\, d\mathbf{r}$ (ii) $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (iii) $\int_c \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ where c is the curve $x = t^2$, $y = 2t$, $z = t^3$ from $t = 0$ to $t = 1$]

সমাধান ঃ c বক্ররেখা বরাবর $\phi = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}t^3$$

$$\Rightarrow d\mathbf{r} = 2tdt\mathbf{i} + 2dt\mathbf{j} + 3t^2\, dt\mathbf{k}$$

$$= (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\, dt$$

(i) $$\int_c \phi\, d\mathbf{r} = \int_0^1 4t^9 (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\, dt$$

$$= \left[\frac{8}{11}t^{11}\mathbf{i} + \frac{8}{10}t^{10}\mathbf{j} + \frac{12}{12}t^{12}\mathbf{k}\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(ii) $$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (4t^4 - 2t^3 + 3t^6)\, dt$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{51}{70}$$

(iii) $$\mathbf{F} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt$$

$$= -\{(3t^5 + 2t^4)\mathbf{i} - 4t^5\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}\}dt$$

$$\therefore \int_c \mathbf{F} \times d\mathbf{r} = \int_0^1 \{-(3t^5 + 2t^4)\mathbf{i} - 4t^5\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}\}\, dt$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right)\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \left(1 + \frac{2}{5}\right)\mathbf{k}$$

$$= -\frac{9}{10}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k}$$

উদাহরণ–2. যদি $\mathbf{A} = (2y + 3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$ হয় তবে প্রমাণ কর। $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 8$ যেখানে c হইল (0, 0, 0) এবং (2, 1, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা। [If $A = (2y + 3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$, then show that $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 8$ along the path c, the straight line joiring (0, 0, 0) and (2, 1, 1)]

সমাধান ঃ (0, 0, 0) এবং (2, 1, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ [The equation of the straight line through the points (0, 0, 0) and (2, 1, 1) is] $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = t$ (ধরি)

$\Rightarrow x = 2t, y = t, z = t$ যেখানে t এর সীমা 0 হইতে 1 পর্যন্ত।

এখন $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_c (2y + 3)\, dx + xzdy + (yz - x)\, dz$

$$= \int_0^1 (3t^2 + 2t + 6)dt = 1 + 1 + 6 = 8$$

উদাহরণ–3. যদি $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{23}{3}$ যেখানে c হইল (0, 0, 0) হইতে (1, 0, 0); (1, 0, 0) হইতে (1, 1, 0) এবং (1, 1, 0) হইতে (1, 1, 1) পর্যন্ত সরলরেখাত্রয়। [If $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz\mathbf{k}$, then show that $\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{23}{3}$ along the following path, the straight lines from (0, 0, 0) to (1, 0, 0), then to (1, 1, 0) and then to (1, 1, 1)]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}$

$\therefore \int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_c \{(3x^2 + 6y)\, dx - 14yzdy + 20xz^2dz\} \cdots (1)$

c এর তিনটি অংশ c_1, c_2, c_3 হইলে

c_1 সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} = t$ (ধরি)

$$\Rightarrow x = t, y = 0, z = 0 \text{ এবং } 0 \le t \le 1$$

$$\int_{c_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 3t^2\, dt = 1$$

c_2 সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} = u$ (ধরি)

$$\Rightarrow x = 1, y = u, z = 0 \text{ এবং } 0 \le u \le 1$$

$$\int_{c_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 0\, du = 0$$

আবার, c_3 সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}=q$ (ধরি)

$$\Rightarrow x = 1, y = 1, z = q \text{ এবং } 0 \le q \le 1$$

$$\int_{c_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 20\, q^2\, dq = \frac{20}{3},\ (1) \Rightarrow \int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

উদাহরণ–4. যদি $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ যেখানে c হইল একটি বৃত্ত যাহার সমীকরণ $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = 1$. [Show that $\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ around the circle $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ where $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$]

সমাধান ঃ $\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_c (-y\, dx + x\, dy + z\, dz) \cdots (1)$

প্রদত্ত বৃত্ত $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ এর পরামিতিক সমীকরণ (Parametric equations) $x - 1 = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\Rightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta,\ dy = \cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \{(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \cos\theta\}\, d\theta$$

$$= [\theta + \sin\theta]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

উদাহরণ–5. যদি $\mathbf{A} = (yz + 2x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 1$ যেখানে c হইল $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ বৃত্ত বরাবর (0, 1, 1) বিন্দু হইতে (1, 0, 1) পর্যন্ত সংযোজক রেখা। [Show that $\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 1$ along the circle $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ from (0, 1, 1) to (1, 0, 1) where $\mathbf{A} = (yz + 2x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\mathbf{A} = (yz + 2x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$

$$\therefore \int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_c \{(yz + 2x)\, dx + xz\, dy + (xy + 2z)\, dz\} \cdots (1)$$

$x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ (Parametric equation), $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ যেখানে (0, 1, 1) বিন্দু হইতে (1, 0, 1) বিন্দু পর্যন্ত θ এর মান $\frac{\pi}{2}$ হইতে 2π পর্যন্ত।

$$(1) \Rightarrow \int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\pi/2}^{2\pi} (-\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/2}^{2\pi} (\cos 2\theta - \sin 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}(\cos 4\pi - \cos\pi) = 1$$

উদাহরণ–6. যদি কোন বস্তুকণা $\mathbf{F} = 3x^2\,\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ বল-ফিল্ডের অধীনে $x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t$ বক্ররেখা বরাবর $t = 0$ বিন্দু হইতে $t = 1$ বিন্দু পর্যন্ত যায় তবে উহার কৃতকাজ নির্ণয় কর। [Find the work done in moving a particle in the force field $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ along the space curve $x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t$ from $t = 0$ to $t = 1$]

সমাধান ঃ আমরা জানি

work done = $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, c প্রদত্ত বক্ররেখা।

$$= \int_c [3x^2\,dx + (2xz - y)dy + zdz]$$

$$= \int_0^1 [3(2t^2)^2\,d(2t^2) + \{2(2t^2)(4t^2 - t) - t\}\,dt + (4t^2 - t)\,d(4t^2 - t)]$$

$$= \int_0^1 (48t^5 + 16t^4 - 4t^3 - t + 32t^3 - 8t^2 - 4t^2 + t)dt$$

$$= \int_0^1 (48t^5 + 16t^4 + 28t^3 - 12t^2)\,dt$$

$$= 8 + \frac{16}{5} + 7 - 4 = \frac{71}{5}.$$

উদাহরণ–7. যদি $\mathbf{V} = [x + 2y + 4z, 2x - 3y - z, 4x - y + 2z]$ হয় তবে প্রমাণ কর $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ এবং স্কেলার পটেনশিয়াল ϕ নির্ণয় কর। [If $\mathbf{V} = [x + 2y + 4z, 2x - 3y - z, 4x - y + 2z]$, then show that $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ and find the scalar potential ϕ.]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ দেওয়া আছে

$$\mathbf{V} = (x + 2y + 4z)\mathbf{i} + (2x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - y + 2z)\mathbf{k}.$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + 4z & 2x - 3y - z & 4x - y + 2z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(-1 + 1) + \mathbf{j}(4 - 4) + \mathbf{k}(2 - 2) = \mathbf{0}$$

২য় অংশ ঃ $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_1(x, y, z) + \mathbf{j}V_2(x, y, z) + \mathbf{k}V_3(x, y, z) = \mathbf{i}(x + 2y + 4z) + \mathbf{j}(2x - 3y - z) + \mathbf{k}(4x - y + 2z)$

$$\Rightarrow V_1(x, y, z) = x + 2y + 4z,\ V_2(x, y, z) = 2x - 3y - z,$$
$$V_3(x, y, z) = 4x - y + 2z$$

যেহেতু $V_1\,dx + V_2\,dy + V_3\,dz$ প্রকৃত (Exact)

$$\text{সুতরাং } \phi = \int_0^x V_1(x, y, z)\,dx + \int_0^y V_2(0, y, z)\,dy + \int_0^z V_3(0, 0, z)\,dz$$

$$= \int_0^x (x + 2y + 4z)\,dx + \int_0^y (-3y - z)\,dy + \int_0^z 2z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + c.$$

উদাহরণ–৪. দেখাও যে, $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\,\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ একটি সংরক্ষণশীল বলক্ষেত্র। অতঃপর উক্ত বলক্ষেত্রে একটি বস্তুকে (1, – 2, 1) বিন্দু হতে (3, 1, 4) বিন্দুতে সরাতে কৃত কাজের পরিমান নির্ণয় কর। [Show that $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\,\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ is a conservative force field. Hence find the work done in moving an object in this field from (1, – 2, 1) to (3, 1, 4)]

[NUH(NM)–2007]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$$\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(0 - 0) - \mathbf{j}(3z^2 - 3z^2) + \mathbf{k}(2x - 2x)$$

$$= \mathbf{0}$$

ইহা নির্দেশ করে $\mathbf{F}$ একটি সংরক্ষণশীল বলক্ষেত্র।

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত বলক্ষেত্রে একটি বস্তুকে (1, – 2, 1) বিন্দু হতে (3, 1, 4) বিন্দুতে সরাতে কৃত কাজের পরিমান,

$$w = \int_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \cdots\cdots (1)$$

এখন, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2xy + z^3)\,dx + x^2\,dy + 3x\,z^2\,dz \cdots\cdots (2)$

আবার, (1, – 2, 1) ও (3, 1, 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$\frac{x-1}{1-3} = \frac{y+2}{-2-1} = \frac{z-1}{1-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{3} = t \text{ (ধরি)}$$

$\Rightarrow x = 2t + 1,\ y = 3t - 2,\ z = 3t + 1$ যেখানে $0 \le t \le 1$

$$(2) \Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \{2(2t+1)(3t-2) + (3t+1)^3\} d(2t+1)$$
$$+ (2t+1)^2 d(3t-2) + 3(2t+1)(3t+1)^2 d(3t+1)$$
$$= (12t^2 - 2t - 4 + 27t^3 + 27t^2 + 9t + 1) \cdot 2dt$$
$$+ (4t^2 + 4t + 1) \cdot 3\,dt + 3(2t+1)(9t^2 + 6t + 1) \cdot 3\,dt$$
$$= (54t^3 + 78t^2 + 14t - 6)\,dt + (12t^2 + 12t + 3)\,dt$$
$$+ 9(18t^3 + 21t^2 + 8t + 1)\,dt$$
$$= (216t^3 + 279t^2 + 98t + 6)\,dt$$

$$\therefore (1) \Rightarrow w = \int_0^1 (216t^3 + 279t^2 + 98t + 6)\,dt$$
$$= \left[54t^4 + 93t^3 + 49t^2 + 6t\right]_0^1$$
$$= 54 + 93 + 49 + 6$$
$$= 202 \text{ একক।}$$

উদাহরণ–9. (i) দেখাও যে, $\mathbf{F} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$ একটি সংরক্ষণশীল বলক্ষেত্র।

(ii) $\mathbf{F}$ এর স্কেলার পটেনশিয়াল ϕ নির্ণয় কর।

(iii) এই ফিল্ডে $(1, -2, 1)$ থেকে $(3, 1, 4)$ পর্যন্ত কোন বস্তুকে নিতে যে কাজ সমাধা হয় তা নির্ণয় কর।

[(i) Show that $\mathbf{F} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$ is conservative force field.

(ii) Calculate the scalar potential of $\mathbf{F}$.

(iii) Fnd the work done in moving an obiect in the field from $(1, -2, 1)$ to $(3, 1, 4)$] **[NUH–2007]**

সমাধান ঃ (i) এখানে $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}(-x + x) - \mathbf{j}(-y + y) + \mathbf{k}(-z + z)$$
$$= \mathbf{0}$$

$\therefore$ $\mathbf{F}$ একটি সংরক্ষণশীল বলক্ষেত্র।

(ii) যেহেতু $\mathbf{F}$ একটি সংরক্ষণশীল বলক্ষেত্র, সুতরাং আমরা পাই, $\nabla\phi = \mathbf{F}$

$$\Rightarrow \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \mathbf{i}(x^2 - yz) + \mathbf{j}(y^2 - zx) + \mathbf{k}(z^2 - xy)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = x^2 - yz, \frac{\partial\phi}{\partial y} = y^2 - zx, \frac{\partial\phi}{\partial z} = z^2 - xy$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{x^3}{3} - xyz + f_1(y, z) = \frac{y^3}{3} - xyz + f_2(x, z) = \frac{z^3}{3} - xyz + f_3(x, y)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - xyz + C.$$

(iii) নির্ণেয় কাজ, $w = \int_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz]$$

$$= \int_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} d\left[\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - xyz\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - xyz\right]_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)}$$

$$= \left(9 + \frac{1}{3} + \frac{64}{3} - 12\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{65}{3} - 3\right) - 4$$

$$= \frac{65 - 21}{3} = \frac{44}{3} \text{ একক।}$$

উদাহরণ-10. যদি $\mathbf{A} = (x + y^2)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ এবং ১ম অষ্টভাগে $2x + y + 2z = 6$ সমতলের অংশ s হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 81$

[Show that $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 81$ where $\mathbf{A} = (x + y^2)\mathbf{i} + (-2x)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ and s is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.]

সমাধান ঃ ধরি xy সমতলে S এর অভিক্ষেপ (Projection) R, সুতরাং আমরা পাই

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} \cdots (1)$$

Scanned with CamScanner

আমরা জানি $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \dfrac{dx\,dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$

যেখানে R, xy তলে S এর অভিক্ষেপ।

$$= \iint_R (3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3} \frac{dx\,dy}{2/3}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2} dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2} [x]_0^1 [y]_0^2 = 1$$

উদাহরণ–14. যদি $\mathbf{F} = [2xz, -x, y^2]$ এবং $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, z = 4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের আয়তন V হয় তবে প্রমাণ কর যে $\iiint_V \mathbf{F}\, dv = [128, -24, 384]$

[Show that $\iiint_V \mathbf{F}\, dv = [128, -24, 384]$ where $\mathbf{F} = [2xz, -x, y^2]$ and V is the region bounded by the surfaces $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, z = 4$.]

সমাধান ঃ যখন $z = 4$ তখন $x = 2$

সুতরাং V আয়তন বিশিষ্ট স্থানে $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 6, x^2 \le z \le 4$.

এখন $\iiint_V \mathbf{F}\, dV = \iiint_V (2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k})\, dx\,dy\,dz$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} [xz^2\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}]_{x^2}^{4}\, dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \{(16x - x^5)\mathbf{i} - (4x - x^3)\mathbf{j} + (4y^2 - x^2y^2)\mathbf{k}\}\, dx\,dy$$

$$= \mathbf{i}\left[8x^2 - \frac{x^6}{6}\right]_0^2 [y]_0^6 - \mathbf{j}\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 [y]_0^6 + \mathbf{k}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^6$$

$$= 128\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 38y\mathbf{k}$$

$$= [128, -24, 384].$$

অধ্যায়–14

গ্রীণের উপপাদ্য, গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য এবং স্টোকসের উপপাদ্য

GREEN'S THEOREM, GAUSS'S DIVERGENCE THEOREM AND STOCKE'S THEOREM

14.1. গ্রীণের উপপাদ্যের ভূমিকা (Introduction of Green's theorem) ঃ ইংরেজ গণিতবিদ এবং পদার্থবিদ George Green (1793–1841) ভেক্টর ক্যালকুলাসে নির্দিষ্ট সমতলে রেখা ইন্টিগ্রাল এবং তল ইন্টিগ্রালের মধ্যে যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করেণ তাঁর নাম অনুসারে উহাকে গ্রীণের উপপাদ্য বলা হয়। তবে রাশিয়ান গণিত বিদ Michel Ostrogradski (1801-1861) উপপাদ্যটি যখন আবিষ্কার করেন তখন গ্রীণের উপপাদ্য তাঁর জানা ছিল না। তাই রাশিয়ায় উপপাদ্যটিকে Ostrogradski এর উপপাদ্য বলা হয়। নিম্নে উপপাদ্যটির বর্ণনা ও প্রমাণ দেওয়া হলো।

14.2. সমতলে গ্রীণের উপপাদ্য [Green's theorem in the plane] ঃ ধরি xy সমতলে R একটি আবদ্ধ ক্ষেত্র যাহা একটি সরল বক্ররেখা C দ্বারা আবদ্ধ যেখানে অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা C কে সর্বাধিক দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। এখন যদি ঐ ক্ষেত্রে P(x, y) এবং Q(x, y) ফাংশনদ্বয় সংজ্ঞায়িত, অবিছিন্ন এবং ইহাদের অবিছিন্ন আংশিক অন্তরক সহগ বিদ্যমান থাকে তবে [Let R is a closed region of the xy plane bounded by a simple closed curve C such that any straight line parallel to the co-ordinate axes cuts C at most two points. Now if P(x, y) and Q(x, y) are continuous functions of x and y having continuous partial derivatives in R, then]

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

[NUH–2003, 2007, 2007 (Old), NUH (NM)–2004, 2007]

প্রমাণ ঃ ধরি R কে আবদ্ধকারী বক্ররেখা C এইরূপভাবে গঠিত যে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা দুইয়ের অধিক বিন্দুতে C কে ছেদ করে না। এই শর্তের জন্য উপপাদ্যটি এখন প্রমাণ করিব।

ধরি R কে নিম্নলিখিত দুই আকারে ব্যক্ত করা যায়

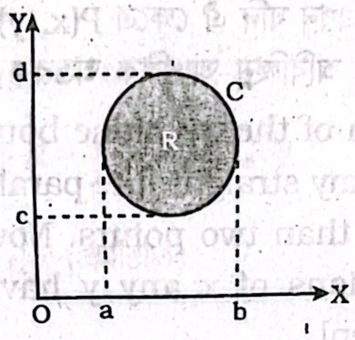
[Let R is a closed region bounded by a simple closed curve C which has the property that any straight line parallel to the coordinate axes cuts C in atmost two points. Now we shall prove the theorem for this condition, Suppose R is representable in both of the following forms]

(i) $a \le x \le b, \quad f_1(x) \le y \le f_2(x)$

(ii) $c \le y \le d, \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)$

এখন প্রথম শর্ত (i) এর জন্য ঃ

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right] dx$$



$$= \int_a^b [P(x, y)]_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [P(x, f_2) - P(x, f_1)]\, dx$$

$$= -\int_a^b P(x, f_1)\, dx + \int_a^b P(x, f_2)\, dx$$

$$= -\int_a^b P(x, f_1)\, dx - \int_b^a P(x, f_2)\, dx$$

$$= -\oint_C P\, dx$$

$$\Rightarrow \oint_C P\, dx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \cdots (1)$$

দ্বিতীয় শর্ত (ii) এর জন্য ঃ

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\right] dy$$

$$= \int_c^d [Q(x, y)]_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} dy$$

$$= \int_c^d [Q(g_2, y) - Q(g_1, y)]\, dy$$

$$= \int_c^d Q(g_2, y)\, dy - \int_c^d Q(g_1, y)\, dy$$

$$= \int_d^c Q(g_1, y)\, dy + \int_c^d Q(g_2, y)\, dy$$

$$= \oint_C Q\, dy$$

$$\Rightarrow \oint_C Q\, dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy \cdots (2)$$

এখন (1) + (2) $\Rightarrow \oint_C (P dx + Q\, dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

সুতরাং গ্রীনের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

$$\Rightarrow \oint_{EGHE} z + \oint_{EFGE} z = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \cdots (3),\ z = Pdx + Qdy$$

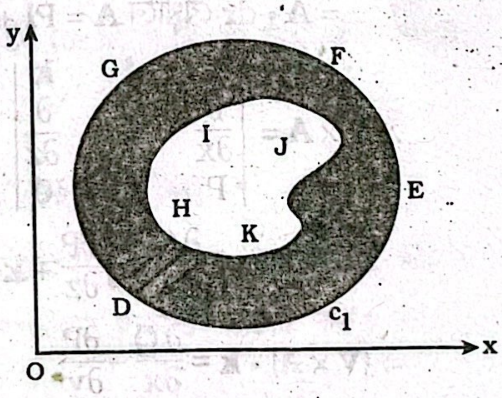
(3) এর বামপক্ষ $\int_{EG} z + \int_{GHE} z + \int_{EFG} z + \int_{GE} z$

$$= \int_{EG} z + \int_{GHEFG} z - \int_{EG} z = \oint_c z = \oint_c Pdx + Qdy$$

$$\therefore (3) \Rightarrow \oint_c Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \text{ (প্রমাণিত)}$$

14.4. বহুযুক্ত সমতলীয় এলাকায় গ্রীণের উপপাদ্য (Green's theorem is the plane for multiple connected regrion) ঃ বক্ররেখা c দ্বারা আবদ্ধ এলাকা R কে সংকুচিত করিলে যদি একটি বিন্দুতে পরিণত না হয় তখন ঐ এলাকাকে বহুযুক্ত এলাকা বলা হয। মনে করি xy সমতলে R একটি বহুযুক্ত আবদ্ধ এলাকা যাহা c দ্বারা আবদ্ধ। R এর পরিসীমা c বক্ররেখা c_1 ও c_2 দ্বারা গঠিত যাহা R এর সাপেক্ষে ধনাত্মক দিকবর্তী। যদি ঐ এলাকায় P(x, y) এবং Q(x, y) ফাংশনদ্বয় সংজ্ঞায়িত, অবিচ্ছিন্ন এবং ইহাদের অবিচ্ছিন্ন আংশিক অন্তরক সহগ বিদ্যমান থাকে তবে [Multiple connected region is a region R enclosed by a curve c which can not be shrunk to a point with in the region R. Let R is a multiple connected closed region of xy plane bounded by a simple closed curve c. c is the boundary of R consisting of c_1 and c_2 which is traversed in the positive directions with respect to R. If P(x, y) and Q(x, y) are continuous functions of x and y having continuous partial derivatives in R then]

$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$



প্রমাণ ঃ ধরি R এলাকার বহিঃসীমা c_1 = DEFGD এবং অন্তঃসীমা c_2 = HIJKH যাহা R এর সাপেক্ষে ধনাত্মক দিকবর্তী। এখন DH রেখা দ্বারা c_1 ও c_2 কে সংযুক্ত করি যাকে ক্রস কাট বলা হয়। এলাকাটি DHIJKHDEFGD পরিসীমা দ্বারা সরলযুক্ত। সুতরাং এখানে সমতলে গ্রীণের উপপাদ্য প্রয়োগযোগ্য

[Let the region R has the outer boundary c_1 = DEFGD and the inner boundary c_2 = HIJKH which is traversed in the positive direction with respect to R. Now we construct a line such as DH called cross -cut connecting c_1 and c_2. The region bounded by DHIJKHDEFGD is simply connected. So Green's theorem in the plane can be applicable there.]

$$\oint_{DHIJKHDEFGD} Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \cdots (1)$$

$z = Pdx + Qdy$ হইলে (1) এর বামপক্ষ $= \oint_{DHIJKHDEFGD} z$

$$= \oint_{DH} z + \oint_{HIJKH} z + \oint_{HD} z + \oint_{DEFGD} z$$

$$= \oint_{DH} z + \oint_{C_2} z - \oint_{DH} z + \oint_{C_1} z$$

$$= \oint_{C_1} z + \oint_{C_2} z$$

$$= \oint_C z = \oint_C Pdx + Qdy$$

$(1) \Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ (প্রমাণিত)।

14.5. ভেক্টর আকারে সমতলে গ্রীণের উপপাদ্য (Green's theorem in the plane in vector form) ঃ সমতলে গ্রীণের উপপাদ্য।

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \cdots (1)$$

এখানে $Pdx + Qdy = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy)$

$= \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ যেখানে $\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ এবং $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\mathbf{i}\frac{\partial Q}{\partial z} + \mathbf{j}\frac{\partial P}{\partial z} + \mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

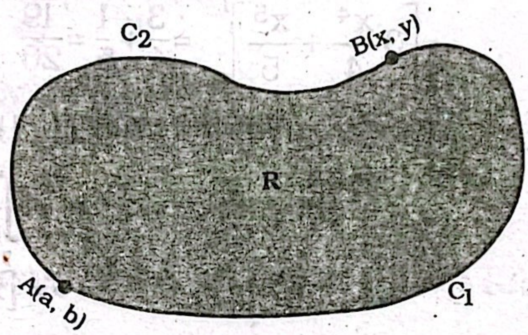
$$\Rightarrow (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k}\, dR, \quad dR = dx\,dy$$

ইহাই ভেক্টর আকারে সমতলে গ্রীণের উপপাদ্য।

14.6. উপপাদ্য : মনে করি x ও y এর এইরূপ দুইটি ফাংশন $P(x, y)$ ও $Q(x, y)$ যেখানে সরল সংযুক্ত এলাকা R এর প্রত্যেক বিন্দুতে P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ এবং $\frac{\partial Q}{\partial x}$ অবিচ্ছিন্ন। যদি $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ হয়, তবে $\int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ ইন্টিগ্রাল (a, b) ও (x, y) এর সংযুক্ত পথের উপর অনির্ভরশীল হইবে। [Let $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ be two functions of x and y such that P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ and $\frac{\partial Q}{\partial x}$ are continuous at each point of a simply connected region R. If $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ then the integral $\int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ be independent of the path joining (a, b) to (x, y).]

প্রমাণ : মনে করি A(a, b) বিন্দু হইতে B(x, y) বিন্দু পর্যন্ত দুইটি রেখা c_1 ও c_2. যদি রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ এলাকা R হয় তবে R এর পরিসীমা c_1 ও $-c_2$ দ্বারা গঠিত হইবে। R এর পরিসীমাকে c দ্বারা প্রকাশ করিলে গ্রীণের উপপাদ্য হইতে পাই,



$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

যেহেতু $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, সুতরাং $\oint_C Pdx + Qdy = 0$

$$\Rightarrow \int_{C_1} Pdx + Qdy - \int_{C_2} Pdx + Qdy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

ইহা নির্দেশ করে, $\int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ ইন্টিগ্রাল (a, b) ও (x, y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অনির্ভরশীল।

সমাধানকৃত উদাহরণমালা

উদাহরণ–1. যদি $y = x$ এবং $y = x^2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের বক্ররেখা C হয় তবে $\oint_C (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$ এর গ্রীণের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$ where c is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.]

[NUH–2005, NUH (NM)–2006 (Old)]

উদাহরণ–2. দেখাও যে xy সমতলে সরল আবদ্ধ বক্ররেখা c দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$. [Show that the area bounded by a simple closed curve c in the xy plane is given by $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.]

সমাধান ঃ গ্রীণের উপপাদ্য হইল

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \cdots (1)$$

এখন (1) এ $P = -y$ এবং $Q = x$ বসাইয়া পাই

$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right] dx\,dy$$

$$\Rightarrow \oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_R (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy.$$

$$\Rightarrow \iint_R dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \cdots (2)$$

এখানে (2) এর বামপক্ষ হইল c দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র R এর ক্ষেত্রফল। সুতরাং (2) হইতে পাই নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.

উদাহরণ–3. $\oint_C \{(2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)dy\}$ এর জন্য গ্রীণের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর যেখানে $y = x^2$ এবং $y^2 = x$ দ্বারা আবদ্ধ এলাকা হইল c. [Verify Green's theorem for $\oint_C \{(2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)dy\}$ where c is the closed curve of the region bounded by $y = x^2$ and $y^2 = x$]

[NUH–1994, 2007 (Old)]

সমাধান ঃ এখানে $y = x^2$ এবং $y^2 = x$ প্যারাবোলাদ্বয় পরস্পর (0, 0) এবং (1, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। $y = x^2$ প্যারাবোলা বরাবর (0, 0) হইতে (1, 1) পর্যন্ত লাইন ইন্টিগ্র্যাল [Now $y = x^2$ and $y^2 = x$ intersect at (0, 0) and (1, 1). Along the parabola $y = x^2$, the line integral]

$$\int_0^1 [\{(2x)(x^2) - x^2\}\,dx + \{x + (x^2)^2\}\,2x\,dx]$$

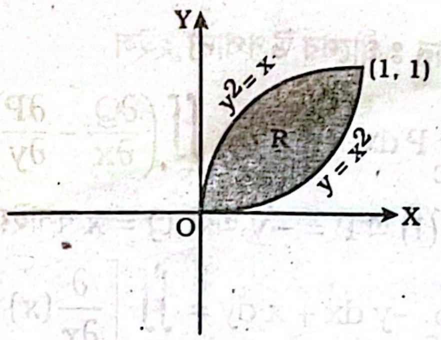
$$= \int_0^1 (2x^3 - x^2 + 2x^2 + 2x^5)\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{6}.$$

আবার, $y^2 = x$ প্যারাবোলা বরাবর (1, 1) হইতে (0, 0) পর্যন্ত লাইন ইন্টিগ্র্যাল

$$\int_1^0 \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\, 2y\, dy + (y^2 + y^2)\, dy\}$$



$$= \int_1^0 (4y^4 - 2y5 + 2y^2)\, dy$$

$$= \left[\frac{4y^5}{5} - \frac{y^6}{3} + \frac{2y^2}{3}\right]_1^0$$

$$= -\frac{17}{15}$$

সুতরাং $\oint_C \{(2xy - x^2)\, dx + (x + y^2)\, dy\} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$

আবার $\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right] dx\, dy$, c দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র R

$$= \iint_R (1 - 2x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (1 - 2x)\, [y]_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^{1/2} - x^2 - 2x^{3/2} + 2x^3)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} - \frac{4}{5}x^{5/2} + \frac{x^4}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{30}$$

সুতরাং $\oint_C (2xy - x^2)\, dx + (x + y^2)\, dy$

$$\iint_R \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right\} dx\, dy$$

অর্থাৎ গ্রীণের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

~~উদাহরণ–4.~~ $\oint_C \{(3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy\}$ এর জন্য গ্রীণের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর যেখানে $x = 0$, $y = 0$ এবং $x + y = 1$ দ্বারা আবদ্ধ এলাকার সীমারেখা হইল c. [Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C \{(3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy\}$ where c is the boundary of the region bounded by $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$] **[NUH–2003]**

সমাধান ঃ ধরি c দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র R, প্রমাণ করিতে হইবে $\oint_C (P\, dx + Q\, dy)$

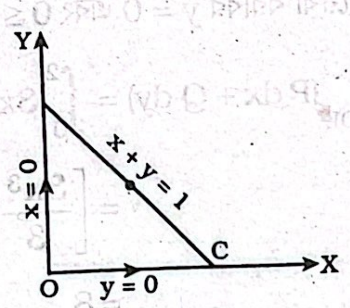
$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ যেখানে $P = 3x^2 - 8y^2$ এবং $Q = 4y - 6xy$.

এখন $y = 0$ রেখা বরাবর $\int_{x=0}^{1} (P\, dx + Q\, dy) = \int_0^1 (3x^2\, dx + 0) = 1$

$x + y = 1$ রেখা বরাবর $\int_{y=0}^{1} P\, dx + Q\, dy = \int_0^1 (11y^2 + 4y - 3)\, dy = \frac{8}{3}$

এবং $x = 0$ রেখা বরাবর $\int_{y=1}^{0} P\, dx + Q\, dy = \int_1^0 4y\, dy = -2$

সুতরাং $\oint_C (P\, dx + Q\, dy) = 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{5}{3}$



আবার $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} (-6y + 16y)\, dy\, dx$

$= \int_{x=0}^{1} [5y^2]_{y=0}^{1-x}\, dx$

$= \int_0^1 5(1 - x)^2\, dx$

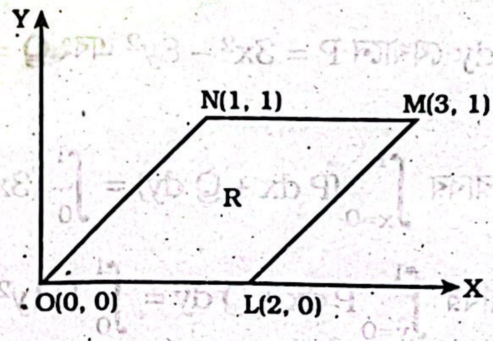
$= -\frac{5}{3} [(1 - x)^3]_0^1 = \frac{5}{3}$

$\therefore \oint_C (P\, dx + Q\, dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

অর্থাৎ গ্রীণের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

উদাহরণ-5. $\oint_C (3x^2 + 2y)\,dx - (x + 3\cos y)\,dy$ এর জন্য গ্রীণের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর যেখানে (0, 0), (2, 0), (3, 1) এবং (1, 1) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট সামন্তরিকের সীমারেখা হইল c. [Verify Green's theorem in the plane for Evaluate $\oint_c (3x^2 + 2y)\,dx - (x + 3\cos y)\,dy$ where c is the boundary of the parallelogram having vertices at (0, 0), (2, 0), (3, 1) and (1, 1)]

সমাধান ঃ ধরি OLMN সামন্তরিকের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র R যেখানে O(0, 0), L(2, 0), M(3, 1) এবং N(1, 1).



প্রমাণ করিতে হইবে $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

যেখানে $P = 3x^2 + 2y$ এবং $Q = -(x + 3\cos y)$

OL রেখা বরাবর $y = 0$ এবং $0 \le x \le 2$

$$\therefore \int_{OL} (P\,dx + Q\,dy) = \int_0^2 3x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 8$$

$\therefore$ LM এর সমীকরণ $\frac{y - 0}{0 - 1} = \frac{x - 2}{2 - 3} \Rightarrow y = x - 2$

$\therefore$ LM রেখা বরাবর

$$\int_{LM} (P\,dx + Q\,dy) = \int_2^3 \{3x^2 + 2x - 4 - x - 3\cos(x - 2)\}\,dx$$

$$= \left[x^3 + \frac{x^2}{2} - 4x - 3\sin(x - 2)\right]_2^3$$

$$= \frac{35}{2} - 3\sin 1$$

আবার, MN এর সমীকরণ $y = 1$

$\therefore$ MN রেখা বরাবর $\int_{MN} (P\,dx + Q\,dy) = \int_3^1 (3x^2 + 2)\,dx = -30$

আবার NO এর সমীকরণ $y = x$

$\therefore$ NO রেখা বরাবর $\int_{NO} (P\,dx + Q\,dy) = \int_1^0 (3x^2 + x - 3\cos x)\,dx$

$$= -\frac{3}{2} + 3\sin 1$$

$$\therefore \oint_C (P\,dx + Q\,dy) = 8 + \frac{35}{2} - 3\sin 1 - 30 - \frac{3}{2} + 3\sin 1 = -6$$

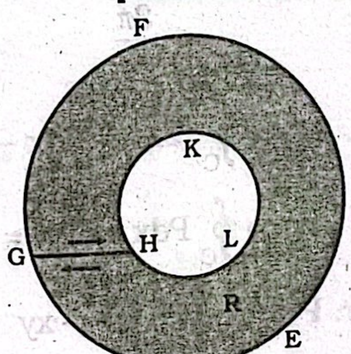
আবার $\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1} (-1-2)\,dy\,dx$

$$= -3 \int_0^2 [y]_0^1 dx = -6$$

$$\therefore \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_C (P\,dx + Q\,dy)$$

অর্থাৎ গ্রীণের উপপাদ্য প্রমাণিত হইল।

~~উদাহরণ-6.~~ $\oint_C (2x - y^3)\,dx - xy\,dy$ এর জন্য সমতলে গ্রীণের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর যেখানে $x^2 + y^2 = 1$ ও $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ এলাকার সীমারেখা হইল c. [Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C (2x - y^3)dx - xy\,dy$ where c is the boundary of region enclosed by the circles $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 9$] [NUH (NM)–2007]



সমাধান ঃ ধরি, $z = (2x - y^3)\,dx - xy\,dy$

$\therefore \oint_C z = \oint_{GEFGHKLHG} z$ (চিত্রানুসারে)

$$= \oint_{GEFG} z + \int_{GH} z + \oint_{HKLH} z + \int_{HG} z$$

$$= \oint_{GEFG} z + \oint_{HKLH} z$$

$$\left[\because \int_{GH} z = -\int_{HG} z\right] \cdots (1)$$

এখানে GEFG বৃত্ত ঃ $x^2 + y^2 = 9$ যাহার পরামিতিক সমীকরণ

$$x = 3\cos\theta,\ y = 3\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\therefore \oint_{GEFG} z = \int_0^{2\pi} [(6\cos\theta - 27\sin^3\theta)(-3\sin\theta)\,d\theta$$
$$- 9\sin\theta\cos\theta\, 3\cos\theta\, d\theta]$$

$$= \int_0^{2\pi} (-18\sin\theta\cos\theta + 81\sin^4\theta - 27\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= -18\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d(\sin\theta) + 81\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta + 27\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)$$

$$= -18\cdot\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} + 81\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)} + 27\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 162\sqrt{\pi}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{243\pi}{4}$$

আবার, HKLH বৃত্ত ঃ $x^2 + y^2 = 1$ যাহার পরামিতিক সমীকরণ

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le 2\pi$$

$$\therefore \oint_{HKLH} z = \int_{2\pi}^{0} [(2\cos\theta - \sin^3\theta)\,d(\cos\theta) - \cos\theta\sin\theta\,d(\sin\theta)]$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d(\sin\theta) - \int_0^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)$$

$$= 2\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} - 4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)} - \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \oint_C (2x - y^3)dx - xy\,dy = \frac{243\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = 60\pi$$

$$\Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = 60\pi \cdots (1)$$

$\therefore P = 2x - y^3,\ Q = -xy$

এখন $\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_R (-y + 3y^2)\,dx\,dy$

ধরি $x = r\cos\phi$ এবং $y = r\sin\phi$ $\therefore dx\,dy = r\,dr\,d\phi$

এখানে $1 \le r \le 3$ এবং $0 \le \phi \le 2\pi$

$$\therefore \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_1^3 \int_0^{2\pi} (-r \sin\phi + 3r^2 \sin^2\phi) r\, d\phi\, dr$$

$$= -\int_1^3 \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi\, d\phi\, dr + 3\int_1^3 \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\phi\, d\phi$$

$$= -\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 [-\cos\phi]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\left[r^4\right]_1^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\theta$$

$$= \left(-9 + \frac{1}{3}\right)0 + 30 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\phi)\, d\phi$$

$$= 30\,[\phi - \sin\phi]_0^{2\pi}$$

$$= 60\pi$$

$$\therefore \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

সুতরাং গ্রীণের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

উদাহরণ–7. গ্রীণের উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ কর ঃ

(i) $\oint_C \{(3x + 4y)\,dx + (2x - 3y)\,dy\} = -8\pi$

(ii) $\oint_C \{(x^2 + y^2)\,dx + 3xy^2 dy\} = 12\pi$

যেখানে c দ্বারা (0, 0) কেন্দ্র এবং 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত নির্দেশ করে।

[Use Green's theorem to show that

(i) $\oint_C \{(3x + 4y)\,dx + (2x - 3y)dy\} = -8\pi$

(ii) $\oint_C \{(x^2 + y^2)\,dx + 3xy^2\, dy\} = 12\pi$

where c is a circle of radius 2 with centre at the origin of the xy plane traversed in the positive sence]

সমাধান ঃ (i) গ্রীণের উপপাদ্য অনুসারে

$$\oint_C \{(3x + 4y)\,dx + (2x - 3y)\,dy\}$$

$$= \iint_R \left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x + 4y)\right\} dx\,dy$$

$= -2\iint_R dx\,dy$, এখানে c দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র R.

14.8. গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য [Divergence theorem of Gauss] **[NUH-2005, NUH (NM)-2006, 2006 (Old)]**

যদি V আয়তনের আবদ্ধতল S হয় এবং **A** যদি অবিছিন্ন অন্তরীকরণ যোগ্য অবস্থানের ভেক্টর ফাংশন হয় তবে [If V is the volume bounded by a closed surface S and **A** is a vector function of position with continuous derivatives then]

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dv = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint\!\!\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

যেখানে **n** হইল তল S এ অঙ্কিত যোগবোধক বহিস্থ নর্মাল। [Where **n** is the positive outward drawn unit normal to S.]

প্রমাণ : ধরি V আয়তনের আবদ্ধতল S, যাকে স্থানাঙ্ক অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা সর্বাধিক দুই বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে। কেবলমাত্র এইশর্তের জন্যই এই উপপাদ্যটি এখন আমরা প্রমাণ করিব। ধরি S এর দুইটি অংশ নিম্ন এবং উর্ধ তল দুইটি যথাক্রমে S_1 এবং S_2 যাদের সমীকরণ দুইটি যথাক্রমে $z = f_1(x, y)$ এবং $z = f_2(x, y)$. এখন ধরি S এর লম্ব অভিক্ষেপ xy সমতলে R. [Let V be a volume bounded by a closed surface S which is such that any straight line parallel to the coordinate axes cuts S in at most two points. Now we shall prove the theorem for this condition. We assume that there are two portions of S and we denote them by S_1, the lower portion and S_2, the upper portion. Let $z = f_1(x, y)$ and $z = f_2(x, y)$ be the equations of S_1 and S_2 respectively. Let R be the projection of the surface on the xy plane.]

এখন $$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\,dy\,dx$$

$$= \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\right] dy\,dx$$

$$= \iint_R \left[A_3(x,y,z)\right]_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dy\,dx$$

$$= \iint_R A_3(x, y, f_2)\,dy\,dx - \iint_R A_3(x, y, f_1)\,dy\,dx \cdots (1)$$

উর্ধতল $\mathbf{S_2}$ এ $dy\,dx = \cos\gamma_2\,dS_2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2 \cdots (2)$

যেহেতু S_2 এর নর্মাল $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{k}$ এর সাথে সূক্ষ্মকোণ γ_2 উৎপন্ন করে।

নিম্নতল $\mathbf{S_1}$ এ $dy\,dx = -\cos\gamma_1\, dS_1 = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS_1 \cdots (3)$ যেহেতু S_1 এ নর্মাল $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{k}$ এর সাথে স্থূলকোণ γ_1 উৎপন্ন করে।

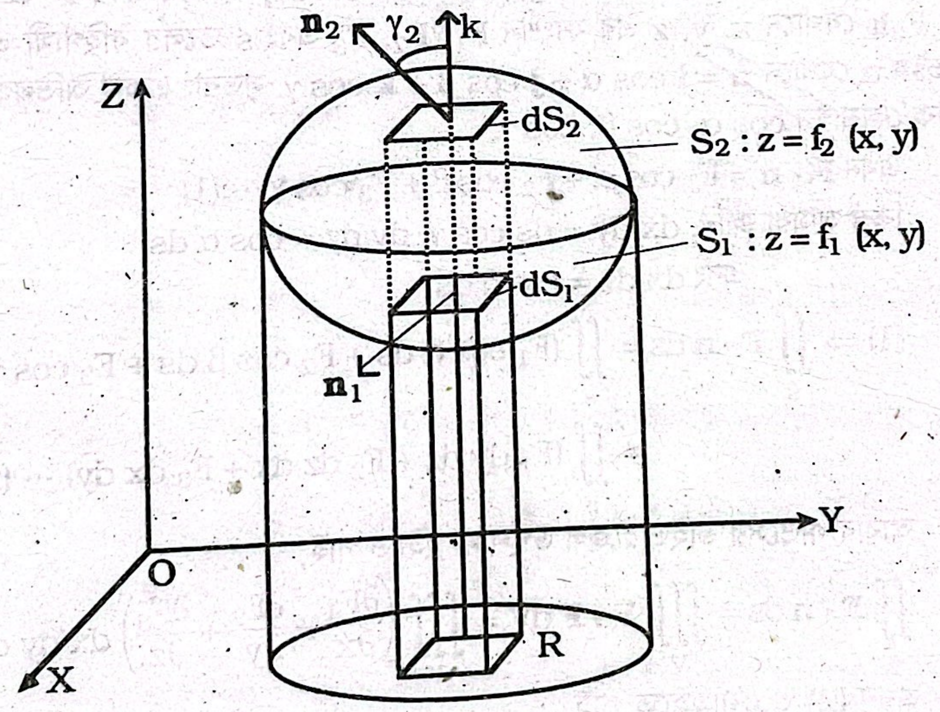
[For the upper portion $\mathbf{S_2}$: The outward drawn unit normal $\mathbf{n}_2$ to S_2 makes an accute angle γ_2 with $\mathbf{k}$. Here $dy\,dx = \cos\gamma_2\, dS_2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\, dS_2 \cdots (2)$

For the lower potion $\mathbf{S_1}$: The downward drown unit normal $\mathbf{n}_1$ to S_1 makes an obtus angle γ_1 with $\mathbf{k}$. Here $dy\,dx = -\cos\gamma_1\, dS_1 = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS_1 \cdots (3)$]

এখন (2) এবং (3) এর সাহায্যে যথাক্রমে পাই

$$\iint_R A_3(x, y, f_2)\, dy\, dx = \iint_{S_2} A_3\, \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\, dS_2 \cdots (4)$$

এবং $$\iint_R A_3(x, y, f_1)\, dy\, dx = -\iint_{S_1} A_3\, \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS_1 \cdots (5)$$



এখন (1), (4) এবং (5) এর সাহায্যে পাই

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dV = \iint_{S_2} A_3\, \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\, dS_2 + \iint_{S_1} A_3\, \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS_1$$

$$= \iint_S A_3\, \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, dS \cdots (6)$$

একইভাবে S কে yz এবং xz সমতলে লম্ব অভিক্ষেপ করিয়া যথাক্রমে পাই [Similarly, by projecting on the yz and xz planes we have]

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS \cdots (7)$$

এবং $$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dV = \iint_S A_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS \cdots (8)$$

এখন $(6) + (7) + (8) \Rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV$

$$= \iint_S (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

সুতরাং গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

14.9. গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের কার্তেসীয় আকার [Cartesian form of Gauss's divergence theorem] ঃ মনে করি $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ যেখানে x, y, z এর ফাংশন F_1, F_2, F_3 এবং s তলের বহির্গামী একক অভিলম্ব ভেক্টর $\mathbf{n}$ যেখানে $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$. সুতরাং একক অভিলম্ব ভেক্টর $\mathbf{n}$ এর দিক কোসাইন $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

এখন $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma \cdots (1)$

কিন্তু আমরা জানি, $dx\,dy = ds\cos\gamma$, $dy\,dz = \cos\alpha\, ds$

এবং $dx\,dz = \cos\beta\, ds$

$$(1) \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_S (F_1\cos\alpha\, ds + F_2\cos\beta\, ds + F_3\cos\gamma\, ds)$$

$$= \iint_S (F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy) \cdots (2)$$

আবার গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইতে পাই,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \cdots (3)$$

এখন (2) ও (3) হইতে পাই,

$$\iint_S (F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy)$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

ইহাই গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের কার্তেসীয় আকার হিসাবে পরিচিত।

[Let $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ where F_1, F_2, F_3 are functions of x, y, z and $\mathbf{n}$ be the outward drawn unit normal vector to the surface s such that $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$. So $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ are the direction cosines of the unit normal vector $\mathbf{n}$. Now, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma$. But we know, $dx\,dy = \cos\gamma\,ds$, $dy\,dz = \cos\alpha\,ds$, $dz\,dx = \cos\beta\,ds$

$$(1) \Rightarrow \iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_s (F_1\cos\alpha\,ds + F_2\cos\beta\,ds + F_3\cos\gamma\,ds)$$

$$= \iint_s (F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy) \cdots (2)$$

Again by the divergence theorem of Gauss, we have

$$\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \cdots (3)$$

Now by (2) and (3) we get

$$\iint_s (F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

This is known as the Cartesian form of Gauss's divergence theorem.]

উদাহরণ–12. $\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ এবং $x^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ এবং $y = 8$ দ্বারা আবদ্ধ এলাকার তল s

[Evalute $\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$, where $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ and S is the surface of the region bounded by $x^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $y = 8$.] **[NU (NM)-2003]**

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইতে জানি,

$$\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV \cdots (1)$$

এখানে, $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(6z) + \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) + \frac{\partial}{\partial z}(-x) = 1$

$$(1) \Rightarrow \iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_0^3 \int_0^8 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^8 [z]_0^{\sqrt{9-x^2}}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^8 \sqrt{9-x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,[y]_0^8\,dx$$

$$= 8\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= 8\left[\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^3$$

$$= 8\left[0 + \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$= 18\pi.$$

উদাহরণ-13. $\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\mathbf{F} = 2x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$ এবং প্রথম অষ্টভাগে $y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$ ও $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার তল s [Evalute $\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$, where $\mathbf{F} = 2x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$ and s is the region in the first octant bounded by $y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$ and $x = 2$.]

সমাধান : গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইতে জানি,

$$\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv \cdots (1)$$

এখানে, $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(4xz) = 8x - 2y$

$$(1) \Rightarrow \iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (8x-2y)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^3 (8x-2y)\,[z]_0^{\sqrt{9-y^2}}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^3 (8x-2y)\sqrt{9-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[8x\left\{\frac{y\sqrt{9-y^2}}{2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{y}{3}\right\} + \frac{2}{3}(9-y^2)^{3/2}\right]_{y=0}^3 dx$$

$$= \int_0^2 (18x\pi - 18)\, dx$$

$$= \left[9\pi x^2 - 18x\right]_0^2$$

$$= 36\pi - 36.$$

উদাহরণ–14. দেখাও যে, $\iint_s \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = 24\pi$, যেখানে $z = 4 - (x^2 + y^2)$ প্যারাবোলয়েড এবং xy তল দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার তল s [Show that $\iint_s \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = 24\pi$, where s is the surface of the region bounded by the paraboloid $z = 4 - (x^2 + y^2)$ and the xy plane.]

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইতে জানি,

$$\iint_s \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r}\, dv \cdots (1)$$

এখানে, $\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$

এখন, xy তলে $z = 0$ $\quad \therefore$ আমরা পাই, $x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ এবং $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

সুতরাং V এলাকায়, $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2$ এবং $0 \le z \le 4 - r^2$

$$(1) \Rightarrow \iint_s \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_V 3\, dv$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4 - r^2)\, d\theta\, dr$$

$$= 3\int_0^2 (4r - r^3)\, [\theta]_0^{2\pi}\, dr$$

$$= 6\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 6\pi \cdot 4$$

$$= 24\pi \text{ (প্রমাণিত)}$$

Scanned with CamScanner

উদাহরণ–15. দেখাও যে, $\iint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{a^4}{2}$, যেখানে $\mathbf{F} = [2yx, -zy, x^2]$ এবং স্থানাংকের সমতল ও $x = a, y = a, z = a$ সমতল দ্বারা আবদ্ধ ঘনকের সম্পূর্ণ তল s [Show that $\iint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{a^4}{2}$, where $\mathbf{F} = [2yx, -zy, x^2]$ and s is the entire surface of the cube bounded by the co-ordinate planes and the planes $x = a, y = a, z = a$.]

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইতে জানি,

$$\iint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dv \cdots (1)$$

এখানে $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2yx) + \frac{\partial}{\partial y}(-zy) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2) = 2y - z.$

$$(1) \Rightarrow \iint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (2y - z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^a \int_0^a [x]_0^a (2y - z)\, dy\, dz$$

$$= a \int_0^a \left[y^2 - yz\right]_{y=0}^a dz$$

$$= a \int_0^a (a^2 - az)\, dz$$

$$= a \left[a^2 z - a\frac{z^2}{2}\right]_0^a$$

$$= a\left(a^3 - \frac{a^3}{2}\right)$$

$$= a \cdot \frac{a^4}{2} = \frac{a^4}{2}.$$

উদাহরণ–16. দেখাও যে, $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 108\pi$, যেখানে $A = (2x + 3z)\mathbf{i} + (-xz - y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$ এবং s হইল (0, 0, 0) কেন্দ্র ও 3 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের তল। [Show that $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 108\pi$, where $A = (2x + 3z)\mathbf{i} + (-xz - y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$ and s is the surface of the sphere having centre at (0, 0, 0) and radius 3.]

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইতে জানি,

$$\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv \cdots (1)$$

এখানে, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3z) + \frac{\partial}{\partial y}(-xz-y) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2+2z)$

$$= 2 - 1 + 2 = 3$$

$(1) \Rightarrow \iint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_V 3\, dv = 3v \cdots (2)$

এখানে, v হইল (0, 0, 0) কেন্দ্র এবং 3 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের আয়তন অর্থাৎ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ গোলকের আয়তন।

$\therefore v = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$

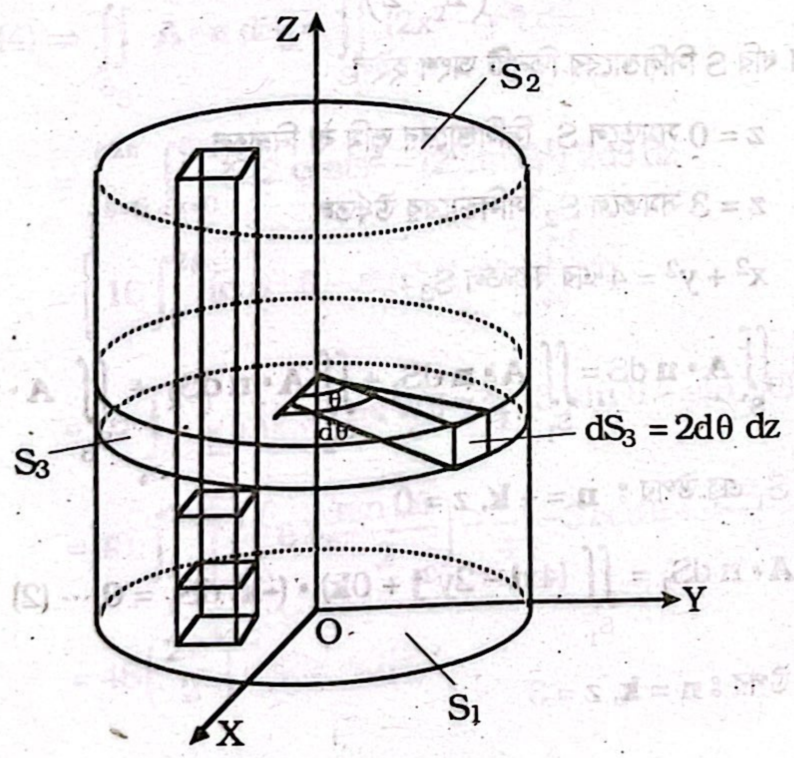
$(2) \Rightarrow \iint_s \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 3 \cdot 36\pi = 108\pi$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–17. যদি $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ হয় তবে $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ এবং $z = 3$ দ্বারা আবদ্ধ সিলিন্ডারের ক্ষেত্রে গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify the Gauss divergence theorem for $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ taken over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$.]

[NUH–2006, DUH–1993]

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য হইল

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$



এখন (2), (3) এবং (5) এর সাহায্যে

$$(1) \Rightarrow \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$$

$$\therefore \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

সুতরাং গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

উদাহরণ–18. $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ ও $z = 0$ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকায় $\mathbf{A} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ এর জন্য ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify the divergence theorem for $\mathbf{A} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ taken over the region bounded by $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$]

সমাধান ঃ আমরা জানি ডাইভারজেন্স উপপাদ্য

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dv = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds$$

এখানে
$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dv = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x}\int_{z=0}^{6-2x-2y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2xy + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x + 3y)\right\} dz\, dy\, dx$$

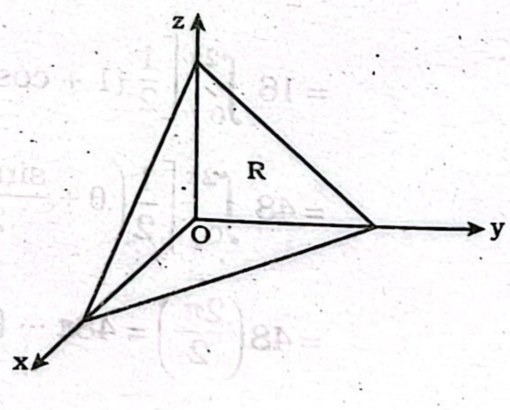
$$= \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x}\int_{z=0}^{6-2x-2y}(2y + 2y)\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x}[yz]_{z=0}^{6-2x-2y}\, dy\, dx$$

$$= 4\int_{x=0}^{3}\left[3y^2 - xy^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{3-x} dx$$

$$= 4\left[-\frac{(3-x)^4}{4} + \frac{(3-x)^4}{6}\right]_0^3$$

$$= 4\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{6}\right) = 27$$



আবার, $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds$ এর মান নির্ণয়ের জন্য

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(2x + 2y + z - 6)}{|\nabla(2x + 2y + z - 6)|}$$

$$= \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$$

$$\therefore \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{2(2xy+z)+2y^2-(x+3y)}{3}$$

$$= \frac{4xy-5x-7y+2y^2+12}{3}$$

এবং $ds = \frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = 3dx\,dy$

$\therefore \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$ যেখানে xy তলে s এর লম্ব অভিক্ষেপ R

$$= \iint_R (4xy-5x-7y+2y^2+12)\,dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x}(4xy-5x-7y+2y^2+12)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^3 \left[2xy^2-5xy-\frac{7y^2}{2}+\frac{2}{3}y^3+12y\right]_{y=0}^{3-x} dx$$

$$= \int_0^3 \left\{2x(3-x)^2-5x(3-x)-\frac{7}{2}(3-x)^2+\frac{2}{3}(3-x)^3+12(3-x)\right\}dx$$

$$= \int_0^3 \left\{18x-12x^2+2x^3-15x+5x^2-\frac{7}{2}(3-x)^2 + \frac{2}{3}(3-x)^3+12(3-x)\right\}dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2}-4x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{6}(3-x)^3-\frac{1}{6}(3-x)^4-6(3-x)^2\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{27}{2}-108+\frac{81}{2}+45\right)-\left(\frac{63}{2}-\frac{27}{2}-54\right)$$

$$= -9+36 = 27$$

$\therefore \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dv = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds$ অর্থাৎ ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উদাহরণ–19. প্রথম অষ্টভাগে $y^2+z^2=9$ এবং $x=2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকায় $\mathbf{A} = 2x^2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$ এর জন্য ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify the divergence theorem for $\mathbf{A} = 2x^2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$ taken over the region in the first octant bounded by $y^2+z^2=9$ and $x=2$]

[NUH–1997]

সমাধান ঃ আমরা জানি, গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dv = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

এখানে $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3}\int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(4xz^2)\right\} dz\, dy\, dx$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3}\int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} (4xy - 2y + 8xz)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{y=0}^{3}\int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} \left[2x^2y - 2xy + 4x^2z\right]_{x=0}^{2} dz\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{3}\int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} (8y - 4y + 16z)\, dz\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{3} \left[4yz + 8z^2\right]_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} dy$$

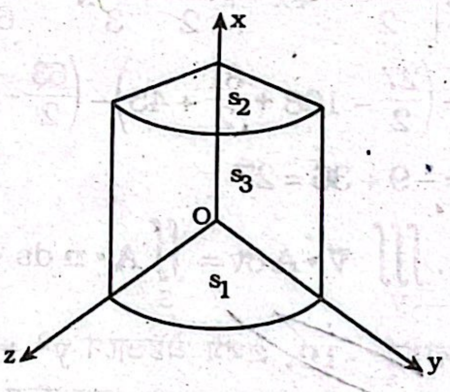
$$= \int_{0}^{3} [4y\sqrt{9-y^2} + 8(9-y^2)]\, dy$$

$$= \left[-2.\frac{2}{3}(9-y^2)^{3/2} + 72y - \frac{8}{3}y^3\right]_0^3$$

$$= (0 + 216 - 72) - (-36 + 0 - 0)$$

$$= 180$$

আবার $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds$ এর মান নির্ণয়ের জন্য মনে করি, প্রথম অষ্টভাগে $y^2 + z^2 = 9$ ও $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ঘনবস্তুর তল s কে s_1, s_2 ও s_3 তলে বিভক্ত করা হয়, যেখানে s_1 তল ভূমি $x = 0$, s_2 তল উপরি তল $x_2 = 2$ এবং s_3 ঘনবস্তুর বক্রতল নির্দেশ করে।



$$\therefore \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds_3 \cdots (1)$$

s_1 তলে, $x = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ $\quad \therefore \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$

সুতরাং $\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds_1 = 0$

s_2 তলে, $x = 2, \mathbf{n} = \mathbf{i}$ $\quad \therefore \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 8y$

$$\therefore \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds_2 = \int_{y=0}^{3} \int_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} 8y\, dy\, dz$$

$$= 8 \int_0^3 [yz]_{z=0}^{\sqrt{9-y^2}} dy$$

$$= 8 \int_0^3 y\sqrt{9-y^2}\, dy$$

$$= -4 \cdot \frac{2}{3} [(9-y^2)^{3/2}]_0^3$$

$$= 72$$

s_3 তলে, $\mathbf{n} = \dfrac{\nabla(y^2 + z^2 - 9)}{|\nabla(y^2 + z^2 - 9)|} = \dfrac{y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$

এখন $y = 3\cos\theta, z = 3\sin\theta$ হলে $ds_3 = 3dx\, d\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3}(-27\cos^3\theta + 108\, x\sin^3\theta)$$

সুতরাং $\displaystyle\iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds_3 = \int_{x=0}^{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (-27\cos^3\theta + 108\, x\sin^3\theta)\, dx\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} (-54\cos^3\theta + 216\sin^3\theta)\, d\theta$$

$$= 108$$

$$(1) \Rightarrow \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 0 + 72 + 108 = 180$$

$$\therefore \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

অর্থাৎ ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উদাহরণ–20. দেখাও যে $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \pi$ যেখানে $\mathbf{F} = [x, -y, z^2 - 1]$ এবং s হইল সমতল $z = 0, z = 1$ এবং সিলিন্ডার $x^2 + y^2 = 1$ দ্বারা আবদ্ধ বক্রতল। [Show that $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \pi$ where $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (z^2 - 1)\mathbf{k}$ and s is the closed surface bounded by the planes $z = 0, z = 1$ and the cylinder $x^2 + y^2 = 1$]

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - 1)\right] dv$$

$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{1} (1 - 1 + 2z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [z^2]_0^1\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{2}[\sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1)]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ–21. দেখাও যে $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 30$ যেখানে $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ এবং s হইল $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 1,\ z = 3$ দ্বারা আবদ্ধতল।

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right] dv$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{3} (2y + z^2 + x)\,dx\,dy\,dz$$

∴ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের কার্তেসীয় আকার হইতে পাই,

$$\int_S [(x+z)dy\,dz + (y+z)\,dz\,dx + (x+y)dx\,dy]$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+z) + \frac{\partial}{\partial y}(y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y)\right] dx\,dy\,dz$$

$$= 2\iiint_V dx\,dy\,dz$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \qquad \left[\because x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ গোলকের আয়তন} = \frac{4}{3}\pi a^3\right]$$

$$= \frac{8\pi a^3}{3}.$$

14.10. স্টোকসের উপপাদ্যের ভূমিকা (Introduction of stocke's theorem) : আইরিশ গণিতবিদ এবং পদার্থবিদ George Gabriel stokes (1819–1903) ভেক্টর ক্যালকুলাসে নির্দিষ্ট স্পেসে রেখা ইন্টিগ্রাল এবং তল ইন্টিগ্রালের মধ্যে যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করেন তাঁর নাম অনুসারে উহাকে স্টোকসের উপপাদ্য বলা হয়। সমতলে গ্রীণের উপপাদ্যকে স্পেসে প্রতিষ্ঠা করে স্টোকসের উপপাদ্য করা হয়েছে। গ্রীণের উপপাদ্যেকে সমতলে R এলাকার উপর দ্বিযোগজ এবং R এর পরিসীমা c বরাবর বদ্ধ রেখা ইন্টিগ্রাল নেওয়া হয়। স্টোকসের উপপাদ্যে স্পেসে s তলের উপর দ্বিযোগজ এবং s এর পরিসীমা c বরাবর বদ্ধ রেখা ইন্টিগ্রাল নেওয়া হয়। নিম্নে উপপাদ্যটির বর্ণনা ও প্রমাণ দেওয়া হলো :

14.11. স্টোক্সের উপপাদ্য [Stoke's theorem] : ধরি s একটি খোলা দুই প্রান্ত বিশিষ্ট তল যাহার সীমা একটি ছেদহীন আবদ্ধ সরল বক্ররেখা c দ্বারা আবদ্ধ এবং **A** একটি অবস্থানের ভেক্টর ফাংশন যাহার অবিচ্ছিন্ন অন্তরক সহগ বিদ্যমান তবে [If s is an open two sided surface bounded by a simple closed curve c and **A** is a vector function of a region where it has continuous derivatives, then]

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s}$$

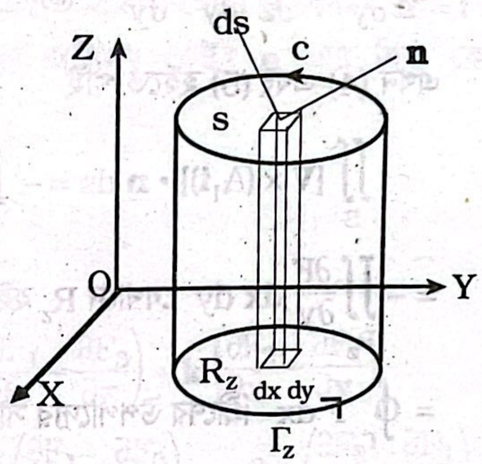
যেখানে c যোগবোধক দিক বরাবর অঙ্কিত এবং **n** হইল s এর উপর বহিস্ত বরাবর অঙ্কিত যোগবোধক একক নর্মাল। [Where c is traversed in the positive direction and **n** is the positive outward drawn unit normal to s.]

[NUH–1997, 2004, 2006, NUH (NM) 2005]

প্রমাণ : ধরি s একটি তল যার লম্ব অভিক্ষেপগুলি xy, yz এবং xz সমতলে যে ক্ষেত্রগুলি উপৎন্ন করে সেইগুলি যথাক্রমে R_z, R_x এবং R_y এবং ইহাদের আবদ্ধ বক্ররেখাগুলি যথাক্রমে Γ_z, Γ_x এবং Γ_y.

ধরি s তলকে $z = f(x, y)$ অথবা $x = g(y, z)$ অথবা $y = h(x, z)$ সমীকরণ আকারে প্রকাশ করা যায়।

[Let s be a two sided surface bounded by a simple closed curve c. Its projection on the xy, yz and zx planes are the regions R_z, R_x and R_y bounded by the simple closed curves Γ_z, Γ_x and Γ_y respectively. Assume the surface s has the following representation. $z = f(x, y)$ or $x = g(y, z)$ or $y = h(x, z)$.]



এখানে $$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_S \left\{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{n} ds$$

$$= \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, ds - \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, ds \cdots (1)$$

এখন ধরি s এর সমীকরণ $z = f(x, y)$, তাহা হইলে s এর যেকোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$ [Let $z = f(x, y)$ be the equation of s then the position vector to any point of s is $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$.]

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k} \cdots (2)$$

সুতরাং $\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = 0$; যেহেতু S তলে $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ একটি স্পর্শ ভেক্টর

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad [(2) \text{ এর সাহায্যে}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \cdots (3)$$

এখন (1) এবং (3) হইতে পাই

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, ds = -\iint_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, ds \cdots (4)$$

কিন্তু $A_1(x, y, z) = A_1(x, y, f(x, y)) = F(x, y)$ (ধরি)

$$\Rightarrow \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdots (5)$$

এখন (4) এবং (5) হইতে পাই

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, ds = -\iint_S \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, ds$$

$= -\iint_{R_z} \frac{\partial F}{\partial y} dx\, dy$ যেখানে R_z হইল s এর লম্ব অপিক্ষেপ xy সমতলে

$= \oint_{\Gamma_z} F\, dx$ [গ্রীণের উপপাদ্যের সাহায্যে]

$$= \oint_C A_1\, dx \cdots (6)$$

যেহেতু Γ_z বক্ররেখার প্রত্যেক (x, y) বিন্দুতে F এর মান c বক্ররেখার প্রত্যেক (x, y, z) বিন্দুতে A_1 এর মানের সমান এবং উভয় বক্ররেখায় যেহেতু dx সমান।

একইভাবে xz এবং yz সমতলে লম্ব অভিক্ষেপ করিয়া আমরা দেখাইতে পারি

[Since at each point (x, y) of Γ_z the value of F is the same as the value of A_1 at each point (x, y, z) of c and also dx is the same for both Γ and c. Sinilarly for the projections R_x and R_y, We have]

$$\iint_S [\nabla \times (A_2\mathbf{j})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C A_2\, dy \cdots (7)$$

এবং $\iint_S [\nabla \times (A_3\mathbf{k})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C A_3\, dz \cdots (8)$

এখন (6), (7) এবং (8) যোগ করিয়া পাই

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})] \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \oint_C (A_1\, dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

সুতরাং স্টোক্সের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

14.12. স্টোকসের উপপাদ্যের কার্তেসীয় আকার (Stoke's theorem in cartesian form) : মনে করি $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ যেখানে x, y, z এর ফাংশন F_1, F_2, F_3 এবং s তলের বহির্গামী একক অভিলম্ব ভেক্টর $\mathbf{n}$ যেখানে $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$. সুতরাং একক অভিলম্ব ভেক্টর $\mathbf{n}$ এর দিক কোসাইন $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

এখন, $$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

আবার, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$

আমরা জানি স্টোকসের উপপাদ্য, $\iint_s (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$

$$\Rightarrow \iint_s \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] ds$$

$$= \oint_C [F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz]$$

ইহাই নির্ণেয় স্টোকসের উপপাদ্যের কার্তেসীয় আকার।

উদাহরণ-38. স্টোকসের উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে, $\iint_s (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,ds = \frac{1}{3}$ যেখানে s হইল (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের তল এবং $\mathbf{F} = \mathbf{i}y^2 + \mathbf{j}x^2 - \mathbf{k}(x+z)$. [Using stoke's theorem, show that $\iint_s (\nabla\cdot\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,ds = \frac{1}{3}$ where s is the surface of the triangle with vertices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) and $\mathbf{F} = \mathbf{i}y^2 + \mathbf{j}x^2 - \mathbf{k}(x+z)$.]

সমাধান : মনে করি OAB ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ O(0, 0, 0), A(1, 0, 0) এবং B(1, 1, 0).

স্টোকসের উপপাদ্য হইতে জানি, $\iint_s (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_{OABO} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_{OA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{BO} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \cdots (1)$$

এখানে $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = y^2\,dx + x^2\,dy - (x+z)\,dz$

OA বরাবর, $y = 0$, $z = 0$ এবং x এর সীমা 0 হইতে 1

AB বরাবর, $x = 1$, $z = 0$ এবং y এর সীমা 0 হইতে 1

BO বরাবর, $z = 0$, $y = x$ এবং x এর সীমা 1 হইতে 0

$$\therefore (1) \Rightarrow \iint_s (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,ds = \int_0^1 0\,dx + \int_0^1 dy + \int_1^0 (x^2 + x^2)\,dx$$

$$= [y]_0^1 + \frac{2}{3}\left[x^3\right]_1^0$$

$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

উদাহরণ–39. স্টোকসের উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে, $\oint_C (yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz) = 0$ যেখানে c হইলে $x^2 + y^2 = 1$, $z = y^2$ বক্ররেখা। [Using stoke's theorem, show that $\oint_C (yz\,dx + zxdy + xydz) = 0$, where c is the curve $x^2 + y^2 = 1$, $z = y^2$.]

সমাধান ঃ ধরি, $F = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}zx + \mathbf{k}xy$

$$\therefore \oint_C (yzdx + zxdy + xydz) = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \cdots (1)$$

আবার স্টোকসের উপপাদ্য হইতে জানি, $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_s (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,ds \cdots (2)$

(1) ও (2) হইতে পাই, $\oint_C (yzdx + zxdy + xydz) = \iint_s (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,ds \cdots (3)$

$$\text{এখন, } \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(x - x) + \mathbf{j}(y - y) + \mathbf{k}(z - z)$$

$$= 0$$

$$(3) \Rightarrow \oint_C (yzdx + zxdy + xydz) = 0 \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ-40. যদি $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ হয় তবে দেখাও যে $\iint_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, ds = -16\pi$, যেখানে s হইল xy সমতলের উপর $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ অর্ধগোলকের তল। [If $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ then show that $\iint_s \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = -16\pi$, where s is the surface of the semisphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ above the xy plane.]

সমাধান ঃ স্টোকসের উপপাদ্য হইতে জানি,

$$\iint_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \oint_C [(x^2 + y - 4)dx + 3xy\, dy + (2xz + z^2)dz] \quad \cdots (1)$$

এখানে c হইল $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত।

$\Rightarrow x = 4\cos\theta,\ y = 4\sin\theta$ যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$

$$(1) \Rightarrow \iint_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^{2\pi} [16\cos^2\theta + 4\sin\theta - 4)d(4\cos\theta) + 3(4\cos\theta)(4\sin\theta)\, d(4\sin\theta)]$$

$$= 16\int_0^{2\pi} (8\cos^2\theta\sin\theta - \sin^2\theta + \sin\theta)\, d\theta$$

$$= 16\left[-\frac{8}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} - 16\left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} + 16\,[-\cos\theta]_0^{2\pi}$$

$$= 16 \cdot 0 - 16 \cdot \pi + 0$$

$$= -16\pi.$$

উদাহরণ-41. যদি $\mathbf{A} = (2x - y)\,\mathbf{i} - yz^2\,\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ এবং s যদি xy সমতলের উপর $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকের উর্ধ অর্ধ অংশ হয় যাহার সীমা c তবে স্টোক্সের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify stoke's theorem for $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\,\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ where s is the upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and c is its boundary.]

[NUH-2007, DUH-1992]

সমাধান ঃ এখানে s এর সীমা হইল c যাহা একটি xy সমতলে বৃত্ত যাহার কেন্দ্র (0, 0) বিন্দুতে এবং যাহার ব্যাসার্ধ 1. এবং xy সমতলে z = 0. ধরি xy সমতলে c বৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ যেখানে $0 \le \theta < 2\pi$. [The boundary c of s is the circle in the xy plane of radius one and centre at the origin. Let $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ be the parametric equation of c.]

এখানে $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (2x-y)\,dx - yz^2\,dy - y^2z\,dz$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - \sin\theta)\, d(\cos\theta) \quad [\because x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = 0]$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) - \sin 2\theta\right] d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

আবার $\nabla\times\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{Vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(2x-y) - \frac{\partial}{\partial x}(-y^2z),\ \frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x-y)\right]$$

$$= [-2yz + 2yz,\ 0,\ 1]$$

$$= [0, 0, 1] = \mathbf{k}$$

সুতরাং $\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_S \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,ds \cdots (1)$

ধরি S এর লম্ব অভিক্ষেপ xy সমতলে R.

এখানে $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,ds = dx\,dy$. সুতরাং

$(1) \Rightarrow \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R dx\,dy$

$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

[ধরি $z = x^2 \Rightarrow x = z^{1/2}$ $\Rightarrow dx = \frac{1}{2} z^{-1/2}\, dz$ এবং লিমিট একই থাকিবে।]

$$= 2\int_{-1}^{1} (1-z)^{3/2-1} z^{1/2-1}\, dz$$

$$= 2\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}$$

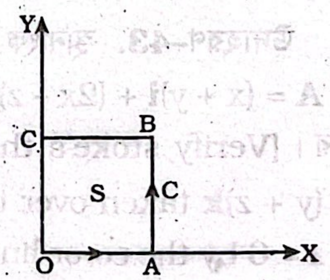
$$= 2\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, ds = \pi$$

সুতরাং স্টোক্সের উপপাদ্যটি পরীক্ষিত হইল।

উদাহরণ-42. xy সমতলে $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = a$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকায় $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ এর জন্য স্টোকসের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify stoke's theorem for $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ taken over the region in xy plane bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = a$]

সমাধান : $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ এবং $y = a$ রেখা দ্বারা xy তলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা c এবং ক্ষেত্রটি s হলে প্রমাণ করতে হবে :



$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, ds$$

এখানে $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{OA} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{CO} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$

$= \int_0^a x^2\, dx + \int_0^a ay\, dy + \int_a^0 x^2\, dx + \int_a^0 0\, dy$ (চিত্রানুসারে)

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a + \left[\frac{ay^2}{2}\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^0$

$= \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}$

$= \frac{a^3}{2}$

আবার, $\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & 0 \end{vmatrix} = y\mathbf{k}$

$\therefore \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_S y\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\, ds \quad [\because \mathbf{n} = \mathbf{k}]$

$= \iint_S y\, ds$

$= \int_0^a \int_0^a y\, dx\, dy$

$= \int_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a dx$

$= \frac{a^2}{2}\cdot [x]_0^a$

$= \frac{a^3}{2}$

$\therefore \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\, ds$

অর্থাৎ স্টোকস্ এর উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হল।

উদাহরণ–43. স্থানাংক সমতল দ্বারা $3x + 2y + z = 6$ সমতলকে কর্তিত ΔABC এ $\mathbf{A} = (x + y)\mathbf{i} + (2x - z)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$ এর জন্য স্টোকসের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। [Verify stoke's theorem for the vector $\mathbf{A} = (x + y)\mathbf{i} + (2x - z)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$ taken over the triangle ABC cut from the plane $3x + 2y + z = 6$ by the co-ordinate planes]

সমাধান ঃ মনে করি ABC ত্রিভুজের পরিসীমা c এবং ক্ষেত্র s.