



TRIMURTI SENIOR
HIGH SCHOOL

tiemp
trimurti interactive e-module program

Modul Aljabar Dasar





MATEMATIKA ALJABAR DASAR

Edisi I
Tahun 2023

Disusun oleh (authorship):

1. Muhammad Iqbal Munadhdhom, S.Pd.
2. Niken Yuniarti, M.Pd.
3. Riky Prasetia Wijaya, M.Pd.
4. Muhammad Hibbi Rusly, S.Pd.

Cover and Layout Design:
startfriday.asia

Edited by:
Giant Strides Team

Copyright 2023 TIEMP
Hak cipta dilindungi undang-undang.
Dilarang memperbanyak sebagian
atau seluruh isi modul tanpa izin
tertulis dari TIEMP.

Kata Pengantar

Matematika ilmu yang pasti dan sudah jelas. Banyak anak yang tidak menyukai matematika karena tidak memahami konsep dan cara pemecahannya. Masih banyak konsep matematika yang abstrak dan tidak disangkut pautkan dengan kegunaan dalam kehidupan sehari-hari. Pemahaman matematika menjadi semakin penting dalam kehidupan sehari-hari.

Modul ini kami susun untuk mempermudah konsep matematika yang begitu abstrak, dan memberikan pemahaman yang komprehensif tentang konsep matematika. Sehingga tampilan modul ini mudah dipahami dan menarik untuk dibaca anak-anak pada zaman kekinian.

Aljabar adalah salah satu cabang utama dalam matematika yang memiliki pesan sentral dalam membangun fondasi pengetahuan matematika yang kuat. Konsep-konsep aljabar memberikan alat yang kuat untuk memecahkan masalah, menganalisis pola, dan memahami struktur matematika secara lebih mendalam.

Melalui penjelasan yang terperinci, contoh-contoh yang relevan, latihan-latihan yang menantang, dan cerita yang menarik untuk menambah minat membaca dan memahami aljabar, kami berharap modul ini dapat menjadi panduan yang berharga bagi para pembaca dalam memahami dan mengusai konsep-konsep matematika.

Akhir kata, kami berharap bahwa modul ini akan membantu Anda menjelajahi keindahan matematika dan memberikan fondasi yang kokoh dalam pemahaman konsep-konsep matematika. Semoga modul ini mampu menginspirasi dan memberikan manfaat yang luas bagi para pembaca.

Surabaya, Juni 2023

Penulis

Daftar Isi

BAB I. BILANGAN BERPANGKAT (EKSPONENSIAL)	1
Tujuan Pembelajaran	1
Sejarah Bilangan Berpangkat	1
Sifat-Sifat Bilangan Berpangkat	3
Exercise	7
Challenge	9
BAB II. POLA BILANGAN, BARISAN ARITMATIKA DAN GEOMETRI	14
Tujuan Pembelajaran	14
Sejarah	14
Barisan, Pola Bilangan	15
Pengertian Barisan	16
Pengertian Pola Bilangan	17
Pengertian Deret	19
Exercise	20
Barisan Aritmatika Dan Deret Aritmatika	22
Barisan Aritmatika	22
Deret Aritmatika	25
Exercise	29
Barisan Geometri Dan Deret Geometri	32
Barisan Geometri	32
Deret Geometri	32
Exercise All	41
Challenge	44
BAB III. SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL (SPLTV)	49
Tujuan	49
Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	49
Exercise	51
Penyelesaian SPLTV	57
Metode Substitusi	57
Exercise	59
Metode Eliminasi	61
Exercise	63
Metode Campuran	64
Exercise	66
Metode Determinan	68
Exercise	70
Evaluasi	71
Challenge	73

BAB IV - SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPtLDV)	79
Tujuan Pembelajaran	79
Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	79
Exercise	82
Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel	84
Exercise	85
Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel Dengan Linear Dua Variabel	86
Exercise	87
Pertidaksamaan Linear Dua Variabel Dengan Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel	88
Exercise	89
Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel Dengan Kuadrat Dua Variabel	90
Exercise	92
Evaluasi	96
Challenge	108
BAB V - PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT	111
Tujuan pembelajaran	111
Sejarah	111
Bentuk Umum Persamaan Kuadrat	113
Penyelesaian Persamaan Kuadrat	114
Dengan Cara Pemfaktoran	114
Dengan Cara Melengkapi Kuadrat Sempurna	116
Dengan cara rumus ABC	117
Jumlah Dan Hasil Kali Akar-Akar	118
Jenis Akar Persamaan Kuadrat	120
Exercise	121
Challenge	123
BAB VI - PERSAMAAN EKSPONENSIAL DAN FUNGSI EKSPONENSIAL	124
Tujuan Pembelajaran	124
Fungsi Eksponensial	126
Exercise	133
Persamaan Eksponensial	136
Exercise	138
Challenge	141

BAB 1 BILANGAN BERPANGKAT (EKSPONENSIAL)

Tujuan Pembelajaran

1. Menjelaskan sifat-sifat bilangan berpangkat (C2 dalam taksonomi bloom)
2. Menjelaskan pengertian bilangan berpangkat (C2 dalam taksonomi bloom)
3. Menentukan hasil hitung dari bilangan berpangkat (C3 dalam taksonomi bloom)
4. Mengaplikasikan sifat-sifat bilangan berpangkat dalam permasalahan sehari-hari (C4 dalam taksonomi bloom)
5. Menggeneralisasi sifat-sifat eksponen (C4 dalam taksonomi bloom)

A. Sejarah Bilangan Berpangkat



Orang yang pertama kali menemukan bilangan berpangkat atau eksponen adalah **John Napier (1550-1617)**, Seorang bangsawan dari Merchiston, Skotlandia. Ia juga menemukan bilangan logaritma, yang berhubungan dengan bilangan eksponen. John Napier menyadari bahwa setiap bilangan bisa diubah dalam bentuk eksponen maupun logaritma, agar bilangan tersebut bisa berbentuk lebih sederhana.

Pada dasarnya bilangan berpangkat bukanlah suatu sistem atau jenis bilangan melainkan konsep atau metode penulisan suatu bilangan. Kita tidak menyebut bilangan berpangkat sebagai sistem bilangan bulat, bilangan cacah, bilangan rasional, bilangan Real, dan sebagainya, karena pada dasarnya memang berbeda. Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menemui perkalian bilangan dengan faktor-faktor yang sama.

2 × 2 × 2 × ...

4 × 4 × 4 × ...

15 × 15 × 15 × ...

22 × 22 × 22 × ...

Perkalian bilangan dengan faktor-faktor yang sama seperti di atas disebut sebagai perkalian berulang. Setiap perkalian berulang dapat dituliskan secara ringkas menggunakan notasi bilangan berpangkat.

8. Pengertian Bilangan Berpangkat

Misalkan bilangan a dikalikan secara berulang sebanyak n kali maka dapat dituliskan dalam bentuk pangkat, yaitu :

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \text{ (sebanyak } n\text{)}$$

Dimana a sebagai bilangan pokok dan n nilai perpangkatan.

Contoh:

- a. $6^2 = 6 \times 6 = 36$
- b. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
- c. $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$



KEGIATAN 1

Pemahaman konsep bilangan berpangkat

Alat dan bahan yang digunakan :

1. Kertas karton berwarna
2. Penggaris
3. Gunting

Langkah-langkah:

1. Buatlah kelompok yang terdiri atas 3 orang peserta didik.
2. Buatlah bangun persegi dengan ukuran berapa pun.
3. Masing-masing kelompok melipat kertas karton yang tersedia menjadi dua bagian sama besar (simetri lipatnya)
4. Gunting kertas karton tersebut tepat di lipatan
5. Apa yang dapat kalian simpulkan?
6. Silahkan mengulangi langkah 2 sampai langkah 4 sebanyak 4 kali
7. Lipatlah kertas karton dengan ketentuan berikut:
 - Kertas karton ke-1 lipatlah 2 kali (simetri lipatnya)
 - Kertas karton ke-2 lipatlah sebanyak 3 kali (simetri lipatnya)
 - Kertas karton ke-3 lipatlah sebanyak 4 kali (simetri lipatnya)
 - Kertas karton ke-4 lipatlah sebanyak 5 kali (simetri lipatnya)
8. Dari kertas karton ke-1 hingga karton ke-4 terdapat berapa bangun yang sama?
9. Apa yang dapat kalian simpulkan?

C. Sifat-sifat Bilangan Berpangkat

1. Perkalian Bilangan Berpangkat

Untuk lebih memahami konsep perkalian bilangan berpangkat, perhatikan

Bentuk perkalian pangkat	Perkalian berulang	Hasil perkalian
$2^2 \times 2^4$	$2^2 \times 2^4 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $= 2^6$	$2^2 \times 2^4 = 2^{2+4}$ $= 2^6$
$5^3 \times 5^4$	$5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$ $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ $= 5^7$	$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4}$ $= 5^7$
$(-3)^2 \times (-3)^5$		
$p^4 \times p^3$		

2. Pembagian Bilangan Berpangkat

Untuk lebih memahami konsep pembagian bilangan berpangkat, perhatikan tabel berikut!

Bentuk pembagian pangkat	Pembagian berulang	Hasil pembagian
$2^5 : 2^2$	$2^5 : 2^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) : (2 \times 2)$ $= 2 \times 2 \times 2$ $= 2^3$	$2^5 : 2^2 = 2^{5-2}$ $= 2^3$

Bentuk pembagian pangkat	Pembagian berulang	Hasil pembagian
$7^6 : 7^4$	$7^6 : 7^4 = (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) : (7 \times 7 \times 7 \times 7)$ $= 7 \times 7$ $= 7^2$	$7^6 : 7^4 = 7^{6-4}$ $= 7^2$
$(-3)^4 : (-3)^2$		
$3^8 : 3^5$		
$q^7 : q^3$		

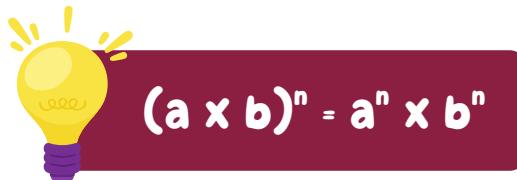
3. Pemangkatan Bilangan Berpangkat

Untuk lebih memahami konsep pemangkatan bilangan berpangkat, perhatikan tabel berikut ini!

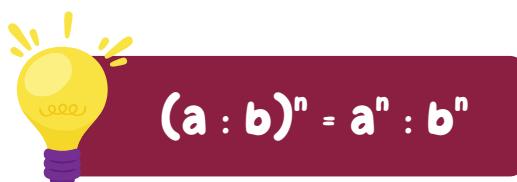
Bentuk pemangkatan pangkat	Perkalian berulang	Hasil pemangkatan
$(2^3)^2$	$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$ $= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $= 2^6$	$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$ $= 2^6$
$(5^2)^4$	$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$ $= (5 \times 5) \times (5 \times 5) \times (5 \times 5) \times (5 \times 5)$ $= 5 \times 5$ $= 5^8$	$(5^2)^4 = 5^{2 \times 4}$ $= 5^8$
$((-3)^4)^3$		

4. Perpangkatan Suatu Perkalian atau Pembagian Bilangan Berpangkat

Perkalian bilangan berpangkat berlaku rumus:



Pembagian bilangan berpangkat berlaku rumus:



Sederhanakan bentuk bilangan berpangkat berikut ini!

- a. $(2p \times q)^3$
- b. $(5a^2 \times 3b)^4$
- c. $(6a^3 : 2b)^3$

Jawab :

$$\begin{aligned} a. (2p \times q)^3 &= (2p)^3 \times (q)^3 \\ &= 2^3 \times p^3 \times q^3 \\ &= 8p^3 \times q^3 \\ &= 8p^3q^3 \end{aligned}$$

Jawab :

$$\begin{aligned} b. (5a^2 \times 3b)^4 &= (5a^2)^4 \times (3b)^4 \\ &= 5^4 \times a^8 \times 3^4 \times b^4 \\ &= 3^4 5^4 a^8 b^4 \end{aligned}$$

Jawab :

$$c. (6a^3 : 2b)^3 =$$



5. Bilangan berpangkat negatif

Perhatikan barisan bilangan berikut:

$$\begin{aligned} & \dots, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \\ & \dots, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots \\ & \dots, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots \end{aligned}$$

Pola dari barisan bilangan berpangkat tersebut indeks atau nilai pangkat pada barisan membentuk barisan bilangan bulat $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ sehingga dapat dituliskan

$$2^1 = 2$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Jadi, dapat dituliskan



$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{untuk } a \neq 0$$

Ubahlah bentuk pangkat negatif berikut ke bentuk pangkat positif

a. $6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} =$

b. $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{\frac{1}{5^4}}$
 $= 1 : \left(\frac{1}{5}\right)^4$
 $= 1 \times \left(\frac{5}{1}\right)^4$
 $= 5^4$

e. $(-3)^{-5} =$

c. $7^{-4} =$

D. Exercise

Pilihlah jawaban yang paling benar!

1. $(-2)^8 = \dots$
 - a. -256
 - c. 128
 - b. -128
 - d. 256

2. Bentuk sederhana dari $12^3 : 12^7$ adalah...
 - a. $\frac{1}{12^4}$
 - c. 12^4
 - b. 12^{10}
 - d. $\frac{1}{12^4}$

3. Hasil perpangkatan dari $(2 ab)^4$ adalah...
 - a. $16a^4b^4$
 - c. $2ab^4$
 - b. $16ab$
 - d. $2a^4b^4$

4. Hasil dari $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \dots$
 - a. 9
 - b. 3
 - c. 1
 - d. $\frac{1}{2}$

5. Hasil dari $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \dots$
 - a. $\left(\frac{1}{4}\right)^6$
 - b. $\left(\frac{1}{4}\right)^5$
 - c. $\left(\frac{1}{12}\right)^3$
 - d. $\left(\frac{1}{16}\right)^6$

6. $\frac{a^{12}b^8}{a^3b^5} = \dots$
 - a. a^2b
 - b. a^3b^3
 - c. a^9b^3
 - d. $a^{10}b^5$



Soal Uraian

7. Tentukan hasil dari:

a. $6^2 + 10 : 5 = \dots$

b. $4^3 \times 5 + 5^2 = \dots$

8. Nyatakan perkalian berikut dalam bentuk perpangkatan!

a. $3 \times 3 \times 3 \times a \times a = \dots$

b. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \dots$

9. Tentukan hasil perpangkatan dari

a. $8^4 = \dots$

b. $2^6 = \dots$

c. $(-3)^5 = \dots$

E. Challenge

Pilihlah jawaban yang paling benar!

1. Bila $x = 36$ dan $y = 125$ maka nilai $\frac{x^{-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{y^2}}{y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} = \dots$

A. $-\frac{16}{216}$

B. $-\frac{25}{216}$

C. $-\frac{36}{216}$

D. $-\frac{49}{216}$

E. $-\frac{64}{216}$

2. Jika n memenuhi $\underbrace{25^{0.25} \times 25^{0.25} \times \dots \times 25^{0.25} \times 25^{0.25}}_{n \text{ faktor}} = 125$ maka $(n - 3)(n + 2) = \dots$

- A. 24
- B. 26
- C. 28
- D. 32
- E. 36

3. Jika $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - 3$ dan $g(x) = 2^x + 3$ maka $\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$

- A. $2^x + 3$
- B. $2^x + 1$
- C. 2^x
- D. $2^x - 1$
- E. $2^x - 3$

4. Bentuk sederhana dari:

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}}\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + x\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}} - x\right) \left(x + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

dengan $x \neq 0$ adalah...

A. $x^{-\frac{1}{3}}$

B. $x^{\frac{1}{3}}$

C. $x^{\frac{2}{3}}$

D. $x^{-\frac{2}{3}}$

E. $x^{\frac{1}{2}}$

5. Bentuk sederhana dari: $\left(\frac{3a^{-2}bc^{-3}}{24a^5b^{-3}c}\right)^{-1}$

A. $\frac{8a^7c^4}{b^4}$

B. $\frac{8a^{10}c^3}{b^4}$

C. $\frac{8a^7c^3}{b^3}$

D. $\frac{8a^{10}b^3}{c^4}$

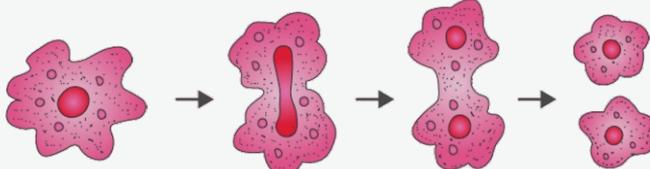
E. $\frac{8a^{10}b^3}{b^3}$

6. Pertumbuhan amoeba tertentu dan menggunakan eksponensial yaitu $A_t = A_0 \times B^t$ dimana A_0 adalah banyaknya amoeba pada awal pengamatan dan t adalah waktu pengamatan terjadi (dalam detik), sedangkan A_t adalah banyaknya amoeba yang tumbuh selama t pengamatan dan B adalah berapa kali amoeba melakukan pembelahan diri.

Berdasarkan teks diatas, jika diketahui amoeba tersebut mula-mula sebanyak 8 unit kemudian saat 2 detik amoeba membelah menjadi 32 unit, persamaan fungsi eksponensial yang sesuai adalah....

- a. $A_t = A_0 \times 3^t$
- b. $A_t = A_0 \times (-2)^t$
- c. $A_t = A_0 \times (-3)^t$
- d. $A_t = A_0 \times 2^t$
- e. $A_t = A_0 \times 1^t$

PERTUMBUHAN AMOEBA



8. Bentuk sederhana dari:

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}}\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + x\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}} - x\right) \left(x + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

dengan $x \neq 0$ adalah...

A. $x^{-\frac{1}{3}}$

B. $x^{\frac{1}{3}}$

C. $x^{\frac{2}{3}}$

D. $x^{-\frac{2}{3}}$

E. $x^{\frac{1}{2}}$

9. Jika $9^{m-1} + 9^{m+1} = 82$, maka $4^{m+1} = \dots$

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 2

D. 16

E. 64

10. Bentuk sederhana dari: $\left(\frac{3a^{-2}bc^{-3}}{24a^5b^{-3}c}\right)^{-1}$

A. $\frac{8a^7c^4}{b^4}$

B. $\frac{8a^{10}c^3}{b^4}$

C. $\frac{8a^7c^3}{b^3}$

D. $\frac{8a^{10}b^3}{c^4}$

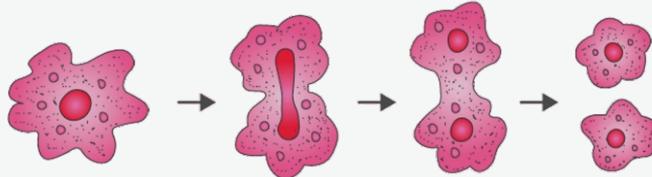
E. $\frac{8a^{10}b^3}{b^3}$

6. Pertumbuhan amoeba tertentu dan menggunakan eksponensial yaitu $A_t = A_0 \times B^t$ dimana A_0 adalah banyaknya amoeba pada awal pengamatan dan t adalah waktu pengamatan terjadi (dalam detik), sedangkan A_t adalah banyaknya amoeba yang tumbuh selama t pengamatan dan B adalah berapa kali amoeba melakukan pembelahan diri.

Berdasarkan teks diatas, jika diketahui amoeba tersebut mula-mula sebanyak 8 unit kemudian saat 2 detik amoeba membelah menjadi 32 unit, persamaan fungsi eksponensial yang sesuai adalah....

- A. $A_t = A_0 \times 3^t$
- B. $A_t = A_0 \times (-2)^t$
- C. $A_t = A_0 \times (-3)^t$
- D. $A_t = A_0 \times 2^t$
- E. $A_t = A_0 \times 1^t$

PERTUMBUHAN AMOEBA



12. Harga jual setiap mobil selalu turun setiap tahunnya atau dikenal dengan istilah penyusutan harga jual mobil. Sebagai contoh, penyusutan harga jual suatu tipe mobil adalah $\frac{1}{6}$ harga jual tahun sebelumnya. Hal ini berarti apabila harga jual pada tahun sebelumnya adalah Rp. 120.000.000,00 maka harga jual mobil tipe tersebut tahun ini adalah Rp. 100.000.000,00 atau Rp. 20.000.000,00 lebih murah.

Pak Zaenal mempunyai tiga buah mobil dengan tipe A, B, C. Setelah melakukan riset, penyusutan harga jual ketiga mobil Pak Zaenal disajikan pada tabel berikut:

Tipe Mobil	Penyusutan Harga Jual per Tahun
A	$\frac{1}{4}$ harga jual tahun sebelumnya
B	$\frac{1}{3}$ harga jual tahun sebelumnya
C	$\frac{1}{5}$ harga jual tahun sebelumnya

Ketiga mobil Pak Zaenal dibeli **tiga tahun yang lalu** dengan harga dari penjual seperti pada tabel berikut:

Tipe Mobil	Harga
A	Rp. 256.000.00,00
B	Rp. 243.000.00,00
C	Rp. 250.000.00,00

Mobil yang memiliki harga paling tinggi saat ini adalah...

- A. Mobil C dengan harga Rp. 108.000.000,00
- B. Mobil B dengan harga Rp. 72.000.000,00
- C. Mobil A dengan harga Rp. 108.000.000,00
- D. Mobil B dengan harga Rp. 128.000.000,00
- E. Mobil C dengan harga Rp. 128.000.000,00

13. Setelah ketiga mobil tersebut dipakai selama 5 tahun oleh Pak Zaenal, seorang pengusaha jual beli mobil bekas menaarkan untuk membeli semua mobil Pak Zaenal dengan harga Rp. 55.000.000,00 per mobil. Hasil penjualan mobil yang didapat Pak Zaenal jika memutuskan untuk menerima tawaran pengusaha tersebut adalah...

- A. Total penjualan adalah Rp. 66.400.000,00 diatas total harga asli hasil penyusutan tahun tersebut
- B. Total penjualan adalah Rp. 16.400.000,00 dibawah total harga asli hasil penyusutan tahun tersebut
- C. Total penjualan adalah Rp. 16.400.000,00 diatas total harga asli hasil penyusutan tahun tersebut
- D. Total penjualan adalah Rp. 9.670.000,00 dibawah harga asli hasil penyusutan tahun tersebut
- E. Total penjualan adalah Rp. 9.670.000,00 diatas harga asli hasil penyusutan tahun tersebut

14. Berdasarkan informasi dalam bacaan, pernyataan penyusutan harga jual mobil berikut yang benar adalah... (*jawaban benar bisa lebih dari satu*)

- A. Harga mobil A setelah dipakai 2 tahun adalah Rp. 160.000.000,00
- B. Harga mobil B setelah dipakai 4 tahun adalah Rp. 72.000.000,00
- C. Setelah dipakai 2 tahun harga mobil B telah menyusut Rp. 135.000.000,00 dari harga beli awalnya
- D. Setelah dipakai 5 tahun harga mobil C telah menyusut Rp. 168.000.000,00 dari harga beli awalnya
- E. Total penyusutan harga mobil A, B dan C setelah dipakai 4 tahun adalah Rp. 574.330.000,00

BAB 2 POLA BILANGAN, BARISAN, DERET ARITMATIKA DAN DERET GEOMETRI

Tujuan Pembelajaran

1. Memahami pola bilangan, barisan, dan deret. (C3 dalam taksonomi bloom)
2. Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan pola bilangan, barisan, deret aritmatika dan geometri. (C3 dalam taksonomi bloom)

A. Sejarah

Johann Carl Friedrich Gauss adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang memberikan beragam kontribusi dalam berbagai bidang, yaitu matematika, fisika, dan astronomi.

Di sekolahnya, Gauss terkadang dikenal sebagai murid pembuat masalah, tetapi juga merupakan murid yang memiliki kemampuan memecahkan masalah. Pada umur 10 tahun, ia membuat gurunya terkagum-kagum dengan memberikan rumus untuk menghitung jumlah suatu deret aritmatika berupa penghitungan deret



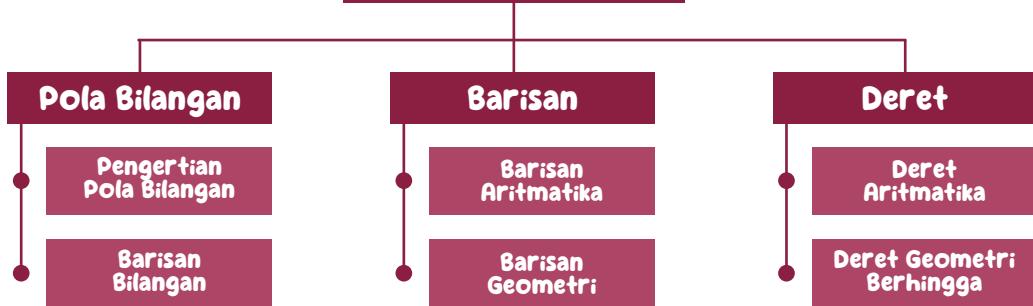
Gauss menemukan bahwa masing-masing pasangan dari nilai terbesar dan terkecil selalu membentuk nilai yang sama, yaitu 101 (1+100, 2+99, 3+98 dst.), sehingga ia cukup mengalikan jumlah tersebut dengan jumlah keseluruhan pasangan bilangan yang ada, sehingga $1+2+3+\dots+100 = 101 \times 50 = 5050$.

Cara yang Gauss ciptakan untuk menghitung deret aritmatika tersebut lalu disederhanakan menjadi rumus


$$D_n = \frac{n}{2} (U_1 + U_n)$$

Peta Konsep

Barisan & Deret



B. Barisan, Pola Bilangan, Deret

Sebelum masuk materi barisan aritmatika mari kita belajar dulu tentang pola bilangan:

B1. PENGERTIAN BARISAN

Barisan bilangan adalah **urutan bilangan-bilangan** dengan **aturan tertentu**.

Contoh :

- A. 1, 2, 3, 4, 5, ...
- B. 2, 4, 6, 8, 10, ...
- C. 14, 11, 8, 10, ...
- D. 2, -2, 2, -2, 2, -2
- E. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- F. 8, 4, 3, 1, -2, -5, ...
- G. 1, 5, 3, 7, 9, ...

Pada contoh diatas, bilangan-bilangan pada A,B,C,D,E mempunyai aturan tertentu sehingga disebut sebagai barisan bilangan, sedangkan F dan G tidak mempunyai aturan.

Tiap-tiap bilangan pada barisan bilangan disebut **suku (U)**

Suku pertama dilambangkan dengan U_1 atau a

Suku kedua dilambangkan dengan U_2

Suku ketiga dilambangkan dengan U_3

Suku ke- n dilambangkan dengan U_n dengan $n \in \mathbb{A}$ (bilangan asli)

B2. PENGERTIAN POLA BILANGAN

Pola bilangan suku ke-n (U_n)

Contoh 1:

Barisan bilangan : 1,3,5,7,... maka

$$U_1 = 1 = (2 \times 1) - 1$$

$$U_2 = 3 = (2 \times 2) - 1$$

$$U_3 = 5 = (2 \times 3) - 1$$

$$U_4 = 7 = (2 \times 4) - 1$$

$$U_n = (2 \times n) - 1 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{U_n = 2n - 1}$$



Contoh 2:

Barisan bilangan : 1,4,9,16..... maka

$$U_1 = 1 = (1 \times 1)$$

$$U_2 = 3 = (2 \times 2)$$

$$U_3 = 5 = (3 \times 3)$$

$$U_4 = 7 = (4 \times 4)$$

$$U_n = (n \times n) = n^2 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{U_n = n^2}$$

Contoh 3:

Tentukan tiga suku pertama suatu barisan yang rumus suku ke-n nya

$$U_n = 3n^2 - 2 !$$

Jawab :

$$U_1 = 3(1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$U_2 = 3(2)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$U_3 = 3(3)^2 - 2 = 27 - 2 = 25$$

Jadi tiga suku pertama barisan tersebut adalah **1, 10, 25**

Contoh 4:

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan

- a) 4, 6, 8, 10...
- b) 1, 9, 25, 49,...

Jawab :

a) 4, 6, 8, 10,...

$$U_1 = 4 = 2 + 2 = (2 \times 1) + 2$$

$$U_2 = 6 = 4 + 2 = (2 \times 2) + 2$$

$$U_3 = 8 = 6 + 2 = (2 \times 3) + 2$$

$$U_4 = 10 = 8 + 2 = (2 \times 4) + 2$$

$$U_n = (2 \times n) + 2 = 2n + 2$$

b) 1, 9, 25, 49,...

$$U_1 = 1 = 1^2 = [(2 \times 1) - 1]^2$$

$$U_2 = 9 = 3^2 = [(2 \times 2) - 1]^2$$

$$U_3 = 25 = 5^2 = [(2 \times 3) - 1]^2$$

$$U_4 = 49 = 7^2 = [(2 \times 4) - 1]^2$$

$$U_n = (2n - 1)^2$$

$$\boxed{U_n = 2n + 2}$$

$$\boxed{U_n = (2n-1)^2}$$

Contoh 5:

Suatu barisan bilangan dengan rumus $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- a) Tulisan empat buah suku pertamanya
- b) Berapa suku ke-5 dan ke-7?

Jawab :

$$U_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$U_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$U_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

Suku ke-5 adalah:

$$U_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

Suku ke-7 adalah:

$$U_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{128}$$

Jadi barisnya adalah $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

Contoh 6:

Hitunglah n jika:

- $U_n = 3^n + 3 = 30$
- $U_n = n^2 + 1 = 17$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{a) } U_n &= 3^n + 3 = 30 \\ &\Leftrightarrow 3^n = 30 - 3 \\ &\Leftrightarrow 3^n = 27 \\ &\Leftrightarrow 3^n = 3^3 \\ &\Leftrightarrow n = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } U_n &= n^2 + 1 = 17 \\ &\Leftrightarrow n^2 = 17 - 1 \\ &\Leftrightarrow n^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow n = \pm 4 \end{aligned}$$

Karena $n \in \mathbb{A}$ maka yang berlaku adalah $n = 4$



3. PENGERTIAN DERET

Deret adalah jumlah seluruh suku dalam barisan dan dilambangkan dengan S_n .
 Berikut adalah contoh deret.

Contoh:

Diketahui suatu deret : $1+3+5+7+\dots$

Tentukan :

- a) Jumlah dua suku pertama
- b) Jumlah lima suku pertama

Jawab:

- a) $S_2 = 1+3 = 4$
- b) $S_5 = 1+3+5+7+9 = 25$



Catatan:

1. Pengertian Barisan

Barisan bilangan adalah **urutan bilangan** dengan **aturan tertentu**.

2. Pola Bilangan

Pola bilangan adalah **aturan** yang dimiliki oleh sebuah **deretan bilangan**.

3. Pengertian Deret

Deret adalah **Jumlah seluruh suku** dalam barisan dan dilambangkan S_n .

DERET
 S_n

C. Exercise

Pilihlah jawaban yang paling benar!

1. Jika rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 5 - 2n^2$, maka selisih suku ketiga dengan suku kelima adalah...

A. 32 B. -32 C. 28 D. -28 E. 25

2. Rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 4 + 2n - an^2$, Jika suku ke 4 adalah -36 maka nilai a adalah...

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3 E. 4

3. Jika rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = \frac{n^2 - 1}{n + 3}$, maka 3 merupakan suku ke....

A. 8 B. 6 C. 5 D. 4 E. 3

4. Suatu barisan 1, 4, 7, 10, ... memenuhi pola $U_n = an + b$. Suku ke 10 dari barisan itu adalah...

A. 22 B. 28 C. 30 D. 31 E. 33

5. Suatu barisan 2, 5, 10, 17, ... memenuhi pola $U_n = an^2 + bn + c$. Suku ke-9 dari barisan itu adalah...

A. 73 B. 78 C. 80 D. 82 E. 94

6. Barisan 2, 9, 18, 29, ... memenuhi pola $U_n = an^2 + bn + c$. Suku ke berapakah 42?

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

7. Suku ke 20 dari barisan 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, ... adalah...

A. 1 B. 9 C. 10 D. 11 E. 18

8. Suku pertama suatu barisan adalah 4, sedangkan suku umum ke-n (untuk $n > 1$) ditentukan dengan rumus $U_n = 3.U_{n-1} - 5$. Suku ke-3 adalah

A. 16 B. 14 C. 13 D. 12 E. 10

9. Rumus umum suku ke-n dari barisan 6, 10, 14, 18, 22, ... adalah $U_n = an + b$. Rumus suku ke-n barisan tersebut adalah ...

A. $U_n = 4n - 2$ B. $U_n = 3n + 3$ C. $U_n = 5n + 1$ D. $U_n = 3n - 2$ E. $U_n = 4n + 2$

10. Pola bilangan untuk barisan 44, 41, 38, 35, 32, ... memenuhi rumus...

A. $U_n = 44 - n$ B. $U_n = 46 - 2n$ C. $U_n = 48 - 4n$ D. $U_n = 3n + 41$ E. $U_n = 47 - 3n$

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

$$\text{Rumus Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Skor}}{\text{Jumlah Skor Total}} \times 100\%$$

Kriteria.

- | | |
|------------|---------------|
| 90% - 100% | = Baik Sekali |
| 80% - 89% | = Baik |
| 70% - 79% | = Cukup |
| < 70% | = Kurang |

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.



D. Barisan Aritmatika dan Deret Aritmatika

1. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan sama atau tetap. **Contoh:**

- a) 3, 8, 13, 18, ... (selisih/beda = $8 - 3 = 13 - 8 = 18 - 13 = 5$)
- b) 10, 7, 4, 1, ... (selisih/beda = $7 - 10 = 4 - 7 = 1 - 4 = -3$)
- c) 2, 4, 6, 8, ... (selisih/beda = $4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 2$)
- d) 25, 15, 5, -5, ... (selisih/beda = $15 - 25 = 5 - 15 = -5 - 5 = -10$)

Selisih dua suku yang berurutan disebut **beda (b)**

Rumus: $b = U_2 - U_1$
 $b = U_3 - U_2$ → $b = U_n - U_{n-1}$
 $b = U_4 - U_3$
dst



Jika suku pertama = a dan beda = b, maka secara umum barisan Aritmatika tersebut adalah:

U_1	U_2	U_3	U_4	U_n
a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b$	$a + (n-1)b$

Jadi rumus suku ke-n barisan aritmatika adalah

$U_n = a + (n-1)b$

U_n = Suku ke-n
a = Suku pertama
b = Beda atau selisih

Contoh 1:

Diketahui barisan aritmatika : 2, 6, 10, Tentukan suku ke-14

Jawab :

$$a = 2$$

$$b = 6 - 2 = 4$$

$$n = 14$$

$$U_n = a + (n-1)b$$

Subsitusi nilai n, a, dan b

$$\begin{aligned} U_{14} &= 2 + (14 - 1).4 \\ &= 2 + 13 \cdot 4 \\ &= 2 + 52 \\ &= 54 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Diketahui suatu barisan aritmatika dengan $U_2 = 7$ dan $U_6 = 19$, tentukan:

- a) Beda
- b) Suku pertama
- c) Suku ke-41

Pembahasan:

a) Beda

$$\begin{aligned} U_6 &= a + 5b = 19 \\ U_2 &= a + 1b = 7 \\ \hline 4b &= 12 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

b) Suku pertama

$$\begin{aligned} U_2 &= a + 1b = 7 \\ a + 1(3) &= 7 \\ a + 3 &= 7 \\ a &= 7 - 3 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

c) Suku ke-41

$$\begin{aligned} U_{41} &= a + 40b \\ &\Leftrightarrow = 4 + 40(3) \\ &\Leftrightarrow = 4 + 120 \\ &\Leftrightarrow = 124 \end{aligned}$$

Eliminasi U_6 dan U_2

Subtitusi nilai b ke U_2

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari U_{41}

Contoh 3:

Diketahui barisan aritmatika 4, 7, 10, ... Tentukan

- a) Beda
- b) U_{10}
- c) Rumus suku ke-n

Pembahasan:

a) Beda (b)

$$\begin{aligned} b &= U_2 - U_1 \\ b &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

b) U_{10}

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ U_{10} &= 4 + (10-1)3 \\ &\Leftrightarrow = 4 + 9 \cdot 3 \\ &\Leftrightarrow = 4 + 27 \\ &\Leftrightarrow = 31 \end{aligned}$$

c) Rumus suku ke-n

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ U_n &= 4 + (n-1)3 \\ U_n &= 4 + 3n - 3 \\ U_n &= 3n + 1 \end{aligned}$$

Subsitusi nilai a, b dan n untuk mencari U_{10}

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari rumus U_n

Contoh 4:

Diketahui suatu barisan aritmatika dengan $U_{10} = 30$ dan $U_8 = 24$, tentukan:

- a) Beda & suku pertama b) U_{12} c) Enam suku pertama

Pembahasan:

$$\begin{aligned} a) \quad U_{10} &= a + 9b = 30 \\ U_8 &= a + 7b = 24 \\ 2b &= 6 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_8 &= a + 7b = 24 \\ \Leftrightarrow a + 7(3) &= 24 \\ \Leftrightarrow a + 21 &= 24 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

Jadi didapat
beda = 3 dan
suku pertama = 3

Eliminasi U_{10} dan U_8

$$\begin{aligned} b) \quad U_n &= a + (n - 1)b \\ U_{12} &= 3 + (12 - 1)3 \\ U_{12} &= 3 + 11 \cdot 3 \\ U_{12} &= 36 \end{aligned}$$

Subtitusi nilai U_8 untuk mencari nilai a

- c) Enam suku yang pertama adalah 3, 6, 9, 12, 15, 18

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari U_{12}

Contoh 5:

Pada tahun pertama sebuah butik memproduksi 400 jas, setiap tahun produksinya bertambah 25 stel jas. Berapakah banyaknya jas yang diproduksi pada tahun ke-5?

Pembahasan:

Banyaknya produksi tahun I, II, III, dan seterusnya membentuk barisan aritmatika yaitu 400, 425, 450, ... sehingga:

$$\begin{aligned} U_5 &= a + (5 - 1)b \\ &= 400 + 4 \cdot 25 \\ &= 400 + 100 \\ &= 500 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya produksi pada tahun ke-5 adalah **500 jas**.

2. Deret Aritmatika

Deret aritmatika adalah jumlah dari seluruh suku pada barisan aritmatika.

Jika barisan aritmatika adalah $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ maka deret aritmatika berbentuk $U_1+U_2+U_3+\dots+U_n$ dan dilambangkan dengan S_n

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n \dots \text{ (1)}$$

$$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a+2b) + (a+b) + a \dots \text{ (2)}$$

+

$$2 S_n = \underbrace{(a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n)}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}}$$

$$2 S_n = n (a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + U_n)$$



Karena $U_n = a + (n - 1)b$ maka jika disubstitusikan ke rumus menjadi

$$S_n = \frac{1}{2} n [a + a + (n - 1)b]$$

Keterangan:

S_n = Jumlah n suku pertama deret aritmatika

U_n = Suku ke-n deret aritmatika

a = Suku pertama

b = beda

n = Banyaknya suku

$$S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b]$$



Untuk menentukan suku ke-n selain menggunakan rumus $U_n = a + (n - 1)b$ dapat juga digunakan rumus yang lain yaitu :

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$



Contoh 1:

Tentukan jumlah 20 suku pertama deret $3 + 7 + 11 + \dots$!

Pembahasan:

Menentukan beda dengan mengurangi suku setelah dengan suku sebelumnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} b &= U_n - U_{n-1} \\ b &= U_2 - U_1 \\ b &= 7 - 3 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

**Selanjutnya subsitusi
b = 4 serta a = 3
untuk menentukan S_{20}**

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b] \\ S_{20} &= \frac{1}{2} \cdot 20 [2 \cdot 3 + (20 - 1)4] \\ S_{20} &= 10 (6 + 19 \cdot 4) \\ S_{20} &= 10 (6 + 76) \\ S_{20} &= 10 (82) \\ S_{20} &= 820 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah 20 suku pertama adalah **820**

Contoh 2:

Suatu barisan aritmatika dengan suku ke-4 adalah -12 dan suku ke-12 adalah -28. tentukan jumlah 15 suku pertama!

Pembahasan:

$$\begin{array}{rcl} U_{12} &= a + 11b &= -28 \\ U_4 &= a + 3b &= -12 \\ \hline 8b &= -16 \\ b &= -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} U_4 &= a + 3b &= -12 \\ a + (-3) &= -12 \\ a + (-6) &= -12 \\ a &= -12 + 6 \\ a &= -6 \end{array}$$

**Eliminasi U_{12} dan U_4
untuk menentukan b**

**Subsitusi nilai b ke U_4
untuk menentukan nilai a**

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b] \\ S_{15} &= \frac{1}{2} \cdot 15 [2 \cdot -6 + (15 - 1)(-2)] \\ S_{15} &= \frac{1}{2} \cdot 15 [-12 + 14(-2)] \\ S_{15} &= \frac{1}{2} \cdot 15 (-12 - 28) \\ S_{15} &= \frac{1}{2} \cdot 15 (-40) \\ S_{15} &= -300 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah 15 suku pertama adalah **-300**

Contoh 3:

Suatu deret aritmatika dengan $S_{12} = 150$ dan $S_{11} = 100$, tentukan U_{12} !

Pembahasan:

Untuk menentukan U_n kita bisa gunakan

rumus berikut : $U_n = S_n - S_{n-1}$

$$\begin{aligned} U_{12} &= S_{12} - S_{11} \\ &= 150 - 100 \\ &= 50 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari U_{12} adalah 50

Contoh 4:

Suatu barisan aritmatika dirumuskan $U_n = 6n - 2$ tentukan rumus S_n !

Pembahasan:

Diketahui $U_n = 6n - 2$, untuk mencari U_1, U_2, U_3, \dots kita dapat mensubsitusi nilai $n = 1, 2, 3, \dots$ sebagai berikut.

$$a = U_1 = 6(1) - 2 = 4$$

$$U_2 = 6(2) - 2 = 10$$

$$b = U_2 - U_1 = 10 - 4 = 6$$

Subtitusi nilai $a = 4$ dan $b = 6$ untuk mencari rumus S_n

$$S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2} n [2 \cdot 4 + (n - 1)6]$$

$$S_n = \frac{1}{2} n [8 + 6n - 6]$$

$$S_n = \frac{1}{2} n (6n + 2)$$

$$S_n = 3n^2 + n$$

Jadi, rumus S_n adalah $S_n = 3n^2 + n$

Contoh 5:

Tentukan jumlah semua bilangan ganjil antara 10 dan 200 !

Pembahasan:

Jumlah bilangan ganjil antara 10 sampai dengan 200 dapat dituliskan dalam deret sebagai berikut : $11 + 13 + 15 + 17 + \dots + 199$

Deret diatas membentuk deret aritmatika dengan

$a = 11, b = 2$ dan $U_n = 199$. Langkah selanjutnya menentukan n:

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1)b = 199 \\ \Leftrightarrow 11 + (n - 1)2 &= 199 \\ \Leftrightarrow 11 + 2n - 2 &= 199 \\ \Leftrightarrow 9 + 2n &= 199 \\ \Leftrightarrow 2n &= 190 \\ n &= 95 \end{aligned}$$

Subtitusikan nilai $a = 11$, $b = 2$ dan $U_n = 199$ ke rumus U_n

Subtitusi nilai $n = 95$ untuk mencari S_n diperoleh:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n(a + U_n) \\ S_{95} &= \frac{1}{2} \cdot 95(11 + 199) \\ S_{95} &= \frac{1}{2} \cdot 95(210) \\ S_{95} &= 9,975 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah semua bilangan ganjil antara 10 dan 200 adalah **9.975**

Rangkuman

1. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan sama atau tetap. Selisih dua suku yang berurutan disebut **beda (b)**

$$b = U_n - U_{n-1}$$



Rumus suku ke- n barisan aritmatika adalah

$$U_n = a + (n-1)b$$



Keterangan: U_n = suku ke- n

a = suku pertama

b = beda atau selisih

2. Deret Aritmatika

Deret aritmatika adalah jumlah dari seluruh suku pada barisan aritmatika.

Jika barisan aritmatika adalah $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ maka deret aritmatika berbentuk $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ dan dilambangkan dengan S_n

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + U_n)$$



atau

$$S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n-1)b]$$



Keterangan : S_n = jumlah n suku pertama deret aritmatika

U_n = suku ke- n deret aritmatika

a = suku pertama

b = beda

n = banyaknya suku

Untuk menentukan suku ke- n dapat juga digunakan rumus yang lain yaitu :

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$



E. Exercise

1. Dari barisan 3, 5, 7, 9, 11, ... suku ke-21 adalah...
 - a. 40
 - b. 43
 - c. 46
 - d. 49
 - e. 5
2. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke-4 adalah 6 dan bedanya 3. Suku ke-8 adalah
 - a. 18
 - b. 31
 - c. 34
 - d. 37
 - e. 40
3. Suku ke-4 dan ke-9 suatu barisan aritmatika berturut-turut adalah 110 dan 150. Suku ke-30 barisan aritmatika tersebut adalah
 - a. 308
 - b. 318
 - c. 326
 - d. 344
 - e. 354
4. Suku ke-6 dan ke-12 suatu barisan aritmatika berturut-turut adalah 35 dan 65. Suku ke-52 barisan aritmatika tersebut adalah
 - a. 245
 - b. 255
 - c. 265
 - d. 285
 - e. 355

- 5 Rumus umum suku ke-n dari barisan 4, 9, 14, 19, 24, adalah
- $5n + 2$
 - $5n - 1$
 - $5n + 1$
 - $5n - 2$
 - $5n + 3$
- 6 Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 15 adalah 30 dan bedanya -5. Suku ke-6 adalah
- 65
 - 25
 - 75
 - 80
 - 90
- 7 Seorang penjual daging pada bulan Januari menjual 120 kg, bulan Februari 130 kg, Maret dan seterusnya selama 10 bulan selalu bertambah 10kg dari bulan sebelumnya. Jumlah daging yang terjual selama 10 bulan adalah
- 1.050 kg
 - 1.200 kg
 - 1.350 kg
 - 1.650 kg
 - 1.750 kg
- 8 Suatu perusahaan pakaian dapat menghasilkan 4.000 buah pada awal produksi. Pada bulan berikutnya produksi dapat ditingkatkan menjadi 4.050. Bila kemajuan tetap, maka jumlah produksi dalam 1 tahun ada
- 45.500 buah
 - 48.000 buah
 - 50.500 buah
 - 51.300 buah
 - 55.500 buah

9. Hasil dari $5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 41$ adalah
- 379
 - 437
 - 471
 - 407
 - 207
10. Jika $4 + 6 + 8 + 10 + \dots + x = 130$, maka nilai x adalah
- 10
 - 15
 - 18
 - 22
 - 32
11. Diketahui barisan aritmatika dengan U_n adalah suku ke-n. Jika $U_2 + U_{15} + U_{40} = 165$, maka $U_{19} =$
- 10
 - 19
 - 28,5
 - 55
 - 82,5
12. Suku ke empat dari suatu barisan aritmatika adalah 20 dan jumlah 5 suku pertamanya sama dengan 80. Jumlah sebelas suku pertamanya adalah
- 196
 - 210
 - 264
 - 308
 - 332
13. Dari suatu rumus aritmatika diketahui jumlah n suku pertamanya ditentukan dengan rumus : $S_n = \frac{n}{2} (3n + 5)$. suku ke-6 adalah
- 19
 - 33
 - 36
 - 39
 - 42
14. Jumlah bilangan bulat antara 10 dan 60 yang habis dibagi 3 adalah
- A. 552 B. 486 C. 462 D. 312 E. 396

F. Barisan Geometri dan Deret Geometri

F1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan yang hasil bagi dua suku yang berurutan selalu tetap (sama). Hasil bagi dua suku yang berurutan disebut rasio (r)

Contoh :

- a) 3, 6, 12, ... $\left(r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2\right)$
- c) 1, 3, 9, ... $\left(r = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3\right)$
- b) 1000, 100, 10, ... $\left(r = \frac{100}{1000} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}\right)$
- d) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... $\left(r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\right)$

Jika suku pertama dari barisan geometri $U_1 = a$ dan rasio = r , maka barisan geometri tersebut adalah...

$$\begin{array}{ccccccc} U_1 & & U_2 & & U_3 & & U_4 \\ a & & a.r & & a.r^2 & & a.r^3 \\ & & & & & \dots & \dots \\ a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1} & & \text{dan } r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_n}{U_{n-1}} & & & & a.r^{n-1} \end{array}$$

Rumus suku ke- n barisan geometri adalah ...

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \dots$$

r = rasio



$$U_n = a.r^{n-1}$$

U_n = suku ke- n



Contoh 1:

Diketahui barisan geometri 3, 6, 12, ... Tentukan suku ke-10 !

Pembahasan:

Barisan geometri : 3, 6, 12, ...

$$a = 3, \quad r = \frac{6}{3} = 2, \quad \text{dan} \quad n = 10$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } U_n &= a.r^{n-1} \\ U_{10} &= 3 \cdot (2)^{10-1} \\ U_{10} &= 3 \cdot (2)^9 \\ U_{10} &= 3.512 \\ \mathbf{U_{10}} &= \mathbf{1536} \end{aligned}$$

Contoh 2:

Suatu barisan geometri diketahui $U_3 = 144$ dan $U_7 = 9$. Tentukan U_6 !

Pembahasan:

Untuk bisa menentukan U_6 maka harus tahu nilai a dan r

Nilai r bisa didapatkan dari:

$$\begin{aligned} \frac{U_7}{U_3} &= \frac{ar^6}{ar^2} = \frac{9}{144} \\ \Leftrightarrow r^4 &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow r^4 &= (\frac{1}{2})^4 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nilai a bisa didapatkan dari:

$$\begin{aligned} U_3 &= 144 \\ ar^2 &= 144 \\ a(\frac{1}{2})^2 &= 144 \\ a(\frac{1}{4}) &= 144 \\ a &= 144 \cdot 4 \\ a &= 576 \end{aligned}$$

sehingga $U_6 = ar^5$

$$\begin{aligned} U_6 &= 576 \cdot (\frac{1}{2})^5 \\ U_6 &= 576 \cdot (\frac{1}{32}) \\ U_6 &= 576 / 32 \\ U_6 &= 8 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $U_6 = 8$

F2. Deret Geometri

Deret geometri adalah jumlah dari semua suku pada barisan geometri.

Jika barisan geometri $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ maka deret geometri berbentuk $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ dan dilambangkan dengan S_n

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \\ S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \dots \\ rS_n &= ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \dots \end{aligned}$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$ maka:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$



atau

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$



untuk $r < 1$

Keterangan:

S_n = jumlah n suku pertama

a = suku pertama

r = rasio/pembanding

n = banyaknya suku

Contoh 1:

Tentukan jumlah 10 suku pertama deret $3 + 6 + 12 + \dots$

Pembahasan:

$$a = 3$$

Untuk $r > 1$

$$r = \frac{6}{3} = 2$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

**Subtitusi nilai a dan r
ke rumus S_n
untuk mencari S_{10}**

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{3(1024 - 1)}{1} \\ &= 3 \cdot (1023) \end{aligned}$$

Contoh 2:

Suatu deret geometri $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$ tentukan

- r dan U_8
- Jumlah 8 suku yang pertama (S_8)

Pembahasan:

$$a) r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{3}{1} = 3$$

**Subtitusi nilai a
dan r ke rumus U_n
untuk mencari U_8**

$$\begin{aligned} U_8 &= ar^{n-1} \\ &= 1 \cdot 3^{8-1} \\ &= 3^7 \\ &= 2187 \end{aligned}$$

$$b) S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

**Subtitusi nilai a dan r
ke rumus S_n
untuk mencari S_8**

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1(3^8 - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{6561 - 1}{2} \\ &= 3280 \end{aligned}$$

Contoh 3:

Produksi sebuah pabrik roti pada bulan pertama adalah 500 buah, jika produksi pada bulan-bulan berikutnya menurun $\frac{1}{5}$ dari produksi bulan sebelumnya, tentukan:

- a) Jumlah produksi pada **bulan ke-5**
- b) Jumlah produksi selama **5 bulan pertama**



Pembahasan:

Pada bulan pertama = 500

Pada bulan kedua = $500 - (\frac{1}{5} \times 500) = 500 - 100 = 400$

Pada bulan ketiga = $400 - (\frac{1}{5} \times 400) = 400 - 80 = 320$ dan seterusnya sehingga membentuk barisan geometri 500, 400, 320, dengan:

$$a = 500$$

$$r = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$

a) Jumlah produksi pada bulan ke-5 = U_5

$$\begin{aligned} U_5 &= 500 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-1} \\ &= 500 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \\ &= 500 \left(\frac{256}{625}\right) \\ &= 204,8 \approx 205 \end{aligned}$$

Jadi jumlah produksi pada bulan ke-5 adalah **205 roti**.

b) Jumlah produksi selama 5 bulan pertama adalah S_5

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{500(1-(\frac{4}{5})^5)}{1-\frac{4}{5}} \\ &= \frac{500(1-(\frac{1024}{3125}))}{\frac{1}{5}} \\ &= 500 \left(\frac{2101}{3125}\right) \cdot 5 \\ &= \frac{5252500}{3125} \\ &= 1680,8 \approx 1681 \end{aligned}$$

Jadi jumlah produksi selama 5 bulan pertama adalah **1681 roti**.

Rangkuman

1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan dimana hasil bagi dua suku yang berurutan selalu tetap (sama).

Hasil bagi dua suku yang berurutan disebut rasio (r)

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \dots$$



r = rasio

Rumus suku ke-n barisan geometri adalah

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$



U_n = suku ke-n



2. Deret Geometri

Deret geometri adalah jumlah dari semua suku-suku pada barisan geometri dan dilambangkan dengan S^n

$$S_n = \frac{a (1 - r^n)}{1 - r}$$



atau

$$S_n = \frac{a (r^n - 1)}{r - 1}$$



untuk $r > 1$

untuk $r < 1$



G. Exercise

Untuk mengukur kemampuan kalian, kerjakan latihan berikut!

1. Rasio dari barisan $\frac{27}{16}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}, 2, \dots$ adalah

- a. $\frac{3}{4}$
- b. $\frac{4}{3}$
- c. $\frac{3}{2}$
- d. $\frac{2}{3}$
- e. $\frac{1}{3}$

2. Diketahui barisan $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \dots$ suku ke-9 adalah

- a. $81\sqrt{3}$
- b. 81
- c. 243
- d. $612\sqrt{3}$
- e. 729

3. Suatu barisan geometri diketahui suku ke-3 adalah 3 dan suku ke-6 adalah 81. Maka suku ke-8 adalah

- a. 729
- b. 612
- c. 542
- d. 712
- e. 681

4. Jumlah lima suku pertama suatu deret geometri adalah 93 dan rasio deret itu 2, hasil kali suku ke-3 dan ke-6 adalah
- a. 4609
 - b. 2304
 - c. 1152
 - d. 768
 - e. 384
5. Populasi suatu jenis serangga setiap tahun menjadi dua kali lipat. Jika populasi serangga tersebut saat ini mencapai 5000 ekor, maka 10 tahun yang akan datang populasinya sama dengan
- a. 2.557.500 ekor
 - b. 2.560.000 ekor
 - c. 5.090.000 ekor
 - d. 5.115.000 ekor
 - e. 5.120.000 ekor
6. Seutas tali dipotong menjadi 5 bagian menurut deret geometri. Jika yang terpendek 10 cm dan yang terpanjang 160 cm, panjang tali semula adalah...cm
- a. 310
 - b. 320
 - c. 630
 - d. 640
 - e. 650
7. Bakteri jenis A berkembang biak menjadi dua kali lipat setiap lima menit. Pada waktu lima belas menit pertama, banyaknya bakteri ada 400. Banyaknya bakteri pada waktu 30 menit pertama adalah...
- a. 640
 - b. 3.200
 - c. 6.400
 - d. 12.800
 - e. 32.000

8 Diketahui suku kedua dan suku keenam suatu deret geometri dengan suku positif berturut-turut adalah 6 dan 96. Jumlah lima suku pertama deret tersebut adalah...

- a. 72
- b. 93
- c. 96
- d. 151
- e. 160

9 Jumlah 5 suku pertama dari deret $3 + 6 + 12 + \dots$ adalah

- a. 62
- b. 84
- c. 93
- d. 151
- e. 160

10 Jumlah n suku pertama deret geometri dinyatakan dengan $S_n = 2^{n+1} + 2^n - 3$. Tentukan ratio deret tersebut.

- a. $\frac{1}{3}$
- b. $\frac{1}{2}$
- c. 2
- d. 3
- e. 4

H. Exercise All

Pilihlah jawaban yang benar!

1. Rumus umum suku ke- n untuk barisan aritmatika -1, 1, 3, 5, 7, ... adalah
 A. $U_n = n + 2$
 B. $U_n = 2n - 1$
 C. $U_n = 2n - 2$
 D. $U_n = 2n - 3$
 E. $U_n = 3n - 2$

2. Diketahui barisan aritmatika : 4, 1, -2, -5, ... Suku ke-10 barisan tersebut adalah
 A. 31 C. -23 E. -31
 B. 23 D. -26

3. Suku ke- n suatu barisan bilangan dirumuskan $U_n = 15$ dari barisan tersebut adalah
 A. 30 C. 0 E. -30
 B. 15 D. -15

4. Jika suku ke-4 dan suku ke-9 suatu barisan aritmatika adalah 14 dan 29, maka suku ke-100 barisan tersebut adalah
 A. $U_{100} = 306$
 B. $U_{100} = 302$
 C. $U_{100} = 300$
 D. $U_{100} = 284$
 E. $U_{100} = 268$

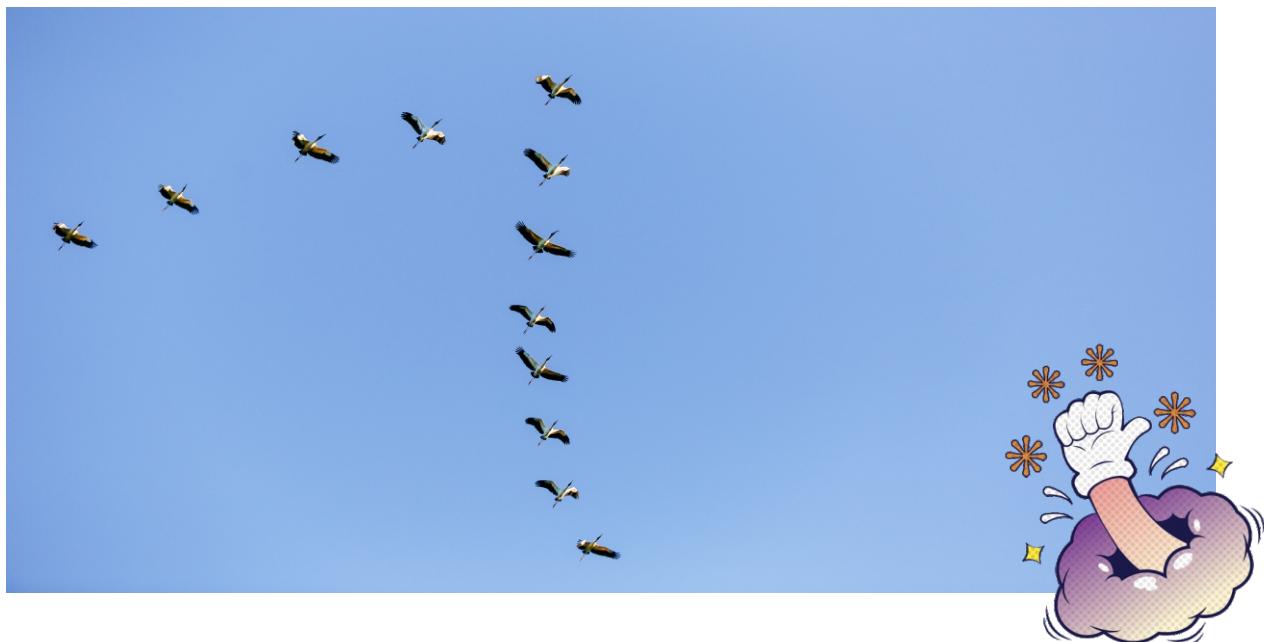
5. Jika jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika dinyatakan dengan $S_n = 2n^2 + 5n$, maka suku ke-4 deret tersebut adalah
 A. $U_4 = 46$
 B. $U_4 = 32$
 C. $U_4 = 24$
 D. $U_4 = 19$
 E. $U_4 = 15$

6. Diketahui barisan aritmatika dengan $U_5 = 17$ dan $U_{10} = 32$. Suku ke-20 adalah...
- 57
 - 67
 - 77
 - 62
 - 72
7. Jumlah 12 suku pertama suatu deret aritmatika adalah 1.230. Jika suku ke-10 deret tersebut adalah 155, maka suku ke-3 deret itu sama dengan...
- $U_3 = 50$
 - $U_3 = 65$
 - $U_3 = 70$
 - $U_3 = 80$
 - $U_3 = 90$
8. Rumus umum suku ke-n dari barisan bilangan 2, 4, 8, 16, 32,... adalah...
- 2^n
 - $2n + 2$
 - $2n^2$
 - n^2
 - $2n - 2$
9. Suku ke-24 dari barisan aritmatika 6, 9, 12, 15,... adalah...
- 65
 - 75
 - 85
 - 95
 - 105
10. Diketahui barisan geometri dengan suku pertama adalah 24 dan suku ke -3 adalah $\frac{8}{3}$. Suku ke- 5 barisan tersebut adalah...
- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| A. $\frac{8}{3}$ | C. $\frac{8}{18}$ | E. $\frac{8}{36}$ |
| B. $\frac{8}{9}$ | D. $\frac{8}{27}$ | |

11. Suku pertama dari barisan geometri adalah $\frac{5}{2}$ dan suku ke-4 adalah 20. Besar suku ke-6 dari barisan tersebut adalah...
- 80
 - 50
 - 25
 - 25
 - 80
12. Suku barisan geometri dengan suku pertama 16 dan U_4 adalah 20. Jumlah 6 suku pertama barisan tersebut adalah...
- 31
 - 31,5
 - 32
 - 63
 - 64
13. Jika $(2x - 5)$, $(x - 4)$, $(-3x + 10)$ merupakan tiga suku pertama barisan geometri, maka nilai x yang bulat adalah...
- 3
 - 7
 - 9
 - 10
 - 13
14. Jumlah 10 suku pertama dari deret geometri $16 - 8 + 4 - 2 + \dots$ adalah
- $\frac{231}{8}$
 - $\frac{341}{8}$
 - $\frac{341}{16}$
 - $\frac{341}{32}$
 - $\frac{361}{4}$

Challenge

1. Migrasi burung merupakan pergerakan populasi burung yang terjadi pada waktu tertentu setiap tahun, dari tempat berbiak menuju tempat mencari makan selama iklim ditempat berbiaknya itu tidak memungkinkan. Tidak kurang 60 jenis raptor setiap tahunnya bermigrasi ke Asia Tenggara, 19 diantaranya di Indonesia sebelum akhirnya kembali ke habitat berbiaknya. Ando, seorang peneliti migrasi burung mencatat pergerakan burung seperti ini:



Barisan pertama terdiri satu ekor burung, barisan kedua terdiri tiga ekor burung dan seterusnya

Jika banyak barisan dalam formasi tersebut ada 12, banyak burung pada barisan terakhir dan banyak burung seluruhnya yang ada dalam kelompok tersebut adalah...



2. Seorang anak dalam satu hari diberi uang jajan sebesar Rp 30.000,00 pada bulan pertama menyimpan uang sebesar Rp 2.000, / hari. Pada bulan kedua menyimpan uang sebesar Rp,3.000,00 / hari dan pada bulan ketiga menyimpan uang sebesar Rp. 4.000,00 / hari dan seterusnya sampai satu tahun (*dengan perhitungan tahun satu bulan = 30 hari, dan 1 tahun = 12 bulan*). Setelah satu tahun uang hasil simpanan anak tersebut akan dibelikan handphone dengan harga Rp 3.000,000,00. Uang yang tersimpan pada bulan ke 12 adalah ... rupiah



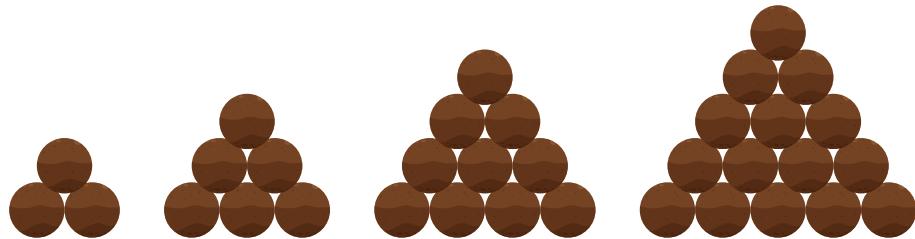
3. Ady sedang menjumlahkan nomor-nomor pada halaman buku yang terdiri dari 20 halaman. Jumlah yang ia dapatkan adalah 224. Ternyata terjadi kekeliruan yaitu ada satu halaman yang dihitung dua kali. Jika buku dimulai dari halaman 1 sampai 20, maka halaman yang dihitung dua kali adalah...

3. Ady sedang menjumlahkan nomor-nomor pada halaman buku yang terdiri dari 20 halaman. Jumlah yang ia dapatkan adalah 224. Ternyata terjadi kekeliruan yaitu ada satu halaman yang dihitung dua kali. Jika buku dimulai dari halaman 1 sampai 20, maka halaman yang dihitung dua kali adalah...



4. Dalam suatu gedung pertunjukan terdapat 9 baris kursi. pada baris pertama terdapat 8 kursi, baris kedua 12 baris, baris ketiga 11 kursi, baris keempat 15 kursi, baris kelima 14 kursi, dan seterusnya mengikuti pola yang sama. Biasanya penonton lebih memilih untuk duduk pada 3 baris terakhir. Tentukan banyak kursi seluruhnya yang dapat ditempati pada 3 baris terakhir tersebut !

5. Anita, seorang seniman muda dari Sumatera berencana membuat pameran tunggal untuk menunjukkan rancangan karyanya yang disusun dari tumpukan bola-bola tanah. Bola-bola tersebut dibuat dari campuran tanah liat. Polanya seperti gambar berikut::



Untuk memenuhi ruangan yang disediakan, Anita akan membuat 10 susunan bola. Berapakah banyak bola tanah yang harus disediakan? (Asumsi ada penambahan 10% bola tanah untuk persediaan/penggantian bola tanah yang rusak selama masa pameran di setiap susunan bola).

BAB 3 SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL (SPLTV)

Tujuan

1. Menentukan model matematika sistem persamaan linier tiga variabel dari permasalahan kontekstual (C3 dalam taksonomi bloom)
2. Menentukan himpunan penyelesaian SPL TV dengan metode gabungan (eliminasi dan substitusi) (C3 dalam taksonomi bloom)
3. Menganalisis rancangan model matematika sistem persamaan linier tiga variabel dari permasalahan kontekstual (C4 dalam taksonomi bloom)
4. Menentukan penyelesaian dari model matematika masalah kontekstual berkaitan dengan SPLTV dengan tepat (C3 dalam taksonomi bloom)

A. Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

SPLTV dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai masalah kontekstual yang berkaitan dengan pemodelan secara sistematis. Untuk jelasnya marilah kita simak ilustrasi berikut.

Seorang pedagang buah hendak memenuhi persedian buah di kiosnya. Berdasarkan penjualan sehari-hari ada tiga jenis buah yang banyak dicari oleh pembeli, yaitu buah nanas, pisang, dan mangga. Namun karena keterbatasan modal dia tidak dapat sekaligus membeli buah-buahan yang banyak diminati tersebut. Oleh karenanya pendagang tersebut hanya dapat membeli jika modal sudah terkumpul.

Hari pertama modal yang terkumpul adalah Rp.2.640.000,00 sehingga pendagang tersebut dapat membeli 3 dus nanas, 2 dus pisang, dan 5 dus buah mangga. Untuk hari kedua pedagang tersebut memperoleh modal Rp.1.510.000,00 dan dapat membeli 1 dus nanas, 3 dus pisang, serta 2 dus mangga. Sedangkan untuk hari ketiga dengan modal Rp.2.750.000,00 pedagang tersebut dapat membeli 4 dus nanas, 5 dus pisang, dan 3 dus mangga

Jika variabel x menunjukkan harga per dus nanas, variabel y menunjukkan harga per dus pisang dan variabel z menunjukkan harga per dus mangga, bagaimana persamaan matematis yang dapat kalian bentuk dari permasalahan ini? Silahkan kalian menyimak penjelasan berikut ini.



Untuk menyelesaikan masalah kontekstual di atas, variabel x , y , dan z sudah menunjukkan harga per dus buah masing-masing. Jika diuraikan, maka: x = harga per dus nanas, y = harga per dus pisang z = harga per dus mangga. Maka persamaan yang terbentuk:

$$\text{Hari pertama : } 3x + 2y + 5z = 2.640.000 \text{ persamaan (1)}$$

$$\text{Hari kedua : } x + 3y + 2z = 1.510.000 \text{ persamaan (2)}$$

$$\text{Hari ketiga : } 4x + 5y + 3z = 2.750.000 \text{ persamaan (3)}$$

Terbentuk dari permasalahan dari tiga persamaan di atas diatas. Dapat dibuat model matematika (**SPLTV**).

Kesimpulan bentuk umum dari persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut yang hanya mempunyai satu penyelesaian untuk x , y , dan z , yaitu (x, y, z) .

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$



Sedangkan bentuk umum SPLTV adalah sebagai berikut:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$



Keterangan:

Variabel adalah **x , y , dan z** .

Koefisien adalah **$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$** .

Konstanta adalah **d_1, d_2, d_3** .

Berdasarkan pemaparan diatas beberapa langkah dalam menyusun model berbentuk SPLTV adalah sebagai berikut:

1. Menyatakan atau menerjemahkan masalah ke dalam bahasa yang mudah dipahami. atau disebut **problem real**.
2. Mengidentifikasi berbagai konsep matematika dan asumsi yang digunakan dan berkaitan dengan masalah, atau disebut **problem matematika**.
3. Merumuskan model matematika atau kalimat matematika yang berkaitan dengan masalah, atau disebut **proses matematisasi**.
4. Merumuskan SPLTV yang merupakan model matematika dari masalah tersebut.

B. Exercise

Soal pilhan ganda. Pilihlah satu jawaban yang benar!

1. Yang merupakan bentuk persamaan linear tiga variabel adalah

- a. $2y + y + 8 = 16$
- b. $3x + 2y = -z$
- c. $x + y + 5y = 20$
- d. $-4z + z - 6 = 0$
- e. $x + 7x + 18 = 0$

2. Rani hendak membeli beberapa jenis buah-buahan yaitu 5 kg buah apel, 2 kg buah jeruk dan 3 kg buah anggur dengan uang sebesar Rp.125.000.00. Ubahlah kalimat tersebut dalam bentuk persamaan matematis!

- a. $5x + 2y + 3z = 125.000$
- b. $125.000 + 5x + 2y + 3z = 0$
- c. $5x + 2y = 125.000 + 3z$
- d. $5x = 125.000 + 2y + 3z$
- e. $5x + 3z = 125.000 + 2y$

3. Diketahui keliling segitiga ABC 70 cm. Panjang AC adalah 2 cm lebihnya dari panjang AB. Panjang BC adalah 6 cm kurangnya dari AC. Jika x menyatakan panjang AB, y menyatakan panjang BC, dan z menyatakan panjang AC, maka SPLTV dari hubungan panjang sisi-sisi segitiga ABC adalah...

a.
$$\begin{cases} x + y + z = 35 \\ x - z = -2 \\ y - z = -6 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - z = -2 \\ y - z = 6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y + z = 35 \\ x - z = 2 \\ y - z = 6 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - z = -2 \\ y - z = -6 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - z = 2 \\ y - z = 6 \end{cases}$$

4. Sebuah bilangan terdiri atas 3 angka. Jumlah ketiga angkanya sama dengan 16. jumlah angka pertama dan angka kedua sama dengan angka ketiga dikurangi dua. Persamaan matematika yang sesuai dengan soal adalah...

- a. $x + y + z = 16; x + y - z = -2$
- b. $x + y + z = -2; x + y - z = 16$
- c. $x + y + z = 3; x + y + z = 16$
- d. $x + y - z = -2; x + y + z = 3$
- e. $x + y + z = 3; x + y - z = -2$

5. Bu Sari mempunyai uang pecahan lima ribuan, sepuluh ribuan dan dua puluh ribuan. Jumlah uang tersebut adalah Rp 160.000,00. Uang pecahan sepuluh ribuan 6 lembar lebih banyak dari pada uang pecahan lima ribuan. Banyak lembar uang pecahan dua puluh ribuan dua kali banyak lembar uang pecahan lima ribuan. Jika x menyatakan banyak lembar lima ribuan, y menyatakan banyak lembar uang sepuluh ribuan dan z menyatakan banyak lembaran uang dua puluh ribuan, maka SPLTV yang menyatakan hubungan pecahan-pecahan uang tersebut adalah...

a.
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 16 \\ x - y = -6 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 32 \\ x - y = -6 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 32 \\ x - y = 6 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 32 \\ x - y = 6 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 16 \\ x - y = -6 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

6. Sebuah toko alat tulis menyediakan spidol aneka warna. Perbandingan antara banyak spidol biru dan spidol merah adalah $3 : 4$. Perbandingan antara banyak spidol merah dan spidol hitam adalah $4 : 5$. Jumlah ketiga jenis tersebut adalah 430 buah. Jika x, y, z berturut-turut menyatakan banyak spidol biru, merah, dan hitam maka SPLTV yang menyatakan hubungan ketiga jenis spidol adalah...

a.
$$\begin{cases} x &= \frac{3}{4}y \\ y &= \frac{4}{5}z \\ x + y + z &= 430 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x &= \frac{3}{4}y \\ y &= \frac{5}{4}z \\ x + y + z &= 430 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x &= \frac{4}{2}y \\ y &= \frac{4}{5}y \\ x + y + z &= 430 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 4x &= 3y \\ 4y &= 5z \\ x + y + z &= 430 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 3x &= 4y \\ 4y &= 5z \\ x + y + z &= 430 \end{cases}$$





7. Sebuah tempat tisu berbentuk balok terbuat dari kawat dengan panjang 48 cm. Kerangka tempat tisu tersebut memenuhi ketentuan khusus. Jika panjang kerangka ditambah tiga kali lebarnya dan dikurangi dua kali tingginya sama dengan 14 cm. Lebar balok ditambah dengan tingginya sama dengan panjang kerangka. Persamaan matematika yang sesuai adalah...

- A. $x + y + z = 48; x + 3y - 2z = 14; x = y + z$
- B. $2x + 2y + 2z = 48; x + 3y - 2z = 14; x = y + z$
- C. $x + y + z = 12; x + 2y - 3z = 14; x = y + z$
- D. $2x + 2y + 2z = 12; x + 3y - 2z = 14; x = y + z$
- E. $x + y + z = 48; x + y - z = 14; x = y + z$

8. Bentuk-bentuk berikut merupakan bentuk persamaan linear tiga variabel

- I. $3x - 2y + 6 = z$
- II. $x + y = 4y = 0$
- III. $-z + 4z + 7 = 8$
- IV. $x + 7x - 5z = y$
- V. $x + 7x + 18 = z$

- A. V dan II
- B. III dan IV
- C. II dan V
- D. I dan IV
- E. IV dan V

9. Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Ali membeli dua buku tulis, sebuah pensil dan sebuah penghapus. Ali harus membayar Rp.4.700,00. Badar membeli sebuah buku tulis, dua pensil dan sebuah penghapus. Badar harus membayar Rp.4.300,00. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Carli harus membayar Rp.7.100,00. SPLTV yang sesuai untuk soal cerita adalah...

A.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4.300 \\ x + 2y + z = 4.700 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4.700 \\ x + 2y + z = 7.100 \\ 3x + 2y + z = 4.300 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4.700 \\ 2x + y + z = 4.300 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4.300 \\ x + 2y + z = 4.700 \\ x + y + z = 7.100 \end{cases}$$

E.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4.700 \\ x + 2y + z = 4.300 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$$



10. Cerita yang sesuai dengan SPLTV berikut adalah:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 33.000 \\ 2x + y + z = 23.500 \\ x + 2y + 3z = 36.500 \end{cases}$$

- A. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah diantaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp.33.000,-. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak dan 1 kg apel harus membayar Rp.23.500,-. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak dan 3 kg apel harus membayar Rp.36.500,-. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?
- B. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah diantaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp.33.000,-. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak dan 1 kg apel harus membayar Rp.23.500,-. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak dan 2 kg apel harus membayar Rp.36.500,-. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?
- C. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah diantaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp.33.000,-. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak dan 1 kg apel harus membayar Rp.23.500,-. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak dan 3 kg apel harus membayar Rp.36.500,-. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?
- D. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah diantaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1kg jeruk, 3kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp.36.500,-. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak dan 1 kg apel harus membayar Rp.23.500,-. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak dan 3 kg apel harus membayar Rp. 33.000,-. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?
- E. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah diantaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp.23.500,-. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak dan 1 kg apel harus membayar Rp. 33.000,-. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak dan 3 kg apel harus membayar Rp.36.500,-. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?



C. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Himpunan penyelesaian dari sebuah sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa metode, antara lain:

1. Metode substitusi
2. Metode eliminasi
3. Metode gabungan (eliminasi dan substitusi)
4. Determinan (matriks)

Metode atau cara yang umum untuk menyesuaikan sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut:

1. Metode Substitusi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode substitusi, digunakan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana kemudian nyatakan salah satu variabel kedalam dua variabel lainnya. Misalkan pilih persamaan linear kedua dan kita nyatakan x ke dalam variabel y dan z

Langkah 2

substitusikan persamaan dilangkah 1 kedalam kedua persamaan yang lain sehingga terbentuk sistem persamaan linear dua variabel yang baru

Langkah 3

selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang baru untuk menentukan nilai y dan z substitusikan kedua nilai ini untuk menentukan nilai x sehingga diperoleh penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel

Contoh: Dengan ilustrasi masalah penjualan buah sebelumnya diperoleh persamaan

$$3x + 2y + 5z = 2.640.000$$

$$x + 3y + 2z = 1.510.000$$

$$4x + 5y + 3z = 2.750.000$$

Dengan menggunakan metode substitusi kita dapat menentukan nilai x, y, z.

Alternatif Penyelesaian:

$$3x + 2y + 5z = 2.640.000 \dots\dots\dots (1)$$

$$x + 3y + 2z = 1.510.000 \quad (2)$$

$$4x + 5y + 3z = 2.750.000 \dots\dots\dots (3)$$

Persamaan (2) diubah kedalam fungsi y dan z diperoleh:

$$x = 1.510.000 - 3y - 2z \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Substitusi persamaan (4) ke persamaan (1), diperoleh:

Substitusi persamaan (4) ke persamaan (3), diperboleh:

$$\begin{aligned}
 4(1.510.000 - 3y - 2z) + 5y + 3z &= 2.750.000 \\
 6.040.000 - 12y - 8z + 5y + 3z &= 2.750.000 \\
 -7y - 5z &= 3.290.000 \\
 7y + 5z &= 3.290.000 \dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

Persamaan (5) diubah ke dalam fungsi y , diperoleh

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (6), diperboleh:

Substitusi persamaan (8) ke persamaan (7), diperoleh:

$x = 150.000$ = harga Nanas

$$y = 220.000 = \text{harga Pisang}$$

$z = 350.000$ = harga Mangga

D. Exercise

Kerjakan SPLTV berikut dengan menggunakan metode substitusi

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 3 \\ 6x + 8y - 5z = 7 \\ -3x + 3y + 4y = 15 \end{cases}$$

2. Temukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut

$$\begin{cases} x + y + z = -6 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 9 \end{cases}$$

3. Nilai y yang memenuhi SPLTV $\begin{cases} r - 3y + 2z = 9 \\ 2r + 4y - 3z = -9 \\ 3r - 2y + 5z = 12 \end{cases}$
- A. -4 B. -3
C. -2 D. 1
E. 4

4. Seorang penjahit membutuhkan 2 meter kain A, 1 meter kain B dan 3 meter kain C yang beli seharga Rp 106.000 untuk membuat gorden model pertama. Sementara untuk membuat gaun dibutuhkan 2 meter kain B dan 2 meter C yang dibeli seharga Rp 64.000. Penjahit itu membeli kain tambahan untuk pesanan tambahan yaitu 3 meter kain A, 2 meter kain B seharga Rp 90.000. Berapakah harga setiap meter kain A, B, dan C?
- A. Rp.15.000,- Rp.15.000,- Rp.17.000,-
B. Rp.20.000,- Rp.17.000,- Rp.17.000,-
C. RP.20.000,- Rp.17.000,- Rp.15.000,-
D. Rp.15.000,- Rp. 20.000,- Rp.17.000,-
E. Rp.20.000,- Rp.15.000,- Rp.17.000,-

2. Metode Eliminasi

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLTV dengan metode eliminasi adalah sebagaimana berikut:

Langkah 1:

Pilih persamaan yang memuat bentuk variabel yang sederhana. Eliminasi atau hilangkan salah satu variabel (misal x) sehingga diperoleh sistem persamaan dua variabel.

Langkah 2:

Eliminasi satu variabel dalam sistem persamaan variabel (misal y) sehingga diperoleh nilai salah satu variabel. Eliminasi variabel lainnya (yaitu z) untuk memperoleh nilai variabel kedua.

Langkah 3:

Tentukan nilai variabel ketiga (yaitu x) berdasarkan nilai (y dan z) yang diperoleh.

Contoh: dari ilustrasi masalah penjual buah diperboleh SPLTV berikut

$$3x + 2y + 5z = 2.640.000$$

$$x + 3y + 2z = 1.510.000$$

$$4x + 5y - 3z = 2.750.000$$

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode eliminasi kita dapat menentukan nilai x, y, dan z.

$$3x + 2y + 5z = 2.640.000 \dots\dots\dots (1)$$

$$4x + 5y + 3z = 2.750.000 \dots\dots\dots (3)$$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (1):

$$(x + 3y + 2z = 1.510.000) \times 3 \quad 3x + 9y + 6z = 4.530.000$$

$$(3x + 2y + 5z = 2.640.000) \times 1 \quad 3x + 2y + 5z = 2.640.000$$

$$\overline{7y + z = 1.890.000} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (3):

$$(x + 3y + 2z = 1.510.000) \times 4 \quad 4x + 12y + 8z = 6.040.000$$

$$(4x + 5y + 3z = 2.750.000) \times 1 \quad 4x + 5y + 3z = 2.640.000$$

Eliminasi variabel y menggunakan persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{r}
 7y + z = 1.890.000 \\
 7y + 5z = 3.290.000 \\
 \hline
 -4z = 1.400.000 \\
 z = \frac{1.400.000}{-4} \\
 z = 350.000
 \end{array}$$

Eliminasi variabel z menggunakan persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{r}
 (7y + z = 1.890.000) \times 5 \quad 35y + 5z = 9.450.000 \\
 (7y + 5z = 3.290.000) \times 1 \quad 7y + 5z = 3.290.000 \\
 \hline
 28y = 6.160.000 \\
 y = \frac{6.160.000}{28} \\
 y = 220.000
 \end{array}$$

$$x + 3y + 2z = 1.510.000$$

$$x = 1.510.000 - 3y - 2z$$

$$x = 1.510.000 - 3(220.000) - 2(350.000)$$

$$x = 150.000$$

Dari langkah-langkah penyelesaian diatas diperoleh $x = 150.000$, $y = 220.000$ dan $z = 350.000$. Jika dikembalikan ke permasalahan diperoleh harga per dus buah nanas adalah Rp.150.000,00, harga per dus buah pisang Rp.220.000,00, dan harga per dus buah mangga adalah Rp.350.000,00. Apakah diantara kalian masih ada kesulitan memahami metode eliminasi? Jika iya kalian dapat membaca kembali dan mencoba memahami satu persatu langkah-langkah penyelesaian diatas. Bandingkan antara metode substitusi dan eliminasi, manakah diantara keduanya yang menurut kalian lebih mudah?



E. Exercise

Kerjakan dengan menggunakan **metode eliminasi!**

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$2x + 5y - 3z = 3 \dots\dots\dots(1)$$

$$6x + 8y - 5z = 7 \dots\dots\dots(2)$$

$$-3x + 3y + 4z = 15 \dots\dots\dots(3)$$

2. Temukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut!

$$x + y + 2z = 6$$

$$x + y - 2z = 3$$

$$x - 2y + z = 9$$

3. Diketahui tiga bilangan yaitu a, b, dan c. Rata-rata ketiga bilangan itu sama dengan 16.

Bilangan ke-2 ditambah 20 sama dengan jumlah bilangan lainnya.

Bilangan ke-3 sama dengan jumlah bilangan lain dikurangi empat.

Tentukan bilangan-bilangan itu!

3. Metode Campuran

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode eliminasi, menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Pilihlah variabel mana dari persamaan yang mau dihilangkan atau dieliminasi, misalkan variabel x yang akan dieliminasi. Samakan koefisien x pada persamaan pertama dan persamaan kedua, dengan cara mengalikan persamaan dengan bilangan, sehingga tetap equivalen. Kurangkan persamaan dengan persamaan kedua sehingga diperoleh persamaan linear dua variabel baru yang pertama.

Langkah 2

Samakan koefisien x pada persamaan pertama dan persamaan ke tiga, dengan cara mengalikan persamaan dengan sebuah koefisien, sehingga tetap equivalen. Kurangkan persamaan dengan persamaan ketiga sehingga diperoleh persamaan linear dua variabel baru yang ke dua.

Langkah 3

Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang baru sehingga diperoleh nilai y dan z . Substitusikan nilai y dan x ke salah satu persamaan tiga variabel untuk memperoleh nilai x .



$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_3 - 3x_4 = 13 \end{array} \right.$$

Contoh: dari ilustrasi masalah penjual buah diperoleh SPLTV berikut

Alternatif Penyelesaian:

$$3x + 2y + 5z = 2.640.000 \dots\dots\dots (1)$$

$$x + 3y + 2z = 1.510.000 \dots \dots \dots (2)$$

$$4x + 5y + 3z = 2.750.000 \dots\dots\dots (3)$$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (1):

$$\begin{array}{rcl} (x + 3y + 2z = 1.510.000) \times 3 & 3x + 9y + 6z = 4.530.000 \\ (3x + 2y + 5z = 2.640.000) \times 1 & 3x + 2y + 5z = 2.640.000 \\ & \hline 7y + z = 1.890.000 \end{array} \dots \dots \dots (4)$$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (3):

$$\begin{array}{rcl} (x + 3y + 2z = 1.510.000) \times 4 & 4x + 12y + 8z = 6.040.000 \\ (4x + 5y + 3z = 2.750.000) \times 1 & \underline{4x + 5y + 3z = 2.750.000} \\ & 7y + 5z = 3.290.000 \end{array} \dots \dots \dots (5)$$

Eliminasi variabel yang menggunakan persamaan (4) dan(5)

Sustitusikan persamaan (6) ke persamaan (4), diperoleh:

Substitusikan persamaan (6) dan (7) ke persamaan (2) maka diperoleh:

$$x + 3y + 2z = 1.510.000$$

$$x = 1.510.000 - 3y - 2z$$

$$x = 1.510.000 - 3(220.000) - 2(350.000)$$

$$x = 150.000$$

Dari langkah-langkah penyelesaian sebelumnya diperoleh $x = 150.000$, $y = 220.000$ dan $z = 350.000$. Jika dikembalikan ke permasalahan diperoleh harga per dus buah nanas adalah Rp. 150.000.00, harga per dus buah pisang Rp.220.000.00, dan harga per dus buah mangga adalah Rp.350.000.00.

Bagaimana peserta didik sekalian? Mudah bukan? Apakah di antara kalian masih ada yang kesulitan memahami metode eliminasi-substitusi? Jika iya, kalian dapat membaca kembali dan memahami satu per satu langkah-langkah penyelesaiannya. Bandingkan antara ketiga metode yang sudah kalian pelajari, manakah di antara ketiganya yang menurut kalian lebih mudah? Dalam kasus lain, dengan SPLTV yang sama, maka dapat dikatakan bahwa penyelesaian SPLTV adalah $(150.000, 220.000, \text{ dan } 350.000)$. Sedangkan himpunan penyelesaian HP = $\{(150.000, 220.000, 350.000)\}$.

F. Exercise

1. Nilai y yang memenuhi SPLTV $\begin{cases} x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3y = -9 \\ 3x - 2y + 5z = 12 \end{cases}$ adalah...
- A. -4
 - B. -3
 - C. -2
 - D. 1
 - E. 4

2. Diketahui sistem persamaan linear $\begin{cases} x + y - z = -3 \\ x + 2y + z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$. Nilai dari $x + y + z =$
- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6
E. 5

3. Tiga bersaudara Lia, Ria, dan Via berbelanja di toko buah. Mereka membeli apel, jambu, dan mangga dengan hasil masing-masing sebagai berikut: Lia membeli dua apel, satu jambu, dan satu mangga seharga Rp47.000.00. Ria membeli satu apel, dua jambu dan satu mangga seharga Rp43.000.00. Via membeli tiga apel, dua jambu dan satu mangga seharga Rp71.000.00, ibu memberikan uang sebesar Rp100.000.00 kepada Lia. Jika ibu menyuruh Lia untuk membeli 2 apel, 3 jambu, dan 1 mangga, berapakah sisa uang kembalian yang akan diberikan Lia kepada ibu?

4. Metode Determinan

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode determinan, menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Lengkapi nilai koefisien x, y dan z jika masih belum ada untuk mempermudahnya merubah bentuk

Langkah 2

Ubah bentuk persamaan linear tiga variabel dengan bentuk matriks

Langkah 3

Cari nilai determinan dari matriks tersebut

Langkah 4

Cari nilai determinan nilai x, determinan nilai y, determinan nilai z dari matriks tersebut

Langkah 5

Setelah diketahui determinan awal, determinan x, determinan y, determinan z. untuk mencari nilai x yaitu bagi determinan x terhadap determinan awal, mencari nilai y yaitu bagi determinan y terhadap determinan awal, dan untuk mencari nilai z yaitu bagi determinan nilai z terhadap determinan awal

Contoh: dari ilustrasi masalah penjual buah diperboleh SPLTV berikut

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1

$$3x + 2y + 5z = 2.640.000 \quad (1)$$

$$x + 3y + 2z = 1.510.000 \quad (2)$$

$$4x + 5y + 3z = 2.750.000 \quad (3)$$

Dengan menggunakan determinan kita dapat menentukan nilai x, y, dan z.

Langkah 2

Dari persamaan linear tiga variabel di atas kita merubah bentuknya dalam matrik.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.640.000 \\ 1.510.000 \\ 2.750.000 \end{bmatrix}$$

Langkah 3

Cari determinan awalnya

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad D = (3 \times 3 \times 3) + (2 \times 2 \times 4) + (5 \times 1 \times 5) - (4 \times 3 \times 5) - (5 \times 2 \times 3) - (3 \times 1 \times 2)$$

$$= 27 + 16 + 25 - 60 - 30 - 6$$

$$= -28$$

Langkah 4

1. Tentukan determinan X dengan nilai x diubah dengan hasilnya

$$\begin{bmatrix} 2.640.000 & 2 & 5 \\ 1.510.000 & 3 & 2 \\ 2.750.000 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2.640.000 \\ 1.510.000 \\ 2.750.000 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_x &= (2.640.000 \times 3 \times 5) + (2 \times 2 \times 2.750.000) + (5 \times 1.510.000 \times 2) - \\ &\quad (2.750.000 \times 3 \times 5) - (5 \times 2 \times 2.640.000) - (3 \times 1.510.000 \times 2) \\ &= 23.760.000 + 11.000.000 + 37.750.000 - 41.250.000 - 26.400.000 - 9.060.000 \end{aligned}$$

2. Tentukan determinan Y dengan nilai y diubah dengan hasilnya

$$\begin{bmatrix} 3 & 2.640.000 & 5 \\ 1 & 1.510.000 & 2 \\ 4 & 2.750.000 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 2.640.000 \\ 1.510.000 \\ 2.750.000 \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_y &= (3 \times 1.510.000 \times 3) + (2.640.000 \times 2 \times 4) + (5 \times 1 \times 2.750.000) - \\ &\quad (4 \times 1.510.000 \times 5) - (2.750.000 \times 2 \times 3) - (3 \times 1 \times 2.640.000) \\ &= 13.590.000 + 21.120.000 + 13.750.000 - 30.200.000 - 16.500.000 - 7.920.000 \\ &= -6.160.000 \end{aligned}$$

3. Mencari determinan Z dengan nilai z diubah dengan hasilnya

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2.640.000 \\ 1 & 3 & 1.510.000 \\ 4 & 5 & 2.750.000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_z &= (3 \times 3 \times 2.750.000) + (2 \times 1.510.000 \times 4) + (2.640.000 \times 1 \times 5) - \\ &\quad (4 \times 3 \times 2.640.000) - (5 \times 1.510.000 \times 3) - (2.750.000 \times 1 \times 2) \\ &= 24.750.000 = 12.080.000 + 13.200.000 - \\ &\quad 31.680.000 - 22.650.000 - 5.500.000 \\ &= -9.800.000 \end{aligned}$$

Langkah 5

Tentukan nilai x, y, dan z.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4.200.000}{-28} = 150.000$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6.160.000}{-28} = 220.000$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-9.800.000}{-28} = 350.000$$

G. Exercise

Kerjakan dengan menggunakan metode determinan!

1. Jika $\{(x_0, y_0, z_0)\}$ memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 5 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - y + z = -4 \end{cases}$$

maka nilai z_0 adalah...

2. Penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{cases} 3x + 7y + 2z = 8 \\ 4x + 2y - 5z = -19 \\ 6y - 4z = 14 \end{cases}$$

adalah...

3. Toko alat tulis pak Rudi menjual alat tulis berisi buku, spidol, dan tinta dalam 3 jenis paket sebagai berikut. **Paket A:** 3 buku, 1 spidol, 2 tinta seharga Rp17.200,00. **Paket B:** 2 buku, 2 spidol, 3 tinta seharga Rp19.700,00. Sedangkan **Paket C:** 1 buku, 2 spidol, 2 tinta seharga Rp14.000,00. Hitunglah harga 1 buku + 1 spidol + 1 tinta!

H. Evaluasi

Pilihlah jawaban yang benar dari pertanyaan dibawah ini.

1. Tentukan nilai x, y, dan z yang memenuhi SPLTV berikut:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{8}{y} + \frac{12}{z} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} + \frac{12}{z} = 4 \end{cases}$$

- A. (2, 4, 6)
- B. (2, 3, 6)
- C. (3, 4, 5)
- D. (3, 2, 5)
- E. (3, 4, 6)

2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 3 \\ 6x + 8y - 5z &= 3 \\ -3x + 3y + 4y &= 15 \end{aligned}$$

- A. {(1, 2, 3)}
- B. {(3, 7, 15)}
- C. {(2, 6, -3)}
- D. {(1, 3, 2)}
- E. {(15, 7, 3)}

3. Nilai x yang memenuhi SPLTV $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 5y - 2z = 2 \\ 5z = 20 \end{cases}$ adalah...

- A. -3
- B. -2
- C. -1
- D. 1
- E. 3

4. Harga 2 pisang, 2 apel, dan sebuah mangga adalah Rp1.400,-. Di toko buah yang sama harga sebuah pisang, sebuah apel dan 2 mangga adalah Rp. 1.300,-, Sedangkan harga sebuah pisang 3 apel, dan sebuah mangga adalah Rp 1.500,00. Harga sebuah pisang, sebuah apel dan sebuah mangga ditoko buah tersebut adalah....
- A. Rp700,00
 - B. Rp800,00
 - C. Rp850,00
 - D. Rp900,00
 - E. Rp1.200,00
5. Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari sapi, kuda, dan kerbau apabila dijumlahkan adalah 975 hari. Masa kehamilan kerbau lebih lama 85 hari dari masa kehamilan sapi. Dua kali masa kehamilan sapi ditambah masa kehamilan kerbau sama dengan 3 kali masa kehamilan kuda dikurangi 65. Berapa hari rata - rata masa kehamilan masing masing hewan?
- A. kerbau: 330 hari, sapi 220 hari, kuda: 365 hari
 - B. kerbau: 330 hari, sapi 365 hari, kuda: 280 hari
 - C. kerbau: 365 hari, sapi 330 hari, kuda: 280 hari
 - D. kerbau: 365 hari, sapi 330 hari, kuda: 330 hari
 - E. kerbau: 365 hari, sapi 280 hari, kuda: 330 hari



I. Challenge

1. Bu Siti mendapat tugas dari sekolah untuk menyiapkan paket hadiah untuk siswanya yang berprestasi di sekolahnya. Bu Siti ingin membeli alat-alat tulis sebagai hadiahnya.

Alat - alat tulis yang ingin dibeli berupa buku tulis, bolpoin, dan penghapus. Pada setiap pembelian alat tulis dikenakan pajak sebesar 10%. Berkaitan dengan tugas tersebut, Bu Siti melihat beberapa paket alat tulis yang di jual di Toko Rejeki dan Toko Makmur seperti pada gambar berikut:

Toko Rejeki

					
Paket Hemat Rp62.000,00	Paket Ekonomi Rp57.000,00			Paket Murah Rp17.000,00	

Toko Makmur

					
Paket Sedang Rp48.000,00	Paket Besar Rp90.000,00			Paket Lengkap Rp64.000,00	

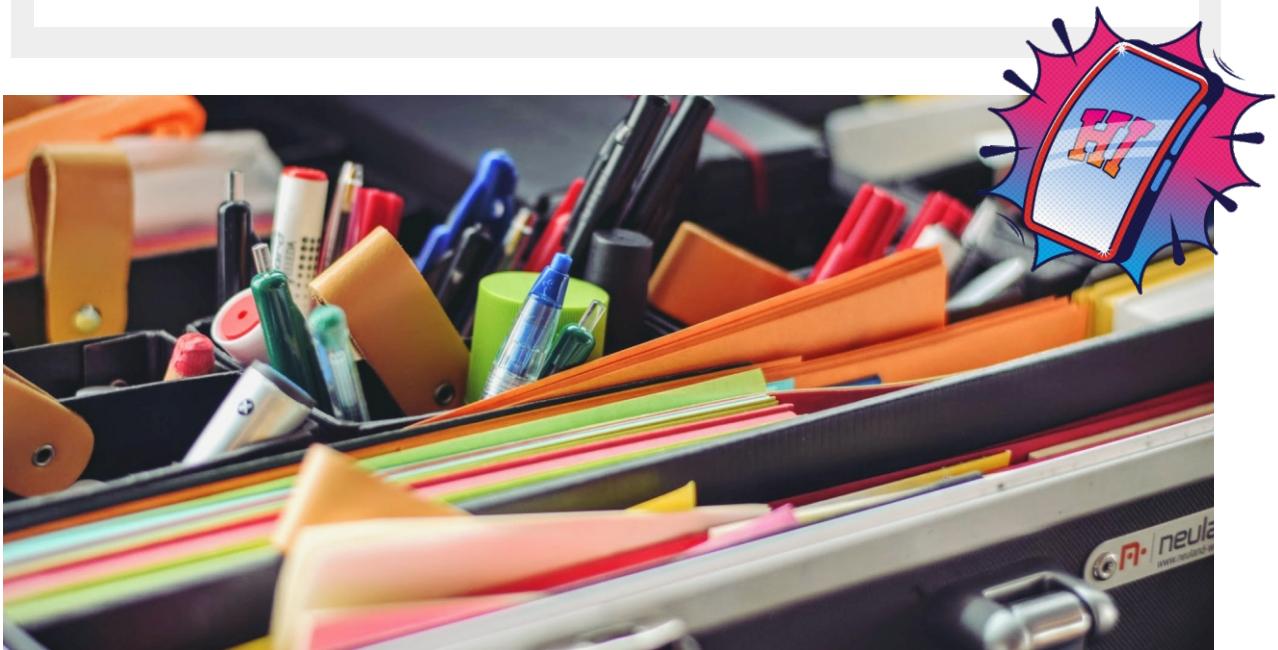
Berdasarkan harga tiap paket yang tersedia di Toko Rejeki dan Toko Makmur, tentukan masing-masing harga dari setiap alat tulis baik penghapus, buku tulis maupun bolpoin, Bu Siti menarik kesimpulan bahwa...



2. Seorang pengusaha memiliki modal sebesar Rp420.000.000,00 dan membaginya dalam tiga bentuk investasi, yaitu tabungan dengan bunga 5% deposito berjangka dengan suku bunga 7% dan surat obligasi dengan pembayaran 9%. Adapun pendapatan tahunan dari ketiga investasi sebesar Rp26.000.000,00 dan pendapat dari investasi tabungan lebih dari Rp2.000.000,00 dari total pendapat dua investasi lainnya. Tentukan modal investasi!



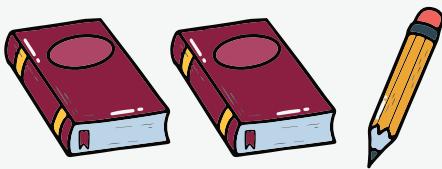
3. Tiga tukang cat bernama Joni, Deni, dan Ari biasanya berkerja secara bersama-sama. Mereka dapat mengecat eksterior sebuah rumah dalam waktu singkat, 10 jam kerja. Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam waktu 15 jam kerja. Suatu hari ke tiga tukang cat ini berkerja mengecat rumah serupa selama 4 jam kerja. Setelah itu, Ari pergi karena ada keperluan mendadak. Joni dan Doni membutuhkan waktu tambahan 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing - masing tukang cat jika setiap bekerja sendirian!



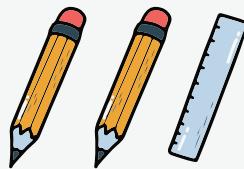
Promo Alat Tulis

Dika dan Amar pergi ke toko alat tulis untuk membeli perlengkapan sekolah. Di depan toko terdapat promo alat tulis untuk pelajar dalam bentuk paket-paket berisi dua jenis alat tulis. Berikut ini disajikan harga per paketnya;

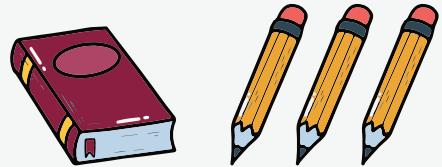
Paket 1 (2 buku + 1 pensil)
Rp11.000,-



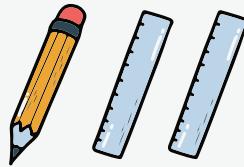
Paket 2 (2 pensil + 1 penggaris)
Rp7.000,-



Paket 3 (1 buku + 3 pensil)
Rp10.500,-



Paket 4 (1 pensil + 2 penggaris)
Rp8.000,-



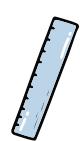
Sedangkan harga alat tulis satuan adalah sebagai berikut:



Buku tulis
Rp5.000,-



Pensil
Rp3.000,-



Penggaris
Rp4.000,-

4. Berdasarkan data harga alat tulis tersebut pernyataan berikut yang benar adalah... (*jawaban benar bisa lebih dari satu*)
- A. Amar membeli Paket 2 maka uang yang harus dibayar lebih dari murah Rp. 3.000.00 dibanding membeli alat tulis secara satuan
 - B. Jika Dika membeli Paket 3 maka uang yang harus dibayar lebih murah Rp 2.500.00 dibanding membeli alat tulis secara satuan
 - C. Amar ingin membeli buku 1 buku + 2 pensil + 2 penggaris, maka lebih murah membeli Paket 2 + 1 buku + 1 penggaris satuan dibanding membeli Paket 4 + 1 buku + 1 pensil satuan
 - D. Jika Dika ingin membeli 2 buku + 3 pensil, maka lebih murah membeli Paket 3 + 1 buku satuan dibanding membeli Paket 1 + 2 pensil satuan.
 - E. Harga Paket 4 sama dengan harga buku 1 + 1 penggaris secara satuan
5. Dika masih mempunyai uang Rp15.000.00 didompetnya. Melihat adanya promo ini, Dika ingin membelikan juga alat tulis untuk adiknya. Pembelian berikut yang cukup dengan sisa uang Dika adalah (*jawaban benar bisa lebih dari satu*)
- A. Membeli Paket 1 ditambah 1 pensil secara satuan
 - B. Membeli Paket 2 ditambah 1 buku dan penggaris secara satuan
 - C. Membeli Paket 4 ditambah 1 pensil dan penggaris secara satuan
 - D. Membeli Paket 3 ditambah 1 pensil dan penggaris secara satuan
 - E. Membeli Paket 2 ditambah 1 buku dan pensil secara satuan
6. Amar berencana membeli alat tulis untuk dijual kembali secara satuan dengan menambah keuntungan sebesar Rp500.00 per alat tulis. Jika Amar membawa uang sebesar Rp20.000.00, maka pembelian berikut yang memiliki potensi keuntungan dan uang kembalian paling besar adalah...
- A. Membeli Paket 1 + Paket 2.
 - B. Membeli Paket 1 + Paket 3.
 - C. Membeli Paket 2 + Paket 3.
 - D. Membeli Paket 3 + Paket 4.
 - E. Membeli Paket 3 + Paket 4 ditambah 1 buku secara satuan.

BAB 4 SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPtLDV)

Tujuan Pembelajaran

- Menjelaskan definisi dan bentuk umum sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat. (C2 dalam taksonomi bloom)
- Menjelaskan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat. (C2 dalam taksonomi bloom)
- Menyatakan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat. (C3 dalam taksonomi bloom)
- Menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat. (C3 dalam taksonomi bloom)

Pada modul ini peserta didik akan mempelajari konsep, penyelesaian dan penerapan sistem pertidaksamaan dua variabel (SPtDV). Sistem pertidaksamaan dua variabel pada materi kali ini terdiri atas sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat dan sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.

A. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum pertidaksamaan linear dua variabel:

$$ax + by > c \quad | \quad ax + by < c \quad | \quad ax + by \leq c \quad | \quad ac + by \geq c$$



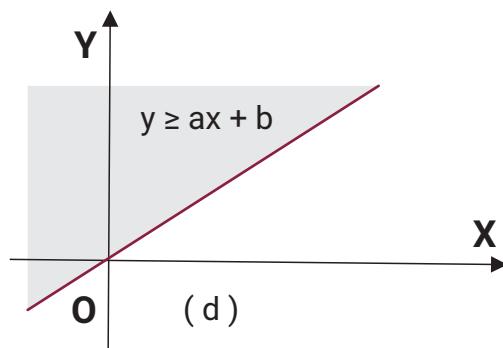
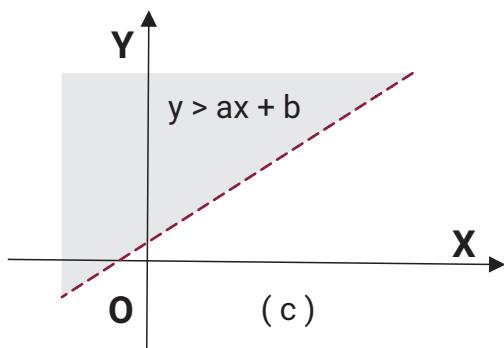
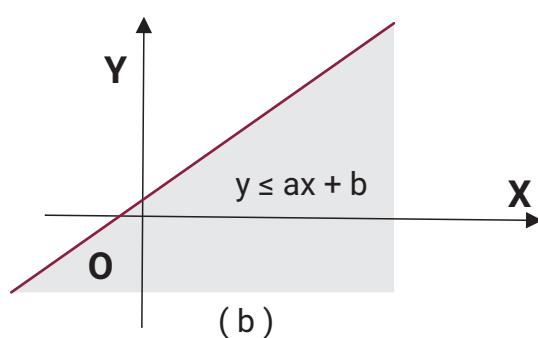
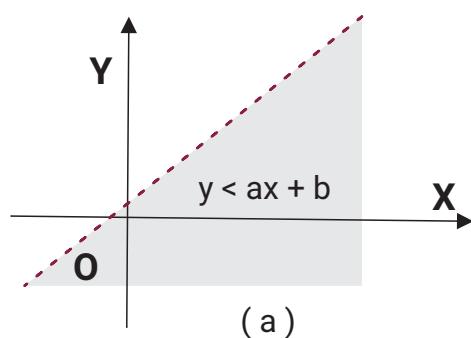
dimana $a, b = \text{koefisien}$ dan $a, b \neq 0$

Dalam pertidaksamaan linear dua variabel daerah himpunan penyelesaian merupakan sebuah gambar



Langkah-langkah menentukan daerah himpunan penyelesaian dalam SPtLDV

1. Ubah tanda pertidaksamaan menjadi sama dengan (=)
2. Tentukan titik potong sumbu y dengan misalkan nilai $x = 0$
3. Tentukan titik potong sumbu x dengan memisalkan nilai $y = 0$
4. Hubungkan titik potong sumbu x dan sumbu y dengan
garis putus-putus (jika tanda pertidaksamaan $>$ atau $<$) atau dengan
garis lurus (jika tanda pertidaksamaan \leq atau \geq)



Contoh:

Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel $x - 2y \leq -2$.

Penyelesaian

Terdapat beberapa langkah untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel $x - 2y \leq -2$, yaitu:

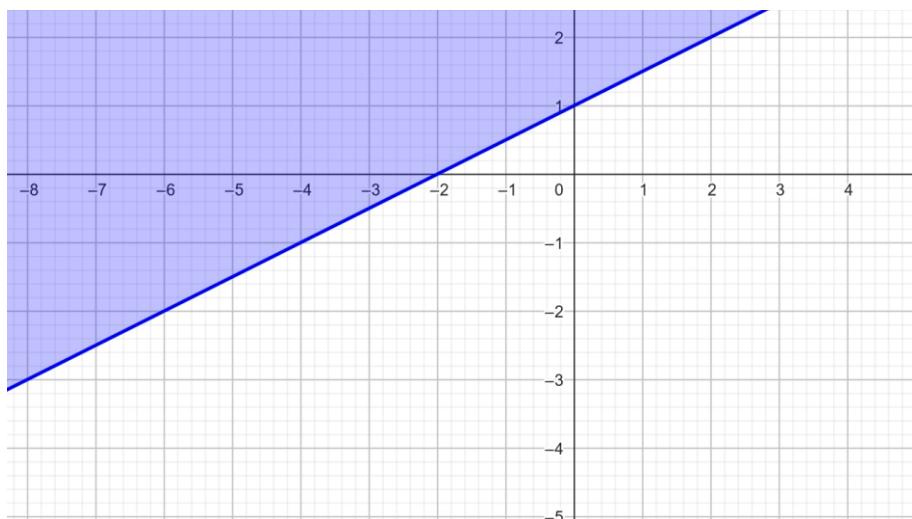
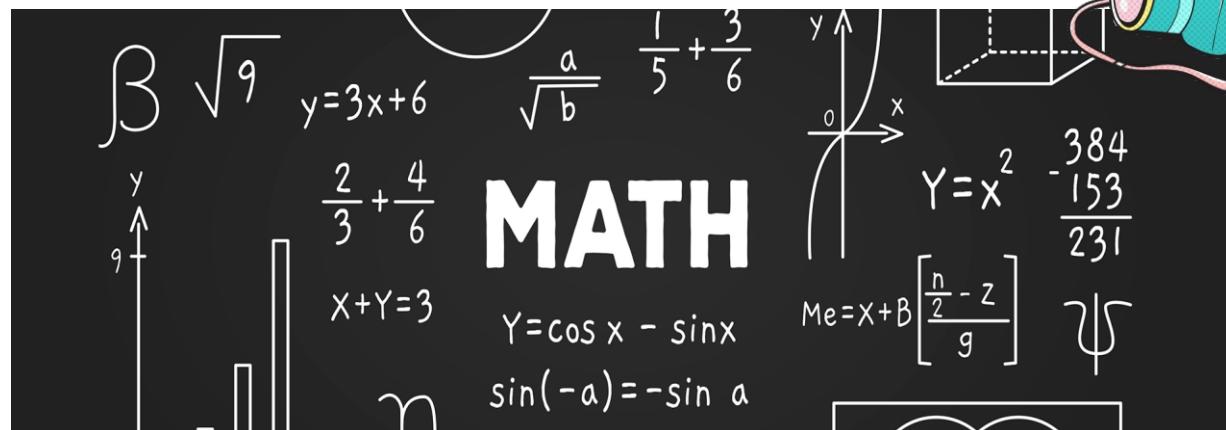
1. Terlebih dahulu menggambar garis $x - 2y = -2$.

2. Buatlah tabel nilai - nilai $x - 2y = -2$ atau $x = 2y - 2$.

x	-2	0
y	0	1
(x,y)	(-2, 0)	(0, 1)

3. Pilih sembarang titik, misal (0,0) substitusikan ke pertidaksamaan $x - 2y \leq -2$, diperoleh $0 \leq -2$ (tidak memenuhi) sehingga titik (0,0) tidak terletak didaerah penyelesaian.

4. Garisnya tidak putus-putus karena memuat tanda sama dengan (=)
5. Langkah berikutnya adalah menentukan daerah mana yang termasuk dalam daerah $x - 2y \leq -2$ dengan memberikan arsiran pada daerah tersebut.

Exercise

1. Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel ini $5x + 6y > 30$

2. Diketahui pertidaksamaan linear dua variabel adalah $-4x + 2y \leq 8$. Tentukan daerah penyelesaiannya!

3. Diketahui pertidaksamaan linear dua variabel adalah $8x + 4y > 40$. Tentukan penyelesaiannya!



B. Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan yang memuat peubah (variabel) dengan pangkat tertinggi 2. Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat:

$$1. ax^2 + bx + c < 0 \quad | \quad 2. ax^2 + bx + c > 0 \quad | \quad 3. ax^2 + bx + c \leq 0 \quad | \quad 4. ax^2 + bx + c \geq 0$$

Langkah - langkah menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan grafik atau kurva sebagai berikut.

1. Tentukan arah kurva terbuka keatas atau ke bawah dilihat dari koefisien x kuadrat
2. Sketsa, tentukan titik potong dengan sumbu x, jika
 - a. $D>0$, artinya memotong dua titik di sumbu x
 - b. $D=0$, artinya menyentuh tepat 1 titik di sumbu x
 - c. $D<0$, artinya tidak memotong sumbu x, dimana $D=b^2-4ac$
3. Tentukan titik puncak dari kurva: $x = \frac{-b}{2a}$, $y = \frac{-D}{4a}$

Contoh :

Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat variabel $y > x^2 - 4x + 5$

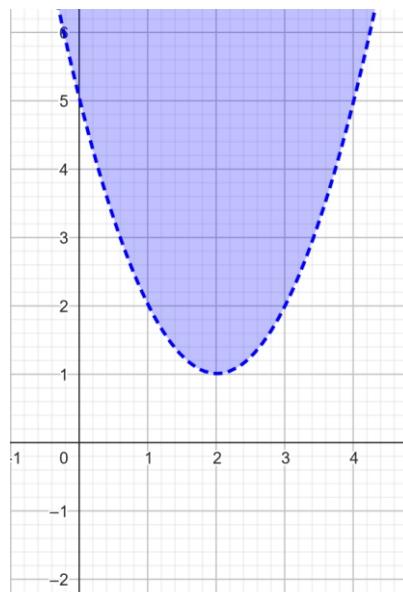
Terdapat beberapa langkah untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat dua variabel $y > x^2 - 4x + 5$, sebagai berikut.

1. Tentukan arah kurva terbuka ke atas atau ke bawah dilihat dari koefisien x^2 , karena $a > 0$ maka kurva terbuka ke atas.
2. Tentukan titik potong dengan sumbu, karena $D < 0$, maka kurva tidak memiliki titik potong dengan sumbu x.
3. Tentukan titik puncak dari kurva.

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right)$$

$$= \left(\frac{(-4)}{2a}, -\frac{(-4)}{4a} \right)$$

$$= (2, 1)$$



Exercise

1. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat $y \geq -x^2 + 3x - 2$!

2. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $y \leq -x^2 - 2x + 8$ dan gambarlah grafiknya!

C. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel dengan Linear Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan linear dua variabel dengan linear dua variabel adalah ada 2 atau lebih pertidaksamaan yang digabungkan. Untuk menyelesaiakannya, selesaikan satu persatu pertidaksamaannya setelah itu gabungkan dengan pertidaksamaan yang lain dalam satu diagram cartesius

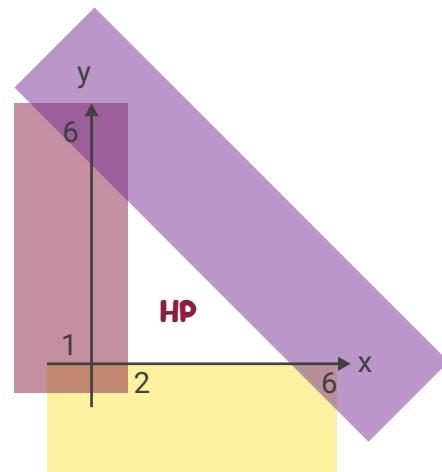
Contoh:

- Tunjukkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $x + y \leq 6 ; x \geq 2 ; y \geq 1$

Jawab:

$$x + y = 6$$

x	0	6
y	6	0
(x,y)	(0,6)	(6, 0)



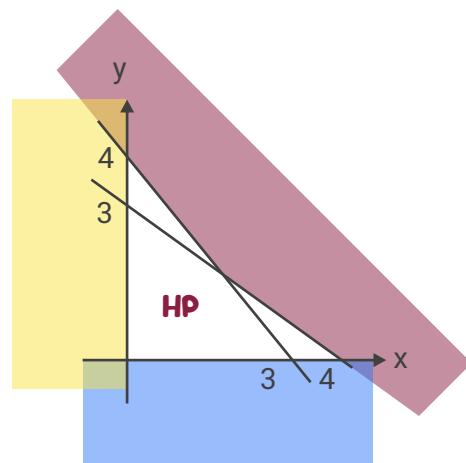
- Tunjukkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $4x + 3y \leq 12 ; 3x + 4y \leq 12 ; x \geq 0 ; y \geq 0$

Jawab:

Garis $4x + 3y = 12$ melalui titik $(3, 0)$ dan $(0, 4)$
 Garis $3x + 4y = 12$ melalui titik $(4, 0)$ dan $(0, 3)$

Exercise

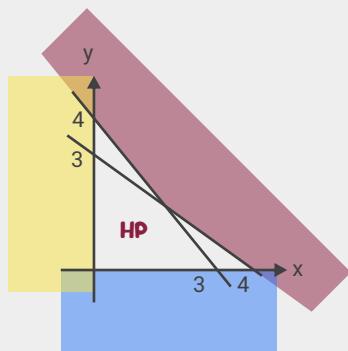
- Tentukan daerah himpunan dan gambar grafiknya dari sistem pertidaksamaan linear dan linear variabel berikut:
 - $x + y \leq 8 ; x + 2y \geq 2$
 - $2x + y \leq 4 ; y \geq 3$
 - $3x + 5y \geq 15 ; 5x + 2y \leq 10 ; x \geq 0$
 - $x + 3y \geq 6 ; 2x + y \leq 6 ; 3x - y \geq 0$



Exercise

Tentukan daerah himpunan dan gambar grafiknya dari sistem pertidaksamaan linear dan linear variabel berikut:

1. $x + y \leq 8 ; x + 2y \geq 2$
2. $2x + y \leq 4 ; y \geq 3$
3. $3x + 5y \geq 15 ; 5x + 2y \leq 10 ; x \geq 0$
4. $x + 3y \geq 6 ; 2x + y \leq 6 ; 3x - y \geq 0$



D. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel dengan Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan linear dua variabel dengan linear dua variabel ada 2, yaitu lebih pertidaksamaan yang digabungkan untuk menyelesaikan, kalian menyelesaikan satu persatu pertidaksamaannya setelah itu gabungkan dengan pertidaksamaan yang lain dalam satu diagram cartesius.

Contoh:

Temukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat)

$$\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ y \geq 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

Alternatif Penyelesaian

Dengan menerapkan langkah-langkah menentukan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dan pertidaksamaan kuadrat dua variabel diperoleh:

A. Terlebih dahulu menggambar garis $-x + y = 1$

1. Buatlah tabel nilai-nilai $-x + y = 1$

x	-1	0
y	0	1
(x,y)	(-2,0)	(1,1)

2. Pilih sembarang titik, misal (0,0), substitusikan ke pertidaksamaan $-x + y \leq 1$ diperoleh $0 < 1$ (memenuhi) sehingga titik (0,0) terletak didaerah penyelesaian

3. Garisnya tidak putus-putus karena memuat tanda sama dengan (=)

4. Langkah berikutnya adalah menentukan daerah mana yang termasuk dalam daerah $-x + y \leq 1$ dengan memberikan arsiran pada daerah tersebut.

B. Menggambar grafik $y = x^2 - 4x + 1$

1. Menentukan titik potong dengan sumbu x, $y = 0$ untuk $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh (0,26:0) dan (3,72;0)

2. Menentukan titik potong dengan sumbu y, $x = 0$ untuk $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh (0,1).

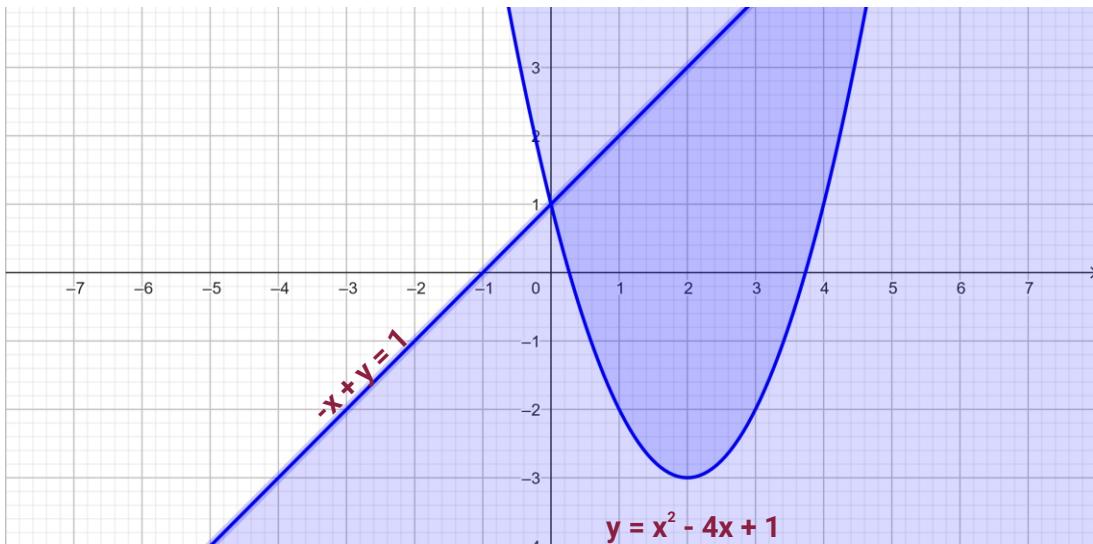
3. Tentukan titik kurva $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right)$$

$$= \left(\frac{(-4)}{2}, -\frac{12}{4} \right)$$

$$= (2, -3)$$

4. Karena $a > 0$ maka kurva terbuka ke atas, sehingga daerah asiran untuk $y = x^2 - 4x + 1$ ada didalam parabola
5. Irisan daerah penyelesaian dari $-x + y \leq 1$ dan $y \geq x^2 - 4x + 1$ diperlihatkan oleh gambar yang diarsir



Exercise

Tentukan daerah himpunan dan gambar grafiknya dari sistem pertidaksamaan linear dan kuadrat dua variabel berikut:

1. $x - 3y > -3$; $y \geq x^2$
2. $2x + 3y \geq 6$; $y > -x^2 + 4$

E. Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel dengan Kuadrat Dua Variabel

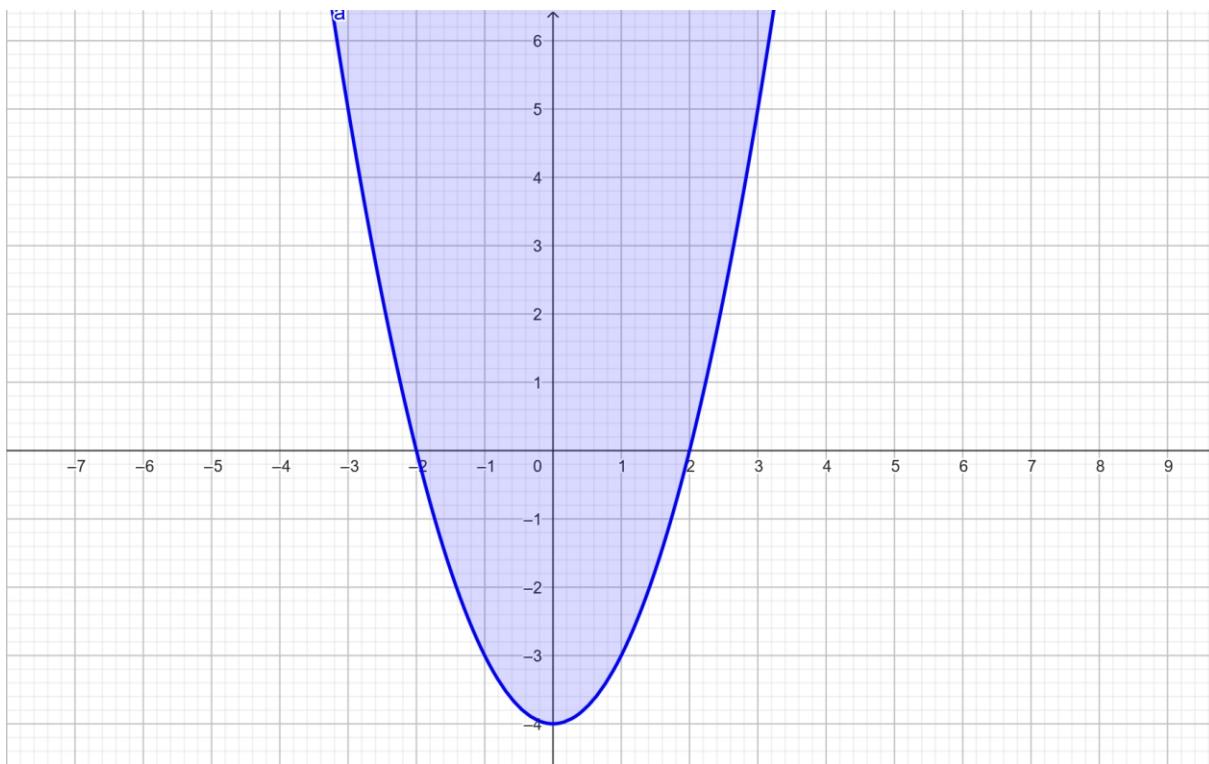
Sistem pertidaksamaan linear dua variabel dengan linear dua variabel ialah ada 2 atau lebih pertidaksamaan yang digabungkan untuk menyelesaikan. Kita menyelesaikan satu persatu pertidaksamaannya setelah itu menggabungkan dengan pertidaksamaan yang lain dalam satu diagram cartesius.

Contoh:

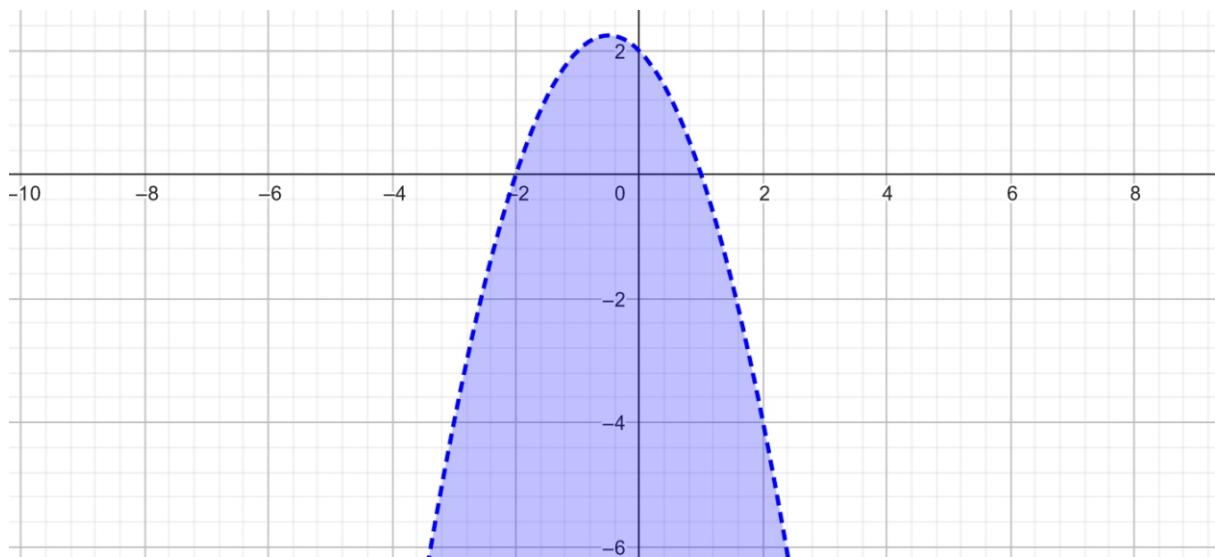
Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4$ dan $y < -x^2 - x + 2$!

Penyelesaian

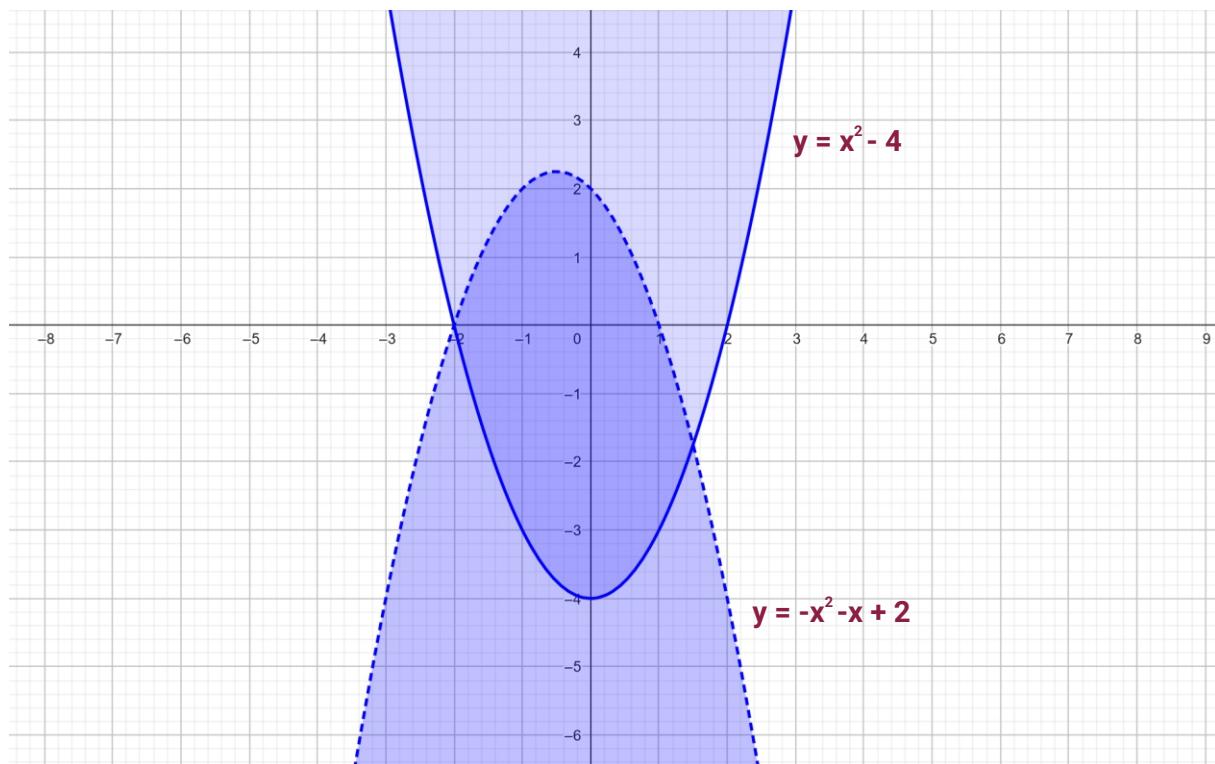
(1) Menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4$ sebagai berikut



(2) Menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y < x^2 - x + 2$ sebagai berikut



(3) Menentukan irisan dari dua daerah himpunan (no. 1 & no. 2)



(4) Daerah dengan warna gabungan pada gambar butir (3) merupakan daerah penyelesaian yang dimaksud

F. Exercise

1. Dari dua sistem pertidaksamaan berikut, manakah yang berbentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau disebut SPtDVKK? Mengapa?
 - (a)
$$\begin{cases} y \leq x^2 - 9 \\ y > 3x + 6 \end{cases}$$
 - (b)
$$\begin{cases} y \leq x^2 - 8 \\ y > 2x^2 - 1 \end{cases}$$

2. Diketahui sistem berikut $\begin{cases} y \leq 2x^2 - 3x - 5 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$

Apakah titik (-3,10) merupakan salah satu himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut? Berikanlah penjelasan yang logis!

3. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari $y > x^2 - 9$ dan $y \leq -x^2 + 6x - 8$!

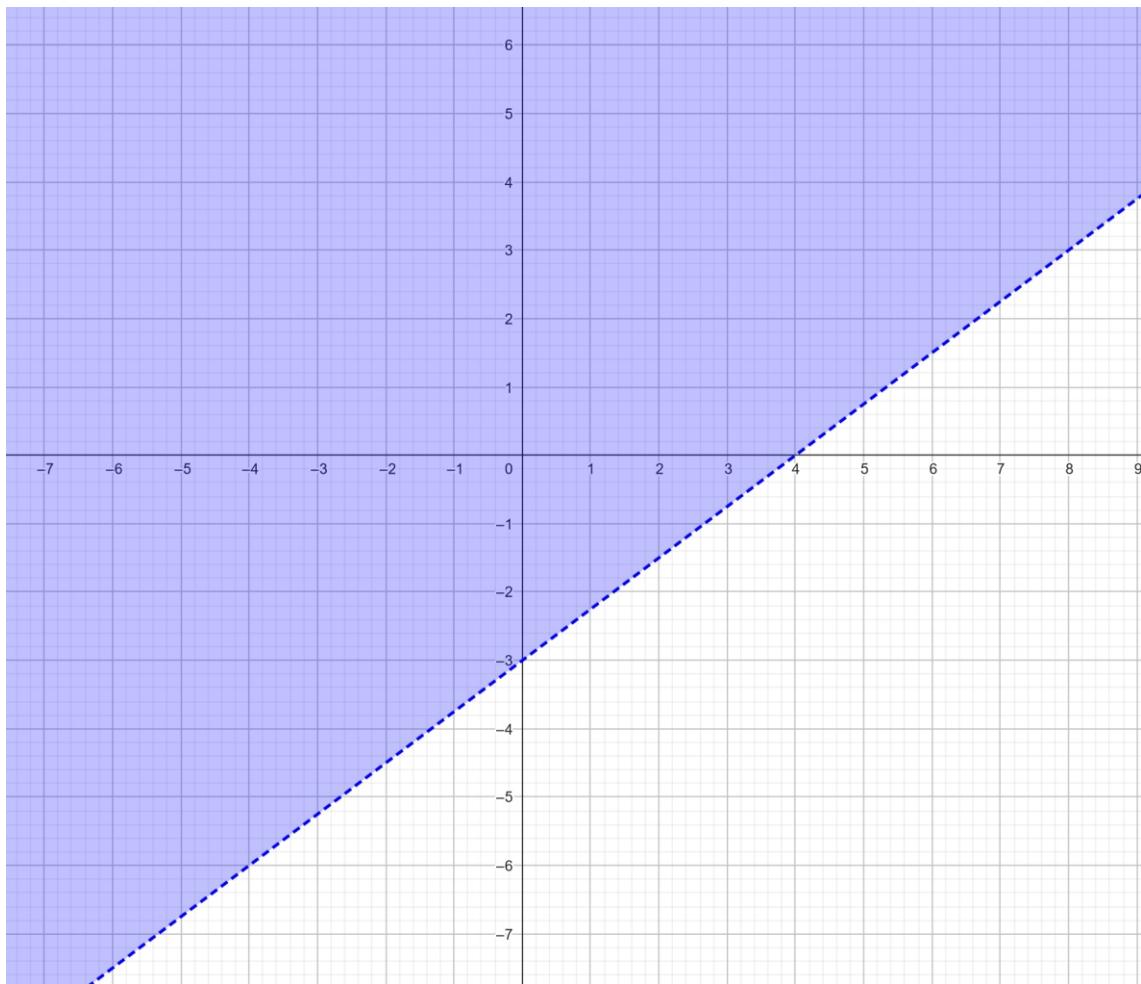
4. Berat badan ideal seseorang bergantung pada tinggi badannya. Seseorang dikatakan memiliki berat badan ideal jika berat badan W (dalam kg) orang tersebut kurang dari atau sama dengan $\frac{1}{30}$ kali kuadrat berat badan h (dalam cm) orang tersebut ditambah 10 dan lebih dari $\frac{1}{20}$ kali kuadrat tinggi badan orang tersebut dikurangi 10. Nyatakan permasalahan tersebut dalam sistem pertidaksamaan dua variabel, kemudian temukan daerah penyelesaiannya!



G. Evaluasi

Pilihlah satu jawaban yang paling benar!

1. Perhatikan gambar berikut!



Daerah yang diasir pada gambar diatas merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan.....

- A. $4y > 3x - 12$
- B. $-4y > 3x - 12$
- C. $4y \geq 3x - 12$
- D. $4y \geq 3x + 12$
- E. $4y > 3x + 12$

2. Salah satu penyelesaian dari pertidaksamaan $2y > 6x - 12$ adalah...

- A. (3, 1)
- B. (2, 1)
- C. (1, -4)
- D. (2, -1)
- E. (3, -1)

3. Di antara pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut, yang merupakan pertidaksamaan dua variabel adalah....

- A. $y < 2x - 3$
- B. $|x|^2 - 3 > y$
- C. $y < 3x^2 - 6$
- D. $x^2 + y^2 - 1 > 0$
- E. $x^2 + y^3 - 5 > 0$

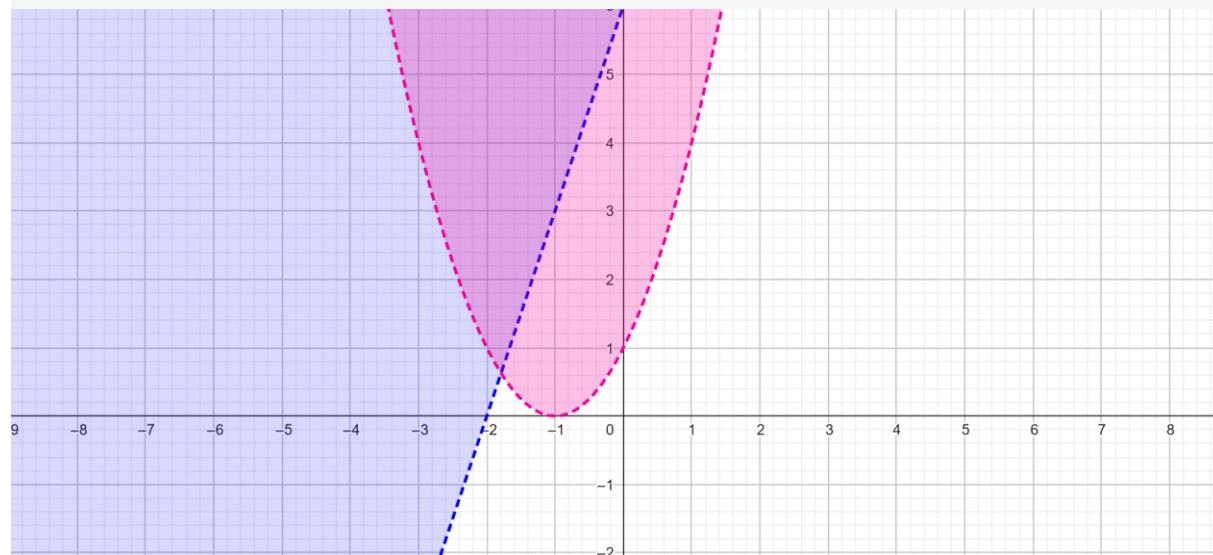
4. Koordinat titik berikut merupakan penyelesaian dari pertidaksamaan $2y < x^2 - 4$, kecuali....

- A. (0, -4)
- B. (-4, 0)
- C. (1, 1)
- D. (0, -3)
- E. (1, -2)

5. Berikut adalah salah satu koordinat titik yang merupakan penyelesaian dari $y < 2x^2 - 3x - 5$

- A. (0, 0)
- B. (-1, 0)
- C. (4, -1)
- D. (2, 2)
- E. (0, 2)

6. Cermati dengan baik gambar berikut



Daerah pada gambar diatas merupakan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan...

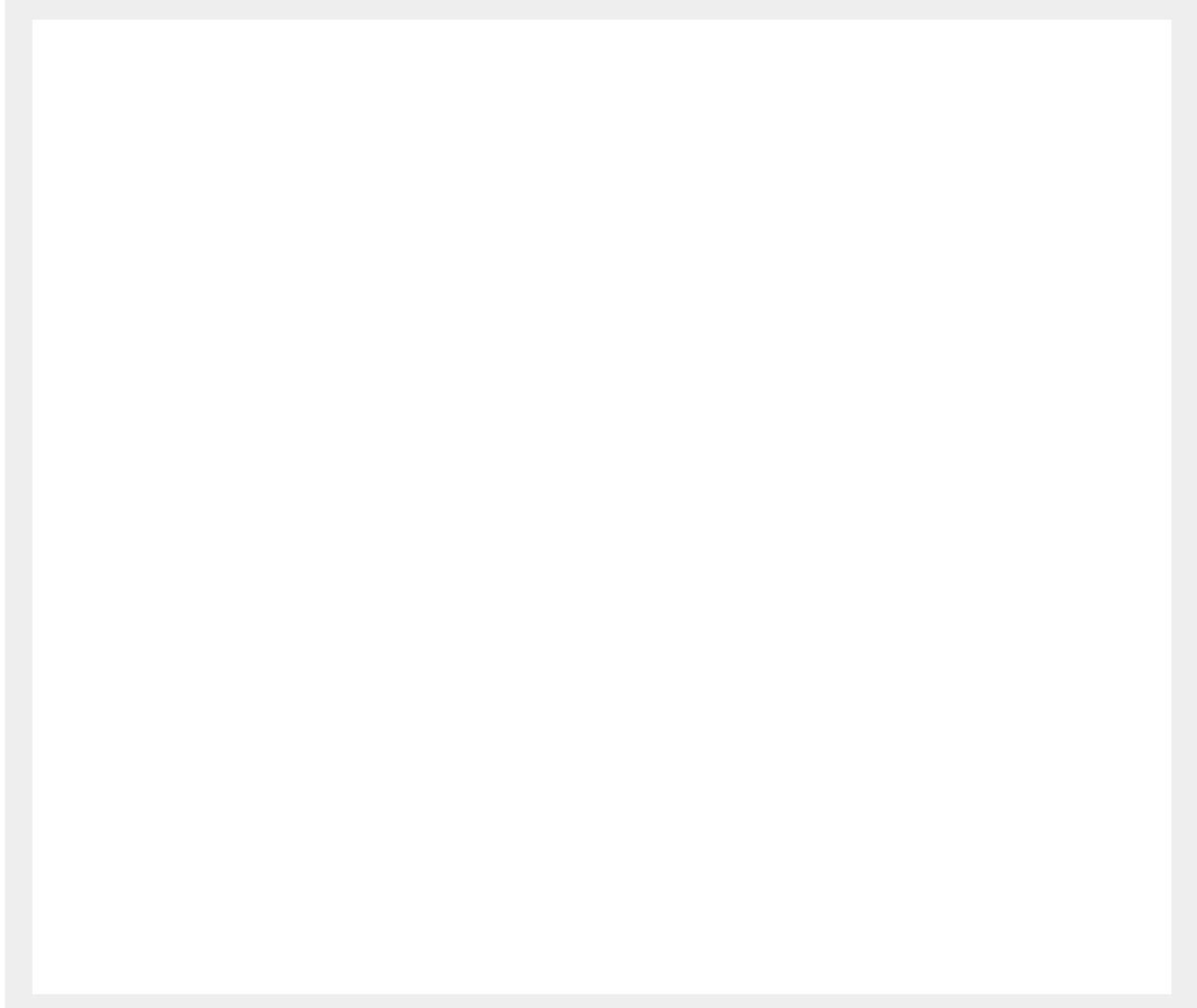
- A. $y \geq 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
- B. $y > 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
- C. $y < 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
- D. $y > 3x + 6$ dan $y > x^2 + 2x + 1$
- E. $y < 3x + 6$ dan $y > x^2 + 2x + 1$

7. Ketika menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $2y \leq 4x^2 - 1$, Andi mengambil sebuah titik uji. Di akhir tahap menggambar, Andi mendapat daerah yang memuat titik uji tersebut tidak ikut terarsir. Koordinat yang mungkin menjadi titik uji Andi adalah...

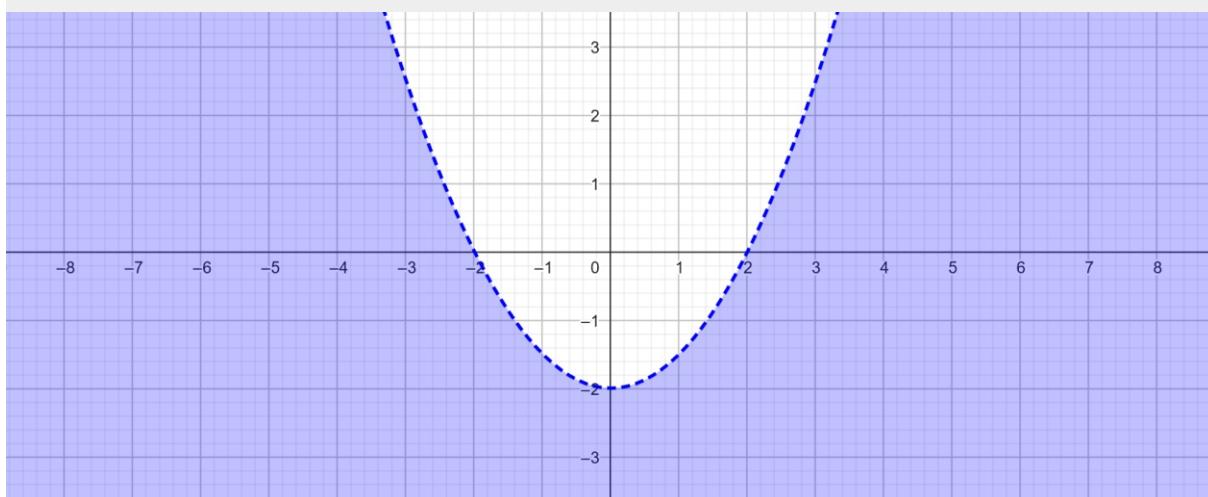
- A. (0, -2)
- B. (0, 2)
- C. (4, 0)
- D. (0, 5)
- E. (1, 1)

8. Sebuah penelitian menunjukkan bahwa pengemudi berusia lebih dari 17 tahun dan kurang dari 60 tahun memiliki waktu reaksi terhadap rangsangan audio sebesar $y = A(x)$ dan waktu reaksinya terhadap rangsangan visual sebesar $y = V(x)$ (*keduanya dalam milidetik*) yang dapat dimodelkan dengan $V(x) \leq -0.0002x^2 + 0.13x + 11$ dan $A(x) \leq 0.001x^2 - 0.01x + 10$; dimana x adalah usia (*dalam tahun*) dari pengemudi. Tentukan kesimpulan berikut yang tepat berdasarkan model tersebut.

- A. Pengemudi dengan usia 25 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalu lintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yang mendekat.
- B. Pengemudi dengan usia 35 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalu lintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yang mendekat.
- C. Pengemudi dengan usia 40 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalu lintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yang mendekat.
- D. Pengemudi dengan usia 45 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalu lintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yang mendekat.
- E. Pengemudi dengan usia 55 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalu lintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yang mendekat.



9. Perhatikan gambar berikut dengan cermat



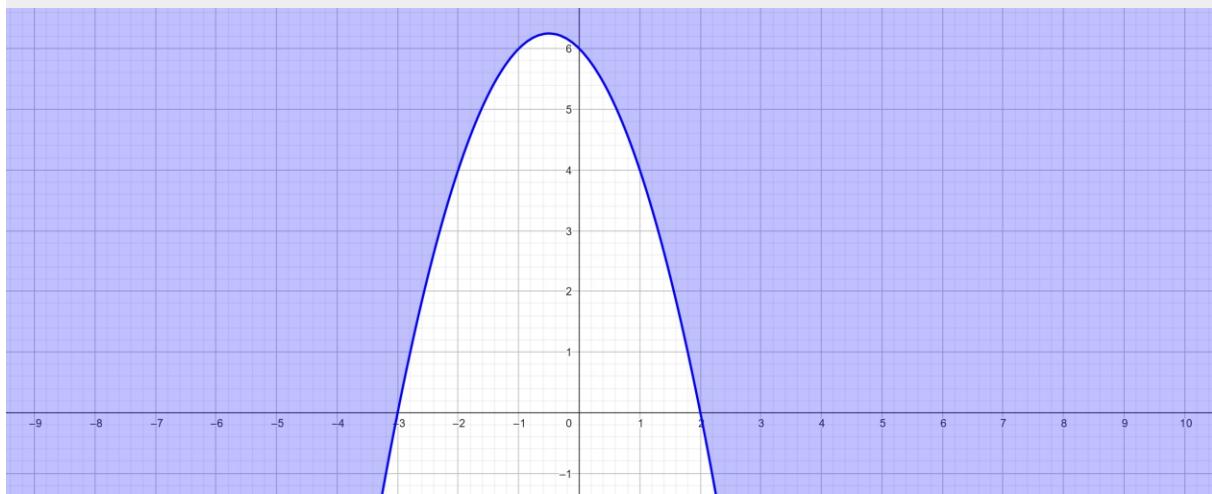
Daerah yang ditunjukkan pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan....

- A. $y < x^2 - 4$
- B. $y > x^2 - 4$
- C. $y < x^2 + 4$
- D. $y > x^2 + 4$
- E. $y \leq x^2 - 4$

10. Dua bilangan memiliki hubungan sebagai berikut. Selisih dua kali bilangan pertama dan kedua selalu lebih besar 12. Bilangan kedua selalu lebih besar atau sama dengan kuadrat bilangan pertama dikurangi dua kali bilangan pertama dikurangi delapan. Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat yang sesuai untuk permasalahan tersebut adalah.....

- A. $2x - 3y < 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$
- B. $2x - 3y > 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$
- C. $2x - 3y < 12$ dan $y \leq x^2 - 2x - 8$
- D. $2x - 3y > 12$ dan $y \geq x^2 - 2x - 8$
- E. $2x - 3y \leq 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$

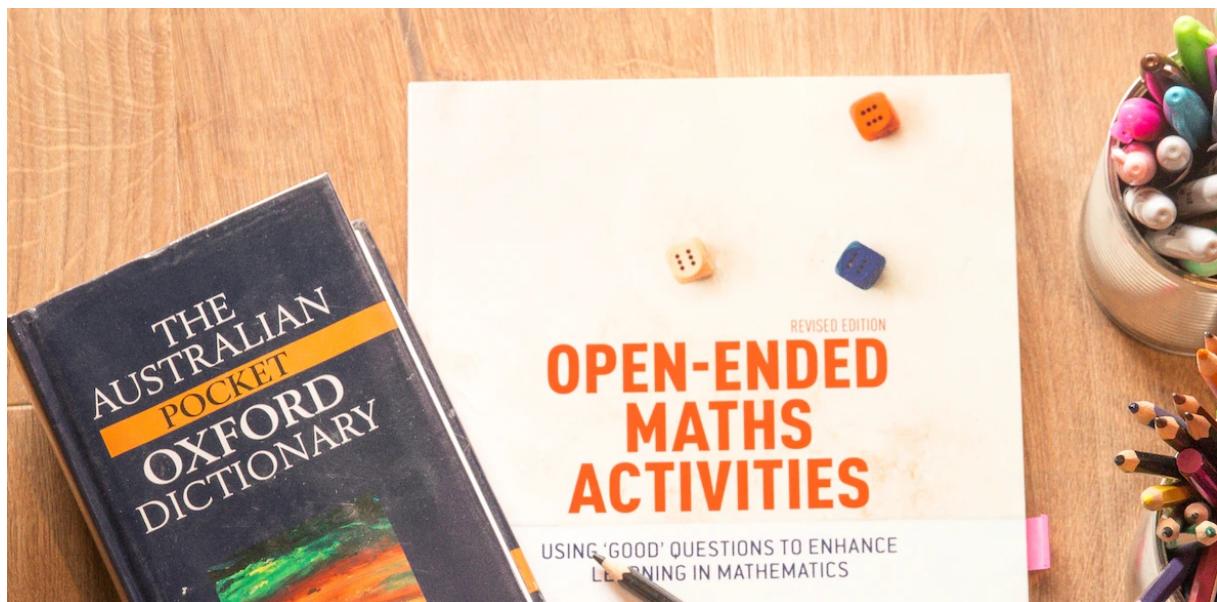
11. Pertidaksamaan yang memenuhi daerah yang diarsir pada gambar berikut adalah....



- A. $y < -x^2 + x - 6$
- B. $y < -x^2 + x + 6$
- C. $y < -x^2 + x + 6$
- D. $y < -x^2 - x + 6$
- E. $y < x^2 + x + 6$

12. Daerah x yang menjadi penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $y < 2x + 5$ dan $y > x^2 - x - 23$ adalah...

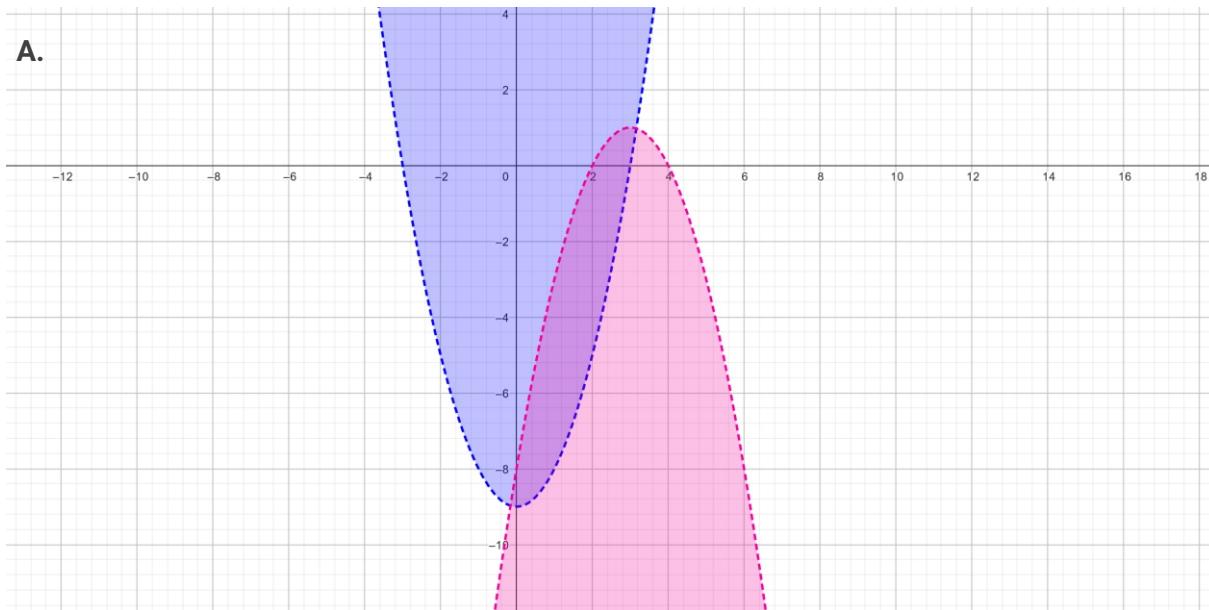
- A. $x < -4$ atau $x \geq 7$
- B. $x < -7$ atau $x \geq 4$
- C. $x < 4$ atau $x \geq 7$
- D. $-4 < x < 7$
- E. $-4 < x < 4$



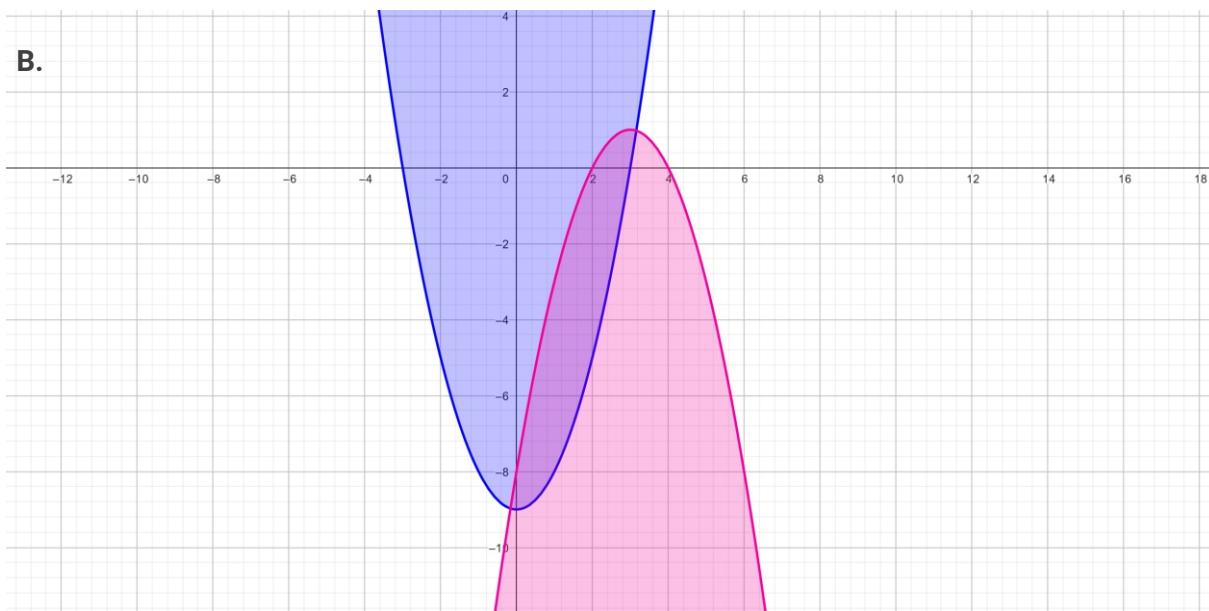
13. Daerah penyelesaian (daerah dengan warna gabungan) dari pertidaksamaan

$$\begin{cases} y > x^2 - 9 \\ y \leq -x^2 + 6x - 8 \end{cases} \text{ adalah.....}$$

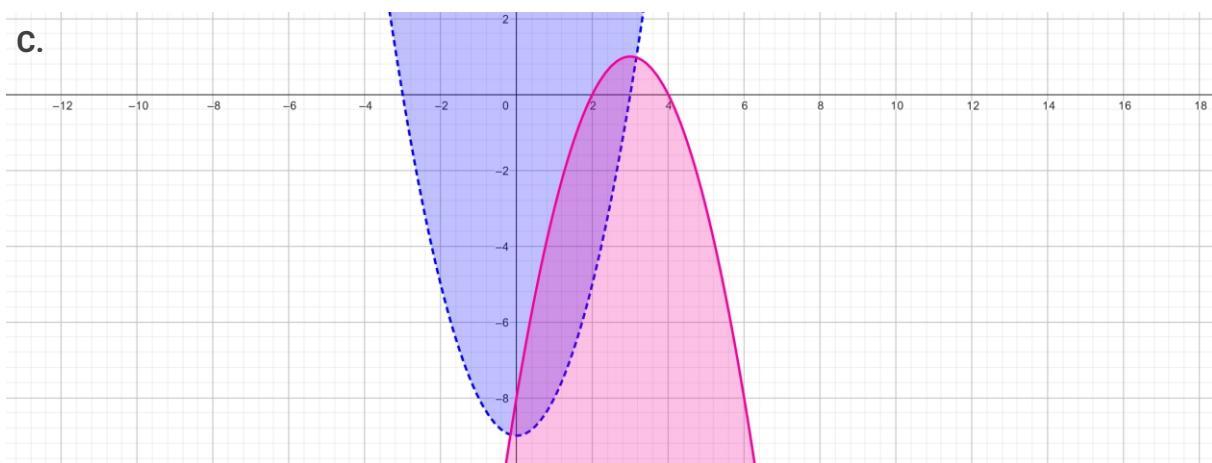
A.



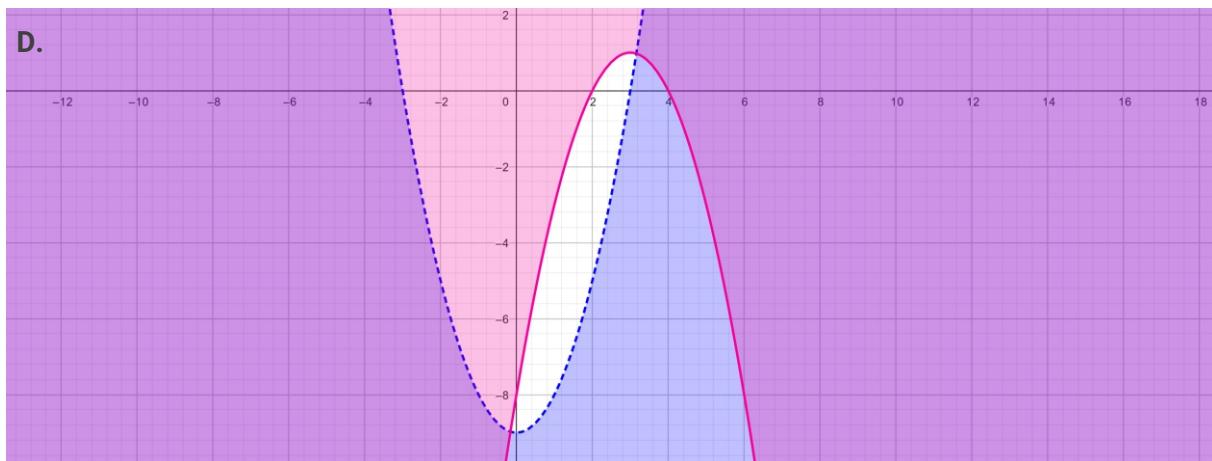
B.



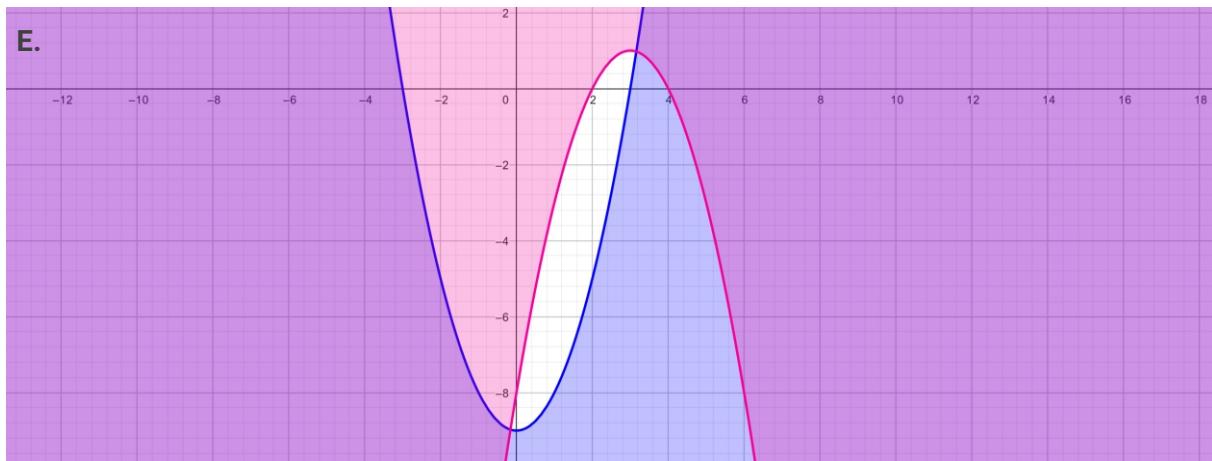
C.



D.



E.

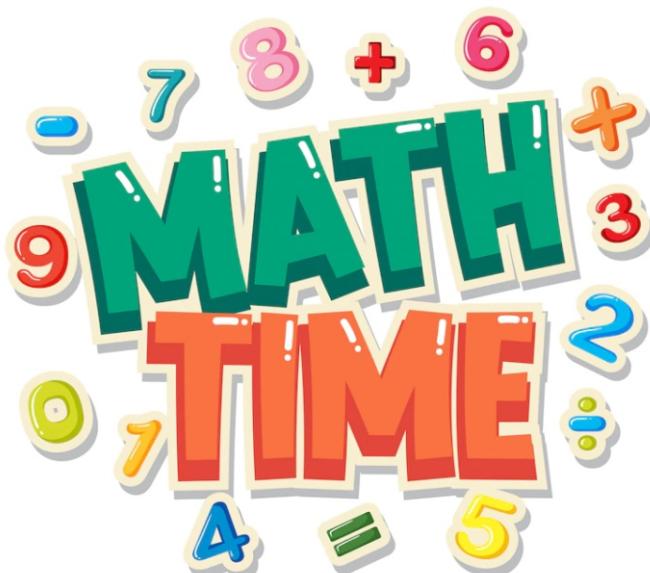


14. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $x^2 - 4x + 3 < 0$ adalah.....

- A. $1 < x < 3$
 - B. $-1 < x < 3$
 - C. $1 < x < -3$
 - D. $x < 1$ atau $x > 3$
 - E. $x > 1$ atau $x < 3$

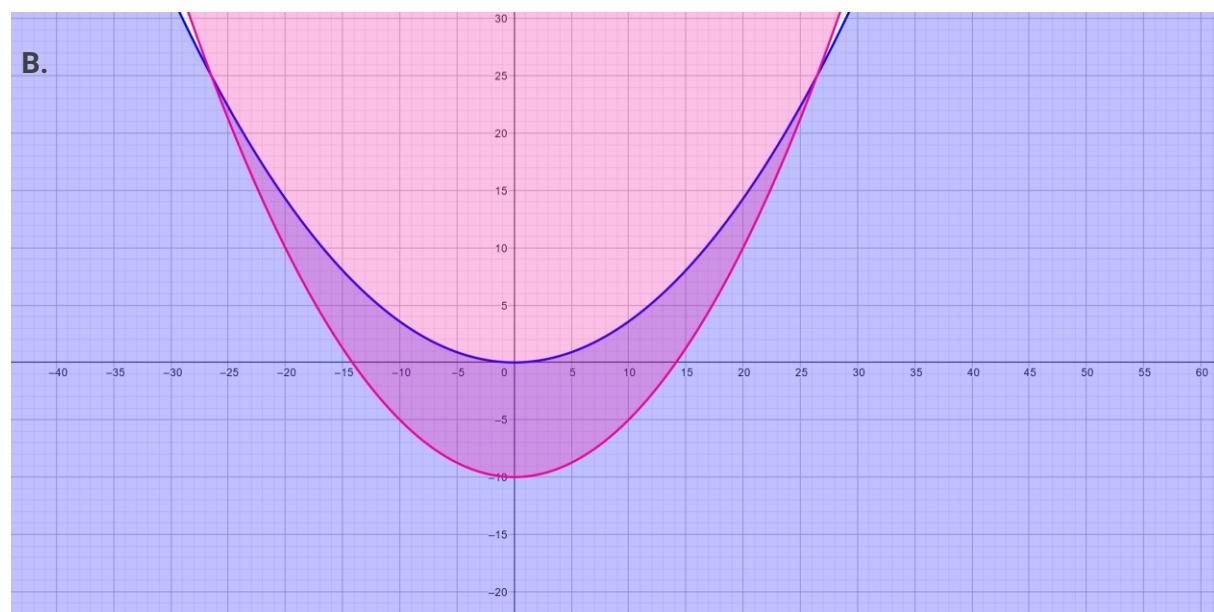
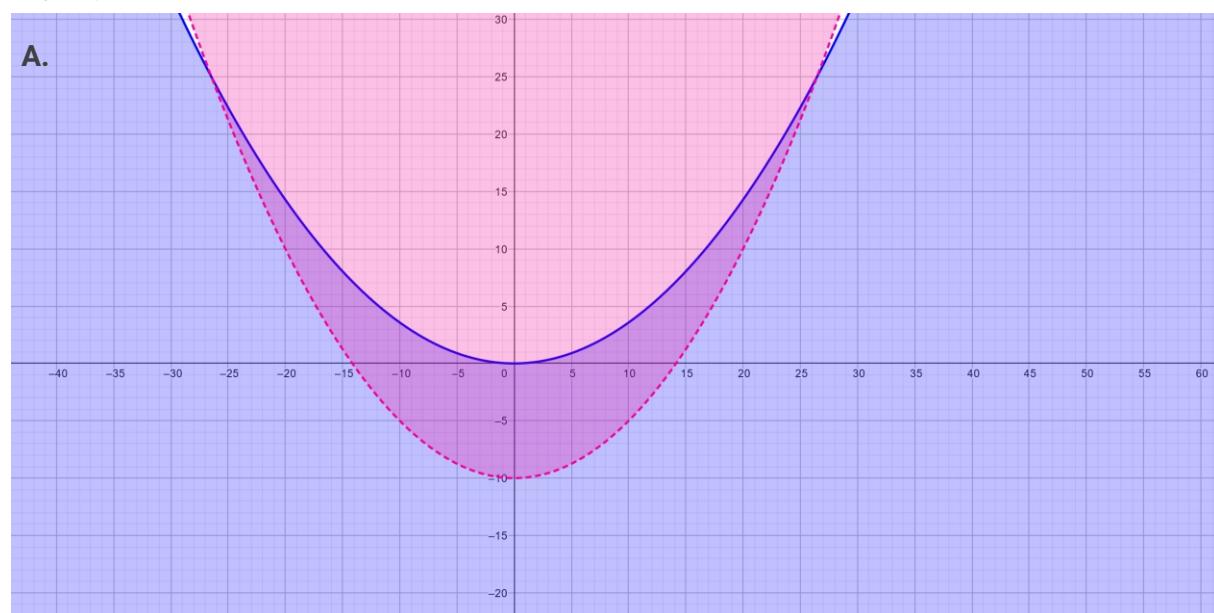
15. Sistem pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4x + 3$ dan $y > -x^2 + 2x + 3$ mempunyai penyelesaian dalam x , yaitu.....

- A. $x < 0$ atau $x > 3$
 - B. $x \leq 0$ atau $x \geq 3$
 - C. $0 < x < 3$
 - D. $0 > x < 3$
 - E. $0 > x > 3$

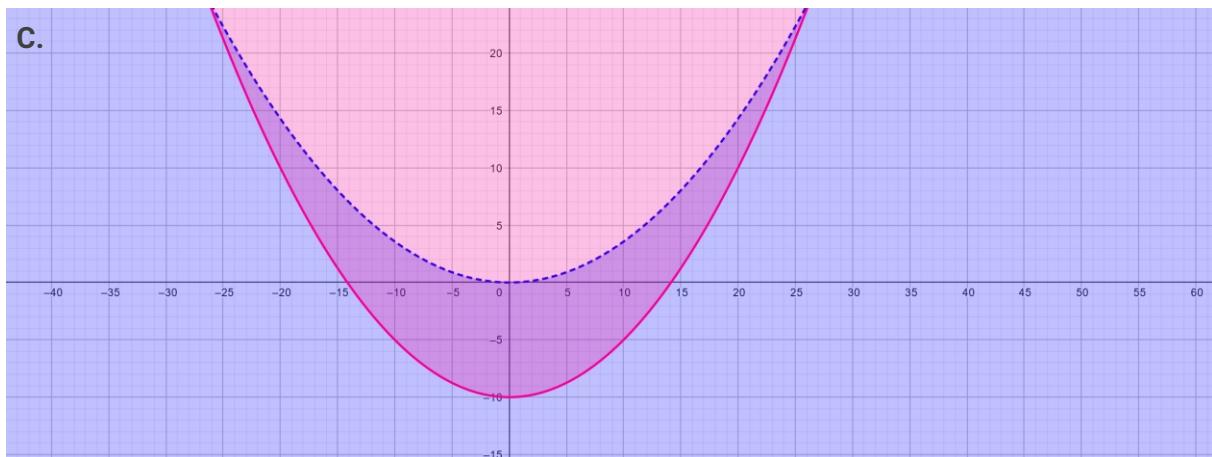


G. Challenge

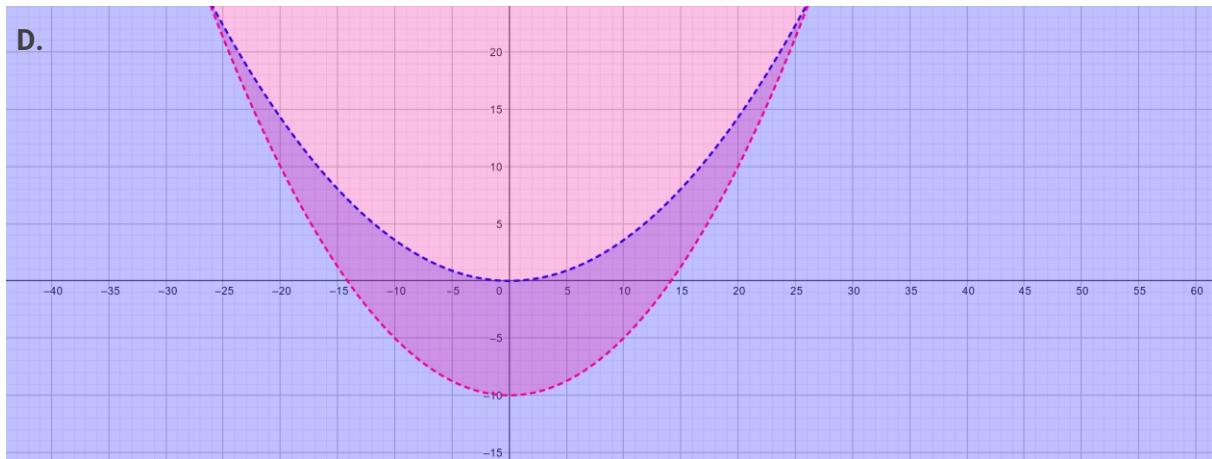
1. Berat badan ideal seseorang bergantung pada tinggi badannya. Seseorang dikatakan memiliki berat badan ideal jika berat badan W (dalam kg) orang tersebut kurang dari atau sama dengan $\frac{1}{28}$ kali kuadrat tinggi badan h (dalam cm) orang tersebut dan berat badan lebih dari $\frac{1}{20}$ kali kuadrat tinggi badan orang tersebut dikurangi 10. Gambar penyelesaian yang sesuai untuk permasalahan tersebut adalah...



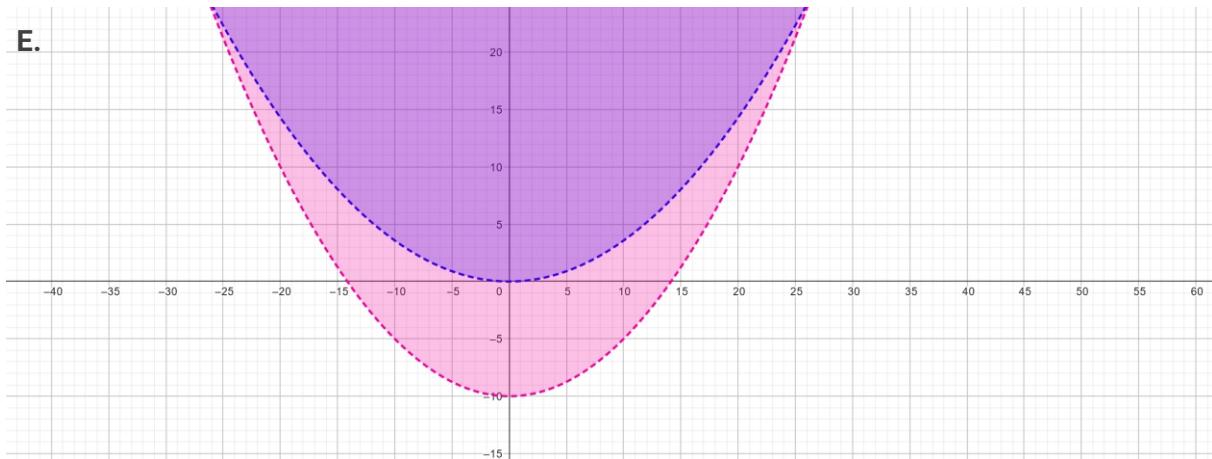
C.



D.



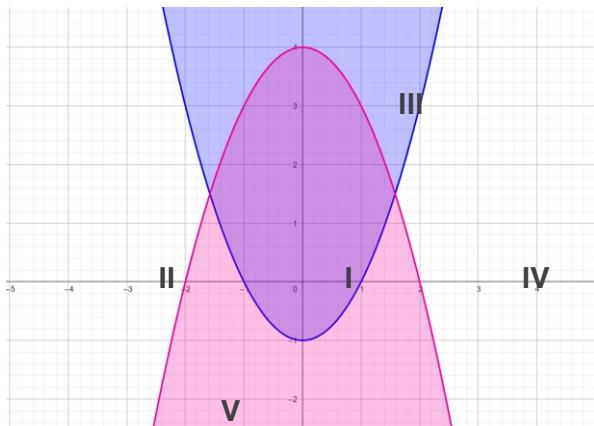
E.



3. Daerah yang merupakan penyelesaian sistem pertidaksamaan

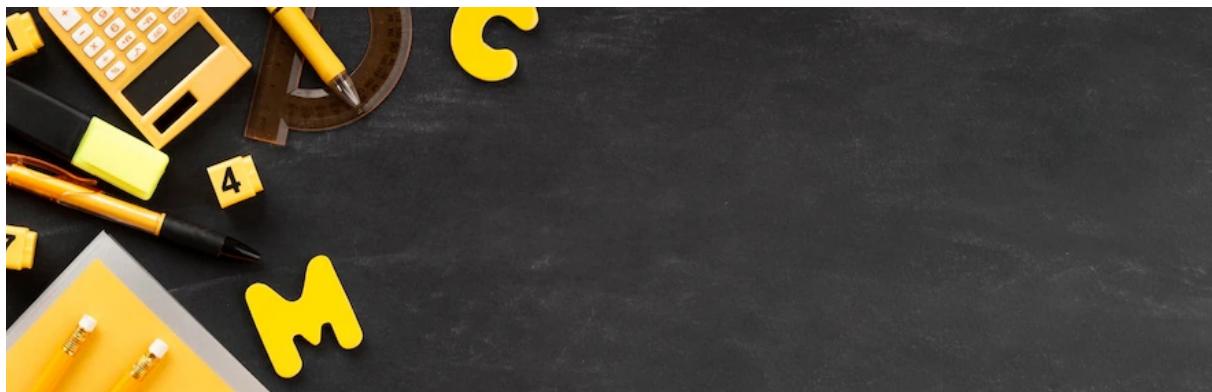
$$\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

ditunjukkan oleh daerah..... pada gambar di bawah ini



- A. V
 B. IV
 C. III
 D. II
 E. I
4. Usia Anto dan Hari memenuhi kondisi berikut. Dua kali usia Anto bernilai lebih besar dibandingkan kuadrat usia Anto ditambah usia Hari. Usia Hari lebih besar dari kuadrat usia Anto dikurangi tiga kali usia Anto. Sistem pertidaksamaan yang memenuhi kondisi tersebut adalah....

A. $\begin{cases} y \geq x^2 - 3x \\ 2 - x^2 \leq y \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - x^2 > y \\ y > x^2 - 3x \end{cases}$ C. $\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ 2 - x^2 \leq y \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - x^2 < y \\ y > x^2 - 3x \end{cases}$ E. $\begin{cases} 2x - x^2 > y \\ y < x^2 - 3x \end{cases}$



BAB 5 - PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

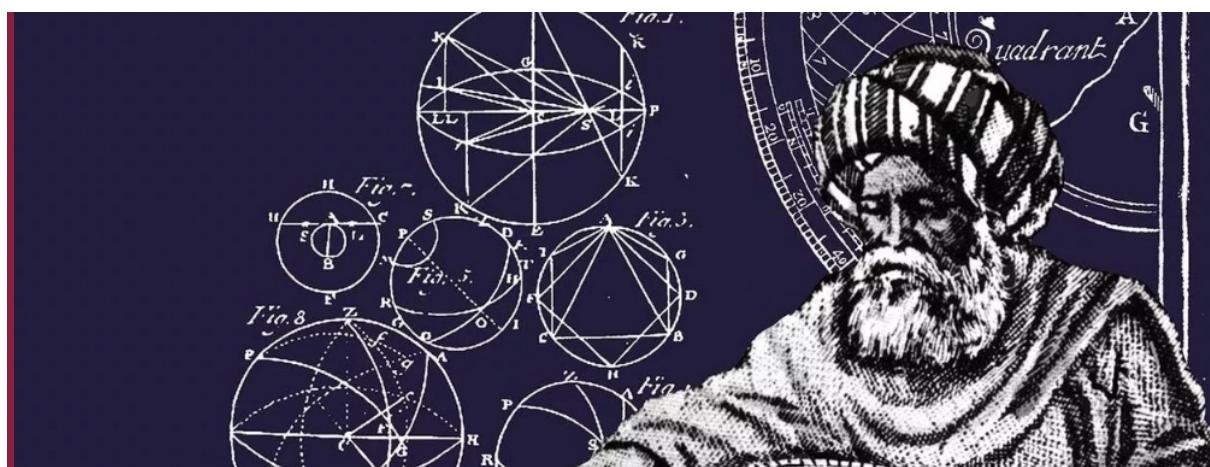
Tujuan Pembelajaran

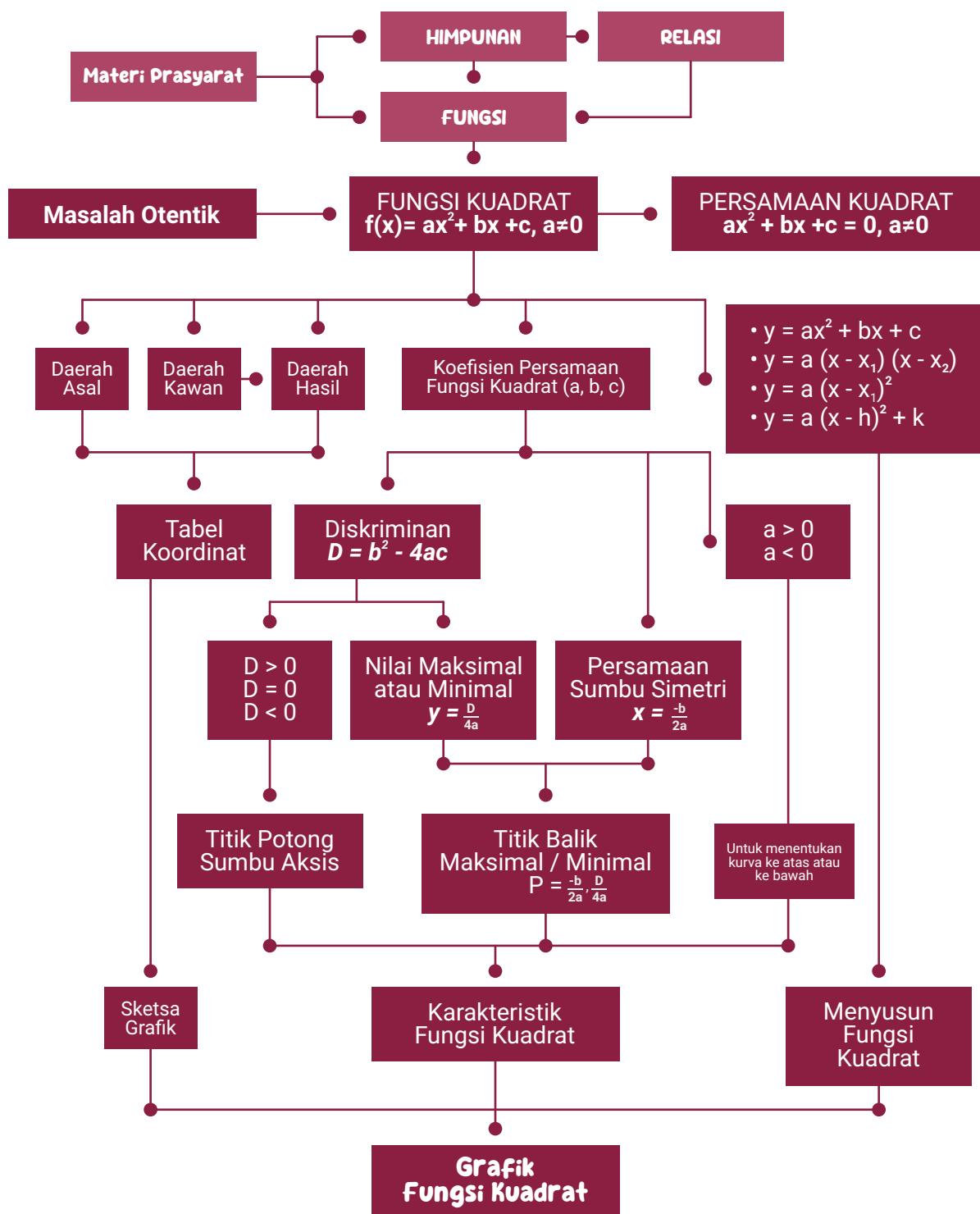
- Menentukan persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran dan rumus ABC. (C3 dalam Taksonomi Bloom)
- Menentukan grafik fungsi kuadrat (C3 dalam Taksonomi Bloom)
- Menentukan persamaan kuadrat dari grafik fungsi (C3 dalam Taksonomi Bloom)
- Menyelesaikan persamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari (C3 dalam Taksonomi Bloom)



Abu 'Abdallah Muhammad ibnu Musa Al-khwarizmi, kerap dijuluki sebagai Bapak Aljabar, karena sumbangan ilmu pengetahuan aljabar dan aritmatika. Beliau merupakan seorang ahli matematika dari Persia yang dilahirkan pada tahun 194 H/780 M, tepatnya di Khwarizmi, Uzbekistan. Selain terkenal sebagai seorang ahli matematika, beliau juga adalah astronomer dan geografer yang hebat. Berkat kehebatannya, Khwarizmi bergabung dalam Baitul-Hikmah, yaitu sebuah lembaga ilmu pengetahuan sebagai sarana bagi para ilmuwan untuk mengembangkan kemajuan ilmu mereka yang didirikan khalifah Abbasiyah di pusat intelektual dunia kala itu, Baghdad.

Dalam bidang matematika, beliau menuliskan penemuannya ke dalam beberapa buku yang salah satunya berjudul "Hisab al-Jabar wal Muqabalah" yang membahas tentang persamaan linier dan persamaan kuadrat. Buku-buku yang berisi hasil penemuannya bahkan sempat menjadi acuan di Universitas-universitas di Eropa hingga abad ke-16. Dengan berbagai penemuannya itulah, ia diberi gelar sebagai Bapak Ilmu Matematika.





A. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat satu variabel didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu variabel yang dikuadratkan atau berderajat dua. Dari definisi, dibawah ini adalah contoh dari bentuk persamaan kuadrat dan bentuk bukan persamaan kuadrat.

Contoh bentuk persamaan kuadrat

- $x + 5x^2 + 6 = 0$
- $2x^2 + 9x = -5$
- $x^2 - 25 = 0$
- $4x^2 = 0$

Bukan bentuk persamaan kuadrat

- $x - 2 = 0$
- $2x + 3y = 0$
- $3x - 5y = 12$
- $2x - 4y = 0$

Dari beberapa contoh diatas maka bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah

$$ax^2 + bx + c = 0$$



dengan syarat c adalah konstanta dan anggota himpunan bilangan real dan $a \neq 0$, konstanta yang terdapat pada a dan b disebut **koefisien**

Ciri-ciri persamaan kuadrat:

- Sebuah persamaan dengan pangkat tertinggi adalah 2 dan pangkat terendahnya adalah 0
- Koefisien variabelnya adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2, tidak sama dengan nol
- Koefisien variabel berpangkat 1 atau 0 dapat bernilai 0

Bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diubah ke bentuk yang lain yaitu:

- Bentuk $(x + m)(x + n) = 0$, dimana m dan n adalah faktor dari $\frac{c}{a}$
- Bentuk $(x + p)^2 = q$, dengan $p \neq 0$ dimana $p = \frac{b}{2a}$ dan $q = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

atau bentuk disebut dengan bentuk **persamaan kuadrat sempurna**

8. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara untuk menentukan akar-akar (penyelesaian) persamaan kuadrat. Aturan tersebut antara lain, **cara memfaktorkan, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus ABC**. Ketiga aturan ini memiliki kelebihan dan kelemahan terkait dengan efisiensi waktu yang digunakan untuk menentukan akar-akar sebuah persamaan kuadrat.

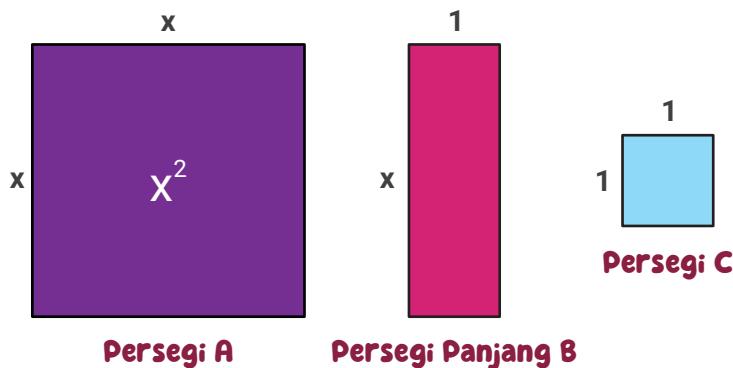
1. Cara Pemfaktoran

Menentukan penyelesaian persamaan kuadrat atau akar persamaan dengan cara faktorisasi atau memfaktorkan adalah menggunakan sifat perkalian bilangan real. Hal ini karena persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diubah menjadi bentuk $(x + m)(x + n) = 0$

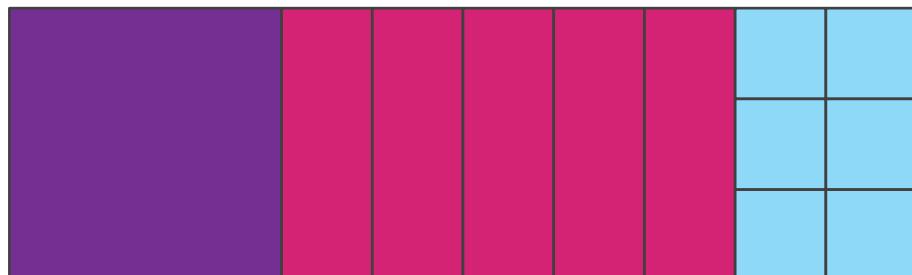
Perhatikan ilustrasi gambar dibawah ini!

Bagaimana cara memfaktorkan persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$?

Buatlah persegi dan persegi panjang: Persegi A menyatakan banyaknya x^2 , persegi panjang B menyatakan banyaknya x , dan persegi C menyatakan banyaknya konstanta.

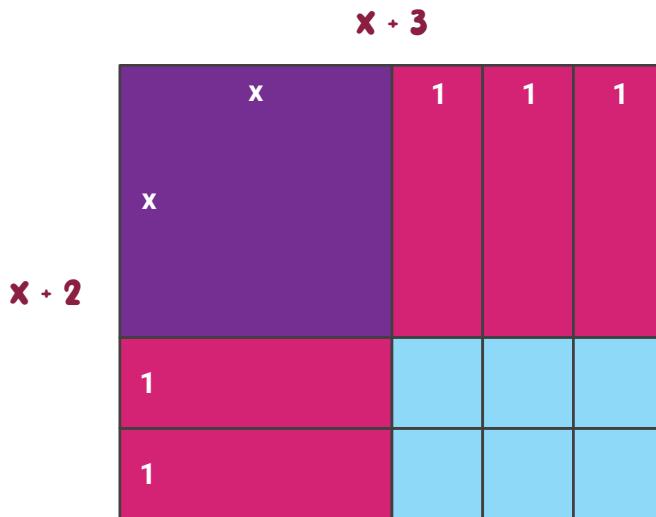


Sehingga untuk menyatakan persamaan $x^2 + 5x + 6 = 0$ dibutuhkan 1 persegi A , 5 persegi panjang B dan 6 persegi C seperti berikut:



Visualisasi $x^2 + 5x + 6$

Dari persegi dan persegi panjang tersebut, bentuklah sebuah persegi panjang baru seperti gambar berikut dengan ukuran luas yang sama:



Persegi yang baru terbentuk mempunyai panjang dan lebar masing-masing $(x + 2)$ dan $(x + 3)$, sehingga ukuran luasnya $(x + 2)(x + 3)$. Jadi persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ sama dengan persamaan $(x + 2)(x + 3) = 0$

Contoh:

A. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 10x + 24 = 0$ dengan cara pemfaktoran!

Penyelesaian:

Dari persamaan $x^2 + 10x + 24 = 0$

Jika disetarkan dengan bentuk $ax^2 + bx + c$ maka didapat $a = 1$, $b = 10$, $c = 24$ maka:

$$\begin{aligned} a.c &= 24 = 4 \times 6 \\ b &= 10 = 4 + 6 \end{aligned}$$

Setelah disetarkan dengan bentuk $(x + m)(x + n) = 0$, maka dapat diketahui:

$$\begin{aligned} (x + 4)(x + 6) &= 0 \\ x = -4 \text{ atau } x &= -6 \end{aligned}$$

Jadi, akar-akar penyelesaian dari $x^2 + 10x + 24 = 0$ adalah $\{-6, -4\}$

- B. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 85 = 0$ dengan cara pemfaktoran!

Penyelesaian:

Dari persamaan $3x^2 + 2x - 85 = 0$

Jika disetarkan dengan bentuk $ax^2 + bx + c$ maka didapat $a = 3$, $b = 2$, $c = -85$ maka:

$$\begin{aligned} a.c &= -255 = 17 \times (-15) \\ b &= 2 = 17 + (-15) \end{aligned}$$

karena nilai $a = 3$ maka:

$$\frac{(3x + 17)(3x - 5)}{3} = 0$$

$$\begin{aligned} (3x + 17)(3x - 5) &= 0 \\ x = \frac{17}{3} \text{ atau } x &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, akar-akar penyelesaian dari $3x^2 + 2x - 85 = 0$ adalah $(\frac{-17}{3}, 5)$

2. Cara melengkapi kuadrat sempurna

Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dijabarkan ke bentuk $(x + p)^2 = q$

Contoh:

Tentukan akar-akar $x^2 + 4x - 1 = 0$ dengan cara kuadrat sempurna

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 1 &= 0 \\ x^2 + 4x - 1 + 1 &= 0 + 1 \quad \text{kedua ruas ditambah 1} \\ x^2 + 4x &= 1 \\ x^2 + 4x + 4 &= 1 + 4 \quad \text{kedua ruas di tambah +4 agar menjadi bentuk } (x + p)^2 \\ x^2 + 4x + 4 &= 5 \quad x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \text{ sehingga } (x + p)^2 = 5 \\ (x + 2)^2 &= 5 \\ x+2 &= \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

maka $x_1 = \sqrt{5} - 2$ dan $x_2 = -\sqrt{5} - 2$

3. Cara rumus ABC

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus kuadratik atau sering disebut dengan rumus ABC adalah dengan manipulasi aljabar seperti pada langkah melengkapkan kuadrat sempurna kemudian menyederhanakannya sehingga diperoleh nilai x yang memenuhi persamaan. Rumus ABC merupakan cara yang lebih umum digunakan dalam menentukan penyelesaian persamaan kuadrat.

Jika $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, maka

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sehingga akar-akarnya atau penyelesaiannya adalah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad & \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Untuk lebih memahami penggunaan rumus kuadratik dalam menyelesaikan persamaan kuadrat, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh: Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat : $4x^2 + 5x + 1 = 0$

Penyelesaian:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0, a = 4, b = 5 \text{ dan } c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8} \quad x_1 = \frac{-5 - 3}{8}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 3}{8} = -1 \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-5 + 3}{8} = -\frac{1}{4}$$

C. Hubungan Antara Akar-akar Persamaan Kuadrat

Misal akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Rumus penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut adalah:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Maka **Jumlah akar-akar** tersebut adalah: $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a}$

Atau

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$



Sedangkan **hasil kali akar-akar** tersebut adalah: $x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{D})(-b - \sqrt{D})}{(2a)(2a)}$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

Atau

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$



Selisih akar-akar tersebut adalah: $x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$

Atau

$$D = a^2 (x_1 - x_2)^2$$



Contoh:

$$2x^2 + 4x + 6 = 0$$

Tentukan nilai $(x_1)^2 + (x_2)^2$ tanpa mencari x_1 dan x_2

Penyelesaian:

$$2x^2 + 4x + 6 = 0 \longrightarrow a = 2, b = 4 \text{ dan } c = 6$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{4} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (-2)^2 - 2(3) = -2$$

Rumus yang sering digunakan:

$$1. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$2. (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$$

$$3. (x_1)^2 - (x_2)^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$4. (x_1 - x_2) = \sqrt{\frac{D}{a}}$$

$$5. \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{x_1 x_2}$$



D. Jenis - jenis Akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 dimana:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightarrow D = b^2 - 4ac \text{ adalah diskriminan}$$

Jenis akar-akar persamaan berdasarkan diskriminan adalah:

1. Jika $D > 0$, Maka terdapat dua akar real yang tidak sama ($x_1 \neq x_2$)
2. Jika $D = 0$, Maka akar - akarnya kembar atau sama dan imasiner ($x_1 = x_2$)
3. Jika $D < 0$, Maka kedua akar tidak real atau tidak mempunyai akar - akar yang real.

Contoh:

1. Tentukan q supaya persamaan $x^2 + qx + q = 0$ mempunyai dua akar nyata dan berlainan!

Penyelesaian:

$$x^2 + qx + q = 0$$

mempunyai dua akar berlainan, maka $D > 0$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= q^2 - 4 \cdot 1 \cdot q \\ &= q^2 - 4q > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Atau } q(q - 4) > 0$$

$$q_1 = 0 ; (q - 4) = 0 \rightarrow q_2 = 4$$

Maka: $q < 0$ atau $q > 4$



E. Exercise

Pilih jawaban yang tepat!

1. Nilai m yang memenuhi persamaan kuadrat $mx^2 - 3x - 3 = 0$ agar mempunyai akar-akar yang sama adalah.....

A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$ E. $\frac{3}{2}$

2. Jenis-jenis akar persamaan $8x^2 + 32x - 40 = 0$ adalah.....

A. Akar-akarnya rasional berlainan
B. Akar-akarnya rasional dan sama
C. Akar-akarnya irrasional dan berlainan
D. Akar-akarnya irrasional dan sama
E. Akar-akarnya imajiner

3. Jenis-jenis akar persamaan $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+2} = 1$ adalah...

A. Akar-akarnya rasional berlainan
B. Akar-akarnya rasional dan sama
C. Akar-akarnya irrasional dan berlainan
D. Akar-akarnya irrasional dan sama
E. Akar-akarnya imajiner

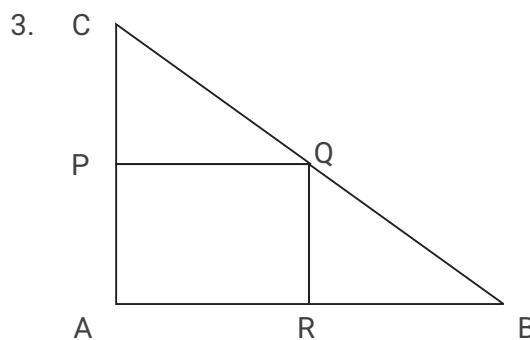


F. Challenge

- Asri dan Berti senang membaca buku. Dari koleksi masing - masing , ada beberapa buku yang belum mereka baca. Jumlah buku yang belum dibaca oleh mereka berdua 15. Masing-masing kemudian membaca sebanyak 3 buku. Hasil kali banyak buku yang belum mereka baca sekarang adalah 20. Berapakah banyak buku yang belum dibaca masing-masing pada awalnya?



- Suatu segitiga siku-siku sisi miringnya 12 cm. Jika selisih panjang sisi - sisi sikunya 2 cm maka tentukanlah luas segitiga itu!



Sebuah segitiga siku-siku ABC diketahui panjang sisi $AB = 4 \text{ cm}$ dan sisi $AC = 8 \text{ cm}$. Tentukanlah luas maksimum persegi panjang ARQP

BAB 6 - PERSAMAAN EKSPONENSIAL DAN FUNGSI EKSPONENSIAL

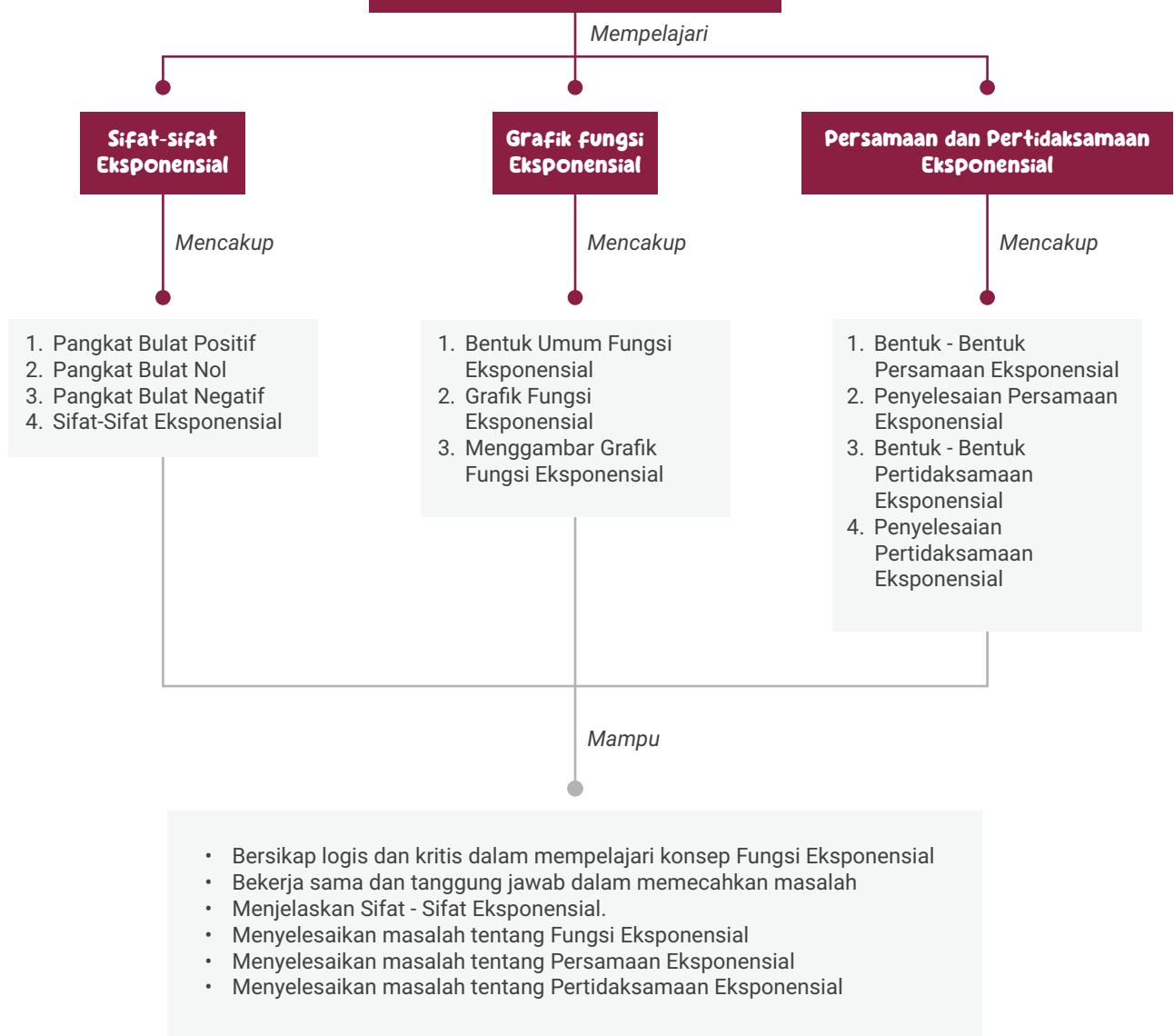
Tujuan

1. Dapat menyelesaikan persamaan eksponensial dalam berbagai bentuk (C1 dalam taksonomi bloom)
2. Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan eksponensial (C2 dalam taksonomi bloom)
3. Dapat menyelesaikan fungsi eksponensial (C2 dalam taksonomi bloom)
4. Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial (C2 dalam taksonomi bloom)

Sebelum kalian memahami fungsi dan persamaan eksponensial, kalian mengingat kembali materi sebelumnya tentang **perpangkatan**, yang sudah diajarkan di SMP maupun di SMA. Kalian mengingat kembali sifat-sifat eksponensial cara penyelesaiannya. Pada modul ini kalian mempelajari grafik fungsi dan persamaan eksponensial.



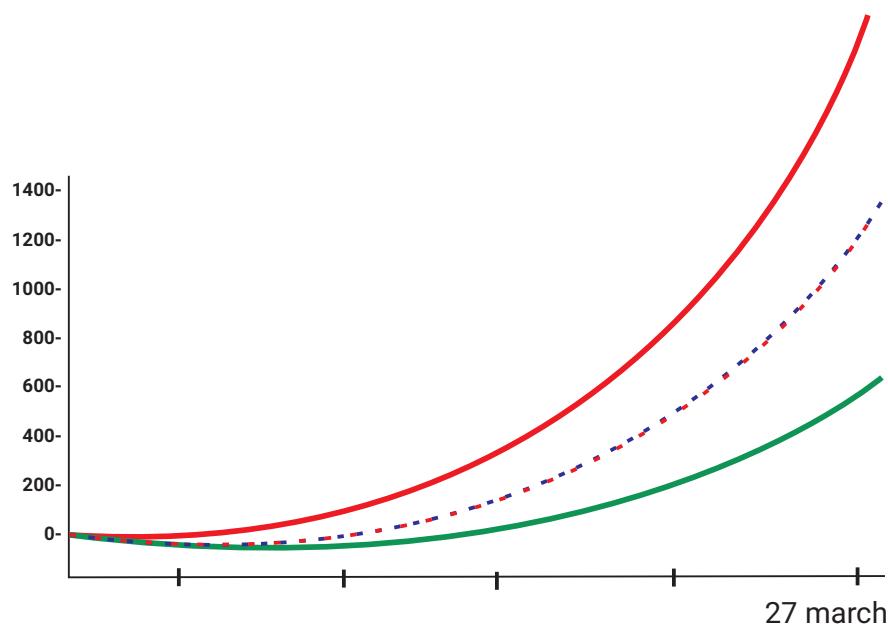
Fungsi Eksponensial



A. Fungsi Eksponensial

Materi ini dapat kalian terapkan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang kesehatan, ekonomi, fisika, kimia, biologi, teknik dan lain-lain. Sebagai contoh, setelah menyaksikan penyebaran virus corona sangat cepat dan meluas di berbagai negara, maka WHO menetapkan kasus corona yang menyebabkan Covid-19 sebagai pandemi.

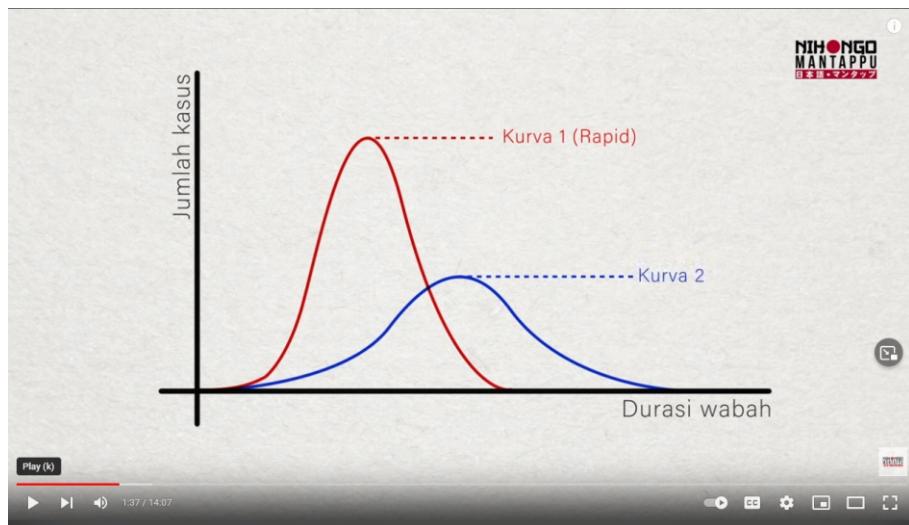
Penyebaran virus corona kalau tidak segera diantisipasi dengan baik, seperti *social distancing*, bekerja dan belajar di rumah, membiasakan untuk selalu mencuci tangan dan menggunakan masker, menutup tempat hiburan, pasar dan tempat keramaian lainnya akan mengakibatkan jumlah orang yang tertular akan melonjak mengikuti grafik fungsi eksponen. Simulasi oleh peneliti dari alumni jurusan matematika UI jumlah orang-orang yang tertular jika pemerintah tidak melakukan intervensi dalam meminimalisir interaksi antar manusia akan tampak seperti grafik fungsi eksponen berikut:



Kurva merah mungkin terjadi seandainya tidak ada intervensi pemerintah dalam meminimalisir interaksi antar manusia (akumulasi kasus positif akan lebih tinggi)

Kurva hijau mungkin terjadi jika physical distancing dijalankan dengan disiplin (akumulasi kasus positif akan lebih rendah)

Bahaya Covid-19 jika kita mengabaikan **Social Distancing** dapat dijelaskan dengan fungsi eksponen seperti pada video ini:



Pindai QR diatas
untuk menuju tautan
video yang dimaksud

Sumber: Akun Youtube **Nihongo Mantappu** <https://youtu.be/e4K65J7wILE>

Fungsi eksponen f dengan bilangan pokok a adalah fungsi yang didefinisikan dengan:

$$f : x \rightarrow a^x$$


Dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $x \in \mathbb{R}$. Fungsi ini memetakan setiap bilangan real a^x dengan bilangan real a , yang dapat dinyatakan bentuk $f(x) = a^x$.

Persamaan fungsi eksponen dapat dinyatakan dalam bentuk $y = a^x$, dengan daerah asal (*domain*) dari f adalah $D_f = \{x | -\infty < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$ dan daerah hasil (*range*) dari f adalah $R_f = \{y | y > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Untuk memahami fungsi eksponen, coba kalian perhatikan masalah berikut.

Seorang pedagang baju selalu mencatat penjualan dagangannya setiap hari seperti dalam tabel berikut:

Hari ke-	1	2	3	4	5	...	x
Jumlah baju terjual	2	4	8	16	32	...	
Bentuk pangkat	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	...	2^x

Pada bentuk urutan dari baris ke-1 dengan baris ke-3 di atas merepresentasikan suatu fungsi satu-satu dengan domain bilangan asli.

Fungsi $f: x \rightarrow f(x) = 2^x$ merupakan salah satu fungsi eksponen, sehingga perkembangan baju terjual tersebut merupakan salah satu contoh dari fungsi eksponen yang domainnya adalah bilangan cacah.

Fungsi $f: x \rightarrow a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ disebut fungsi eksponen, yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan positif.

Bentuk umum fungsi eksponen adalah $f: x \rightarrow a^x$ atau $f(x) \rightarrow a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Pada fungsi eksponen $f(x) \rightarrow a^x$, x disebut peubah dan daerah asal (domain) dari fungsi eksponen adalah himpunan bilangan real yaitu $D_f = \{x | -\infty < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$

Dari uraian diatas, kalian dapat menyimpulkan bahwa fungsi eksponen adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap x anggota himpunan bilangan real dengan tepat satu anggota bilangan $k a^x$, dengan k suatu konstanta dan a bilangan pokok (basis) dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Fungsi eksponen ini adalah salah satu fungsi yang cukup penting dalam matematika. Fungsi eksponen banyak sekali penerapannya, dan tidak hanya dalam matematika saja tetapi banyak pula berkaitan dengan pertumbuhan dan peluruhan. Selain itu nanti kita akan melihat, bahwa fungsi ini erat sekali hubungannya dengan fungsi logaritma.

Contoh fungsi eksponen:

$$1. f(x) = 3^{x+1}$$

$$2. f(x) = 4^{2x}$$

$$3. f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

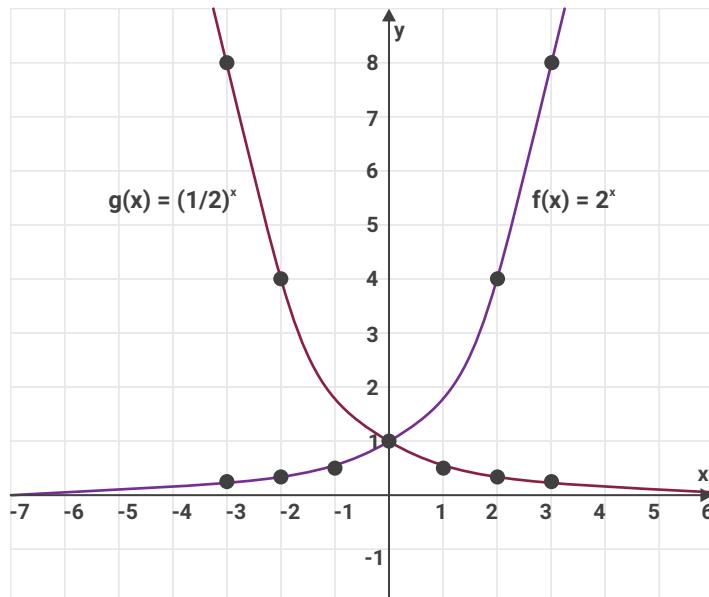
Menggambar sketsa grafik fungsi eksponen dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut.

1. Buat daftar atau tabel yang menunjukkan hubungan antara nilai - nilai x dengan nilai - nilai $y = f(x) = a^x$
2. Titik-titik dengan koordinat (x, y) yang diperoleh digambarkan pada bidang kartesius, kemudian dihubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi eksponen $y = f(x) = a^x$

Sebagai contoh, kita akan menggambar grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = (\frac{1}{2})^x$
 Mula-mula dibuat tabel nilai fungsi berikut:

x	-3	-2	1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x) = (\frac{1}{2})^x$	2	4	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Tabel Nilai fungsi fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = (\frac{1}{2})^x$



Gambar grafik fungsi fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

Dengan memperhatikan gambar di atas terlihat bahwa :

- Domain kedua fungsi adalah himpunan semua bilangan real,
 $D_f = \{x | -\infty < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$ atau $(-\infty, \infty)$
- Rangennya berupa himpunan semua bilangan real positif
 $R_f = \{y | y > 0, y \in \mathbb{R}\}$ atau $(0, \infty)$.
- Kedua grafik melalui titik $(0, 1)$.
- Kurva mempunyai asimtot datar yaitu garis yang didekati fungsi tapi tidak akan berpotongan dengan fungsi, sumbu x (garis $y = 0$).
- Kedua grafik simetris terhadap sumbu y
- Grafik $f(x) = 2^x$ merupakan grafik yang monoton naik. Sedangkan grafik $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ merupakan grafik yang monoton turun. Dan keduanya berada di atas sumbu x (nilai fungsi senantiasa positif)

Contoh 2

Lukislah grafik fungsi $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ pada interval $|-3 \leq x \leq 3|$.

Jawab

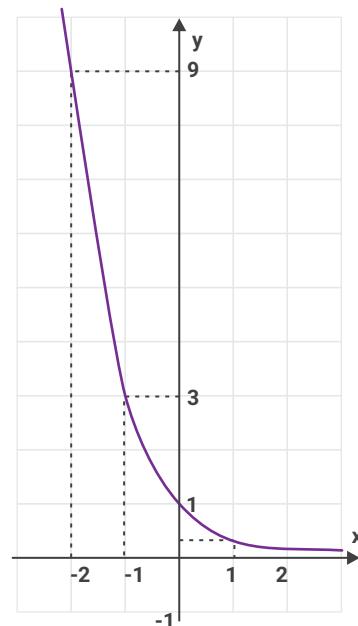
Buat tabel nilai fungsi berikut:

x	-3	-2	1	0	1	2	3
$f(x) = (\frac{1}{3})^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

Tabel Nilai fungsi $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

Dari tabel nilai fungsi kita dapatkan pasangan koordinat kartesius sebagai berikut:
 $(-3, 27), (-2, 9), (-1, 3), (0, 1), (1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{9}), (3, \frac{1}{27})$

Gambar grafik fungsi $f(x) = (\frac{1}{3})^x$



Contoh 3

Waktu paruh radium -226 adalah 1600 tahun. Sebanyak 50 gram radium -226 sampel ditempatkan di fasilitas penyimpanan bawah tanah dan dimonitor.

- Tentukan fungsi yang memodelkan masa radium -226 yang tersisa setelah x waktu paruh.
- Gunakan model fungsi untuk memprediksi jumlah radium -226 yang tersisa setelah 4000 tahun.
- Buat tabel nilai fungsi $m(x)$ pada interval $0 \leq x \leq 5$.
- Gambar grafik fungsi $m(x)$ berdasarkan tabel nilai fungsi dan apa yang dapat diceritakan dari grafik tentang peluruhan radium-226?

Jawab:

- Diketahui masa awal adalah 50 gram dan faktor peluruhan $a = \frac{1}{2}$ (faktor peluruhan 1600 tahun). Model fungsinya adalah $m(x) = 50 \cdot (\frac{1}{2})^x$ dengan x jumlah periode waktu 1600 tahun.
- Jumlah periode waktu yang mewakili 4000 tahun adalah $\frac{4000}{1600} = 2,5$
Jadi 4000 tahun mewakili 2,5 periode waktu paruh.
Dengan mensubstitusi $x = 2,5$ pada model fungsi di peroleh:

$$\begin{aligned}m(x) &= 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \\m(2,5) &= 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2,5} \\m(2,5) &\approx 8,84\end{aligned}$$

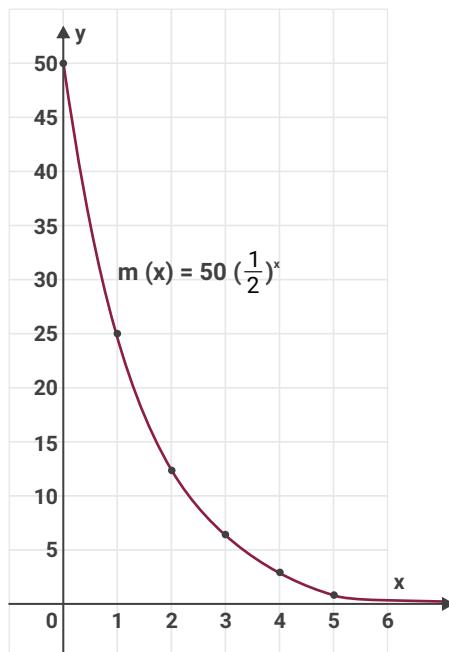
Jadi masa yang tersisa setelah 4000 tahun sekitar 8,84 gram.

- Tabel nilai fungsi (*menggunakan kalkulator*):

x	0	1	2	3	4	5
$m(x) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	50	25	12,5	6,25	3,125	1,562

Tabel Nilai fungsi $m(x) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d. Grafik fungsi $m(x) = 50 \cdot (\frac{1}{2})^x$ berdasarkan nilai dari tabel.



Gambar grafik fungsi $m(x) = 50 \cdot (1/2)^x$



B. Exercise

1. Jika ada grafik fungsi $f(x) = 2 \cdot 3^{1-x}$. Grafik fungsi melalui titik...

A. $(2, -)$	C. $(2, \frac{4}{3})$	E. $(2, -6)$
B. $(2, \frac{2}{3})$	D. $(2, -3)$	

2. Fungsi grafik $f(x) = k \cdot 2^{5x-8}$ melalui titik $(2, 20)$. Nilai- $3k$ adalah...

A. -15	C. -3	E. 15
B. -5	D. 5	

3. Fungsi grafik $f(x) = 6^{x+1} + 6^{1-x}$ memotong sumbu Y di titik...

A. $(0, 12)$	C. $(0, 0)$	E. $(12, 0)$
B. $(0, 6)$	D. $(6, 0)$	

4. Jika $f(x) = 2^x$, maka $f(m+n)$ sama dengan...

A. $f(m) + f(n)$	C. $f(m) - f(n)$	E. $[f(m)]^{f(n)}$
B. $f(m) \cdot f(n)$	D. $f(m) / f(n)$	

5. Jika $f(x) = 2^x$, maka nilai dari $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \dots$

A. $f(2)$	B. $f(4)$	C. $f(16)$
D. $f\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$		
E. $f(2x+2)$		

6. Jika $f(x) = 3^x$, maka $f(a + 2b - c) = \dots$

A. $f(a) + f(2b) - f(c)$

B. $\frac{2f(a) \cdot f(b)}{f(c)}$

C. $\frac{f(a) \cdot f(b))^2}{f(c)}$

D. $\frac{2f(a) + f(b))^2}{f(c)}$

E. $f(a + 2b) - f(c)$

7. Persamaan grafik yang sesuai dengan gambar di bawah adalah...

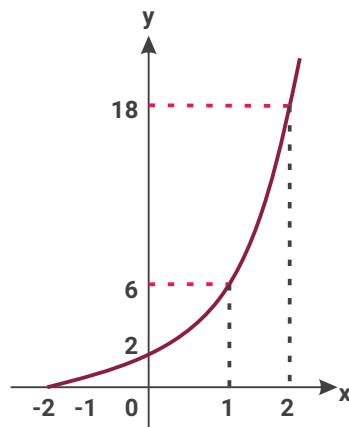
A. $y = +2 \cdot 2^x$

B. $y = (-2) \cdot 3^x$

C. $y = 2 \cdot 3^x$

D. $y = 3 \cdot 2^x$

E. $y = (-3) \cdot 2^x$



8. Jarak kedua titik potong kurva $y = 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2$ dengan sumbu x adalah...

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

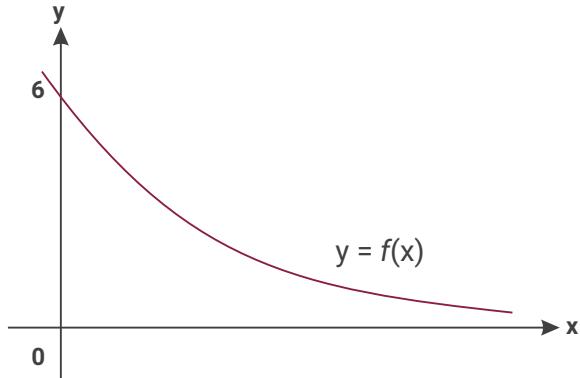
E. 6

9. Daerah hasil dari $y = f(x) = 5 + 3^{2x-1}$ adalah...

- A. $\{y \mid y < 5, y \in \mathbb{R}\}$
- B. $\{y \mid y > 0, y \in \mathbb{R}\}$
- C. $\{y \mid y > 5, y \in \mathbb{R}\}$
- D. $\{y \mid 0 < y < 5, y \in \mathbb{R}\}$
- E. $\{y \mid 1 < y < 5, y \in \mathbb{R}\}$

10. Fungsi yang sesuai dengan grafik berikut adalah...

- A. $y = 6 \times 2^x$
- B. $y = 6 \times 2^{x-1}$
- C. $y = 6 \times 2^{1-x}$
- D. $y = 3 \times 2^{x-1}$



Uraian

1. Diberikan $f(x) = 2^{2x-1}$, Carilah nilai dari $f(2)$ dan $f\left(\frac{1}{2}\right)$

2. Lukislah grafik fungsi $y = 2^x$ dengan $x \in \mathbb{R}$

3. Lukislah grafik fungsi eksponen berikut.

- A. $f(x) = 2^{x+1}$ pada interval $-3 \leq x \leq 3$
- B. $f(x) = 3^{x+1}$ pada interval $-3 \leq x \leq 3$

C. Persamaan Eksponensial

Ada beberapa bentuk dari persamaan eksponen

A. Bentuk $a^{f(x)} = 1$

Untuk menyelesaikan persamaan ini nilai 1 di ubah dengan basis yang sama (*bilangan pokok yang sama*)

Contoh:

Nilai x yang memenuhi persamaan: $2^{3x-6} = 1$

Jawab :

$$2^{3x-6} = 2^0$$

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

B. Bentuk $a^{f(x)} = a^p$

Untuk menyelesaikan persamaan ini digunakan sifat:

Jika $a^{f(x)} = a^p$; $a > 0$ dan $a \neq 1$,

Maka $f(x) = p$

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian

a. $5^{2x-1} = 625$

b. $2^{x-7} = \frac{1}{32}$

c. $\sqrt{3}^{3x-10} = \frac{1}{32}\sqrt{3}$

Jawab: a. $5^{2x-1} = 5^4$

$$2x - 1 = 4$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

b. $2^{x-7} = 2^{-5}$

$$x - 7 = -5$$

$$x = 2$$

c. $3^{\frac{(3x-10)}{2}} = 3^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$$(3x-10)/2 = -3 + \frac{1}{2}$$

$$3x-10 = -6 + 1$$

$$3x = -5 + 10$$

$$x = \frac{5}{3}$$

C. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Penyelesaian persamaan ini digunakan sifat:

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Maka $f(x) = g(x)$

Contoh:

Nilai x yang memenuhi dari persamaan

a. $9^{x+x} = 27^{x-1}$

b. $8^{2x+1} = 12^{8x-3}$

c. $\sqrt[x+2]{8} = \sqrt[x-4]{32}$

D. Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Penyelesaian persamaan ini digunakan sifat:

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$ dan $b \neq 1$, dan $a \neq b$

Maka $f(x) = 0$

Contoh:

a. $6^{x-3} = 9^{x-3}$

E. Bentuk $f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)}$

Maka penyelesaian bentuk tersebut adalah

1. Bilangan dasarnya sama $f(x) = h(x)$
2. $g(x) = 0$, dengan $f(x) \neq 0$ dan $h(x) \neq 0$ (**harus dicek terlebih dahulu**)
3. $f(x) = -h(x)$ dengan $g(x)$ harus genap (**harus dicek terlebih dahulu**)

F. Bentuk $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

Untuk menyelesaikan persamaan bentuk diatas perlu dipertimbangkan beberapa kemungkinan:

- 1). $g(x) = h(x)$
- 2). $f(x) = 1$
- 3). $f(x) = -1$, dengan syarat $g(x), h(x)$ genap atau $g(x), h(x)$ ganjil
- 4). $f(x) = 0$, dengan syarat $g(x) > 0, h(x) > 0$

G. Bentuk $f(x)^{g(x)} = 1$

Penyelesaian persamaan bentuk diatas adalah

1. Bilangan dasar $f(x) = 1$, sebab $1^{g(x)} = 1$
2. Bilangan dasar $f(x) = 1$, dengan syarat $g(x)$ bilangan genap (**harus dicek terlebih dahulu**)
3. $g(x) = 0$, dengan syarat $f(x) \neq 0$ (**harus dicek terlebih dahulu**)

H. Bentuk $A(a^{f(x)})^2 + B(a^{f(x)}) + C = 0$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, dilakukan dengan cara mengubah persamaan tersebut ke bentuk persamaan kuadrat, memisalkan $a^{f(x)} = p$, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi persamaan kuadrat
 $Ap^2 + Bp + C = 0$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$.



D. Exercise

1. Apabila $2^{x^2 - 2x - 18} = \frac{1}{8}$, maka nilai x yang memenuhi adalah...

A. {-3, 5}	C. {3, 5}	E. {-1, 3, 5}
B. {-5, 3}	D. {1, 3, 5}	
2. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\sqrt{5^{3x-10}} = \frac{1}{8}\sqrt{5}$

A. 2/3	C. 4/3	E. 2
B. 1	D. 5/3	
3. Akar dari persamaan $3^{5x-1} = 27^{x+3}$ adalah...

A. 1	C. 3	E. 5
B. 2	D. 4	
4. $\left(\frac{3}{3^{x-2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ maka nilai x adalah...

A. $\frac{2}{3}$	C. $-3\frac{1}{2}$	E. $-4\frac{1}{2}$
B. $4\frac{1}{2}$	D. $3\frac{1}{2}$	
5. Jika t adalah bilangan real positif yang memenuhi $5^{t^4 - 1} = 3^{t^4 - 1}$, maka nilai dari $t^{2.020}$ sama dengan...

A. -1	C. 1	E. 2.020
B. 0	D. $2^{2.020}$	
6. Himpunan penyelesaian dari $(2x - 3)^{x+1} = 1$ adalah $\{x_1, x_2, x_3\}$. Nilai dari $x_1 + x_2 + x_3$ adalah...

A. -1	C. 1	E. 4
B. 0	D. 2	



E. Challenge

1. Jika $\sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{\frac{4}{3} \sqrt{\frac{3}{4}}} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^m$ maka nilai m =...

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{3}{3}$

C. 1

D. -2

E. 0

2. Untuk x dan y yang mempengaruhi sistem persamaan:

$$5^{x-2y+1} = 25^{x-y} \text{ dan } 4^{x-2y+1} \text{ maka nilai } x.y =$$

A. 6

B. 8

C. 10

D. 15

E. 20

3. Pak Yudi sedang membuat kopi di cangkir dengan suhu 212°F untuk menghilangkan kejemuhan dalam bekerja. Saat itu suhu ruang kerja 77°F . Suhu kopi mengalami perubahan mengikuti hukum pendinginan Newton:

$$S(t) = L - Ae^{-pt}$$

Dengan L adalah suhu lingkaran, serta A dan P adalah konstan. $S(t)$ menyatakan suhu berdasarkan waktu (t) dalam satuan menit. Setelah didiamkan selama 5 menit, suhu kopi turun hingga 160°F . Kopi siap diminum jika suhunya sudah dibawah 159°F .

- A. Tentukan nilai dari konstanta A dan P
- B. Tuliskan perubahan suhu setelah A dan P diketahui
- C. Apakah kopi siap diminum setelah didiamkan 10 menit

Daftar Pustaka

- Imron, Muhammad. 2011. *Bahan Ajar Pola, Barisan dan Deret*. Jakarta: Universitas Gunadarma.
- Manullang, Sudianto. dkk. 2017. *Matematika SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Suwarno, Muji. 2017. *Aplikasi Barisan dan Deret*. Dalam:
<https://www.materimatematika.com/2017/10/aplikasi-barisan-dan-deret.html> tanggal 15 September 2020
- Adi, dkk. 2018. *Belajar Praktis Matematika Untuk SMA/MA Kelas X Semester 1*. Klaten : viva pakarindo
<https://drive.google.com/file/d/113TmazQyu9SMmz-rvWT7zqk87Obo2dLO/view> tanggal 10 januari 2023
- Sutisna, Entis. 2020. *Fungsi Eksponen Dan Fungsi Logaritma Matematika Peminatan Kelas X*. Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Angraini, Yenni Dian. 2020. *Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel matematika umum kelas X*. Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.



TRIMURTI
SENIOR HIGH SCHOOL



www.smatrimurti.sch.id

SMA TRIMURTI SURABAYA

smatrimurtiofficial

