

Data Mining
**Etude de cas : Analyse de
phonèmes**

Darlène NIBOGORA

Ariinui TERITEHAU

Master 1 EKAP

Sommaire

I. Introduction-----	3
A. Présentation du sujet.....	3
B. Description des variables	4
II. Une analyse exploratoire non supervisée -----	6
A. Classification hiérarchique ascendante.....	6
B. Méthode de partitionnement type kmeans (centre mobiles).....	8
C. Caractérisation des classes obtenues	9
D. Classification des individus.....	9
III. Une analyse supervisé, discrimination -----	12
A. Une analyse factorielle discriminante.....	12
B. PLS-DA.....	14
IV. Conclusion -----	17
V. Annexe-----	18

I. Introduction

Au cours de ces dernières décennies , la reconnaissance automatique de la parole est un domaine qui a captivé le public ainsi que de nombreux chercheurs.

En effet,il s'agit d'un domaine qui recouvre tous les aspects liés à l'interprétation, par la machine, du langage humain et comprend trois grands types de systèmes(les systèmes de commandes vocales, les systèmes de dictée automatique, les systèmes de compréhension.

Cependant,la reconnaissance vocale permet de gagner du temps et elle est utilisée dans plusieurs domaines comme la bureautique (exemple:commande de fonctions, entrée de données, machine à écrire automatique), l'aviation(exemple:commande d'appareillages, contrôle aérien automatique),les services et le commerce(exemple:consultation par entrée vocale, contrôle de gestion de stock, traduction simultanée),etc.

En outre,la reconnaissance vocale est confrontée aux problèmes dans les interprétations et les exécutions des commandes vocales.D'une part, ces problèmes sont liés à une grande variabilité de la parole :variabilité intralocuteur (exemple: voix chantée, criée, murmurée, enrhumée, enrouée, sous stress, bégaiement,. ..)et à la variabilité interlocuteur (exemple:timbres différents, voix masculines, féminines, voix d'enfants,phonème,...). D'autre part,ils sont liés à la continuité et à la coarticulation (la production d'un son est fortement influencée par le son qui le précède et qui le suit en raison de l'anticipation du geste articulatoire).

Ainsi, malgré l'incroyable évolution dans les recherches pour avoir des reconnaissances vocales plus performantes , les résultats obtenus sont encore loin de l'idéal espéré. En effet, dans les cadres applicatifs réels, certains systèmes sont toujours soumis à de nombreuses difficultés qui freinent l'évolution des performances.

A. Présentation du sujet

La base de données utilisée dans cette étude a été extraite dans la base de données TIMIT (qui est une ressource largement utilisée pour la recherche en reconnaissance

vocale). Elle contient d'une part 4509 observations qui sont des trames vocales d'une durée de 32ms avec environ 2 exemples pour chaque locuteur sélectionnées à partir de 50 discours enregistrés, et d'autre part, elle contient 256 variables issues du log périodogramme effectué sur les différents trames.

Le but de ce projet consiste à faire la discrimination de cinq phonèmes transcrits comme suit: "sh" comme dans "she", "dcl" comme dans "dark", "iy" comme la voyelle dans "she", "aa" comme la voyelle dans "dark", et "ao" comme première voyelle dans "water".

Dans le but de mieux faire nos analyses, nous avons commencé à faire un découpage du jeu de données en un échantillon d'apprentissage et test suivant la variable locuteur, ce qui nous a conduit à une base de données avec 257 variables.

Pour classer nos données, on va tout d'abord faire une courte description statistique des variables. Puis on procède à une analyse exploratoire non supervisée dont on cherche à « cluster » les données. Ensuite, on réalise une analyse supervisée en discriminant les observations. Pour terminer, on va faire une courte synthèse de l'étude.

B. Description des variables

Il est difficile de faire une description de la base à cause de la masse de données qu'elle possède. On décide de séparer la base train selon le phonème, par exemple on peut voir sur la figure A qui représente le log périodogramme en ordonnées et la fréquence en abscisses du phonème « sh ». Par ailleurs, il présente bien le maximum et le minimum de la base du phonème « sh », la valeur maximale avoisine 25 et la valeur minimale tend vers 0. La ligne blanche sur le graphique indique grossièrement la moyenne des données.

De plus, en regardant le spectre des différents phonèmes, on constate des similarités pour les phonèmes « iy », « aa » et « ao » entre la fréquence 50 et 150, tandis que, les spectres des phonèmes « sh » et « dlc » se distinguent entre eux. Lors de l'analyse non supervisée, il est possible qu'on fait face à une difficulté de « cluster » sur les observations, de même dans la deuxième partie de l'analyse dans la prédiction des observations.

Figure A : Phoneme « sh »

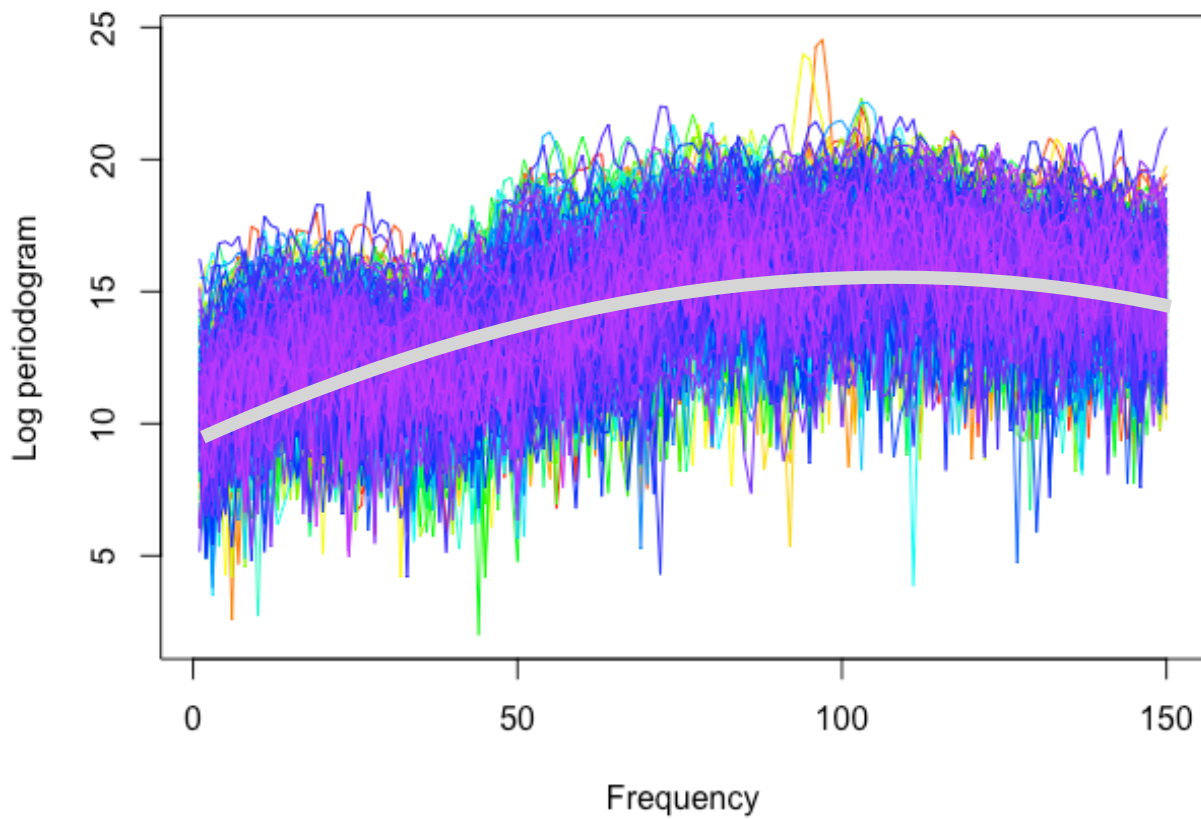


Figure B : Phoneme « iy »

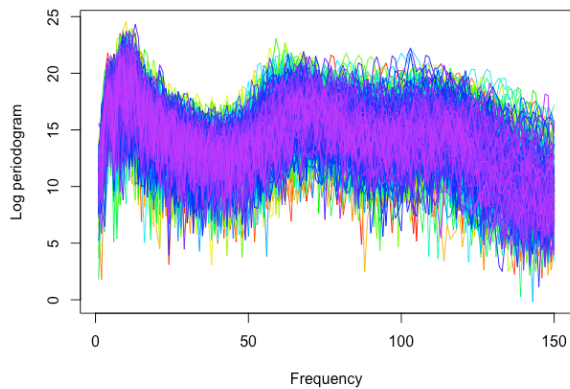


Figure C : Phoneme « ao »

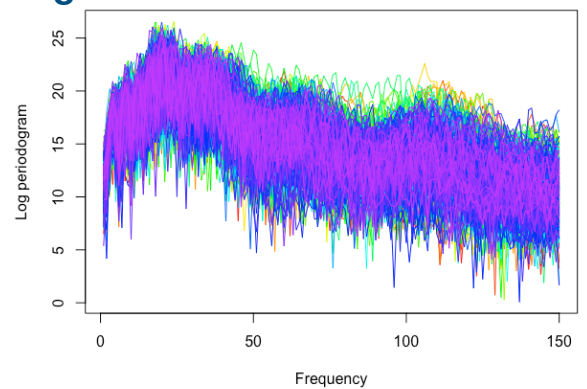


Figure C : Phoneme « dcl »

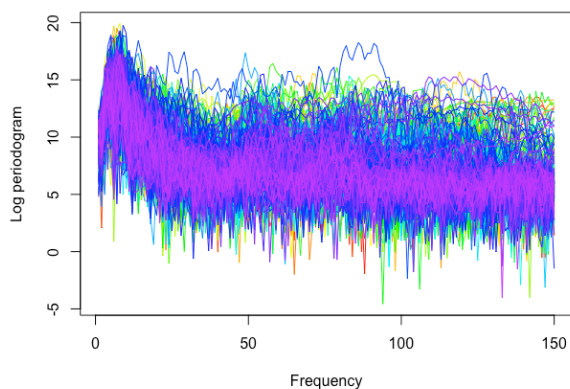
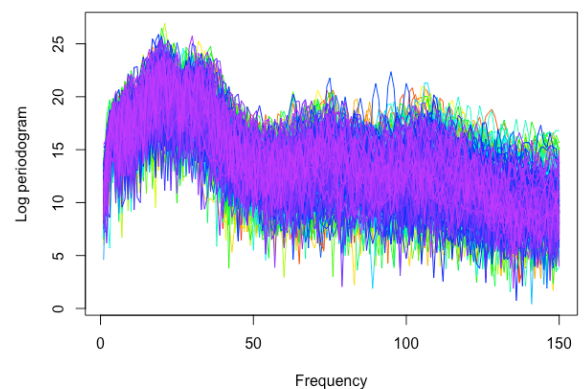


Figure C : Phoneme « aa »



II. Une analyse exploratoire non supervisée

Tout d'abord, on va réaliser une analyse exploratoire non supervisée des données sur les phonèmes avec une classification des trames vocales sur l'échantillon d'apprentissage (train), afin d'avoir une représentation simplifiée des données. L'objectif est de faire une classification hiérarchique ascendante (CAH) dont le principe est de regrouper plusieurs objets au sein d'une même classe soit les plus semblable possible. On peut aussi parler de la méthode de « cluster », une méthode d'apprentissage non supervisée qui va permettre de trouver des patterns dans le jeu de données.

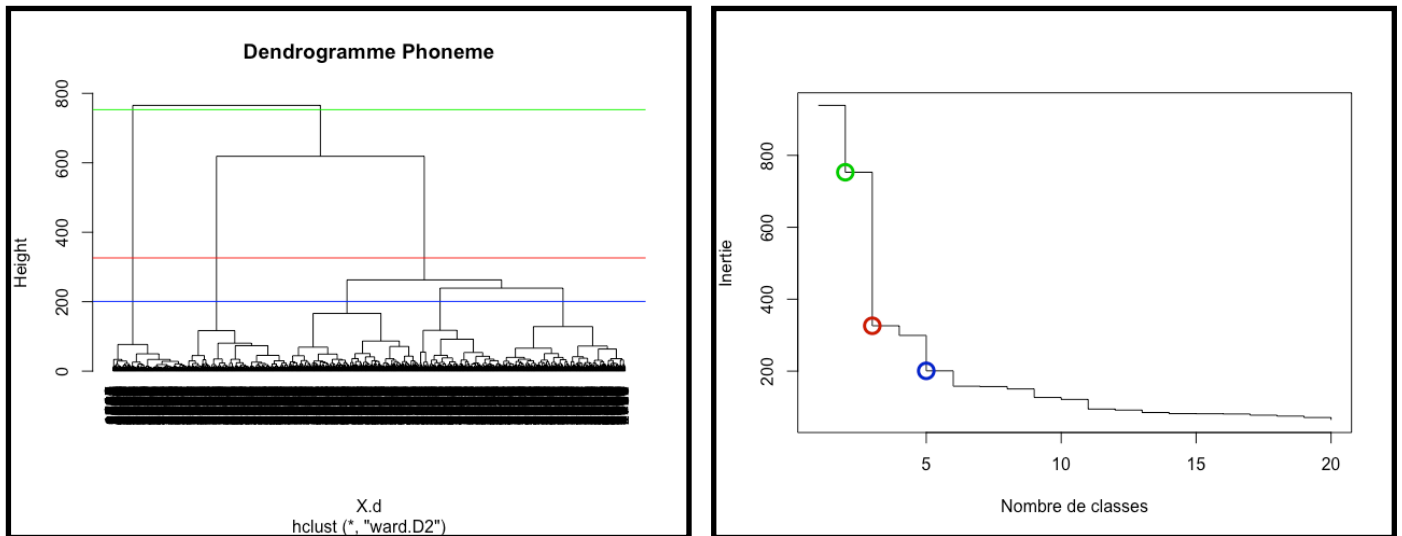
Pour mesurer cette notion de similarité dans les observations de trames vocales, on procède avec l'algorithme K-means qui est un moyen de comparer le degré de similarité entre les différentes observations. On a une distance de dissimilarité réduite, autrement les deux objets différentes ont une distance de séparation plus grande. On utilise la distance Euclidienne pour mesurer la distance entre les observations.

A. Classification hiérarchique ascendante

Pour commencer l'analyse, on procède à la classification hiérarchique ascendante, on applique la méthode de Ward dont le but est l'augmentation du minimum de la somme des carrés. On obtient les résultats en graphique, *la figure 1* représente le dendrogramme de notre modèle et la variation d'inertie Intra. On veut déterminer le nombre de classes en utilisant l'échelle des indices d'agrégation. Le dendrogramme a été créé avec la fonction `agnes` et `hclust` avec le logiciel R.

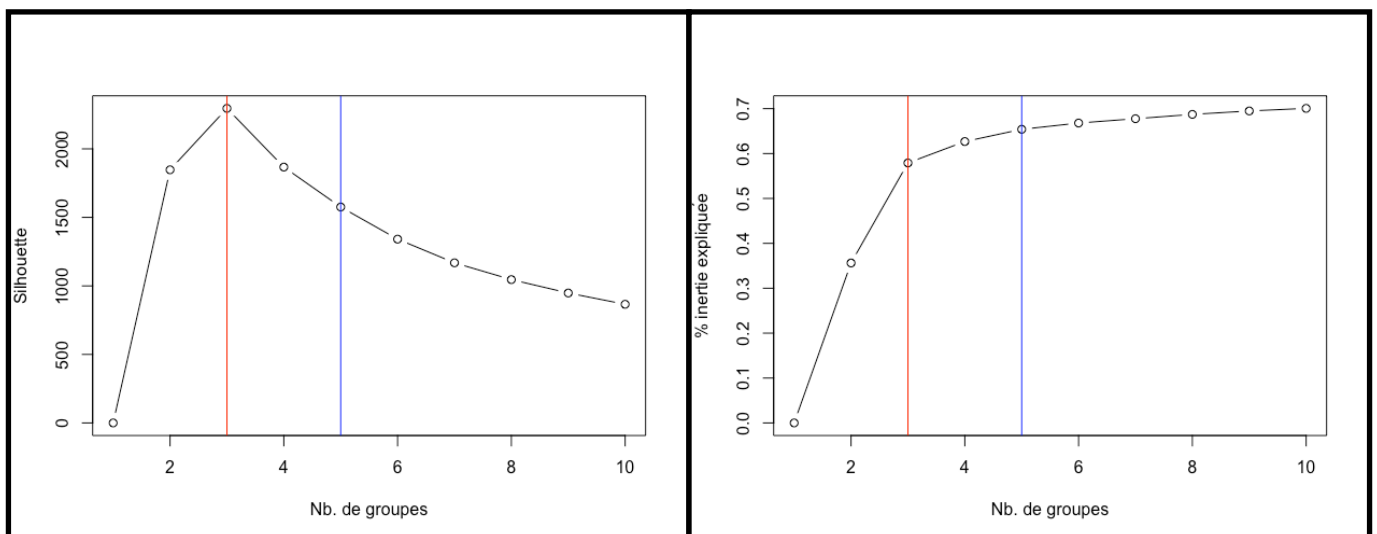
D'après le graphique de droite, on constate une inertie intra importante lors du passage de 2 à 1 classe représentée avec un petit cercle vert, 3 à 2 classe en rouge et 5 à 3 classe en bleu. Selon ces résultats, il est pertinent de classer nos données en 3 ou 5 classes. Le graphique de gauche représentant le dendrogramme, illustre lisiblement les différentes classes. Ainsi, on peut voir avec les droites horizontales tracées qui correspondent aux couleurs de classes vues précédemment. La hauteur des branches indique aussi l'inertie des classes.

Figure 1



En outre, pour pouvoir confirmer notre choix sur le nombre de classes, on va utiliser le critère de *Calinski* et *Harabasz*. Le critère calcule la somme des distances entre la k -ième classe et les $(k-1)$ -ième classe et la compare avec la somme des distances à l'intérieur de chacune des k classes. Avec l'aide de l'indice de *Calinski* et *Harabasz*, on obtient la figure 2 pour définir parfaitement le choix du nombre de classes. En regardant le graphique de droite, la silhouette de la courbe indique un point maximum à la classe 3. Ce critère permet de confirmer le choix de nos 3 classes, la figure 3 (annexe) montre de manière lisible la classification (« cluster ») de 3 groupes dans le dendrogramme.

Figure 2



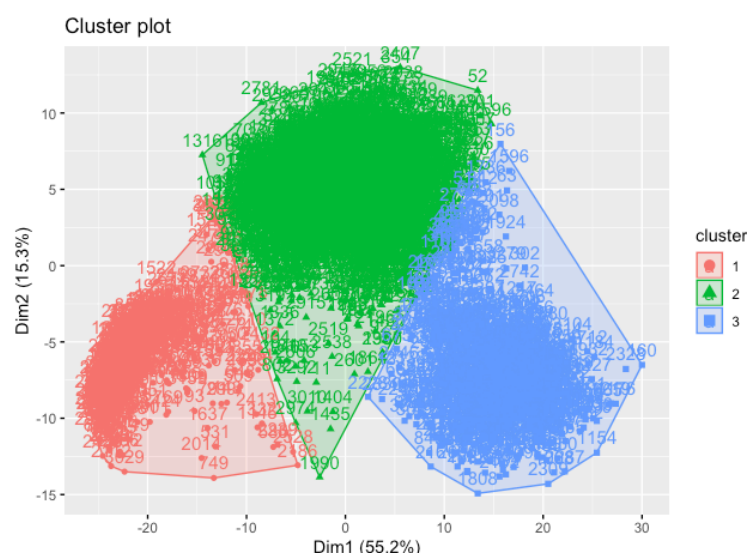
Par ailleurs, il existe une méthode de distinction entre classes 3 et 5. En utilisant le critère de *Kaufman et Rousseeuw*, les résultats dans la *figure 4 (annexe)* indique l'importance du choix de la classe 3. Car on constate que quand $k=5$, on a le groupe 4 et 5 qui ont un nombre d'observations très faible par ce critère. La largeur moyenne de la silhouette quand $k=3$ est égale à 0.36 contre 0.24 quand $k=5$. Donc il est préférable de choisir la classe 3.

B. Méthode de partitionnement type kmeans (centre mobiles)

Cette méthode de partitionnement nous fournit une partition unique des éléments à classer, le nombre de classes K devant être fixé au départ. On avait dit que la méthode de k -means minimise l'inertie Intra-classe et à l'aide de l'algorithme, on a pu stabiliser les centres des classes comme le montre *figure 5*.

La méthode de partitionnement est illustrée par l'initialisation aléatoire (*figure 5*) grâce à l'algorithme k -means qui passe par 3 étapes. D'abord il choisit aléatoirement n individus (étape 1), puis affecte chaque individu au centre le plus proche qui est une partition en k classes (étape 2) et recalcule les centres de chacune des classes (étape 3). Ainsi l'étape 2 et 3 sont répétées jusqu'à la stabilité des centres.

Figure 5



Pour vérifier la pertinence de notre choix du nombre de classes, on se doit de vérifier la qualité de la partition en faisant le rapport entre l'inertie interne et inertie totale. On utilise la fonction $kmeans$ avec le paramètre « Macqueen », et on retrouve une qualité qui est égale à 62,67%.

$$\frac{I_{inter}}{I_{totale}} = \frac{535730.2}{854784} = 0.6267$$

Or, on a une bonne qualité de la partition qui incite à choisir 3 classe. De plus, l'algorithme montre la répartition des observations dans les trois différentes classes. En regardant le tableau (*figure 6, annexe*), on remarque que la répartition des classes est différente dans la première estimation avec le critère Kaufman et Rousseeuw (*figure 4, annexe*) et celle du k-means. Cette différence se présente aussi dans la silhouette du k-means (*figure 7, annexe*). On voit que la largeur moyenne de la silhouette est de 0.36 pour k=3, qui est la même dans le critère vu avant. Par ailleurs, quand k=5, on constate que la partition des observations dans les classes est différente par rapport au premier critère et la largeur moyenne est élevée de 0.02.

C. Caractérisation des classes obtenues

Après une classification ascendante hiérarchique puis une confirmation du choix du nombre de classes par la méthode de K-means, il faut caractériser les classes par la hiérarchisation des variables, on réalise alors une étude statistique de test de comparaison avec valeur-test. Le test distingue si les modalités sont corrélées positivement ou négativement.

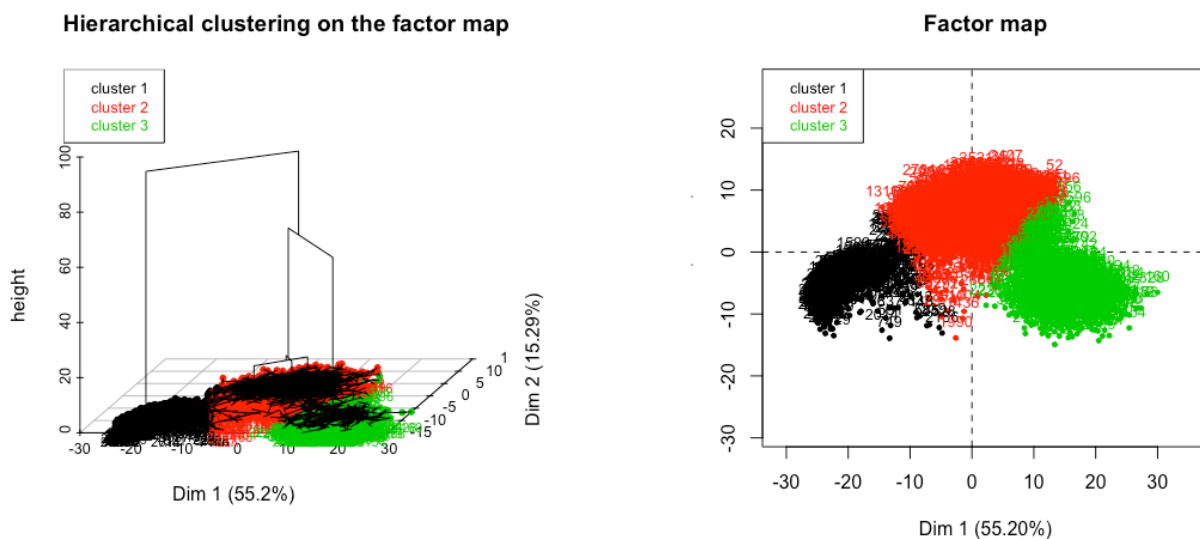
On n'accepte que les variables qui ont une valeur absolue supérieure à 2, pour qu'elles soient présentées dans la classe. Il n'est pas possible d'illustrer le modèle par un graphique à cause de la grande quantité de variables (256 variables) et l'immense quantité d'observations (3340 observations). En regardant un extrait des variables (*figure 8*) pour le phonème « dcl », on constate que la majorité des variables a une valeur absolue supérieure à 2 et on voit aussi de manière équivalente que les variables sont corrélées positivement et négativement.

D. Classification des individus

Pour illustrer la classification des individus, on réalise une partition sur la base des composantes principales de l'ACP (analyse en composantes principales) en utilisant les résultats de la hiérarchisation de classification provenant de la méthode de k-means. La *figure 9* indique bien le regroupement des individus dans 3 groupes distincts. Le

graphique de gauche de la *figure 9* , montre un plan factoriel hiérarchique de 3 clusters en 3 dimensions avec une représentation du dendrogramme. Le graphique de droite montre la répartition des points sur une surface de 2 dimensions qui se regroupe nettement en 3 classes. Ainsi, ici on ne conserve que les 3 premières composantes qui extraient l'information, les deux derniers sont considérées comme du bruit. Les graphiques montrent aussi l'inertie des deux premières composantes. La première composante représente la part d'inertie la plus importante dont elle explique à elle-seule avec 55.20% de l'inertie totale et 15.29% pour la deuxième composante.

Figure 9



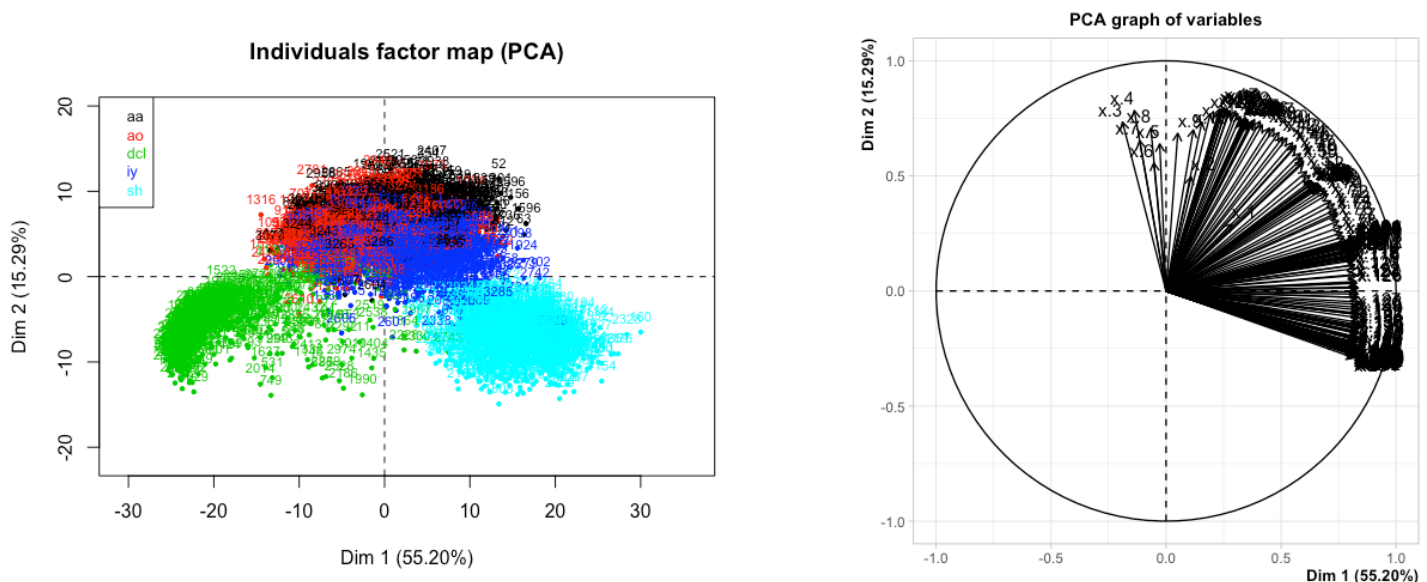
Dans l'analyse exploratoire non supervisée, en pratiquant deux méthodes de classification qui sont la classification hiérarchique ascendante et la méthode de kmeans, on a pu faire ressortir 3 groupes distincts selon les données. A l'initial, l'objectif principal de cette étude était d'essayer de classer les observations par cinq phonèmes : « sh », « dcl », « iy », « aa » et « ao ». On peut supposer que l'un des trois phonèmes se confondent par l'ouïe comme par l'exemple le phonème « aa » et « ao ». Pour identifier quels phonème se confondent, on peut utiliser une nouvelle fois l'ACP (*figure 10*) avec la variable illustrative qui est une variable qualitative qui a 5 modalités (les cinq phonèmes).

Pour commencer, on trouve la même inertie que la *figure 9* , les deux premières composantes explique 70,49% de l'inertie totale. Puis on s'intéresse au cercle de corrélation des variables. Ainsi, les variables se trouvent principalement dans un quart du cercle et dans la partie positive. On peut aussi remarquer que les vecteurs qui

représentent les variables, ainsi deux vecteurs qui sont perpendiculaire, ce sont deux variables qui ont une corrélation nulle alors que les vecteurs qui sont proches ou à l'opposé par rapport au centre, ont une corrélation fortement positive et négative. De plus, on remarque aussi que la majorité des variables ont des vecteurs qui se trouvent pratiquement sur le périmètre du cercle, ainsi elles contribuent fortement et sont corrélées positivement aux deux premières axes.

Maintenant, on s'intéresse à la répartition des individus. Les points se trouvant loin du barycentre, sont les individus qui contribuent fortement aux axes. Selon la répartition des individus dans le plan, on constate que les hypothèses de départ pour les phonèmes « aa » et « ao » sont validées. En effet, les points sont dispersés de façon confondue dans le plan de l'ACP de même pour le phonème « iy ». Ainsi, les points des trois phonèmes sont confondus partiellement dans le plan. Tandis que les phonèmes « dcl » et « sh » se répartissent de manière hétérogène dans le plan. On peut dire qu'auditivement, il est facile de distinguer le son par rapport aux trois autres phonèmes.

Figure 10



III. Une analyse supervisé, discrimination

Dans cette partie, on cherche à réaliser une analyse factorielle discriminante sur la base des phonèmes. Précédemment, on avait supposé qu'on ne connaissait pas la variable qualitative phonème lors de notre étude sur la classification des différentes observations de trames vocales de la base train. On avait « cluster » 3 classes d'après les résultats des deux différentes méthodes au lieu de 5 classes. Le choix de 3 classes était supposer que 3 des 5 phonèmes sonnaient similaire auditivement.

Ainsi, l'intérêt principal de cette partie est d'analyser les relations entre la variable qualitative Y et les 256 variables X en discriminant les phonèmes. Lors de l'étude, on va construire une règle d'affectation permettant de prédire la reconnaissance vocale du phonème en fonction de la base de données. La première méthode utilisée ici, est l'analyse factorielle discriminante, ensuite on appliquera la méthode de PLS-DA afin de comparer la qualité des deux modèles sur le choix de prédiction de la classification.

A. Une analyse factorielle discriminante

On procède à une caractérisation des classes par rapport à la variable qualitative phonème selon 5 modalités (« sh », « dcl », « iy », « aa » et « ao »). L'intérêt de cette étude est de trouver la variable la plus discriminante à travers une analyse factorielle discriminante.

En utilisant le logiciel R, on calcule le CorRatio R^2 et FRatio afin de trouver la variable la plus discriminante dans notre étude. *Figure 11 (annexe)* donne un extrait des résultats du CorRatio et FRatio, on remarque que la p_value pour toutes les variables sont nulles ce qui nous permet de conclure qu'elles sont significativement discriminatives, donc les variables X maximisent la variance interclasse. On trouve le minimum de CorRatio R^2 à 11.8% et le maximum à 80% avec un Fratio maximum de 3529.782 pour la variable 30 de notre base.

Ensuite, on cherche à optimiser le R^2 , pour avoir une meilleure qualité du modèle. On utilise la fonction desDA qui utilise la matrice de covariance des variables X dans les calcul afin d'obtenir les valeurs propres. Ainsi, on se retrouve avec une nouvelle matrice de covariance intra-classe. Dans l'extrait des résultats dans *figure 12* (annexe), on remarque que toutes les variables ont une p_value nulle, alors le fait que les p_values sont inférieures à 5%, et les lambda de Wilks sont très faibles. Donc les barycentres des 5 groupes sont suffisamment éloignés entre eux et les variables X sont fortement discriminantes.

Dans ce modèle avec l'étude de la matrice de covariance et la fonction desDA. La fonction nous donne 4 variables discriminantes de D1 à D4 pour toutes les variables X.

En comparant la qualité de la discrimination de la variable DF1, on a un corRatio qui est égal à 95%, alors elle est supérieure à la variable X.30 qui était de 80%. La combinaison linéaire est capable de discriminer à 95%. Avec une corrélation très forte proche de 1, on est capable de prédire parmi les 5 phonèmes l'ensemble de nos observations.

La fonction geoDa permet de prédire les différents phonèmes, table(y) représente les valeurs dans notre base train ,ainsi on l'obtient dans le tableau 1 suivant:

Tableau 1

		predicted				
original		aa	ao	dcl	iy	sh
aa		434	85	0	0	0
ao		89	670	0	0	0
dcl		0	0	553	8	1
iy		0	0	1	851	0
sh		0	0	0	0	648


```

> table(y)
y
  aa  ao dcl  iy  sh
519 759 562 852 648

> tx.err.app
[1] 0.05508982

```

On remarque que les phonèmes « dcl », « iy » et « sh » sont très bien prédites, tandis que dans la prédiction du phonème « aa », il y a 89 observation qui sont mal prédites dans « ao » et il y a 85 observations mal prédites pour « aa ». Il est important de s'intéresser au taux d'erreur dans la prédiction, on a un taux d'erreur 5,5%, qui est très faible. Cela nous amène à conclure qu'on peut se fier à ce modèle de prédiction.

B. PLS-DA

La PLS-DA est une adaptation de la régression PLS sous la forme de discrimination, elle est appliquée selon une règle géométrique. On va utiliser la PLS-DA sur la base de jeu de données train. On s'intéresse à analyser les résultats de R^2Y cumulés (*figure 13*), on remarque qu'on doit choisir trois composantes dans la suite de l'étude à cause du grand saut entre la 2ème et la 3ème composante. Les trois premières composantes cumulées représentent 60,7% de l'inertie totale du modèle. D'après Q^2 global, il est possible de confirmer notre choix de composantes. Dans la *figure 13* (*annexe*), on remarque qu'à la quatrième ligne, Q^2 global est une valeur négative donc il est préférable de sélectionner t, t2 et t3 car elles ont des valeurs positivement. On constate que t3 qui a Q^2 la plus élevée égale à 0.33 et t2 avec 0.33.

On lance la fonction plsDa sous R afin qu'elle prédise les 5 modalités de phonème. On obtient le tableau 2 suivant :

Tableau 2

	predicted				
original	aa	ao	dcl	iy	sh
aa	318	187	0	14	0
ao	57	696	0	6	0
dcl	0	0	536	15	11
iy	5	4	3	815	25
sh	0	0	0	0	648

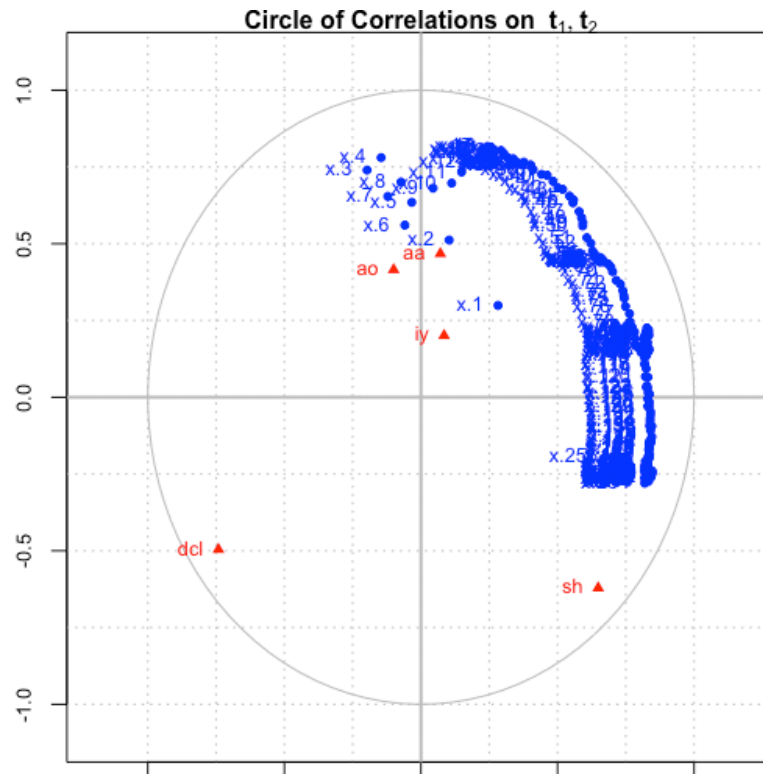
```
> table(y)
y
aa  ao dcl  iy  sh
519 759 562 852 648

> my_pls1$error_rate
[1] 0.09790419
```

En regardant les résultats, on constate que la valeur prédite pour le phonème « aa » est 57 qui n'est pas l'original et que cette modalité a été plutôt prédite pour le phonème « ao » et faiblement pour « iy ». « ao » est aussi mal prédit avec 187 observations pour le phonème « aa ». On se doit de calculer le taux d'erreur de prédiction pour montrer la mauvaise qualité de se modèle. On trouve un taux d'erreur de 9%% qui est plus élevé par rapport au modèle de prédiction vu précédemment.

Cette confusion d'erreur peut s'expliquer par le graphique (*figure 14*), les emplacements des modalités « ao » et « aa » sont très proches par rapport aux trois autres. Par ailleurs, les phonèmes « dcl » et « sh » sont très hétérogènes sur le plan factoriel, ils sont plus éloignés des autres modalités.

Figure 14



Enfin, on se doit de comparer nos résultats sur les deux prédictions, puis les observations sur les données test. Dans l'analyse factorielle discriminante, on avait vu que le taux d'erreur était plus faible et était égal à 5% contre 9% pour la plsDA, cela nous amène à sélectionner le premier modèle. En comparant la prédiction de l'AFC et des données test, (figure 15) en pourcentage, on remarque que pour les phonèmes « aa » et « ao », on trouve une différence de 2% alors que pour les trois autres phonèmes, la différence est très faible. En effet, cette erreur de prédiction a été expliquée par le fait qu'il était difficile de distinguer les deux phonèmes physiquement (auditivement) et avec l'ensemble des données.

Figure 15

```
> round((mat.confusion.app/3340)*100,4)
```

```
y      aa      ao      dcl      iy      sh
aa 12.9940  2.5449  0.0000  0.0000  0.0000
ao  2.6647 20.0599  0.0000  0.0000  0.0000
dcl 0.0000  0.0000 16.5569  0.2395  0.0299
iy  0.0000  0.0000  0.0299 25.4790  0.0000
sh  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 19.4012
```

```
> round((table(data_test$g)/1169),4)*100
```

```
      aa      ao      dcl      iy      sh
15.06 22.50 16.68 26.60 19.16
```

```
> round((table(data_train$g)/3340),4)*100
```

```
      aa      ao      dcl      iy      sh
15.54 22.72 16.83 25.51 19.40
```


IV. Conclusion

Cette étude avait pour but d'étudier la discrimination de cinq phonèmes sur un jeu de données provenant TIMIT qui est une ressource largement utilisée pour la recherche en reconnaissance vocale. Tout d'abord, on a procédé à une analyse non supervisée, c'est à dire on devait estimer le nombre de classes sans connaître les cinq différents phonèmes. On a pu « cluster » trois principaux groupes au lieu des cinq prévus. En effet, à l'ouïe, il est difficile de distinguer le phonème « ao » et « aa », de même pour le phonème « iy » lequel on avait vu à travers de l'ACP, la modalité était confondue avec les deux autres phonèmes précédents alors que les phonèmes « dcl » et « sh » étaient répartis de manière hétérogène.

Ensuite, on a réalisé une analyse supervisée en prenant on compte de la variable qualitative à plusieurs niveaux qui étaient les phonèmes avec cinq modalités afin de faire une prédiction sur l'ensemble de nos données d'entraînement. On a commencé avec une analyse factorielle discriminante (AFC) dont le but était d'identifier les variables X pouvant classer facilement nos observations et de prédire les observations selon les 5 modalités. Puis, on a fait une autre analyse de PLS-DA, un modèle de régression des moindres carrés partiels qui avait pour le même but de prédiction. En comparant, la qualité de prédictions sur les deux modèles, on a constaté que l'AFC était meilleure qualité par rapport à la PLS-DA. Pour valider les résultats de prédiction, on a du comparé avec un autre jeu de données « test », ainsi on a trouvé très peu d'erreur de prédiction dans l'AFC .

Enfin, cette étude est très utilisée dans la vie quotidienne dans la reconnaissance vocale, par exemple dans nos appareils électroniques pour la reconnaissance vocale lequel la modélisation se fait par des algorithmes « d'auto-éducation » d'un robot, on parle alors de Machine Learning, la machine essaye de reconnaître le son selon sa base de données et l'exploitation de celle-ci.

V. Annexe

Figure 3 Colored Dendrogram (3 groups)

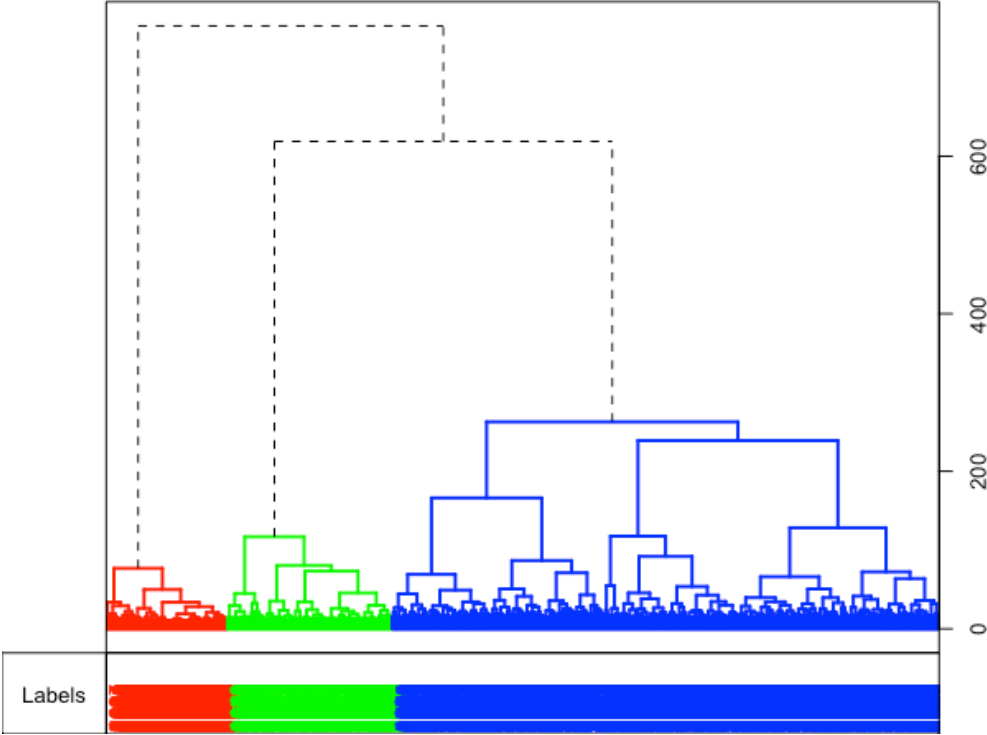


Figure 4

Silhouette plot of ($x = \text{cutree}(X.\text{agnes}, k = 3), \text{dist} = \text{daisy}(X.\text{cr})$)

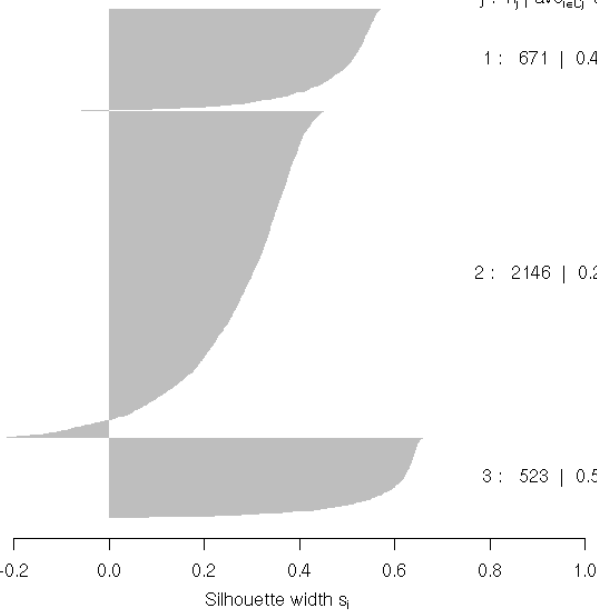
$n = 3340$

3 clusters C_j
 $j : n_j \mid \text{ave}_{i \in C_j} s_i$

1 : 671 | 0.47

2 : 2146 | 0.27

3 : 523 | 0.57



Average silhouette width : 0.36

Silhouette plot of ($x = \text{cutree}(X.\text{agnes}, k = 5), \text{dist} = \text{daisy}(X.\text{cr})$)

$n = 3340$

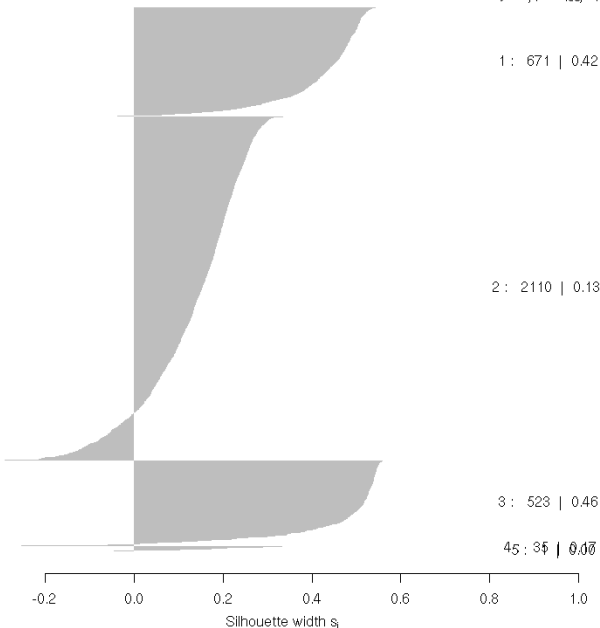
5 clusters C_j
 $j : n_j \mid \text{ave}_{i \in C_j} s_i$

1 : 671 | 0.42

2 : 2110 | 0.13

3 : 523 | 0.46

45 : 35 | 0.03



Average silhouette width : 0.24

Figure 6

	1	2	3
1	0	2076	0
2	724	0	0
3	0	0	540

Figure 7

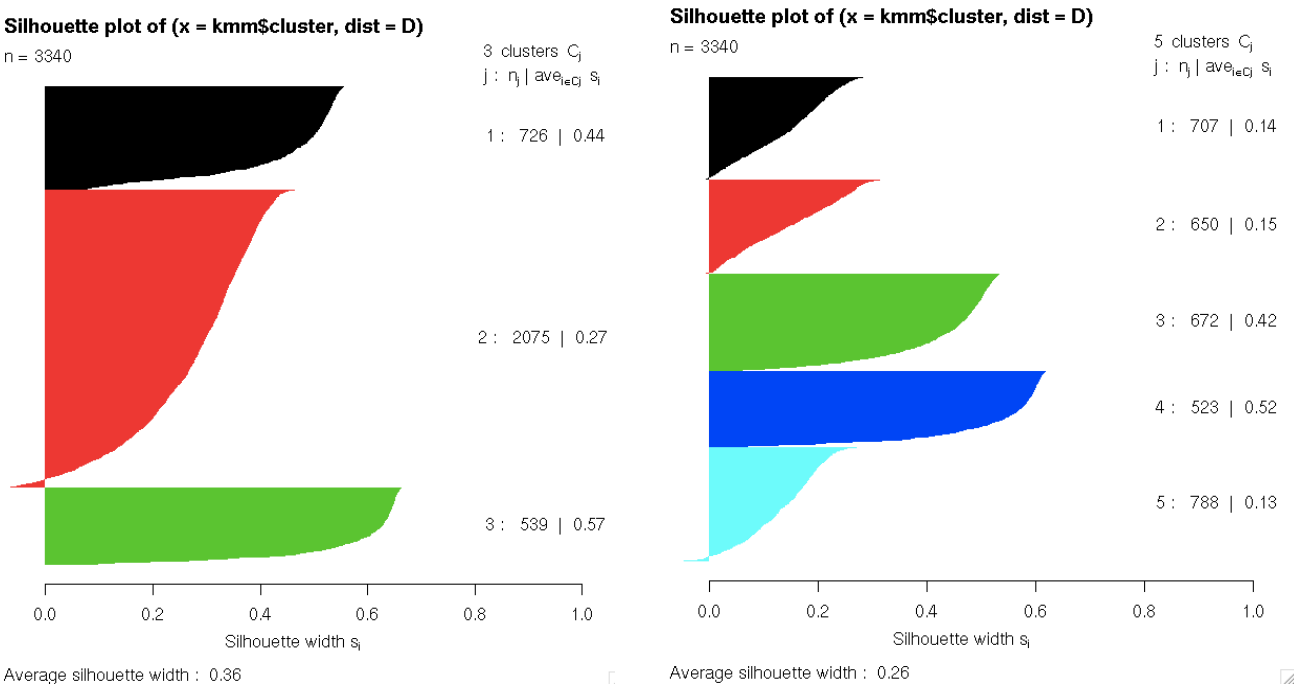


Figure 8

\$dcl	v.test					
	Mean in category	Overall mean	sd in category	Overall sd	p.value	
x.3	-12.59820	-0.4846554	1.883640e-16	0.5827747	0.9998503	2.160285e-36
x.7	-13.00842	-0.5004368	-7.715832e-17	0.7456836	0.9998503	1.095864e-38
x.6	-13.03631	-0.5015099	-7.431836e-17	0.8206131	0.9998503	7.604661e-39
x.4	-13.34350	-0.5133276	-2.309120e-16	0.5771916	0.9998503	1.292381e-40
x.5	-14.03857	-0.5400671	-1.143149e-16	0.7537773	0.9998503	9.051627e-45
x.8	-15.30330	-0.5887215	2.597941e-16	0.6962036	0.9998503	7.267336e-53
x.1	-17.03376	-0.6552924	-4.673766e-16	0.7368086	0.9998503	4.614509e-65
x.9	-19.96696	-0.7681336	1.444334e-16	0.7114216	0.9998503	1.067476e-88
x.2	-20.07212	-0.7721790	6.983197e-17	0.8329848	0.9998503	1.293668e-89
x.256	-24.64749	-0.9481946	6.631863e-17	0.6619345	0.9998503	3.915010e-134
x.10	-24.93070	-0.9590897	1.073430e-16	0.6330169	0.9998503	3.458102e-137
x.234	-26.99502	-1.0385044	6.118458e-17	0.5413880	0.9998503	1.690996e-160
x.244	-27.15103	-1.0445064	-2.471430e-16	0.5238527	0.9998503	2.461761e-162
x.245	-27.38681	-1.0535768	1.073036e-16	0.5519396	0.9998503	3.937837e-165
x.246	-27.39879	-1.0540377	5.786393e-18	0.5465874	0.9998503	2.834930e-165
x.241	-27.41561	-1.0546848	-2.317990e-16	0.5429778	0.9998503	1.786742e-165

Figure 11.1

Figure 11

```

> round(Fvisa,3)
      Fratio pvalue
[1,] 111.292      0 [213,] 1377.207      0
[2,] 333.604      0 [214,] 1300.098      0
[3,] 1064.616      0 [215,] 1378.057      0
[4,] 2073.139      0 [216,] 1354.728      0
[5,] 921.896      0 [217,] 1352.401      0
[6,] 456.989      0 [218,] 1369.288      0
[7,] 698.720      0 [219,] 1361.991      0
[8,] 1063.644      0 [220,] 1333.925      0
[9,] 1040.846      0 [221,] 1337.657      0
[10,] 1157.586      0 [222,] 1337.880      0
[11,] 1304.663      0 [223,] 1325.823      0
[12,] 1508.284      0 [224,] 1260.315      0
[13,] 1361.417      0 [225,] 1247.311      0
[14,] 1516.404      0 [226,] 1364.650      0
[15,] 1807.082      0 [227,] 1423.625      0
[16,] 2107.063      0 [228,] 1353.151      0
[17,] 2593.938      0 [229,] 1326.941      0
[18,] 2789.212      0 [230,] 1281.479      0
[19,] 3194.031      0 [231,] 1321.721      0
[20,] 3257.759      0 [232,] 1232.861      0
[21,] 3147.388      0 [233,] 1261.002      0
[22,] 3249.184      0 [234,] 1256.585      0
[23,] 3387.034      0 [235,] 1247.346      0
[24,] 3136.842      0 [236,] 1280.427      0
[25,] 3082.517      0 [237,] 1276.728      0
[26,] 3008.951      0 [238,] 1331.265      0
[27,] 3261.770      0 [239,] 1277.121      0
[28,] 3317.892      0 [240,] 1235.142      0
[29,] 3338.470      0 [241,] 1298.532      0
[30,] 3529.782      0 [242,] 1310.751      0
[31,] 3300.958      0 [243,] 1250.039      0
[32,] 3414.202      0 [244,] 1228.915      0
[33,] 3273.111      0 [245,] 1243.960      0
[34,] 3144.024      0 [246,] 1260.322      0
[35,] 3082.697      0 [247,] 1266.518      0
[36,] 2894.962      0 [248,] 1229.106      0
[37,] 2806.481      0 [249,] 1298.063      0
[38,] 2510.777      0 [250,] 1200.313      0
[39,] 2348.199      0 [251,] 1249.259      0
[40,] 2288.875      0 [252,] 1243.708      0
[41,] 1945.393      0 [253,] 1194.767      0
[42,] 1763.402      0 [254,] 1223.616      0
[43,] 1762.182      0 [255,] 1231.689      0
[256,] 640.951      0

```

```
> round(cRatio,3)
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.118	0.286	0.561	0.713	0.525	0.354	0.456	0.561	0.555	0.581	0.610	0.644	0.620	0.645	0.684	0.716
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
0.757	0.770	0.793	0.796	0.791	0.796	0.802	0.790	0.787	0.783	0.796	0.799	0.800	0.809	0.798	0.804
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0.797	0.790	0.787	0.776	0.771	0.751	0.738	0.733	0.700	0.679	0.679	0.655	0.642	0.612	0.599	0.570
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
0.546	0.531	0.512	0.511	0.499	0.511	0.510	0.511	0.535	0.563	0.558	0.569	0.590	0.616	0.626	0.615
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
0.638	0.640	0.629	0.633	0.633	0.637	0.623	0.631	0.624	0.613	0.613	0.610	0.608	0.599	0.590	0.597
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
0.590	0.592	0.588	0.606	0.599	0.604	0.604	0.609	0.607	0.599	0.610	0.615	0.613	0.616	0.614	0.624
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
0.631	0.623	0.631	0.633	0.635	0.630	0.633	0.628	0.637	0.636	0.633	0.641	0.626	0.631	0.632	0.627
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
0.628	0.620	0.613	0.604	0.604	0.599	0.596	0.594	0.597	0.588	0.589	0.596	0.599	0.597	0.579	0.593
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
0.585	0.587	0.589	0.588	0.586	0.581	0.582	0.580	0.576	0.587	0.573	0.594	0.595	0.592	0.603	0.586
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
0.588	0.598	0.609	0.614	0.610	0.618	0.620	0.622	0.622	0.623	0.626	0.617	0.600	0.614	0.610	0.616
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
0.614	0.611	0.609	0.607	0.605	0.601	0.597	0.599	0.598	0.591	0.592	0.590	0.595	0.587	0.586	0.597
177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
0.591	0.592	0.597	0.608	0.598	0.604	0.602	0.614	0.607	0.613	0.612	0.620	0.613	0.608	0.614	0.612
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208
0.617	0.608	0.608	0.619	0.612	0.623	0.624	0.610	0.612	0.621	0.616	0.622	0.621	0.615	0.614	0.604
209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
0.611	0.613	0.617	0.617	0.623	0.609	0.623	0.619	0.619	0.622	0.620	0.615	0.616	0.616	0.614	0.602
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
0.599	0.621	0.631	0.619	0.614	0.606	0.613	0.597	0.602	0.601	0.599	0.606	0.605	0.615	0.605	0.597
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
0.609	0.611	0.600	0.596	0.599	0.602	0.603	0.596	0.609	0.590	0.600	0.599	0.589	0.595	0.596	0.435

```
> min(round(cRatio,3))
```

```
[1] 0.118
```

```
> max(round(cRatio,3))
```

```
[1] 0.809
```

```
~
```

Figure 12

```
> res.desDA$power
      cor_ratio wilks_lamb F_statistic p_values
x.1  0.1177641  0.8822359   111.2921      0
x.2  0.2857778  0.7142222   333.6037      0
x.3  0.5608066  0.4391934  1064.6165      0
x.4  0.7131813  0.2868187  2073.1389      0
x.5  0.5251035  0.4748965   921.8956      0
x.6  0.3540523  0.6459477   456.9891      0
x.7  0.4559436  0.5440564   698.7198      0
x.8  0.5605816  0.4394184  1063.6443      0
x.9  0.5552375  0.4447625  1040.8461      0
x.10 0.5813113  0.4186887  1157.5864      0
x.11 0.6101080  0.3898920  1304.6628      0
x.12 0.6440060  0.3559940  1508.2841      0
x.13 0.6201884  0.3798116  1361.4173      0
x.14 0.6452360  0.3547640  1516.4039      0
x.15 0.6842851  0.3157149  1807.0820      0
x.16 0.7164899  0.2835101  2107.0628      0
x.17 0.7567603  0.2432397  2593.9382      0
x.18 0.7698706  0.2301294  2789.2116      0
x.19 0.7930002  0.2069998  3194.0313      0
x.20 0.7962243  0.2037757  3257.7588      0
x.21 0.7905749  0.2094251  3147.3879      0
x.22 0.7957963  0.2042037  3249.1838      0
x.23 0.8024656  0.1975344  3387.0339      0
x.24 0.7900187  0.2099813  3136.8422      0
x.25 0.7871060  0.2128940  3082.5174      0
x.26 0.7830302  0.2169698  3008.9508      0
x.27 0.7964239  0.2035761  3261.7697      0
x.28 0.7991759  0.2008241  3317.8924      0
x.29 0.8001663  0.1998337  3338.4700      0
x.30 0.8089277  0.1910723  3529.7816      0
x.31 0.7983534  0.2016466  3300.9583      0
x.32 0.8037290  0.1962710  3414.2024      0
x.33 0.7969861  0.2030139  3273.1107      0
x.34 0.7903978  0.2096022  3144.0240      0
x.35 0.7871157  0.2128843  3082.6969      0
x.36 0.7763973  0.2236027  2894.9624      0
x.37 0.7709624  0.2290376  2806.4812      0
x.38 0.7507122  0.2492878  2510.7774      0
x.39 0.7379750  0.2620250  2348.1988      0
x.40 0.7329971  0.2670029  2288.8749      0
x.41 0.6999975  0.3000025  1945.3935      0
x.42 0.6789753  0.3210247  1763.4020      0
x.43 0.6788244  0.3211756  1762.1816      0
x.44 0.6553243  0.3446757  1585.1908      0
x.205 0.6209442  0.3790558  1365.7944      0
x.206 0.6153231  0.3846769  1333.6531      0
x.207 0.6139812  0.3860188  1326.1189      0
x.208 0.6036605  0.3963395  1269.8759      0
x.209 0.6105528  0.3894472  1307.1050      0
x.210 0.6128870  0.3871130  1320.0139      0
x.211 0.6166021  0.3833979  1340.8840      0
x.212 0.6170730  0.3829270  1343.5578      0
x.213 0.6229008  0.3770992  1377.2067      0
x.214 0.6092740  0.3907260  1300.0984      0
x.215 0.6230458  0.3769542  1378.0574      0
x.216 0.6190275  0.3809725  1354.7280      0
x.217 0.6186220  0.3813780  1352.4013      0
x.218 0.6215453  0.3784547  1369.2878      0
x.219 0.6202877  0.3797123  1361.9911      0
x.220 0.6153714  0.3846286  1333.9253      0
x.221 0.6160323  0.3839677  1337.6567      0
x.222 0.6160718  0.3839282  1337.8797      0
x.223 0.6139283  0.3860717  1325.8227      0
x.224 0.6018509  0.3981491  1260.3149      0
x.225 0.5993630  0.4006370  1247.3110      0
x.226 0.6207470  0.3792530  1364.6504      0
x.227 0.6306551  0.3693449  1423.6251      0
x.228 0.6187528  0.3812472  1353.1511      0
x.229 0.6141280  0.3858720  1326.9405      0
x.230 0.6058347  0.3941653  1281.4794      0
x.231 0.6131936  0.3868064  1321.7208      0
x.232 0.5965616  0.4034384  1232.8606      0
x.233 0.6019816  0.3980184  1261.0022      0
x.234 0.6011405  0.3988595  1256.5848      0
x.235 0.5993698  0.4006302  1247.3463      0
x.236 0.6056386  0.3943614  1280.4275      0
x.237 0.6049472  0.3950528  1276.7276      0
x.238 0.6148988  0.3851012  1331.2650      0
x.239 0.6050208  0.3949792  1277.1206      0
x.240 0.5970065  0.4029935  1235.1418      0
x.241 0.6089870  0.3910130  1298.5320      0
x.242 0.6112149  0.3887851  1310.7510      0
x.243 0.5998876  0.4001124  1250.0394      0
x.244 0.5957898  0.4042102  1228.9145      0
x.245 0.5987169  0.4012831  1243.9604      0
x.246 0.6018523  0.3981477  1260.3223      0
x.247 0.6030269  0.3969731  1266.5182      0
x.248 0.5958274  0.4041726  1229.1062      0
x.249 0.6089009  0.3910991  1298.0629      0
x.250 0.5901061  0.4098939  1200.3129      0
```

```
> corRatio(res.desDA$scores[,1],y)
[1] 0.955081
```


Figure 13

> res.desDA\$discrivar

	DF1	DF2	DF3	DF4
constant	7.3299642273	1.836328e+00	1.031589e+01	-9.157599e-01
x.1	0.0576755343	1.218644e-03	6.775120e-02	2.514028e-02
x.2	0.0021611704	7.664568e-02	-2.170379e-02	-4.832640e-02
x.3	-0.0194208094	4.586561e-02	1.686290e-02	-3.057552e-02
x.4	-0.0323283832	-2.435791e-01	6.964746e-02	1.194195e-01
x.5	-0.0144599551	-2.115005e-01	6.463694e-02	2.454748e-02
x.6	0.0033138205	-1.476854e-01	4.420809e-02	2.700698e-02
x.7	0.0299224719	-1.814971e-01	3.347920e-02	6.097643e-02
x.8	0.0365362359	-1.031355e-01	-3.856619e-02	3.679722e-03
x.9	0.0655770191	-9.806770e-02	-5.870992e-02	2.862450e-02
x.10	0.0547412525	-1.048486e-01	-1.377743e-01	-3.769542e-02
x.11	0.0403795626	-6.203050e-02	-1.290252e-01	-1.348163e-02
x.12	0.0562122854	-2.968690e-02	-1.854894e-01	-7.274303e-02
x.13	0.0374133574	-1.486697e-02	-8.874723e-02	-2.896890e-02
x.14	0.0429378521	-1.103724e-02	-5.434155e-02	-6.446519e-02
x.15	-0.0394738220	7.228259e-02	-1.995230e-03	-5.180814e-02
x.16	-0.0476162632	5.517729e-02	3.700131e-02	-4.526285e-02
x.17	-0.1276043721	2.943592e-02	3.509100e-02	-1.365243e-02
x.18	-0.1098792439	5.433735e-02	3.044886e-02	5.678125e-03
x.19	-0.1024863710	2.586180e-02	1.196292e-02	2.958524e-03
x.20	-0.0971691621	1.479952e-02	-2.302165e-03	-2.038476e-03
x.21	-0.0396495065	3.359275e-02	2.601550e-03	9.905587e-03
x.22	-0.0669297083	1.817540e-02	-1.089725e-02	1.831214e-02
x.23	-0.0586545893	1.076269e-02	-2.858984e-02	6.546038e-02
x.24	-0.0523025911	2.663561e-02	6.331225e-03	6.268724e-03
x.25	-0.0477765037	-3.355792e-02	-3.408883e-02	-5.910024e-03
x.26	-0.0217795682	3.734341e-02	1.896696e-02	1.033973e-02
x.27	-0.0303447090	1.423085e-02	1.054848e-03	-6.846546e-02
x.28	-0.0021427391	3.208789e-02	1.068577e-02	-4.002463e-02
x.29	-0.0227620544	2.571761e-02	8.432636e-03	-8.808507e-02
x.30	-0.0429750599	3.736285e-02	-8.726059e-03	-5.548886e-02
x.31	-0.0191310531	-7.485865e-04	2.071514e-02	-6.088953e-02
x.32	-0.0130331825	-1.126231e-02	-9.593697e-03	-8.326430e-02
x.33	-0.0327994698	-1.277345e-02	1.391595e-03	-1.693522e-02
x.34	0.0283847028	-2.859800e-02	4.686634e-02	-8.168682e-02
x.35	-0.0571284479	7.621049e-03	-1.570490e-03	6.781205e-03
x.36	0.0078029699	-2.055239e-02	3.545818e-02	-2.202837e-02
x.37	-0.0591543686	3.378213e-02	-1.264627e-02	6.601143e-02
x.38	-0.0821808602	-2.816321e-02	9.778292e-03	9.932191e-02
x.39	-0.0474263591	-6.584013e-03	1.987487e-02	1.141334e-01
x.40	-0.0927479171	-1.988214e-02	-5.076760e-03	1.300120e-01
x.41	-0.0470332067	-7.244645e-03	2.422125e-02	8.318316e-02
x.42	-0.0424275643	4.085879e-02	1.751697e-02	6.663430e-02
x.43	-0.0718395759	1.781177e-02	1.890009e-02	7.770955e-02

> res.desDA\$discor

	DF1	DF2	DF3	DF4
x.1	-0.278303041	0.1304861314	-0.2179673	0.1441985470
x.2	-0.505039455	-0.0195782840	-0.2274518	-0.1037177402
x.3	-0.594853931	-0.4320422394	-0.2449277	-0.0007761624
x.4	-0.519286436	-0.5721045479	-0.4114445	0.1357560490
x.5	-0.386152106	-0.4723040691	-0.4405287	0.0811987898
x.6	-0.409612987	-0.3434800872	-0.3034117	-0.0695158797
x.7	-0.457612738	-0.4181551384	-0.3297546	0.0115910215
x.8	-0.423362271	-0.4710706313	-0.4540775	0.1086650653
x.9	-0.405777497	-0.3997641878	-0.5382763	0.0701921351
x.10	-0.429973559	-0.3297356465	-0.6038743	0.0098124833
x.11	-0.492189286	-0.2593924847	-0.6283108	-0.0269622910
x.12	-0.545913652	-0.2065911908	-0.6445305	-0.0112216292
x.13	-0.613298669	-0.1334841593	-0.5839647	0.0066250924
x.14	-0.687243573	-0.0816106020	-0.5289046	-0.0081082309
x.15	-0.755003708	-0.0315145988	-0.4690311	-0.0305620639
x.16	-0.801939490	-0.0003973999	-0.4183564	-0.0217679861
x.17	-0.834490181	0.0293145163	-0.4099389	0.0020406285
x.18	-0.850712672	0.0548966223	-0.3937551	0.0366523283
x.19	-0.869967338	0.0663161890	-0.3728475	0.0230179013
x.20	-0.875319127	0.0922659500	-0.3541343	0.0203772525
x.21	-0.868774472	0.0892315729	-0.3697256	0.0310520876
x.22	-0.868836291	0.1137148614	-0.3821266	0.0652799515
x.23	-0.874372818	0.1273260988	-0.3740277	0.0748187472
x.24	-0.862703930	0.1388478796	-0.3743539	0.0332759590
x.25	-0.849844382	0.1534457565	-0.3973630	0.0021772594
x.26	-0.844930456	0.1701175662	-0.3947115	-0.0052812490
x.27	-0.861430299	0.1732755931	-0.3589233	-0.0179471092
x.28	-0.859949694	0.1833448154	-0.3606993	-0.0281003943
x.29	-0.854953704	0.1895310690	-0.3707702	-0.0456635186
x.30	-0.865565725	0.1924100771	-0.3555481	-0.0283736958
x.31	-0.865240424	0.1881965191	-0.3301971	-0.0327242494
x.32	-0.865499768	0.1892412823	-0.3510421	-0.0139805387
x.33	-0.862601374	0.1932026223	-0.3593098	0.0331484740
x.34	-0.860367695	0.2142373890	-0.3459380	0.0785812574
x.35	-0.858345846	0.2224928580	-0.3444660	0.1159587558
x.36	-0.847161230	0.2164357661	-0.3696908	0.1535763092
x.37	-0.832877072	0.2380005503	-0.3861074	0.2280670946
x.38	-0.817353971	0.2457440852	-0.3759178	0.2858974546
x.39	-0.793348085	0.2663861062	-0.3981058	0.3136060335
x.40	-0.773644409	0.2720361950	-0.4328435	0.3293906762
x.41	-0.737343702	0.2960810690	-0.4399226	0.3342712243
x.42	-0.711668011	0.3144779940	-0.4400288	0.3495290672
x.43	-0.694494344	0.3230932804	-0.4678808	0.3505326901
x.44	-0.654699564	0.3339140189	-0.5019699	0.3251496248

> res.desDA\$values

	value	proportion	accumulated
DF1	25.1562302	59.22767	59.22767
DF2	11.7692469	27.70944	86.93711
DF3	4.7882880	11.27352	98.21063
DF4	0.7600131	1.78937	100.00000

Figure 13

```
> my_pls1$R2
```

	R2X	R2Xcum	R2Y	R2Ycum
t1	0.55193709	0.5519371	0.19862334	0.1986233
t2	0.15265690	0.7045940	0.21258918	0.4112125
t3	0.04820584	0.7527998	0.19593018	0.6071427
t4	0.01717714	0.7699770	0.06090678	0.6680495

```
> my_pls1$Q2
```

	Q2.aa	Q2.ao	Q2.dcl	Q2.iy	Q2.sh	Q2.global
t1	0.004236227	0.009621065	0.5492980687	0.006694934	0.41870369	0.197710797
t2	0.218971263	0.173390979	0.5454003766	0.039877627	0.66599568	0.264595593
t3	0.117140225	0.274512088	-0.0004712399	0.682771949	0.05762515	0.331766621
t4	0.148458884	0.276287938	0.0586085320	0.015225891	0.06072916	-0.007000232

```
> my_pls1$VIP
```

	Component 1	Component 2	Component 3	Component 4	Model	VIP
x.1	0.29773300	0.5551884	0.5004700	0.5782502	0.5782502	
x.2	0.10888574	0.9932867	0.9290740	1.0347933	1.0347933	
x.3	0.34255373	1.4416595	1.1896915	1.1773508	1.1773508	
x.4	0.36719831	1.5473586	1.5082488	1.4379184	1.4379184	
x.5	0.22894110	1.2854156	1.4115762	1.3566086	1.3566086	
x.6	0.19333394	1.1298295	1.0035370	1.0933392	1.0933392	
x.7	0.25656102	1.2764178	1.1586472	1.1413783	1.1413783	
x.8	0.21830563	1.3487548	1.4381087	1.3718322	1.3718322	
x.9	0.07775609	1.3339896	1.4808709	1.4275947	1.4275947	
x.10	0.04419849	1.3771079	1.4861155	1.4772232	1.4772232	
x.11	0.13564556	1.4491755	1.4276176	1.4635645	1.4635645	
x.12	0.20472840	1.5124762	1.4033815	1.4269977	1.4269977	
x.13	0.24009254	1.5228481	1.2880787	1.2975500	1.2975500	
x.14	0.25337181	1.5618118	1.2857329	1.3062414	1.3062414	
x.15	0.26107207	1.5882408	1.3560708	1.3906902	1.3906902	
x.16	0.25700939	1.5997962	1.4441570	1.4545765	1.4545765	
x.17	0.28379579	1.6248633	1.5132879	1.4972005	1.4972005	
x.18	0.30180619	1.6200881	1.5545395	1.5090177	1.5090177	
x.19	0.29758590	1.6262631	1.6128207	1.5718543	1.5718543	
x.20	0.31273844	1.6040991	1.6491890	1.6054316	1.6054316	
x.21	0.32164028	1.6082849	1.6206876	1.5721517	1.5721517	
x.22	0.36013953	1.6037251	1.6182528	1.5535837	1.5535837	
x.23	0.36978322	1.5975948	1.6414006	1.5725146	1.5725146	
x.24	0.38138086	1.5755474	1.6319380	1.5811475	1.5811475	
x.25	0.41360946	1.5690697	1.6037348	1.5757549	1.5757549	
x.26	0.43033180	1.5505517	1.6050693	1.5797802	1.5797802	
x.27	0.40617727	1.5438151	1.6715098	1.6489910	1.6489910	
x.28	0.41834007	1.5381252	1.6754581	1.6602238	1.6602238	
x.29	0.43196322	1.5369014	1.6648501	1.6671864	1.6671864	
x.30	0.42446361	1.5375873	1.6975734	1.6795758	1.6795758	
x.31	0.40103092	1.5176375	1.7167485	1.6979318	1.6979318	
x.32	0.41840912	1.5348643	1.6961040	1.6666581	1.6666581	
x.33	0.43165898	1.5335661	1.6745094	1.6164960	1.6164960	
x.34	0.44825100	1.5061805	1.6844766	1.6087351	1.6087351	
x.35	0.45865667	1.4961350	1.6789073	1.6007097	1.6007097	
x.36	0.47292174	1.5025941	1.6203957	1.5509505	1.5509505	
x.37	0.51410172	1.4819013	1.5753764	1.5478305	1.5478305	
x.38	0.51948421	1.4438834	1.5431647	1.5762569	1.5762569	
x.39	0.56180691	1.4172884	1.4845547	1.5593000	1.5593000	
x.40	0.59547561	1.4158816	1.4219946	1.5231417	1.5231417	
x.41	0.63007468	1.3584337	1.3549959	1.4870236	1.4870236	
x.42	0.65319402	1.3134521	1.3105198	1.4839192	1.4839192	
x.43	0.68422776	1.3106562	1.2672482	1.4482870	1.4482870	