Задание 1.
(Последний день сдачи: 5 октября 2024 г.)

Численное решение уравнения переноса

В этом задании будут рассмотрены различные разностные схемы для численного решения уравнения переноса.

Линейное однородное уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Для (1) ставится начально-краевая задача на $x \in [0, L]$

начальное условие: $u(0, x) = \varphi(x)$

граничное условие:

при $a > 0$ $\quad u(t, 0) = \psi(t)$

при $a < 0$ $\quad u(t, X) = \psi(t)$

Также рассмотрим нелинейное однородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Начально-краевая задача для него ставится аналогично задаче для (1). В рамках этого задания предлагается задача о движении ступеньки. Пусть $a > 0$, зададим функции $\psi(t) = U_1$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} U_1, & x = 0, \\ U_0, & 0 < x \leq L. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $U_1 > U_0$ – постоянные.

Особое внимание в этом задании уделяется такому свойству разностных схем для численного решения уравнения переноса, как монотонность.

Опр. (по Годунову) Монотонными называются разностные схемы, для которых

если $y^n_{m+1} - y^n_m \geq 0$, то $y^{n+1}_{m+1} - y^{n+1}_m \geq 0$ и

если $y^n_{m+1} - y^n_m \leq 0$, то $y^{n+1}_{m+1} - y^{n+1}_m \leq 0$.

Теорема (С. К. Годунова)

Линейная монотонная разностная схема для уравнения переноса не может иметь второй или более высокий порядок аппроксимации.

Для численного решения уравнения переноса предлагаются следующие схемы. Далее используется обозначение $\sigma = \frac{a\tau}{h}$ – гиперболическое число Куранта.

Схема 1. Явный левый уголок

$$\frac{y^{n+1}_m - y^n_m}{\tau} + a\frac{y^n_m - y^n_{m-1}}{h} = 0 \tag{4}$$

Представим ее в виде

$$y^{n+1}_m = y^n_m - \sigma(y^n_m - y^n_{m-1}) \tag{5}$$

Схема 2. Неявный левый уголок

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a\frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} = 0 \tag{6}$$

Схема 3. Неявный правый уголок

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} = 0 \tag{7}$$

Схема 4. Схема Лакса

$$\frac{y_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n\right)}{\tau} + a\frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = 0 \tag{8}$$

Придадим выражению (8) вид

$$y_m^{n+1} = \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n) - \frac{\sigma}{2}(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n) \tag{9}$$

Схема 5. Схема Лакса-Вендрофа

Может рассматриваться как схема предиктор-корректор.

Этап 1.

$$\frac{y_{m+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}\left(y_{m+1}^n + y_m^n\right)}{\tau/2} + a\frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{y_{m-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}\left(y_m^n + y_{m-1}^n\right)}{\tau/2} + a\frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0. \tag{11}$$

Из (10) может быть выражено значение $y_{m+1/2}^{n+1/2}$, а из (11) – значение $y_{m-1/2}^{n+1/2}$. Они используются на этапе 2.

Этап 2.

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a\frac{y_{m+1/2}^{n+1/2} - y_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0 \tag{12}$$

Схема может быть представлена в нескольких альтернативных формах. Например,

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a\frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - 0.5a^2\tau\frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} = 0 \tag{13}$$

Или

$$y_m^{n+1} = y_m^n - \sigma(y_m^n - y_{m-1}^n) - (y_+ - y_-). \tag{14}$$

Здесь введены величины y_+ и y_- – антидиффузионные потоки. Приведем выражения для них

$$y_+ = \frac{1}{2}\sigma(1-\sigma)(y_{m+1}^n - y_m^n), \tag{15}$$

$$y_- = \frac{1}{2}\sigma(1-\sigma)(y_m^n - y_{m-1}^n). \tag{16}$$

Схема Лакса-Вендрофа немонотонна, однако в отсутствие последнего слагаемого в (14) представляла бы разностную схему явный левый уголок (монотонную).

Итак, Схема 5 требует монотонизации. Для этого предлагается использовать ленинградское сглаживание.

Для начала получим решение на новом слое по времени и далее сгладим его в области немонотонности. Пересчет решения будем осуществлять по формуле

$$y^{n+1}_{m\ smooth} = y^{n+1}_m + q(Q_+ - Q_-), \tag{17}$$

где $q \in [0, 0.25]$ – подбираемый параметр, величины Q_+ и Q_- определяются проверкой условий (18,19)

$$\textit{если } D_{PP} \cdot D_P < 0 \textit{ или } D_P \cdot D_M < 0, \textit{ то } Q_+ = D_P, \textit{ иначе } Q_+ = 0, \tag{18}$$

$$\textit{если } D_{MM} \cdot D_M < 0 \textit{ или } D_P \cdot D_M < 0, \textit{ то } Q_- = D_M, \textit{ иначе } Q_- = 0. \tag{19}$$

Запишем выражения для вновь введенных величин

$$D_{MM} = y^{n+1}_{m-1} - y^{n+1}_{m-2}, \qquad D_M = y^{n+1}_m - y^{n+1}_{m-1}, \qquad D_P = y^{n+1}_{m+1} - y^{n+1}_m, \qquad D_{PP} = y^{n+1}_{m+2} - y^{n+1}_{m+1}. \tag{20}$$

Схема 6. Схема Бима-Уорминга

$$y^{n+1}_{m+1} = y^n_{m+1} - \sigma(\frac{3}{2}y^n_{m+1} - 2y^n_m + \frac{1}{2}y^n_{m-1}) + \frac{\sigma^2}{2}(y^n_{m+1} - 2y^n_m + y^n_{m-1}) \tag{21}$$

Схема 7. TVD схема

$TV = \sum\limits_m |y_{m+1} - y_m|$ – полная вариация.

Условие монотонности понимается как невозрастание полной вариации, то есть $TV(\vec{y^{n+1}}) \leq TV(\vec{y^n})$.

Сконструируем TVD схему из Схемы 5 (Лакса-Вендрофа). Будем использовать ее запись в виде (14), однако в потоки введем ограничитель $\phi(r_m)$, величина которого определяется параметром r_m – показателем гладкости

$$y_+ = \frac{1}{2}\phi(r_m)\sigma(1-\sigma)(y^n_{m+1} - y^n_m), \tag{22}$$

$$y_- = \frac{1}{2}\phi(r_{m-1})\sigma(1-\sigma)(y^n_m - y^n_{m-1}). \tag{23}$$

Показатель гладкости в узле m определяется через решение в нем и двух соседних точках

$$r_m = \frac{y^n_m - y^n_{m-1}}{y^n_{m+1} - y^n_m}. \tag{24}$$

Обычно для машинных вычислений в числитель и знаменатель добавляются слагаемые ε, $\varepsilon \in [10^{-5}, 10^{-10}]$.

$$r_m = \frac{y^n_m - y^n_{m-1} + \varepsilon}{y^n_{m+1} - y^n_m + \varepsilon}. \tag{25}$$

Ограничитель может быть определен следующим образом

$$
\phi\left(r_m\right) = \begin{cases} \min\left(2, r_m\right), \quad r_m > 1 \\ \min\left(2r_m, 1\right), 0 < r_m \le 1 \\ 0, r_m \le 0 \end{cases}
$$

Схема 8. ENO схема

Решение будем вычислять по формуле

$$
y_m^{n+1} = y_m^n - \sigma(y_+ - y_-). \tag{26}
$$

Ограничимся случаем $a > 0$. Потребуются величины

$$
Y_M = |y_m^n - y_{m-1}^n|, \qquad Y_P = |y_{m+1}^n - y_m^n|. \tag{27}
$$

Также введем симметричный и несимметричный операторы

$$
S\left(C, f_1, f_2\right) = 0.5(1 + C)f_1 + 0.5(1 - C)f_2, \tag{28}
$$

$$
N\left(C, f_1, f_2\right) = 0.5(3 - C)f_1 - 0.5(1 - C)f_2. \tag{29}
$$

Определим величину y_+, входящую в (26), условием

$$
\textit{Если} \quad a > 0 \ \textit{и} \ Y_P \ge Y_M, \ \textit{то} \ y_+ = N\left(\sigma, y_m^n, y_{m-1}^n\right), \ \textit{иначе} \ y_+ = S\left(\sigma, y_m^n, y_{m+1}^n\right). \tag{30}
$$

Величина y_- рассчитывается аналогично по (30), но с уменьшением индекса на единицу.

Задание 1 предлагается в 4 вариантах.

Общая часть: Построить точное решение задачи о движении ступеньки (начально-краевая задача для (1)) и ее численное решение при помощи схем 1, 4, 5 (включая монотонизацию), 6 при $a > 0$. Построить точное решение задачи о движении ступеньки (начально-краевая задача для (2)) и ее численное решение при помощи схемы 1.

Вариант А. К общей части добавляется реализация схемы 2 при $a > 0$ и $a < 0$, а также схемы 7 при $a > 0$ для начально-краевой задачи для уравнения (1).

Вариант Б. К общей части добавляется реализация схемы 2 при $a > 0$ и $a < 0$, а также схемы 8 при $a > 0$ для начально-краевой задачи для уравнения (1).

Вариант В. К общей части добавляется реализация схемы 3 при $a > 0$ и $a < 0$, а также схемы 7 при $a > 0$ для начально-краевой задачи для уравнения (1).

Вариант Г. К общей части добавляется реализация схемы 3 при $a > 0$ и $a < 0$, а также схемы 8 при $a > 0$ для начально-краевой задачи для уравнения (1).

Лучше всего представить результат в виде набора анимаций, каждая из которых демонстрирует профиль решения по разностной схеме и точное решение исходной задачи на одном графике в разные моменты времени.

На сдаче будьте готовы охарактеризовать различные свойства представленных схем, предложить разностные схемы для (2). Для подготовки можно посмотреть видео по ссылке:
`https://vk.com/video-212608323_456239052`