Задание 3. Моделирование распространения волны на бесконечной прямой

Крайний срок сдачи: 10.05.2025

Целью третьего задания является научиться моделировать распространение волны на бесконечной прямой, т.е. решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \quad 0 < t < \infty, \quad E(0,z) = \varphi(z),\ \frac{\partial E}{\partial t}(0,z) = \psi(z). \tag{1}$$

Ограничимся для простоты случаем $\psi(z) \equiv 0$. Точное решение задачи дает формула Даламбера:

$$E(t,z) = \frac{\varphi(z-ct) + \varphi(z+ct)}{2}. \tag{2}$$

Поскольку мы не можем в численных алгоритмах оперировать бесконечными величинами, то мы вынуждены заменить в постановке задачи бесконечную прямую на конечный отрезок $-L < z < L$, содержащий начальный профиль поля $\varphi(z)$, и на концах отрезка поставить граничные условия. Зададим самые простые нулевые условия (Дирихле).

С учетом сказанного получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \quad -L < z < L, \quad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

$$E(t,-L) = 0, \quad E(t,L) = 0, \quad E(0,z) = \varphi(z), \quad \frac{\partial E}{\partial t}(0,z) = 0.$$

Очевидно, что для любого начального профиля $\varphi(z)$ решение Даламбера (2) будет удовлетворять граничным условиям (3) только до того момента времени, когда бегущие волны достигнут границ $z = -L$ или $z = L$. Далее будут происходить отражения волн от границ, и волновое поле будет отличаться от решения Даламбера (2). На практике выбор границ и граничных условий часто является вынужденным и не обусловлен физической моделью. В этих обстоятельствах граничные условия должны быть неотражающими, т.е. любая волна, достигшая границы расчетной области, не должна возбуждать отраженную волну, двигающуюся в противоположном направлении. В настоящей работе предлагается реализовать граничные условия типа PML (perfect matched layers) [1].

Сначала заменим краевую задачу (3) эквивалентной задачей для системы уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z}, \quad -L < z < L,\ 0 < t < \infty, \tag{4}$$

$$E(t,-L) = 0,\ E(t,L) = 0,\ E(0,z) = \varphi(z),\ H(0,z) = 0.$$

Метод PML состоит в замене сосредоточенных границ $z = -L$ и $z = L$ примыкающими слоями конечной толщины Δ. Внутри PML-слоев создается искусственная среда таким образом, что падающая волна входит в слой без отражения и затухает в нем до пренебрежимо малой амплитуды. Таким образом, волновое поле правильно моделируется в суженной области $-L + \Delta < z < L - \Delta$. PML-слои заполняются средой с электрической проводимостью $\sigma(z)$ и с точно такой же проводимостью свободных магнитных зарядов (в природе не обнаруженных!). Система уравнений Максвелла для вакуума заменяется следующей системой:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}H = \frac{\partial E}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}E = \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{5}$$

Функция $\sigma(z)$ может задаваться разными способами, например:

$$\sigma(z) = \begin{cases} A_0\left(\frac{z+L-\Delta}{\Delta}\right)^2, & -L < z < -L + \Delta, \\ 0, & -L + \Delta < z < L - \Delta, \\ A_0\left(\frac{z-L+\Delta}{\Delta}\right)^2, & L - \Delta < z < L. \end{cases} \tag{6}$$

Толщина PML-слоя Δ должна быть достаточно малой по сравнению с L. Другой параметр PML-слоя – амплитуда A_0 – должен быть достаточно большим, чтобы обеспечивать затухание волны до пренебрежимо малых интенсивностей. В этом случае мы можем ставить нулевые граничные условия $E(t,-L)=0,\ E(t,L)=0$, которые уже не будут влиять на решение, но позволят организовать счет по разностной схеме.

Разностные схемы.

Для конструирования разностной схемы вводятся стандартным образом сетки по пространству и времени:

$$z_j=-L+jh,\quad 0\le j\le J,\quad h=\frac{2L}{J},\qquad t_n=n\tau,\quad 0\le n. \tag{7}$$

Для решения начально-краевой задачи (3) естественно использовать следующую разностную схему 2-го порядка аппроксимации:

$$E_j^{n+1}=2E_j^n-E_j^{n-1}+r^2(E_{j+1}^n-2E_j^n+E_{j-1}^n), \tag{8}$$

$$n=1,2,\dots,\ j=1,2,\dots,J-1,\qquad E_0^{n+1}=0,\ E_J^{n+1}=0.$$

Здесь $r=\frac{c\tau}{h}$ – число Куранта. Схема численно устойчива при $r\le 1$. Первый шаг по времени ($n=0$) нужно делать по другой формуле:

$$E_j^1=E_j^0+\frac{r^2}{2}(E_{j+1}^0-2E_j^0+E_{j-1}^0),\quad j=1,2,\dots,J-1,\quad E_0^1=0,\ E_J^1=0. \tag{9}$$

Эта формула получается при разложении величины E_j^1 по формуле Тейлора 2-го порядка с центром E_j^0 с последующей заменой второй производной по времени на вторую производную по пространству согласно уравнению (3). Замена последней конечно-разностным выражением и дает формулу (9). В начальный момент времени поле определяется начальным условием: $E_j^0=\varphi(z_j)\equiv\varphi_j$.

Для решения начально-краевой задачи (5) предлагается использовать следующую разностную схему:

$$E_j^{n+1}-E_j^n=r\left(H_{j+0.5}^{n+0.5}-H_{j-0.5}^{n+0.5}\right),\quad H_{j+0.5}^{n+1.5}-H_{j+0.5}^{n+0.5}=r\left(E_{j+1}^{n+1}-E_j^{n+1}\right), \tag{10}$$

$$n=0,1,\dots,\quad j=1,2,\dots,J-1,\quad E_0^{n+1}=0,\ E_J^{n+1}=0.$$

Эта схема называется *шахматной*, поле H в ней задается в узлах, смещенных на полшага по времени и пространству. В связи с этим возникает вопрос о задании начальных условий для поля H в момент времени $t=0.5\tau$. В начальный момент $t=0$ согласно начальному условию (4) $H=0$. Запишем для величины $H_{j+0.5}^{0.5}$ формулу Тейлора первого порядка с учетом 1-го уравнения Максвелла (4):

$$H_{j+0.5}^{0.5}=\frac{\tau}{2}c\frac{\partial E}{\partial z}(0,z_{j+0.5})+o(\tau).$$

Заменяя производную по z поля E конечной разностью, получим начальное условие для поля H:

$$H_{j+0.5}^{0.5}=\frac{r}{2}(\varphi_{j+1}-\varphi_j). \tag{11}$$

В методе PML решаются уравнения Максвелла (5) с начальными и граничными условиями (4). Запишем разностную схему для уравнений (5):

$$E_j^{n+1}-E_j^n+2\pi\sigma_j\tau\left(E_j^{n+1}+E_j^n\right)=r\left(H_{j+0.5}^{n+0.5}-H_{j-0.5}^{n+0.5}\right),$$

$$H_{j+0.5}^{n+1.5}-H_{j+0.5}^{n+0.5}+2\pi\sigma_{j+0.5}\tau\left(H_{j+0.5}^{n+1.5}+H_{j+0.5}^{n+0.5}\right)=r\left(E_{j+1}^{n+1}-E_j^{n+1}\right). \tag{12}$$

Задание. (Один вариант для всех)

1. В качестве начального распределения волнового поля взять гауссову функцию:

$$\varphi(z)=\exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right). \tag{13}$$

Ширину гауссовой функции a задать меньшей в несколько раз по сравнению с L.

2. Провести расчеты по разностной схеме (8) для волнового уравнения с нулевыми граничными условиями и сравнить результаты с точным решением на бесконечной прямой.

3. Такие же расчеты провести для эквивалентной системы уравнений Максвелла согласно разностной схеме (10).

4. Произвести расчеты для системы уравнений Максвелла с неотражающими граничными условиями PML согласно разностной схеме (12). Подобрать параметры PML-слоев так, чтобы во внутренней части отрезка, не содержащей PML-слоев, отраженные волны отсутствовали.

Примечание. О системе уравнений Максвелла.

В настоящем задании предлагается решать систему уравнений Максвелла для y-поляризованной волны. В используемых обозначениях $E = E_y$, $H = H_x$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad -L < z < L,\ 0 < t < \infty, \tag{14}$$

В случае x-поляризованной волны уравнения приняли бы вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad -L < z < L,\ 0 < t < \infty, \tag{15}$$

Подходы к численному решению были бы аналогичными.

Подробнее об их получении из уравнений Максвелла, например, см. [2].

Литература:

[1] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,"J. Comput. Phys. 114, 110-117 (1994).

[2] Кириченко, Н. А. Электричество и магнетизм: учеб. пособие /Н, А. Кириченко. М.: МФТИ, 2011.-420 с. ISBN 978-5-7417-0356-4