Задание 2. Конечное преобразование Фурье

Крайний срок сдачи: 10.05.2025

Второе задание весеннего семестра посвящено использованию конечного преобразования Фурье для решения стационарного двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

Конечный ряд Фурье

Получим дискретный аналог ряда Фурье. Введем сетку по переменной x:

$$x_j = jh, \quad h = \frac{T}{N}, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Точку $j = \frac{N}{2}$ мы в сетку не включаем по причине периодичности функции $u(x)$. Обозначим $u\left(x_j\right) = u_j$. Заменяя интегралы для коэффициентов Фурье квадратурными суммами и ограничиваясь конечным числом членов ряда Фурье, получим следующие формулы:

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u_j \exp\left(-i\frac{2\pi n x_j}{T}\right), \quad n = -\frac{N}{2}, \cdots \frac{N}{2} - 1$$

$$u_j = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n \exp\left(i\frac{2\pi n x_j}{T}\right), \quad j = -\frac{N}{2}, \cdots \frac{N}{2} - 1$$

Данное представление называется разложением сеточной функции u_j в конечный ряд Фурье. Заметим, что как сама функция, так и ее коэффициенты Фурье периодичны с периодом N: $u_j = u_{j+N}, \quad c_n = c_{n+N}$.

Вещественная форма конечного ряда Фурье

Пусть $\left\{u_j, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}$ - вещественный вектор. Запишем формулу коэффициентов конечного ряда Фурье, выделив действительную и мнимую части:

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u_j \left(\cos\frac{2\pi n x_j}{T} - i\sin\frac{2\pi n x_j}{T}\right), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Введем вещественные коэффициенты:

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u_j \cos\frac{2\pi n x_j}{T}, \quad b_n = \frac{2}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u_j \sin\frac{2\pi n x_j}{T}, \quad 0 \le n \le \frac{N}{2}.$$

Набор коэффициентов (a_n, b_n) назовем прямым преобразованием Фурье в вещественной форме. Коэффициенты комплексного преобразования выражаются через них с помощью формулы:

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0 \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

Выведем вещественную форму обратного преобразования Фурье:

$$u_j = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n \exp\left(i\frac{2\pi n x_j}{T}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-N/2}^{-1} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \left(\cos\frac{2\pi n x_j}{T} + i\sin\frac{2\pi n x_j}{T}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N/2-1} \frac{a_n - ib_n}{2} \left(\cos\frac{2\pi n x_j}{T} + i\sin\frac{2\pi n x_j}{T}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2-1} a_n \cos\frac{2\pi n x_j}{T} + \frac{a_{N/2}}{2}\cos\pi j + \sum_{n=1}^{N/2-1} b_n \sin\frac{2\pi n x_j}{T}.$$

В последней формуле было использовано условие периодичности: $a_{-N/2} = a_{N/2}$.
Пусть u_j - нечетная функция, $u_{-j} = -u_j$. Тогда $a_n \equiv 0$, если $u_{-N/2} = 0$. Последнее равенство вытекает из условия периодичности и нечетности: $u_{-N/2} = u_{N/2}$, $u_{-N/2} = -u_{N/2}$. Рассмотрим область положительных значений x и введем новые обозначения $L = \frac{T}{2}$, $M = \frac{N}{2}$. Используем очевидные равенства $\frac{x_j}{T} = \frac{j}{N} = \frac{j}{2M}$. Получаем конечное синус-преобразование Фурье:

$$u_j = \sum_{n=1}^{M-1} b_n \sin\frac{\pi n j}{M}, \quad b_n = \frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M-1} u_j \sin\frac{\pi n j}{M}.$$

Пусть u_j - нечетная функция, $u_{-j} = u_j$. Тогда $b_n \equiv 0$. Получаем конечное косинус-преобразование Фурье:

$$u_j = \sum_{n=0}^{M} \rho_n a_n \cos\frac{\pi n j}{M}, \quad a_n = \frac{2}{M}\sum_{j=0}^{M} \rho_j u_j \cos\frac{\pi n j}{M}, \quad \rho_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ 1, & n = 1, \dots M-1 \\ \frac{1}{2}, & n = M \end{cases}$$

Задание

Каждый студент выполняет общую задачу и одну из двух (А или Б) в соответствии с буквой варианта. В каждой задаче необходимо построить график распределения температуры в численном решении.

Задача А. Рассмотрим задачу о стационарной теплопроводности в однородном прямоугольнике, на одной стороне которого поддерживается постоянная (нулевая) температура, а остальные стороны теплоизолированы. Предположим, что внутри прямоугольника имеется источник тепла, мощность которого является заданной функцией координат. Сформулируем математическую постановку данной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x,y)$ – мощность тепловых источников, распределенных внутри области, $u(x,y)$ – распределение температуры.

Для решения задачи введем сетку в прямоугольнике:

$$x_i = ih_x,\ h_x = \frac{a}{N},\ i = 0,\dots,N, \quad y_j = jh_y,\ h_y = \frac{b}{M},\ j = 0,\dots,M.$$

Во внутренних узлах сетки уравнение Пуассона аппроксимируется разностной схемой:

$$\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij}. \tag{2}$$

Граничные условия на сторонах $x = 0$ и $x = a$ аппроксимируются соотношениями

$$u_{0j} = u_{1j}, \quad u_{Nj} = 0, \quad 0 \le j \le M. \tag{3}$$

Оставшаяся пара граничных условий на сторонах $y = 0$ и $y = b$ удовлетворится автоматически, если мы воспользуемся дискретным косинус-преобразованием Фурье:

$$u_{ij} = \sum_{m=0}^{M} \rho_m U_{im} \cos\left(\pi\frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le j \le M. \tag{4}$$

Весовой множитель определяется формулой

$$\rho_m = \begin{cases} 0.5, & m = 0, \\ 1 & 1 < m < M-1, \\ 0.5, & m = M. \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$U_{im} = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M} \rho_j u_{ij} \cos\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le m \le M. \tag{5}$$

Точно таким же образом произведем разложение правой части:

$$f_{ij} = \sum_{m=0}^{M} \rho_m F_{im} \cos\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le j \le M. \tag{6}$$

$$F_{im} = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^{M} \rho_j f_{ij} \cos\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le m \le M. \tag{7}$$

После подстановки разложений (4) и (6) в разностную схему (2) – (3) и элементарных тригонометрических преобразований получим разностную схему для коэффициентов Фурье:

$$\frac{-U_{i-1,m} + 2U_{i,m} - U_{i+1,m}}{h_x^2} + \frac{\lambda_m}{h_y^2} U_{i,m} = F_{im}, \quad \lambda_m = 4\sin^2 \frac{\pi m}{2M}. \tag{8}$$

Схема дополняется граничными условиями:

$$U_{0m} = U_{1m}, \quad U_{Nm} = 0, \quad 0 \le m \le M. \tag{9}$$

Мы получили семейство разностных краевых задач, каждая из которых может быть решена методом прогонки.

Таким образом, мы можем сформулировать следующий алгоритм.

1. По формуле (7) вычисляем коэффициенты Фурье правой части.

2. Находим коэффициенты Фурье температуры, решая методом прогонки семейство разностных уравнений (8) – (9).

3. Находим распределение температуры с помощью преобразования (4).

Мощность тепловых источников задать в виде

$$f(x,y) = \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\delta^2}\right].$$

Построить график 2-мерного распределения температуры $u(x,y)$.

Задача Б. Рассмотрим задачу о стационарной теплопроводности в однородном прямоугольнике, одна сторона которого теплоизолирована, а на остальных поддерживается постоянная (нулевая) температура. Предположим, что внутри прямоугольника имеется источник тепла, мощность которого является заданной функцией координат. Сформулируем математическую постановку данной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad 0 < x < a, \ 0 < y < b, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $f(x,y)$ – мощность тепловых источников, распределенных внутри области, $u(x,y)$ – распределение температуры.

Пара граничных условий на сторонах $y = 0$ и $y = b$ удовлетворится автоматически, если мы воспользуемся дискретным синус-преобразованием Фурье:

$$u_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} U_{im} \sin\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le j \le M. \tag{11}$$

Коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$U_{im} = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^{M-1} u_{ij} \sin\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 1 \le m \le M-1. \tag{12}$$

Точно таким же образом произведем разложение правой части:

$$f_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} F_{im} \sin\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le j \le M. \tag{13}$$

$$F_{im} = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^{M-1} f_{ij} \sin\left(\pi \frac{mj}{M}\right), \quad 0 \le i \le N, \quad 1 \le m \le M-1. \tag{14}$$

После подстановки разложений (11) и (13) в разностную схему (2) и элементарных тригонометрических преобразований получим разностную схему для коэффициентов Фурье:

$$\frac{-U_{i-1,m} + 2U_{i,m} - U_{i+1,m}}{h_x^2} + \frac{\lambda_m}{h_y^2} U_{i,m} = F_{im}, \quad \lambda_m = 4 \sin^2 \frac{\pi m}{2M}. \tag{15}$$

Схема дополняется граничными условиями:

$$U_{0m} = U_{1m}, \quad U_{Nm} = 0, \quad 1 \le m \le M-1. \tag{16}$$

Мы получили семейство разностных краевых задач, каждая из которых может быть решена методом прогонки.

Таким образом, мы можем сформулировать следующий алгоритм.

1, По формуле (14) вычисляем коэффициенты Фурье правой части.

2. Находим коэффициенты Фурье температуры, решая методом прогонки семейство разностных уравнений (15) – (16).

3. Находим распределение температуры с помощью преобразования (11).

Мощность тепловых источников задать в виде

$$f(x, y) = \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\delta^2}\right].$$

Построить график 2-мерного распределения температуры $u(x, y)$.

Общая задача. Рассмотрим задачу о стационарной теплопроводности в однородном прямоугольнике, на всех сторонах прямоугольника задается нулевая температура. Предположим, что внутри прямоугольника имеется источник тепла, мощность которого является заданной функцией координат. Сформулируем математическую постановку данной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 < x < a, \ 0 < y < b, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $f(x, y)$ – мощность тепловых источников, распределенных внутри области, $u(x, y)$ – распределение температуры.

Для решения разностных уравнений схемы (2) мы воспользуемся двумерным дискретным синус-преобразованием Фурье. Граничные условия

$$u_{0j} = 0, \quad u_{Nj} = 0, \quad 0 \le j \le M, \qquad u_{i0} = 0, \quad u_{iN} = 0, \quad 0 \le i \le N. \tag{18}$$

при этом выполнятся автоматически.

Вначале в полном соответствии с формулами (11) – (14) проведем преобразование по второму индексу сеточной функции (соответствующему переменной y). В результате получим разностную схему для коэффициентов Фурье:

$$\frac{-U_{i-1,m} + 2U_{i,m} - U_{i+1,m}}{h_x^2} + \frac{\lambda_m}{h_y^2} U_{i,m} = F_{im}, \quad \lambda_m = 4 \sin^2 \frac{\pi m}{2M}. \tag{19}$$

Схема дополняется граничными условиями:

$$U_{0m} = 0, \quad U_{Nm} = 0, \quad 1 \le m \le M-1. \tag{20}$$

Мы получили семейство одномерных разностных краевых задач, каждая из которых может быть решена методом дискретного синус-преобразования Фурье.

Произведем преобразование Фурье по первому индексу:

$$U_{im} = \sum_{l=1}^{N-1} V_{lm} \sin\left(\pi \frac{li}{N}\right), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M-1. \tag{21}$$

Коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$V_{lm} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} U_{im} \sin\left(\pi \frac{li}{N}\right), \quad 1 \leq l \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M-1. \tag{22}$$

Точно таким же образом произведем разложение правой части:

$$F_{im} = \sum_{l=1}^{N-1} \Phi_{lm} \sin\left(\pi \frac{li}{N}\right), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq m \leq M-1. \tag{23}$$

$$\Phi_{lm} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} F_{im} \sin\left(\pi \frac{li}{N}\right), \quad 1 \leq l \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M-1. \tag{24}$$

После подстановки (21) и (23) в разностную схему (19) – (20) и преобразований получим систему алгебраических уравнений:

$$\left(\frac{\gamma_l}{h_x^2} + \frac{\lambda_m}{h_y^2}\right) V_{lm} = \Phi_{lm}, \quad \gamma_l = 4\sin^2 \frac{\pi l}{2N}, \tag{25}$$

решение которой дается очевидной формулой:

$$V_{lm} = \left(\frac{\gamma_l}{h_x^2} + \frac{\lambda_m}{h_y^2}\right)^{-1} \Phi_{lm}, \quad 1 \leq l \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M-1. \tag{26}$$

Таким образом, алгоритм решения разностной задачи (2), (18) состоит в последовательном применении преобразований (14), (24), (26), (21) и (11).

Мощность тепловых источников задать в виде

$$f(x,y) = \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\delta^2}\right].$$

Построить график 2-мерного распределения температуры $u(x,y)$.