Моделирование атмосферы нейтронной звезды с учетом слоя растекания

Черносов Вячеслав

26 октября 2025 г.

1 Описание гравитационной волны

1.1 Физическое пространство

Гравитационная волна описывается как:

$$\mathbf{h}_{ij}(t, \vec{x}, \hat{\Omega}) = \mathbf{h}(t - \hat{\Omega} \cdot \vec{x}) \cdot \mathbf{e}^*_{ij}(\hat{\Omega}) \cdot \mathbf{\Phi},$$

где комплексные слагаемые равны:

$$\mathbf{h}(t) \equiv h^+(t) + ih^\times(t),$$

$$\mathbf{e}_{ij}(\hat{\Omega}) \equiv e^+_{ij}(\hat{\Omega}) + ie^\times_{ij}(\hat{\Omega}),$$

$$\mathbf{\Phi} = \exp(-2i\psi)$$

а ψ – угол поляризации. Красное смещение тогда будет равно:

$$\mathbf{Z}(t, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^i\hat{p}^j}{1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}}\left[\mathbf{h}_{ij}(t, \vec{0}) - \mathbf{h}_{ij}(t-L, L\hat{p})\right],$$

что можно переписать как:

$$\mathbf{Z}(t, \hat{\Omega}) = \Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \mathbf{F}^*(\hat{\Omega})$$

$$\mathbf{F}(\hat{\Omega}) = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^i\hat{p}^j}{1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}} \cdot \mathbf{e}_{ij}(\hat{\Omega})$$

$$\Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) = \left[\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}(t - L(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}))\right] \cdot \mathbf{\Phi}$$

1.2 Фурье пространство

Гравитационную волну можно также расписать как сумму плоских волн:

$$\mathbf{h}(t) = \int e^{i2\pi ft} \cdot \tilde{\mathbf{h}}(f) \cdot \mathrm{d}f$$

Тогда $\Delta\mathbf{h}$ распишется как:

$$\Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) = \int e^{i2\pi ft} \cdot (1 - e^{-i2\pi fL(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}(f) \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{d}f,$$

или же:

$$\Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) = \int e^{i2\pi ft} \cdot \tilde{\mathbf{T}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}(f) \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{d}f,$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega}) = (1 - e^{-i2\pi fL(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})})$$

Тогда красное смещение будет равно:

$$\mathbf{Z}(t, \hat{\Omega}) = \int e^{i2\pi ft} \cdot \tilde{\mathbf{h}}(f) \cdot \tilde{\mathbf{T}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \mathbf{F}^*(\hat{\Omega}) \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{d}f$$

или же:

$$\mathbf{Z}(t, \hat{\Omega}) = \int e^{i2\pi ft} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}(f, \hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}f$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}(f, \hat{\Omega}) = \tilde{\mathbf{h}}(f) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega})$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega}) = \tilde{\mathbf{T}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \mathbf{F}^*(\hat{\Omega}) \cdot \mathbf{\Phi}$$

Проинтегруем по сфере:

$$\tilde{\mathbf{Z}}(f) = \int \tilde{\mathbf{h}}(f) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(f, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

1.3 Корреляции красных смещений

Корреляция для красных смещений считается как:

$$\mathbf{r}_{ab}(\tau) = \int \mathbf{Z}_a(t) \cdot \mathbf{Z}_b(t-\tau) \cdot \mathrm{d}t$$

Мы можем также разложить её в ряд Фурье:

$$\mathbf{r}_{ab}(\tau) = \int e^{i2\pi f\tau} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{ab}(f) \cdot \mathrm{d}f$$

и применить свойство корреляционной функции:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ab}(f) = \tilde{\mathbf{Z}}_1(f) \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_2(f)$$

Тогда $\rho_{ab}(\tau)$ выражается как:

$$\mathbf{r}_{ab}(\tau) = \int e^{i2\pi f\tau} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_a(f) \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_b(f) \cdot \mathrm{d}f$$

$$\mathbf{r}_{ab}(\tau) = \int e^{i2\pi f\tau} \cdot \tilde{\mathbf{h}}_a(f) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_b(f) \cdot \mathrm{d}f \int \tilde{\mathbf{R}}_a(f,\hat{\Omega}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_b(f,\hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

С другой стороны, корреляция $\tilde{\mathbf{h}}(f)$ выражается через спектр как:

$$\mathbf{H}(f) = \tilde{\mathbf{h}}_a(f) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_b(f) = \tilde{\mathbf{h}}^2(f)$$

$$\mathbf{r}_{ab}(\tau) = \int e^{i2\pi f\tau} \cdot \mathbf{H}(f) \cdot \mathrm{d}f \int \tilde{\mathbf{R}}_a(f,\hat{\Omega}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_b(f,\hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

Корреляция в нуле будет равна:

$$\mathbf{r}_{ab}(0) = \langle \mathbf{Z_a}, \mathbf{Z_b} \rangle = \int H(f) \cdot \mathrm{d}f \int \tilde{\mathbf{R}}_a(f,\hat{\Omega}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_b(f,\hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

Корреляция в нуле будет равна:

$$\mathbf{r}_{ab}(0) = \langle \mathbf{Z_a}, \mathbf{Z_b} \rangle = \int H(f) \cdot \mathrm{d}f \int \tilde{\mathbf{R}}_a(f,\hat{\Omega}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_b(f,\hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

$$\mathbf{r}_{ab} \approx 4\pi h^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \int \tilde{\mathbf{F}}_a(\hat{\Omega}) \cdot \tilde{\mathbf{F}}_b(\hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega} = 4\pi h^2 \mu(\gamma)$$

1.4 Симуляция данных

В качестве входных параметров будем использовать спектр $\mathbf{H}(f)$. Тогда:

$$\tilde{\mathbf{h}}(f) = \sqrt{\mathbf{H}(f)}$$

$$\mathbf{h}(t) = \int e^{i2\pi ft} \cdot \sqrt{\mathbf{H}(f)} \cdot \mathrm{d}f$$

$$\Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) = \left[\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}(t - L(1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}))\right] \cdot \mathbf{\Phi}$$

$$\mathbf{Z}(t, \hat{\Omega}) = \Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \mathbf{F}^*(\hat{\Omega})$$

$$\mathbf{Z}(t) = \int \Delta\mathbf{h}(t, L\hat{p}, \hat{\Omega}) \cdot \mathbf{F}^*(\hat{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

Получаем входной сигнал:

$$Z(t) = \Re\left[\mathbf{Z}(t)\right]$$

Тогда выходной сигнал будет выглядеть как:

$$r_{ab} = \langle Z_a, Z_b \rangle \approx \int_{-T/2}^{T/2} Z_1(t) \cdot Z_2(t) \cdot \mathrm{d}t$$

$$\Gamma_{ab}(\gamma) = \frac{r_{ab}}{4\pi h^2}$$

1.5 Примеры спектров

$$H(f) = A \cdot \delta(f - f_0)$$

$$h^2 = \int H(f) \cdot \mathrm{d}f = \int A \cdot \delta(f - f_0) \cdot \mathrm{d}f = A$$

$$H(f) = A \cdot f^{-\alpha}$$

$$h^2 = \int H(f) \cdot \mathrm{d}f = \int A \cdot f^{-\alpha} \cdot \mathrm{d}f = A$$