

Matematika UIN



Pemodelan Matematika dalam Perspektif Praktik

Pemodelan Matematika dalam Perspektif Praktik

Penerbit:
nama penerbit

Penulis:

Ari Kusumastuti
Nurul Anggraeni Hidayati
Dian Nan Brylliant
Syafitri Hidayahningrum

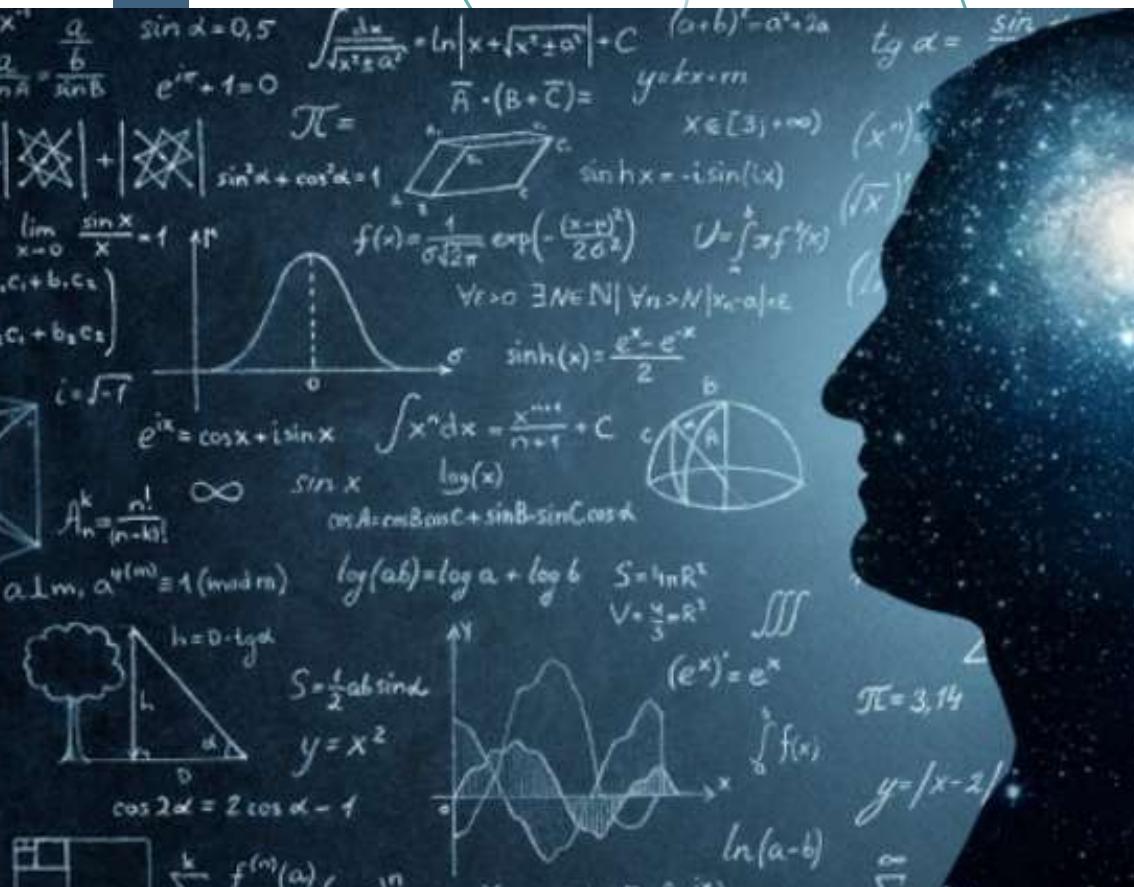
Editor dan Penyelaras Bahasa:

Ari Kusumastuti
Nurul Anggraeni Hidayati

Desain dan Tata Letak:

Nurul Anggraeni Hidayati

Bab 1 Model Matematika



Pemodelan matematika adalah salah satu cabang dalam matematika. Di dalamnya termuat upaya melakukan formulasi masalah nyata ke dalam persamaan diferensial. Dapat dipahami bahwa model matematika merupakan penyederhanaan dari masalah nyata dan memiliki peran yang penting dalam mendeskripsikan masalah nyata tersebut ke dalam bentuk persamaan diferensial, baik persamaan diferensial parsial maupun persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial ini memuat sekumpulan variabel dan hubungan antara variabel-variabel tersebut. Namun, tidaklah mungkin untuk melibatkan semua variabel dan parameter yang mempengaruhi sistem sesungguhnya yang telah dimodelkan untuk mengurangi tingkat kompleksitas algoritma dan komputasi yang terlalu besar. Oleh karena itu, penting untuk terlebih dahulu menentukan variabel utama yang memiliki pengaruh secara signifikan sebelum menformulasikan masalah yang akan dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Dengan terbentuknya persamaan diferensial ini, maka komputasi dapat membantu proses analisis dari fenomena sehingga menghasilkan interpretasi yang kontekstual dan logis.

Selanjutnya, model matematika telah digunakan secara

luas yang mencakup fenomena dalam berbagai latar belakang disiplin ilmu, misalnya fisika, kedokteran, biologi, teknik, dan sosial. Pada Buku ini dikaji praktik pemodelan dasar yang ditujukan sebagai pendamping buku teori pemodelan dasar. Pembahasan yang dilakukan diarahkan pada berbagai masalah seperti: (a) masalah penyebaran penyakit pada suatu daerah dalam skala makro (di luar tubuh) maupun skala mikro (di dalam tubuh), (b) masalah penentuan fungsi kontrol dalam rangka mengurangi penyebaran suatu penyakit, (c) masalah keseimbangan ekosistem di dalam peristiwa mangsa memangsa yang melibatkan satu atau lebih predator dan prey, (d) masalah vibrasi dawai dengan berbagai variasinya, dan (e) masalah interaksi gen-gen di dalam tubuh yang melibatkan proses kimia dari enzim dan substrat. Simulasi pada berbagai kondisi disajikan dengan harapan menjadi penjelasan apakah model matematika yang telah diformulasikan mendekati kondisi riilnya atau tidak. Validasi model matematika selanjutnya menjadi perlu dan merupakan aktifitas terus menerus sampai didapatkan model matematika yang mendekati ideal. Dalam hal ini pemodelan matematika menjadi upaya terus menerus untuk merevisi model yang sudah ada.

Salah satu model dasar dan kerangka kerja pemodelan yang paling populer adalah model kompartemen. Model kompartemen dikonstruksi dengan membagi subjek-subjek yang terlibat dalam penyebaran penyakit tertentu menjadi beberapa kompartemen berdasarkan status kesehatannya secara spesifik. Menurut Almeida, dkk. (2019), model kompartemen bersifat dinamis karena jumlah individu setiap kompartemen dapat berfluktuasi seiring waktu ketika status

kesehatan individu berubah. Sebagian besar model kompartemen selanjutnya dapat dikonversi dalam persamaan diferensial. Model kompartemen yang disajikan dalam persamaan diferensial menunjukkan bahwa proses yang dimodelkan merupakan proses deterministik, artinya kondisi pada masa sekarang bergantung sepenuhnya pada kondisi pada masa lalu yang dideskripsikan melalui model tersebut(Brauer, 2008). Berikut ini dijelaskan beberapa kompartemen yang sering digunakan dalam model epidemi.

1. Kompartemen ini merupakan kompartemen yang berisi individu yang rentan terinfeksi penyakit dan memiliki potensi menjadi individu terinfeksi. Laju perubahan banyaknya individu pada kompartemen rentan biasanya digambarkan dalam bentuk model pertumbuhan eksponensial, artinya laju perubahannya proporsional dengan total individu dalam populasi.
2. Kompartemen *exposed* berisi individu yang sudah terinfeksi penyakit, namun masih dalam masa inkubasi sehingga tidak memiliki potensi menularkan penyakit. Kompartemen ini dimunculkan berdasarkan fakta bahwa individu yang terinfeksi penyakit tertentu tidak selalu langsung berpotensi menularkan penyakit. Misalnya seorang manusia terinfeksi virus *dengue* dari gigitan nyamuk terinfeksi. Virus *dengue* memerlukan masa inkubasi 4-7 hari, artinya manusia tersebut tidak akan mengalami gejala klinis dan belum berpotensi menularkan pada rentang waktu tersebut. Dengan demikian manusia tersebut dimasukkan ke dalam kompartemen *exposed*.

-
3. Kompartemen ini berisi individu yang sudah terinfeksi dan berpotensi menularkan penyakit kepada individu lain. Individu di dalam kompartemen terinfeksi berperan besar dalam proses penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Individu pada kompartemen terinfeksi dapat sembuh dan berpindah ke kompartemen sembuh.
 4. Kompartemen sembuh berisi individu dari kompartemen terinfeksi yang sudah sembuh, baik secara alami, perawatan, atau vaksinasi. Individu di dalam kompartemen ini dapat masuk kembali ke dalam kompartemen rentan jika tidak mengalami pengebalan terhadap penyakit.

Dalam kajian pemodelan masalah penyebaran penyakit dalam skala epidemi menurut Almeida, dkk. (2019), model epidemi merupakan salah satu model matematika yang berguna dalam ilmu epidemiologi untuk memahami perilaku penyakit menular, seperti prevalensi dan durasi epidemi, serta dampaknya. Dalam pemodelan masalah penyebaran penyakit menggunakan kerangka kerja model kompartemen. Pada kasus ini, model kompartemen dikonstruksi dengan mengelompokkan individu yang terlibat dalam penyebaran penyakit tertentu menjadi beberapa kompartemen. Selanjutnya, kelompok individu ini merupakan variabel-variabel model. Pada masalah penyebaran penyakit misalnya, kompartemen yang sering digunakan antara lain: individu rentan (*susceptible*), terpapar (*exposed*), individu terinfeksi (*infected*), individu sembuh (*recovered*), dan individu pembawa (*carrier*). Kelima populasi individu

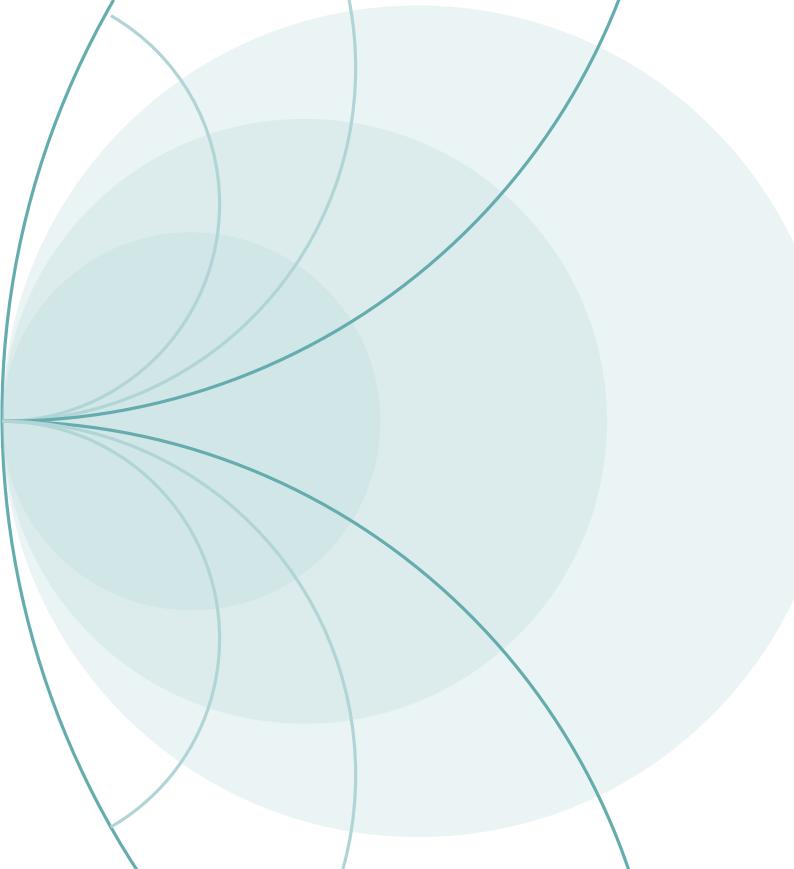
tersebut selanjutnya menjadi variabel-variabel model. Hubungan antara semua kelompok individu ini selanjutnya diukur dan dideskripsikan dari parameter-parameter yang telah didefinisikan pada sistem. Pendekatan seperti ini selanjutnya dapat diterapkan pada masalah penyebaran penyakit baik pada skala makro yang melibatkan populasi manusia, maupun pada skala mikro yang melibatkan populasi sel-sel dan gen-gen.

Dalam kajian pemodelan kasus keseimbangan ekosistem yang melibatkan peristiwa makan memakan predator kepada prey, maka model kompartemen di atas juga dilaksanakan. Selanjutnya, hubungan antara populasi predator dan prey dideskripsikan oleh parameter-parameter yang didefinisikan dalam sistem.

Sementara itu pada pemodelan kasus fisika, maka kaidah pemodelan dilaksanakan dengan memperhatikan beberapa aspek yang akan menjadi langkah pemodelan. Langkah-langkah itu adalah: (a) menguji asumsi-asumsi yang melatarbelakangi masalah, (b) menggambarkan dalam kompartemen sistem, dan menggambarkan semua gaya-gaya yang terlibat. Pada bagian ini sangat krusial, karena harus melibatkan kajian teoritik yang mendalam dan hati-hati. (c) Mengidentifikasi hukum-hukum yang berlaku pada masalah, (d) menentukan. Pada masalah pemodelan kasus vibrasi dawai misalnya, kelima langkah di atas diterapkan. Identifikasi gaya-gaya yang bekerja harus dilakukan secara cermat untuk mendapatkan gambaran total energi potensial. Selanjutnya jumlahkan total energi potensial dan energi kinetik dinyatakan sebagai persamaan Lagrange.

Bab selanjutnya dari buku ini akan mengupas pemodelan

matematika dengan membawa pembaca pada situasi riil masalah. Selanjutnya langkah-langkah pemodelan yang telah dipaparkan di atas disajikan untuk memberi deskripsi yang kongkrit sehingga diperoleh model prediksi yang diharapkan.



Bab 2

Model Matematika Vibrasi

Dawai Alat Musik Petik



2.1 Pendahuluan

Pemodelan matematika pada dawai alat musik petik merupakan proses mendeskripsikan masalah dawai yang diberikan simpangan atau petikan dan memformulasikannya dalam persamaan diferensial. Tujuan pemodelan pada masalah ini adalah memahami fenomena vibrasi merambat yang dihasilkan di sepanjang dawai sesaat setelah simpangan dilepaskan. Selain itu pemodelan matematika pada masalah ini dilakukan untuk menjawab pertanyaan klasik memainkan alat musik, yakni (a) bagaimana simpangan maksimum dapat dibuat saat dilakukannya petikan agar noise dapat diminimalkan, (b) bagaimana faktor-faktor internal dapat dikendalikan agar hasil petikan pada suatu nada tertentu mencapai kondisi yang maksimal. Melalui model matematika yang dibangun diharapkan dapat memberikan simulasi untuk pengaturan simpangan sehingga menghasilkan noise yang rendah. Model matematika juga bertujuan untuk membantu mempelajari secara komprehensif masalah vibrasi dawai pada alat musik petik.

Berbagai macam alat musik petik yang populer memiliki karakteristik masing-masing yang mempengaruhi teknis

petikannya untuk memproduksi suatu nada tertentu. Masing-masing alat musik tersebut memiliki karakteristik teknik petikannya masing-masing. Beberapa alat musik petik yang sering dijumpai misalnya gitar, kecapi, sasando (dari Nusa Tenggara Timur), Gondang Hasapi (dari daerah Tapanuli), Siter (dari Jawa Tengah), Ukulele (dari Maluku), Sapek (dari Kalimantan Timur), Panting (dari Kalimantan Selatan), Jentreng (dari Jawa Barat), Ketadu Mara (dari Nusa Tenggara Timur), dan masih banyak lagi. Bentuk fisik alat musik petik tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 2.1. Alat musik petik tradisional di Indonesia

Hal yang menarik untuk analisa noise setelah petikan adalah dengan cara mengamati merekam profil vibrasi setelah dawai dipetik berulang-ulang untuk mengukur simpangan terbaik yang menghasilkan noise terkecil. Cara yang kedua adalah dengan memformulasikan model matematika. Setiap nada dasar akan memiliki patern lokasi petikan yang berbeda-beda, yang melibatkan panjang dawai. model matematika yang

dikonstruksi bertujuan untuk menjelaskan bagaimana fenomena vibrasi terjadi. Simpangan terbaik dilakukan dengan cara simulasi model matematika dengan berbagai input termasuk di dalamnya panjang dawai l sehingga diperoleh amplitudo vibrasi y yang paling kecil dengan frekwensi yang kecil pula. Formulasi model matematika ini didukung dengan melibatkan pengetahuan teoritik dari fenomena fisika dawai, hukum-hukum fisika yang lengkap melatarbelakangi sistem dawai, identifikasi secara teliti semua gaya dan energi yang terjadi pada sistem masalah. Khusus pada masalah ini maka dipertimbangkan dengan cermat total energi potensial, energi kinetik dan persamaan Lagrange.

Konstruksi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dilakukan dengan berbagai tahapan. *Pertama*, melakukan identifikasi masalah secara cermat; bagaimana vibrasi ini terjadi setelah petikan, apa yang signifikan mempengaruhi terjadinya noise setelah petikan. gejala-gejala apa saja yang bisa ditangkap dari masalah dan studi literatur yang mencukupi untuk membacup masalah yang akan dimodelkan. Termasuk di dalamnya sketsa gambar sistem dibuat untuk mempermudah identifikasi. *Kedua*, Menetapkan variabel model, menyusun list parameter dan melacaknya dalam berbagai sumber yang akurat. *Ketiga*, membangun asumsi, melibatkan rincian seluruh hasil identifikasi masalah dan mempertimbangkan semua kemungkinan dan efeknya. *Keempat*, konstruksi model yang melibatkan analisis gaya-gaya yang bekerja, energi potensial, total energi potensial yang terjadi, energi kinetik, persamaan Lagrange dan penurunan persamaan lagrange terhadap variabel tak bebas model. *Kelima*, analisis Validasi Model melalui analisis

profil grafik, solusi analitik model dan simulasinya. Langkah ini dilakukan sekaligus untuk menguji apakah profil grafik solusi dari model matematika yang dibangun telah cukup realistik atau perlu dilakukan *bedah model* untuk cek apakah ada komponen-komponen yang belum dipertimbangkan. Termasuk ketelitian proses menjadi target utama pada upaya validasi model ini. Model matematika yang telah valid diindikasikan dengan profil grafik dari variabel bebas mendekati kondisi yang sesungguhnya. Dasar inilah yang dapat memberi rekomendasi dilaksanakannya analisis pada tataran numerik, analitik dan kajian dari perspektif lainnya.

2.2 Dasar Teori

Sesaat setelah dawai dipetik/diberi simpangan, dawai bervibrasi sehingga terjadi gesekan antara dawai dan udara. Faktor kekentalan udara di sekitar dawai yang bergetar mempengaruhi kecepatan dawai dalam bervibrasi. Secara teoritik, komponen yang terlibat adalah: Massa Jenis Dawai (ρ) merupakan massa *string* dawai per satuan volume dengan satuan kg/m^3 . Secara matematis dituliskan sebagai $\rho = \frac{m}{v}$.

Tegangan Dawai (*Stress*) T . Tegangan muncul sebagai reaksi untuk menahan gaya yang sedang bekerja. Besar tegangan akan sebanding dengan gaya yang bekerja. Tegangan merupakan gaya F per satuan luas penampang dawai A yang memiliki satuan N/m^2 dan dapat dinyatakan sebagai $T = \frac{F}{A}$.

Regangan (*Strain*) r . Regangan adalah perubahan panjang dawai. Perubahan ini merupakan akibat dari pergeseran internal di setiap titik sepanjang dawai. Selanjutnya regangan

merupakan perbandingan antara pertambahan panjang (Δl) dengan panjang awalnya (l_0) yakni $r = \frac{\Delta l}{l_0}$.

Dengan adanya kemampuan dawai untuk tegang dan regang setelah dikenai gaya inilah maka dawai dikatakan bersifat elastis. Keelastisitasan dawai ditunjukkan sebagai Modulus Elastisitas (*Modulus Young*) E , yang menunjukkan keterkaitan antara tegangan dengan regangan dalam hubungan $E = \frac{T}{e}$. Berikut disajikan modulus elastisitas dari beberapa material penyusun dawai yang mungkin:

Tabel 2.1. Modulus Elastis dari Beberapa Material

Material	Modul Elastis (N/m^2)
Besi	1×10^{11}
Baja	2×10^{11}
Perunggu	1×10^{11}
Alumunium	7×10^{10}
Beton	2×10^{10}
Batu bara	1.4×10^{10}
Marmer	5×10^{10}
Granit	4.5×10^{10}
Kayu pinus	1×10^{10}
Nilon	0.5×10^{10}
Tulang muda	1.5×10^{10}

Berikutnya adalah konsep amplitudo A yang merupakan simpangan maksimal dari titik kesetimbangan saat dawai bervibrasi sesaat setelah dikenai petikan. Amplitudo maksimum disebut perut dan amplitudo sama dengan nol disebut simpul. Selanjutnya vibrasi ini akan merambat membentuk gelombang mencapai jarak tertentu. Secara teoritik, perbandingan perpindahan satu gelombang dengan periodenya disebut cepat rambat gelombang v dalam satuan

m/s . Sekali lagi, besar cepat rambat gelombang dipengaruhi besar gaya tegangan F dan massa jenis *string* dawai μ . Kaidah hukum Melde memberikan dasar teoritik hubungan antara gaya tegangan dan cepat rambat gelombang dalam ekspresi matematika $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. Jika dikaitkan dengan modulus elastisitas E penyusun materi dawai dengan Massa jenis dawai elastis linear ρ , maka cepat rambat gelombang v juga dapat didefisikan sebagai $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Hubungan antara gaya dan usaha menjadi sangat penting pada masalah dawai dengan simpangan tertentu. perambatan energi oleh partikel-partikel, melibatkan pula gaya-gaya yang bekerja akan berdampak pada besar usaha yang bekerja. Secara teoritik, Usaha sangat dipengaruhi oleh kondisi dari gaya. Gaya yang terjadi pada suatu dawai dapat bernilai konstan bahkan dapat pula berubah sesuai dengan perubahan lokasi dimana gaya ini bekerja dan tidak dipengaruhi oleh cara perpindahan partikel merambatkan energi. Jika gaya berubah dipengaruhi lokasi gaya bekerja maka gaya seperti ini disebut gaya konservatif. Untuk kondisi pertama dimana diasumsikan gaya bersifat konstant, maka besar usaha (W) didefinisikan sebagai $W = F\Delta x$. Sementara itu untuk kasus dengan gaya yang konservatif maka besar usaha (W) yang diperlukan untuk melakukan perpindahan dari titik awal (x_i) dan titik akhir (x_j), secara matematis dinyatakan sebagai $W = \int_{x_i}^{x_j} F(x)dx$.

Berdasarkan hal tersebut, maka terjadi perubahan besar energi potensial (ΔE_p) dalam sistem. Perubahan ini berlawanan arah dengan usaha, yang dinyatakan sebagai $\Delta E_p = -W$ Oleh karena itu dapat dinyatakan besar

perubahan energi potensial adalah:

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx$$

Dari persamaan (2.2) didefinisikan satuan dalam Standart Internasional untuk energi potensial dalam *Joule* atau kgm^2/s^2 .

Energi Kinetik Energi kinetik dari sebuah benda berkaitan dengan kondisi benda bergerak. Dalam hal dawai yang diberikan simpangan dan dilepaskan, maka berlaku energi kinetik sebagai konsekwensi gerak bolak balik dawai di sekitar kesetimbangan dan perambatan vibrasi dari titik ke titik sepanjang dawai. secara teoritik, energi kinetik merupakan selisih dari energi total benda (diukur dari sebarang kerangka acuan) (E) dengan energi benda yang diukur dari kerangka diamnya (E_0). Besar energi total dari sebuah benda bermassa m menurut teori relativitas khusus Einstein jika diukur dari sebarang kerangka acuan adalah:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dimana E adalah energi kinetik total (*Joule*), m adalah massa benda (kg), c adalah kecepatan cahaya dalam ruang hampa ($299792458m/s$), dan v adalah kecepatan benda bergerak (m/s). Sementara besar energi jika diukur dari kerangka diam adalah

$$E_0 = mc^2$$

Sehingga energi kinetik dari benda tersebut adalah $E_k = E - E_0$. Dengan melakukan ekspansi deret Taylor maka

diperoleh $E_k = mc^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$. Besar cepat rambat benda yang jauh lebih kecil dibanding cepat rambat cahaya menjadikan energi kinetik dari benda dapat dinyatakan sebagai:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

2.3 Kajian Hukum Fisika

Hukum Newton

Pada masalah gerak dawai alat musik petik setelah diberikan aksi berupa simpangan/petikan, maka hukum Newton menjadi utama untuk diperhatikan. Hukum Newton terdiri atas tiga bagian utama, yakni:

1. Hukum I Newton

Hukum I Newton memandang sebuah objek yang berada dalam keadaan diam akan tetap diam, sementara itu objek yang bergerak akan terus bergerak dengan percepatan tetap di sepanjang garis lurusnya jika tidak mendapat pengaruh berupa gaya luar yang mengenai benda tersebut.

2. Hukum II Newton

Hukum II Newton menyatakan hubungan antara percepatan benda (a), massa benda (m), dan gaya yang bekerja (F). Disebutkan bahwa percepatan gerak benda berbanding lurus dengan gaya yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massa benda itu sendiri. Hubungan tersebut secara matematis dapat dituliskan seperti pada persamaan (2) berikut:

$$\Sigma F = m.a$$

Persamaan (2) menunjukkan jika gaya yang bekerja pada benda tersebut lebih dari satu, maka percepatan gerak benda dipengaruhi oleh gaya total ΣF . Gaya total pada benda adalah jumlah semua vektor gaya yang bekerja pada benda tersebut.

3. Hukum III Newton

Hukum III Newton menyatakan bahwa sebuah benda yang dikenai gaya oleh benda lain juga akan memberikan gaya yang sama terhadap benda tersebut dengan arah yang berlawanan. Hal ini berarti bahwa setiap gaya aksi akan menghasilkan gaya reaksi yang sama besar, namun dengan arah yang berlawanan.

$$F_{aksi} = F_{reaksi}$$

Hukum Hooke Dawai alat musik petik adalah objek yang bersifat elastis; dawai akan kembali ke keadaan semula setelah dikenai suatu gaya tertentu. Setelah petikan misalnya, dawai akan bergetar di sekitar posisi kesetimbangannya dan akan kembali ke posisi semula. Sementara pada saat diberi simpangan, maka dawai akan meregang/mulur yang selanjutnya akan kembali ke posisi semula setelah beberapa saat meregang. Pada suatu dawai elastis seperti ini, berlaku Hukum Hooke yang bekerja untuk memulihkan dawai ke keadaan semula menuju ke kondisi relaks. Hukum Selanjutnya hukum Hooke ini menjelaskan tentang hubungan antara gaya dan perubahan gaya. Besar gaya pegas (F_s) sebanding dengan besar perpanjangan pegas (d), dinyatakan

dalam persamaan (2.3) berikut:

$$F_s = -kx$$

Gaya pegas dawai F_s sebanding dengan perkalian antara konstanta pegas k dengan pertambahan panjang dawai x . Minus pada ruas kanan persamaan (2.3) menunjukkan bahwa gaya pemulih akan terjadi dengan arah yang berlawanan dengan arah perpanjangan pegas (Holliday, dkk., 2010). Konstanta pegas dapat dicari dengan menggunakan hubungan antara modulus elastisitas dawai E , luas penampang dawai A , dan panjang dawai l , yang dirumuskan sebagai:

$$k = \frac{EA}{l}$$

Hukum Stokes Pada kasus dawai alat musik petik, maka sesaat setelah petikan terjadilah gesekan antara dawai yang bervibrasi dengan udara di sekitar dawai. Arah gesekan tentunya berlawanan dengan arah vibrasi dawai. Oleh karena itu gaya gesek bersifat mengerem (*drag force*) yang memperlambat vibrasi dawai di udara. Pada kasus demikian maka hukum Stokes bekerja di sana. Hukum Stokes menyebutkan jika suatu benda bergerak pada suatu fluida yang diam maka timbul gaya gesekan antara benda dengan fluida di sekitar benda tersebut. Gaya gesekan ini sebanding dengan viskositas fluida dinamis zat alir η dan kecepatan relatif benda terhadap zat alir v (Rosyid ,2015). Formula gaya gesek F_s selanjutnya dinyatakan sebagai:

$$F_s = k\eta v$$

Berikut disajikan data kekentalan beberapa fluida yang sering digunakan pada berbagai kasus.

Tabel 2.2. Kekentalan dinamika beberapa fluida

Bahan	Kekentalan (Ns/m ²)	Dinamik
Air	0,010	
Udara	0,000018	
Alkohol	0,018	
Gliserinm	8,5	
Air Raksa	0,0156	

Prinsip Hamilton dan Persamaan Euler-Langrange

Teori relativitas adalah teori yang berkenaan dengan pengaturan struktur ruang dan waktu yang diperkenalkan oleh Albert Einstein. Di dalam teori relativitas, persamaan Lagrange didefinisikan sebagai selisih antara energi kinetik (E_k) dan energi potensial (E_p), sehingga dapat dituliskan:

$$L = E_k - E_p$$

Bentuk implisit untuk persamaan Lagrange mendeskripsikan suatu sistem yang memuat fungsi posisi $u(x, t)$ yang tergantung pada keadaan x dan waktu t serta turunan-turunan parsial terhadap dimensi ruang dan waktu berturut-turut, yang dinyatakan sebagai:

$$L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), u(x, t), x, t \right)$$

Selanjutnya didefinisikan persamaan gerak sebagai:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{\infty} L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), u(x, t), x, t \right) dx$$

Persamaan gerak ini selanjutnya disebut persamaan Euler-Lagrange (Arfken dan Hans, 2005). Turunan Persamaan Euler-Lagrange terhadap sistem posisi ini dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dL}{du} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) \quad (2.1)$$

2.4 Formulasi Model Matematika

Formulasi model matematika merupakan proses analisis yang melibatkan urutan langkah-langkah yang saling berkaitan, dimulai dari memahami masalah, penentuan variabel model, menguji asumsi-asumsi yang berlaku, menetapkan satuan model, uji validasi model dan interpretasinya. Pada kasus fisika dan kasus biologi memungkinkan ada urutan langkah yang berbeda. Perbedaan ini terutama sangat berkaitan dengan sistem yang dibangun sehingga memudahkan bagaimana fenomena dapat dideskripsikan dengan lebih teknis. Pada bagian ini akan dikaji langkah-langkah formulasi model matematika pada kasus vibrasi dawai setelah diberikan simpangan tertentu. Tujuan pemodelan masalah ini untuk mendapatkan gambaran pola vibrasi yang terjadi. Dari sini dapat dilihat realistik atau tidaknya model yang telah dibangun. Simulasi yang dilakukan juga dapat memberi gambaran simpangan maksimal sehingga didapatkan noise yang paling kecil dikaitkan dengan amplitudo dan frekwensi gelombangnya. Pada pemodelan masalah vibrasi dawai alat musik petik yang difokuskan untuk mendapatkan nada dasar do, maka diterapkan urutan langkah-langkah pemodelan

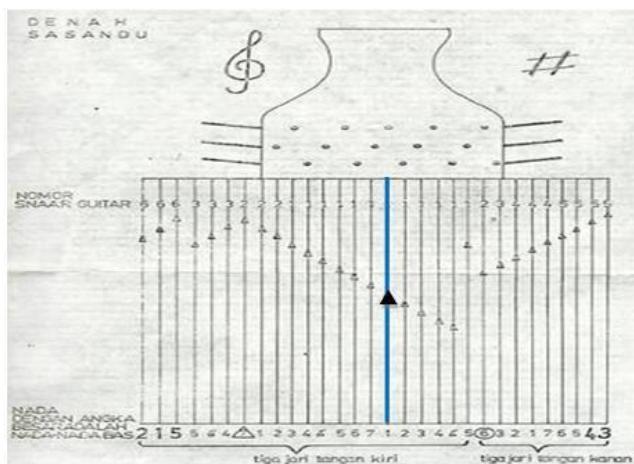
sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah yang akan dimodelkan
2. Identifikasi seluruh variabel yang signifikan terlibat dan analisis parameter-parameter yang melengkapi variabel model
3. Identifikasi gaya-gaya yang bekerja pada model dan menggambar semua vektor gaya dengan cermat.
4. Identifikasi dan uji asumsi yang berlaku
5. Formulasi energi potensial, energi potensial total dan energi kinetik
6. Konstruksi persamaan Lagrange dan turunannya terhadap waktu

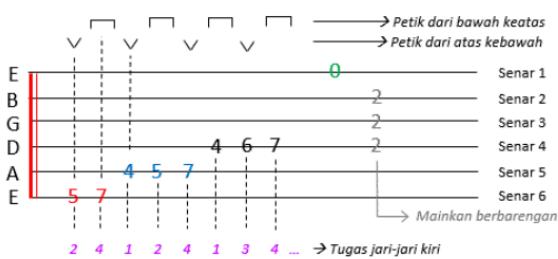
2.4.1 Identifikasi Masalah

Secara umum, untuk memproduksi suatu nada alat musik petik adalah memberikan simpangan/petikan pada senar. Bahan senar dapat bervariasi, namun keelastisan senar telah didesain sedemikian rupa sehingga tahan pada efek suhu yang menyebabkan dawai dapat mulur secara alamiah. Denah dawai pada alat musik petik berbeda-beda yang merupakan karakteristik spesifik alat musik petik yang dimaksud. Pada intinya semua alat musik petik akan memproduksi nada tertentu yang sama. lokasi petikan *fingerboard* selanjutnya memberikan petunjuk lokasi kolom dawai yang harus ditekan/dikunci dan kemudian dipetik untuk menghasilkan suatu nada tertentu. Perbedaannya adalah pada desain alat musik petik itu sendiri. Ada beberapa alat musik petik yang membutuhkan untuk dilakukan tekanan pada beberapa titik

pada dawai terlebih dahulu sebelum dilakukan petikan, misalnya gitar. Sementara alat musik petik lainnya seperti sasando, petikan langsung dapat dilakukan tanpa harus mengunci/menekan kolom pada dawai secara manual. Selanjutnya denah tangga nada pada kedua contoh alat musik petik yang disebut di atas dapat diperlihatkan pada gambar berikut untuk memberi deskripsi secara umum:



(a) Sasando



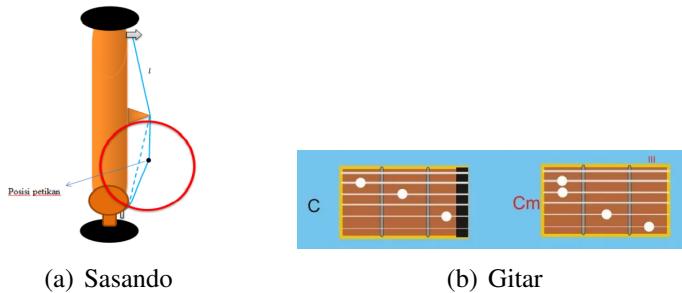
(b) Alat Musik Petik Lain

Gambar 2.2. Fingerboard

Berdasarkan denah dawai dari kedua alat musik tersebut

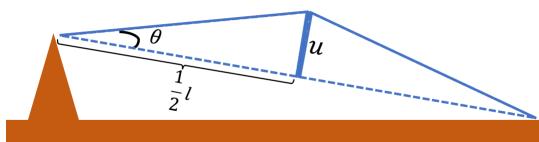
yang disajikan pada Gambar 2.2(a), misalnya akan diproduksi nada dasar do, posisi dawai nomor 16 yang diberi warna biru secara langsung dapat dipetik. Dawai ini telah didesain sedemikian sehingga pemain secara langsung dapat melakukan petikan. Sedangkan pada dawai gitar harus dilakukan tekanan pada beberapa titik untuk memproduksi nada yang sama.

Pada dasarnya dawai pada alat musik petik tertangguhkan di kedua sisi/pengait yang berbeda yang disebut *tuning peg*. Untuk memodelkan kasus ini maka diasumsikan panjang dawai adalah l , dengan luas penampang dawai yang digunakan pada alat musik petik sangat kecil sebesar A . Akibatnya, volume dawai V berbanding lurus dengan panjang dawai. Selanjutnya, massa jenis dawai ρ merupakan massa per satuan panjang dawai. Selanjutnya jenis material dawai yang digunakan dapat bervariasi dengan modulus elastisitas sebagai ukuran tingkat keelastisan atau kelenturan dawai adalah $E = 5 \times 10^{-9} N/m^2$. Oleh karena itu untuk menjaga agar dawai tidak putus saat permainan, maka besar simpangan yang diberikan tidak boleh melebihi batas keelastisan dari dawai. Hal inilah yang menjadi fokus utama pertanyaan penelitian, yakni menganalisis simpangan maksimal $y(t)$ yang diberikan pada dawai sehingga dapat dimodelkan serta dapat disimulasikan untuk menjawab persoalan ini. Perbandingan petikan pada dawai penghasil nada dasar do dipetik dapat disaksikan pada gambar di bawah ini. Pada alat musik petik, posisi petikan untuk nada dasar do adalah $\frac{1}{2}l$ dari pajang dawai l .



Gambar 2.3. Penghasil Nada do

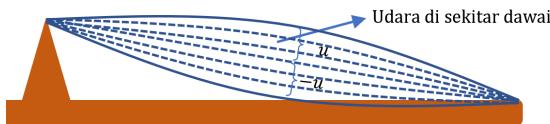
Pemodelan matematika yang dimaksud dalam bagian ini adalah difokuskan pada pemodelan alat musik petik yang diasumsikan bahwa lokasi petikan adalah pada $\frac{1}{2}l$. Gambar 2.4 berikut ini mendeskripsikan kondisi dawai yang dimaksud:



Gambar 2.4. Partisi Kondisi Dawai ketika Dipetik pada Posisi $\frac{1}{2}l$

Dari Gambar 2.4, menunjukkan kondisi dawai dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ dari panjang dawai mula-mula l . Petikan yang dimaksud adalah memberikan simpangan sebesar u sehingga terbentuk sudut sebesar θ . Sesaat setelah petikan dilepaskan maka terjadi vibrasi atau gerak bolak-balik di sekitar posisi normal dawai sampai suatu saat dawai berhenti. Selanjutnya vibrasi yang terjadi akan membentuk gelombang stasioner yang memiliki 1 perut dan 2 simpul. Hal ini mengakibatkan

dawai yang bervibrasi sepanjang $\frac{1}{2}\lambda$, dengan λ adalah panjang gelombang seluruhnya. Akibat lain dari vibrasi ini adalah terjadinya secara spontan gesekan antara dawai dengan fluida udara di sekitar dawai yang bergetar ini. Gesekan ini selanjutnya mempengaruhi kecepatan dawai dalam berosilasi. Didefinisikan faktor peredam k_d yang mempengaruhi kecepatan dawai bervibrasi sampai akhirnya berhenti pada waktu t . Faktor peredam k_d berasal dari terjadinya gesekan internal dari dawai. Diasumsikan pula bahwa gesekan antara dawai dan udara bergantung pada dimensi ruang x dan dimensi waktu t . Hal ini diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 2.5. Gesekan dawai dan udara pada posisi petikan $\frac{1}{2}l$

Hal lain yang terjadi adalah munculnya energi kinetik sebagai dampak langsung vibrasi. selain itu muncul pula energi potensial sebagai dampak terjadinya gaya reaksi dawai melawan gaya tarikan/simpangan pada dawai ketika dipetik dan gaya-gaya lain yang bekerja pada dawai.

2.4.2 Identifikasi Parameter dan Variabel

Beberapa parameter dipertimbangkan pada masalah vibrasi dawai, yakni:

1. Panjang dawai (l) adalah besaran yang menyatakan jarak (pada posisi normal dawai) dari ujung yang satu

ke ujung lainnya dimana masing-masing ujung dawai diikat/ditangguhkan.

2. Luas penampang dawai (A) adalah besaran yang menyatakan ukuran penampang dawai. Diasumsikan luas penampang dawai berukuran sangat kecil, akibatnya volume dawai sebanding dengan panjang dawai.
3. Massa dawai (m)
4. Modulus elastisitas dawai alat musik petik (E) merupakan ukuran keelastisan atau kelenturan dawai dalam satuan N/m^2 . Keelastisitasan dawai sangat bergantung pada bahan/material penyusun dawai. Besar modulus elastisitas dawai dapat disimulasikan pada model sesuai keperluan, misalkan jika dawai berbahan nilon maka besar modulus elastisitasnya adalah $5 \times 10^{-9} N/m^2$.
5. Konstanta pegas (K_p) merupakan ukuran kekakuan dawai. Untuk beberapa bahan yang berbeda, maka memiliki ukuran kekakuan yang berbeda pula. Sebagai ilustrasi untuk dawai yang berbahan nilon memiliki nilai kekakuan sebesar $K_p = \frac{E}{l} N/m$.
6. Koefisien gesek dawai dengan udara k_b adalah konstanta sebesar $k_b = 6\pi r$ dengan r adalah jari-jari permukaan melintang dawai.
7. Koefisien viskositas (η) merupakan ukuran kekentalan fluida atau zat alir. Beberapa fluida yang berbeda-beda memiliki kekentalan yang berbeda-beda pula. Koefisien viskositas udara sebesar $0,000018 \text{ Ns}/m^2$. kekentalan

fluida selanjutnya juga bergantung pada tekanan dan suhu dimana fluida berada.

8. Kecepatan elastisitas (c) merupakan akar kuadrat dari modulus elastisitas E per massa jenis dawai (ρ) dengan satuananya adalah m/s .
9. Konstanta peredam (k_d) yang mempengaruhi kecepatan dawai selama dawai berosilasi.

Selanjutnya dilakukan identifikasi variabel-variabel yang berperan signifikan terhadap masalah yang akan dimodelkan. Variabel-variabel keputusan model adalah variabel yang mampu menginterpretasikan pertanyaan masalah, biasanya dinyatakan sebagai variabel bebas. Sedangkan variabel tak bebas dalam pemodelan matematika merujuk pada variabel dimensi, yakni ruang/space x dan waktu t . Dalam kasus model matematika vibrasi dawai alat musik petik misalnya, kita sering bertanya tentang bagaimana simpangan maksimal dibuat dan sudut maksimal harus diatur sehingga dawai tidak putus saat dipetik atau dawai tidak menghasilkan noise saat vibrasi berlangsung. Oleh karena itu dalam pemodelan matematika kasus ini, variabel terikat model adalah:

1. Besar simpangan (u)
2. Besar sudut (θ).

Keduanya adalah variabel yang bergantung pada ruang x dan waktu t . Sementara itu variabel lainnya bersifat secara implisit mendukung variabel utama pada penelitian ini adalah:

1. Kecepatan vibrasi dawai (v) merupakan perubahan besar simpangan (u) per satuan waktu (t). Secara

Leibniz, kecepatan ini dinyatakan dalam $\frac{\partial u}{\partial t}$ dengan satuan m/s .

2. Percepatan vibrasi dawai merupakan perubahan kecepatan terhadap waktu t yang dinotasikan sebagai $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dalam satuan m/s^2 .
3. Koefisien garis singgung atau kemiringan sebagai $\tan \theta$ yang merupakan $\frac{\partial u}{\partial x}$ merupakan perubahan besar simpangan u terhadap titik x .

Langkah berikutnya adalah mengidentifikasi energi-energi yang mengakibatkan pergerakan pada dawai. Energi-energi yang membuat pergerakan dawai yang secara tepat berlaku atau terjadi pada masalah riil. Maka berdasarkan uraian di atas, energi-energi yang terlibat dan melatarbelakangi model vibrasi sepanjang dawai karena efek petikan adalah:

1. Energi potensial (E_p) timbul akibat reaksi gaya-gaya yang bekerja pada dawai. Gaya-gaya yang bekerja sesungguhnya adalah gaya reaksi ketika dawai diberi simpangan dan dilepaskan. Selanjutnya satuan energi potensial dinyatakan sebagai *Joule* atau setara dengan kgm^2/s^2 .
2. Energi kinetik (E_k) dipengaruhi oleh kecepatan vibrasi dawai. Satuan energi kinetik adalah *Joule* atau setara dengan kgm^2/s^2 .

2.4.3 Identifikasi Gaya-Gaya yang Bekerja

Vibrasi dawai akan terjadi tepat setelah dawai dipetik. Gerak bolak-balik disepanjang dawai dan disekitar posisi dawai ini memberikan indikasi adanya gaya reaksi untuk

mempertahankan dan mengembalikan dawai pada posisi setimbang. *Pertama* adalah gaya pegas (F_{pegas}). Gaya pegas bekerja pada dawai ketika dawai bervibrasi. Selanjutnya F_{pegas} dinyatakan dalam Hukum Hooke berikut:

$$F_{\text{pegas}} = -k_p x$$

dengan k_p merupakan konstanta pegas *string* dawai dan x adalah pertambahan panjang dawai. Jika dawai dipetik di bagian tengah *string* dawai maka akan muncul gaya pegas di sisi kiri dan kanan dawai. Gaya pegas di sisi kiri dawai $F_{\text{pegas kiri}}$ sebagai berikut:

$$F_{\text{pegas kiri}} = -k_p x^-$$

dengan x^- merupakan pemanjangan panjang dawai di sisi kiri. Analog dengan gaya pegas di sisi kiri, gaya pegas yang terjadi di sisi kanan dawai ($F_{\text{pegaskanan}}$) sebagai berikut:

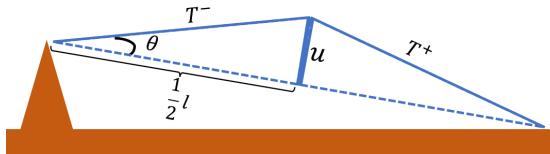
$$F_{\text{pegaskanan}} = -k_p x^+$$

dengan x^+ adalah pertambahan panjang dawai di sisi kanan.

Kedua adalah gaya tegangan (F_{tegangan}). F_{tegangan} adalah gaya dawai yang melawan gaya tarikan akibat petikan. Selanjutnya F_{tegangan} sebagai hasil kali dari besarnya tegangan (T) dan luas penampang (A). Pada peristiwa vibrasi alat musik petik, luas penampang melintang dawai sangatlah kecil, akibatnya F_{tegangan} sebanding dengan besar tegangan dawai yang dinyatakan sebagai:

$$-F_{\text{tegangan}} = T$$

Tanda minus menunjukkan bahwa arah $F_{tegangan}$ berlawanan arah dengan arah petikan awal. Ketika dawai diberi simpangan maka terjadi tegangan di sepanjang dawai.



Gambar 2.6. Tegangan pada Dawai Alat Musik Petik

Gambar 2.6 menunjukkan adanya tegangan di sisi kiri dan kanan dawai. Gaya tegangan di sisi kiri dawai ($F_{tegangan\ kiri}$) dinyatakan sebagai:

$$F_{tegangan\ kiri} = -T^-$$

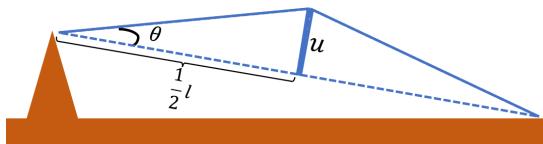
dengan T^- merupakan tegangan di sisi kiri dawai. Sementara itu, gaya tegangan di sisi kanan dawai ($F_{tegangan\ kanan}$) dinyatakan sebagai:

$$F_{tegangan\ kanan} = -T^+$$

Ketiga adalah gaya gesek (F_{gesek}). Sesaat setelah dawai dipetik, maka terjadi gesekan antara dawai dengan udara di sekitar dawai. Oleh karena itu, gaya gesek dengan udara tersebut merupakan gaya gesek yang bekerja pada dawai. Gaya gesek terjadi di sepanjang kurva u dan mengikuti hukum Stokes, yaitu:

$$F_{gesek} = k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

dengan k_b adalah koefisien gesek dawai, η adalah koefisien viskositas udara, dan $\frac{\partial u}{\partial t}$ adalah kecepatan vibrasi dawai yang didefinisikan sebagai perubahan simpangan u tiap satuan waktu t . Ilustrasi gaya gesek dawai dengan udara dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 2.7. Ilustrasi Gesekan Dawai terhadap Udara

2.4.4 Membangun Asumsi

Tahap penting selanjutnya pada pemodelan matematika adalah membangun semua asumsi dari masalah yang akan dimodelkan. Asumsi-asumsi dasar pada masalah vibrasi dawai pada alat musik petik adalah:

1. Dawai diasumsikan lentur sempurna dan berada pada posisi setimbang di sepanjang sumbu x .
2. Gerak dawai diasumsikan adalah gerak vibrasi di sekitar posisi setimbang dawai. Suatu saat vibrasi ini akan berhenti pada waktu t tertentu dan tidak berlangsung selama-lamanya, karena adanya kontribusi gaya gesek dawai dengan udara.
3. Vibrasi yang terjadi berbentuk gelombang transversal bolak balik, yang merupakan perpaduan gelombang datang dan gelombang pantul.
4. Simpangan yang terbentuk pada titik x sebesar u yang berubah setiap bertambahnya waktu t . Diasumsikan

simpangan u sangat kecil sehingga kemiringan di setiap titik di sepanjang dawai besarnya sangat kecil.

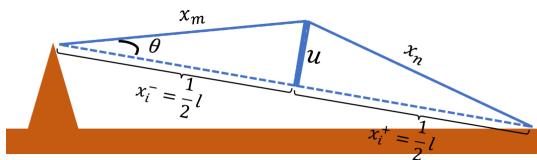
5. Ketika dawai berada pada posisi setimbang, berlaku hukum Newton I. Sementara ketika dawai bervibrasi, berlaku hukum Newton II.
6. Tegangan lebih besar dibandingkan dengan gaya grafitasi, sehingga diasumsikan gaya grafitasi dapat diabaikan. Gaya tegangan selanjutnya adalah reaksi dari dawai yang ditarik atau diberi simpangan. Gaya tegangan ini menyebabkan dawai kembali ke posisi setimbang.
7. Gaya gesek antara dawai dengan udara selama vibrasi. Gaya gesek ini menghambat laju vibrasi dawai, sehingga kecepatan vibrasi dawai berkurang.

2.4.5 Energi Potensial dan Energi Potensial Total

Petikan yang diberikan pada dawai menimbulkan adanya gaya-gaya pada dawai. Selanjutnya semua gaya tersebut akan berkontribusi dalam menelaah semua energi potensial Ep yang terjadi pada dawai. Dalam menganalisis energi potensial ini, maka peran peregangan e dawai cukup penting. Karena diasumsikan bahwa petikan tepat diberikan di posisi setengah panjang dawai l , maka peregangan yang terjadi di sisi kanan dan di sisi kiri perlu dihitung.

Pertama, peregangan dawai e . Peregangan dawai terjadi pada saat dawai diberi simpangan atau petikan. Ketika dawai dipetik pada posisi $\frac{1}{2}l$ maka dawai terbagi menjadi dua fokus perhatian, yakni panjang sisi kiri dawai adalah $x_i^- = -\frac{1}{2}l$ dan panjang sisi kanan dawai adalah $x_i^+ = \frac{1}{2}l$. Akibat dawai dipetik

atau dikenai simpangan pada posisi setengah panjang dawai l , maka terjadi peregangan sebesar e pada dawai, diilustrasikan gambar berikut:



Gambar 2.8. Peregangan pada Dawai Alat Musik Petik

Berdasarkan Gambar 2.8, terdapat peregangan di kedua sisi dinotasikan sebagai e^- dan e^+ . Peregangan sisi kiri dawai menyebabkan pertambahan panjang dawai di sisi kiri, dari panjang mula-mula x_i^- menjadi x_m . Secara sama, peregangan yang terjadi menyebabkan sisi kanan dawai mengalami pertambahan panjang menjadi x_n dari panjang kanan semula x_i^+ .

Kedua, simpangan dawai u . Perhatikan Gambar 2.8 di atas dimana dawai dikenai simpangan sebesar u yang merupakan fungsi terhadap ruang x dan waktu t . Terbentuknya simpangan u ditinjau dari sisi kiri dawai dapat dihitung sebagai:

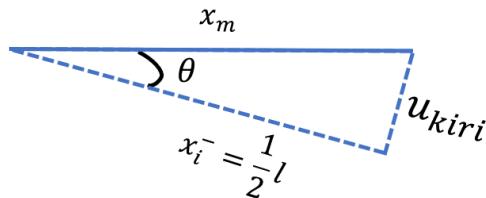
$$u_{kiri} = x_i^- \tan \theta = -\frac{1}{2}l \tan \theta = -\frac{1}{2}l \frac{\partial u}{\partial x}$$

Sementara itu jika ditinjau dari sisi kanan dawai maka besar simpangan kanan adalah:

$$u_{kanan} = x_i^+ \tan \theta = \frac{1}{2}l \tan \theta = \frac{1}{2}l \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dalam hal ini, $\tan \theta$ merujuk pada kemiringan dawai yang dinotasikan sebagai $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Ketiga, menghitung panjang kemuluran sisi kiri x_m sebagai dampak peregangan kiri dawai. Untuk lebih mudah menganalisa panjang kemuluran kiri x_m , perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.9. Peregangan di Sisi Kiri Dawai

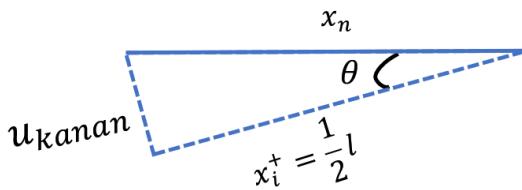
Dari Gambar 2.9 di atas, maka dengan kaidah Phytagoras diperoleh panjang kemuluran kiri:

$$x_m = \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

Keempat, menghitung pertambahan panjang sisi kiri x^- . Dari panjang kemuluran x_m di atas, maka pertambahan panjang di sisi kiri dawai (x^-) yang merupakan selisih panjang kemuluran x_m dengan panjang mula-mula x_i^- . Sehingga x^- secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$x^- = \frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right)$$

Kelima, menghitung panjang kemuluran kanan x_n . Perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 2.10. Peregangan di Sisi Kanan Dawai

Dari Gambar 2.10, panjang kemuluran x_n dapat ditentukan, berdasarkan kaidah Phytagoras diperoleh:

$$x_n = \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

Keenam, menghitung besar pertambahan panjang dawai di sisi kanan (x^+). Pertambahan panjang sisi kanan ini merupakan selisih antara kemuluran kanan x_n dengan panjang mula-mula sisi kanan x_i^+ , yakni:

$$x^+ = \frac{1}{2}l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)$$

Akhirnya, berdasarkan pertambahan panjang dawai di sisi kiri (x^-) dan kanan (x^+) yang telah dihitung di atas, dapat ditentukan besar peregangan e pada dawai. Konsep elastisitas menyatakan besar regangan e didefinisikan sebagai berikut:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0}$$

dengan Δl adalah pertambahan panjang dawai dan l_0 adalah

panjang dawai mula-mula. Berdasarkan analisis dan perhitungan di atas, dapat dipertimbangkan kembali secara kontekstual bahwa pertambahan panjang dawai di sisi kiri sebagai x^- dan pertambahan panjang dawai di sisi kanan sebagai x^+ . Sementara itu panjang dawai mula-mula di sisi kiri dan kanan berturut-turut adalah x_i^- dan x_i^+ . Dengan demikian, besar peregangan di sisi kiri dawai dinyatakan sebagai e^- :

$$e^- = \frac{x^-}{x_i^-} = - \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right)$$

Secara sama, maka besar peregangan di sisi kanan dawai e^+ dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$e^+ = \frac{x^+}{x_i^+} = - \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right)$$

Identifikasi Energi Potensial Ep

Energi potensial Ep pada dawai alat musik petik yang bervibrasi dianalisis satu pada bagian ini, yang meliputi:

1. energi potensial pegas (Ep_{pegas})
2. energi potensial tegangan ($Ep_{tegangan}$)
3. energi potensial gesek (Ep_{gesek})

Proses analisis tiap energi potensial ini, langkah yang harus dilakukan adalah menganalisis gaya pegas, gaya tegangan, dan gaya gesek yang terjadi pada dawai saat bervibrasi karena efek diberikannya simpangan/petikan. Energi potensial total Ep_{total} selanjutnya merupakan jumlahan dari semua energi

potensial yang dituliskan di atas. Pada bagian ini dilakukan analisis terhadap masing-masing energi potensial tersebut: **1.**

Energi Potensial Pegas

Ada beberapa hal tentang energi potensial pegas (Ep_{pegas}), yakni:

- Pertama, Ep_{pegas} terjadi akibat adanya gaya pegas pada dawai yang dinotasikan sebagai F_{pegas} . Gaya pegas ini merupakan gaya yang bekerja ketika dawai dipetik atau diberi simpangan tertentu sehingga terjadi gerakan naik turun di sekitar posisi kesetimbangannya (posisi normal dawai). Pada pemodelan ini gaya pegas yang digunakan mempertimbangkan pertambahan panjang pegas saat mencapai kondisi maksimal naik/turunnya. Oleh karena itu, gaya pegas yang digunakan adalah gaya pegas yang didefinisikan mengikuti kaidah Hukum Hooke, yaitu:

$$F_p = -k_p x$$

dengan k_p merupakan konstanta pegas dan x merupakan pertambahan panjang *string* dawai. Oleh karena itu, pertambahan panjang dawai di sisi kiri x^- dan pertambahan panjang dawai di sisi kanan x^+ yang telah dihitung sebelumnya akan dipertimbangkan.

- Kedua, diasumsikan besar pertambahan panjang dawai di sisi kiri maupun sisi kanan pada posisi setimbangnya adalah nol. Sehingga secara berturut-turut dinyatakan $x_{setimbang}^- = 0$ dan $x_{setimbang}^+ = 0$. Posisi setimbang atau posisi normal dawai ini diartikan sebagai kondisi dawai

sebelum dawai dipetik. Efek mulur dawai karena faktor suhu luar diabaikan.

- Ketiga, besar pertambahan panjang dawai di sisi kiri dan sisi kanan setelah petikan berturut-turut dinotasikan sebagai $x_{setelah\ petikan}^-$ dan $x_{setelah\ petikan}^+$ juga dipertimbangkan pada pemodelan ini.
- Keempat, besar energi potensial pegas selama posisi setimbang (sebelum dikenai simpangan) baik di kanan maupun di kiri adalah nol, yaitu $E_p_{pegas\ kiri\ setimbang} = 0$ dan $E_p_{pegas\ kanan\ setimbang} = 0$.
- Kelima, energi potensial pegas (E_p_{pegas}) dawai di sisi kiri dan di sisi kanan berturut-turut dinotasikan sebagai $E_p_{pegas\ kiri}$ dan $E_p_{pegas\ kanan}$.
- Keenam, perubahan energi potensial pegas (ΔE_p_{pegas}) merupakan minus integral dari F_{pegas} seperti yang telah didefinisikan pada teori sebelumnya.

Berdasarkan paparan di atas, maka langkah yang dilakukan untuk mendapatkan energi potensial pegas terbagi atas tiga bagian utama, yaitu:

1. Menentukan energi potensial pegas kiri $E_p_{pegas\ kiri}$
2. Menentukan energi potensial pegas kanan $E_p_{pegas\ kanan}$
3. Menentukan energi potensial pegas E_p_{pegas}

Berdasarkan ketiga poin di atas, maka dilakukan analisis pada masing-masing bagiannya sebagai berikut:

Energi Potensial Pegas Kiri

Energi potensial pegas kiri dicapai dengan menghitung terlebih dahulu perubahan energi potensial pegas kiri, yang mempertimbangkan beberapa hal. *Pertama*, perubahan energi potensial pegas kiri $\Delta E_{p\text{egaskiri}}$ adalah selisih dari energi potensial pegas kiri setelah diberikan simpangan/petikan terhadap energi potensial pegas kiri saat posisi setimbangnya, yakni:

$$\Delta E_{p\text{egaskiri}} = E_{p\text{egas kiri}} - E_{p\text{egas kiri setimbang}}$$

Kedua, perubahan pertambahan panjang sisi kiri dawai adalah sangat kecil menuju nol. *Ketiga*, secara teoritik adalah bahwa perubahan energi potensial adalah minus dari integral gaya pegas terhadap perubahan pertambahan panjang sisi kirinya, yakni:

$$\Delta E_{p\text{egaskiri}} = - \int_{x_{\text{setimbang}}^-}^{x_{\text{setelah petikan}}^-} F_{\text{egas}}(x^-) d(x^-)$$

Berdasarkan hal tersebut dan pertimbangan mengenai $x_{\text{setelah petikan}}^- = x^-$ dan $x_{\text{setimbang}}^- = 0$ serta $F_{\text{egas}}(x^-) = -k_p x^-$, maka dapat dinyatakan energi potensial pegas kiri adalah:

$$E_{p\text{egas kiri}} = \frac{1}{2} k_p \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2$$

Energi Potensial Pegas Kanan

Langkah kedua, adalah menetukan energi potensial pegas kanan $E_{p\text{egas kanan}}$. Secara analog, dipertimbangkan: *pertama* perubahan energi potensial pegas kanan

$\Delta E p_{\text{pegaskanan}}$ adalah selisih dari energi potensial pegas kanan setelah diberikan simpangan/petikan terhadap energi potensial pegas kanan saat posisi setimbangnya, yakni:

$$\Delta E p_{\text{pegaskanan}} = E p_{\text{pegaskanan}} - E p_{\text{pegaskanan setimbang}}$$

Kedua, perubahan pertambahan panjang sisi kanan dawai adalah sangat kecil menuju nol. Ketiga, secara teoritik adalah bahwa perubahan energi potensial adalah minus dari integral gaya pegas terhadap perubahan pertambahan panjang sisi kanannya, yakni:

$$\Delta E p_{\text{pegaskanan}} = - \int_{x_{\text{setimbang}}^+}^{x_{\text{setelah petikan}}^+} F_{\text{pegas}}(x^+) d(x^+)$$

dengan mempertimbangkan $x_{\text{setelah petikan}}^+ = x^+$ dan $x_{\text{setimbang}}^+ = 0$ serta $F_{\text{pegas}}(x^+) = -k_p x^+$, maka dapat dinyatakan energi potensial pegas kanan sebagai berikut:

$$E p_{\text{pegaskanan}} = \frac{1}{2} k_p \left(\frac{1}{2} l \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2$$

Energi Potensial Pegas Total

Akhirnya dengan didapatkannya nilai energi potensial pegas kiri dan energi potensial pegas kanan di atas, maka dapat dihitung energi potensial pegas total $E p_{\text{pegas}}$ yang merupakan jumlahan dari kedua energi potensial pegas di sisi kanan dan kiri, yakni:

$$E p_{\text{pegas}} = \frac{1}{2} k_p l^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.2)$$

2. Enegi Potensial Tegangan Dawai

Pada analisis penurunan energi potensial tegangan dawai atau dapat disebut saja energi potensial tegangan yang dinotasikan sebagai $E_{p_{tegangan}}$, maka diperhatikan beberapa kondisi umum sebagai berikut:

- Pertama, terjadinya energi potensial tegangan $E_{p_{tegangan}}$ pada dawai adalah sebagai akibat adanya gaya tegangan $F_{tegangan}$ ketika dawai diberi simpangan u .
- Kedua, perubahan energi potensial tegangan dawai dinotasikan sebagai $\Delta E_{p_{tegangan}}$, yang didefinisikan sebagai minus integral dari $F_{tegangan}$ terhadap pertambahan panjang dawai baik di sisi kiri maupun di sisi kanan sesaat ketika terjadi simpangan u . Proses formulasi Perubahan energi potensial tegangan baik di sisi kiri maupun di sisi kanan serta total energi potensial tegangan dawai dipaparkan secara rinci di bagian berikutnya pembahasan tentang ini.
- Ketiga, gaya tegangan sendiri merupakan gaya penolak yakni reaksi dari besar tegangan T yang diberikan ketika aksi berupa simpangan diberikan. Karena bersifat penolak, maka gaya tegangan memiliki besar yang sama terhadap nilai T namun berlawanan arahnya. Berdasarkan hal tersebut, maka gaya tegangan dawai $F_{tegangan}$ dinyatakan sebagai:

$$F_{tegangan} = -T$$

- Keempat, berdasarkan konsep elastisitas, besar tegangan

dawai didefinisikan sebagai hasil kali besar peregangan (e) dan modulus elastisitas (E) dawai.

- Kelima, dalam menentukan besarnya energi potensial tegangan ($Ep_{tegangan}$) maka harus mempertimbangkan keterlibatan peregangan dawai di sisi kiri (e^-) dan di sisi kanan (e^+) ketika terjadi simpangan u yang memberikan tegangan sebesar T .
- Keenam, besar peregangan dawai ketika dikenai simpangan u di sisi kiri diasumsikan $e^-_{setelah\ petikan} = e^-$. Secara sama, $e^+_{setelah\ petikan} = e^+$. Sementara itu diasumsikan besar peregangan dawai di sisi kiri maupun di sisi kanan pada posisi setimbang (belum ada peregangan karena belum diberikan simpangan u) adalah nol, yakni secara berturut-turut $e^-_{setimbang} = 0$ dan $e^+_{setimbang} = 0$.
- Ketujuh, diasumsikan besar energi potensial tegangan yang terjadi sebelum terjadinya peregangan baik di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai adalah nol. Selanjutnya energi potensial yang bersifat seperti ini disebut energi potensial tegangan setimbang dan bernilai nol baik di sisi kiri yaitu: $Ep_{tegangan\ kiri\ setimbang} = 0$ dan energi potensial tegangan dawai di sisi kanan adalah $Ep_{tegangan\ kanan\ setimbang} = 0$.

Berdasarkan hal tersebut, maka penentuan energi potensial tegangan terbagi atas 3 step, yakni:

1. Menghitung energi potensial tegangan kiri $Ep_{tegangan\ kiri}$
2. Menghitung energi potensial tegangan di sisi kanan $Ep_{tegangan\ kanan}$

3. Menetukan energi potensial tegangan total $E p_{tegangan}$

Energi Potensial Tegangan Kiri

Energi potensial tegangan dawai di sisi kiri sesaat ketika dawai dikenai simpangan u dengan besar tegangan T memperhatikan besar peregangan kiri e^- . Selain itu perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri $\Delta E p_{tegangan kiri}$ didefinisikan sebagai selisih antara energi potensial tegangan kiri terhadap energi potensial tegangan kiri pada posisi setimbang, yakni :

$$\Delta E p_{tegangan kiri} = E p_{tegangan kiri} - E p_{tegangan kiri setimbang}$$

Hal berikutnya didefinisikan bahwa perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri adalah minus integral dari gaya tegangan kiri dikalikan peregangan kiri e^- yang bernilai sangat kecil. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Delta E p_{tegangan kiri} = - \int_{e^-_{setimbang}}^{e^-_{setelah petikan}} F_{tegangan kiri}(e^-) d(e^-)$$

Dalam hal ini digunakan definisi gaya tegangan kiri $F_{tegangan kiri} = -E e^-$. Akibatnya diperoleh energi potensial tegangan kiri:

$$E p_{tegangan kiri} = \frac{1}{2} E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right)^2 \right)$$

Energi Potensial Tegangan Kanan

Dengan konsep berpikir yang sama dengan sebelumnya, maka formulasi energi potensial tegangan kanan $E p_{tegangan kanan}$

memperhatikan beberapa hal. *Pertama*, perubahan energi potensial tegangan kanan adalah selisih antara energi potensial tegangan kanan dengan energi potensial tegangan kanan pada saat setimbang, yakni:

$$\Delta E_{P_{\text{tegangan kanan}}} = E_{P_{\text{tegangan kanan}}} - E_{P_{\text{tegangan kanan setimbang}}}$$

Dalam hal ini besar energi potensial tegangan kanan pada saat setimbang (sebelum dikenai simpangan u) bernilai nol, yakni $E_{P_{\text{tegangan kanan setimbang}}} = 0$. *Kedua* besar peregangan kanan e^+ adalah seperti yang telah dihitung pada bagian sebelumnya dari section ini. Sementara itu peregangan kanan saat belum dikenai simpangan diasumsikan bernilai nol, yaitu $e_{\text{setimbang}}^+ = 0$. *Ketiga*, gaya tegangan kanan $F_{\text{tegangan kanan}} = -Ee^+$. *Keempat*, perubahan energi potensial tegangan kanan adalah minus integral gaya tegangan kanan terhadap perubahan besar peregangan kanannya, yaitu:

$$\Delta E_{P_{\text{tegangan kanan}}} = - \int_{e_{\text{setimbang}}^-}^{e_{\text{setelah petikan}}^-} F_{\text{tegangan kanan}}(e^+) d(e^+)$$

Berdasarkan hal-hal tersebut, maka dapat dinyatakan formula energi potensial tegangan kanan sebagai:

$$E_{P_{\text{tegangan kanan}}} = \frac{1}{2} E \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right)^2 \right)$$

Energi Potensial Tegangan Total

Dengan nilai energi potensial tegangan kiri dan energi potensial tegangan kanan yang telah diperoleh, dapat dihitung energi potensial tegangan total yang disebut energi potensial

tegangan saja. Energi ini didefinisikan merupakan jumlahan dari energi potensial tegangan kiri dan energi potensial tegangan kanan. Maka diperoleh formula energi potensial sebagai berikut:

$$E_{P_{\text{tegangan}}} = 2E \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.3)$$

3. Enengi Potensial gesek

Energi potensial gesek ($E_{P_{\text{gesek}}}$) muncul karena adanya gaya gesek antara dawai dengan udara ketika terjadi vibrasi sesaat setelah simpangan dilepaskan. Analisis energi potensial gesek ini dimulai dengan mengidentifikasi gaya gesek yang bekerja selama vibrasi terjadi. Analisis energi potensial gesek dilakukan dengan mempertimbangkan beberapa hal berikut:

- Pertama, gaya gesek ($E_{P_{\text{gesek}}}$) timbul karena adanya F_{gesek} yang terjadi antara dawai dengan udara.
- Kedua, perubahan energi potensial gesek $\Delta E_{P_{\text{gesek}}}$ didefinisikan sebagai minus integral dari F_{gesek} yang bekerja pada dawai, yaitu:

$$\Delta E_{P_{\text{gesek}}} = - \int_{u_{\text{setimbang}}}^{u_{\text{setelah petikan}}} F_G(u) d(u)$$

- Gaya gesek F_{gesek} dawai dengan udara didefinisikan dengan mengikuti hukum Stokes, yaitu:

$$F_{\text{gesek}} = k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.4)$$

dengan $\frac{\partial u}{\partial t}$ adalah kecepatan dawai bervibrasi, k_b adalah

koefisien gesek, sementara itu η adalah koefisien kekentalan udara yang dapat disimulasikan untuk beberapa nilai dalam rentang yang didefinisikan (Keofisian kekentalan fluida dapat dilihat kembali pada Tabel 2.2 di atas).

- Ketiga, gaya gesek (Ep_{gesek}) melibatkan besar simpangan yang terbentuk pada posisi setimbang, yakni $u_{setimbang} = 0$. Sementara itu besar simpangan yang terbentuk setelah petikan diasumsikan sebesar u , yakni $u_{setelah\ petikan} = u$. Di lain pihak, besar energi potensial gesek yang terjadi pada posisi setimbang diasumsikan bernilai nol, yakni $Ep_{gesek\ setimbang} = 0$.
- Keempat, besar perubahan energi potensial gesek didefinisikan sebagai selisih dari energi potensial gesek dengan energi potensial gesek pada saat setimbang, yaitu:

$$\Delta Ep_{gesek} = Ep_{gesek} - Ep_{gesek\ setimbang}$$

Berdasarkan gaya gesek dan perubahan energi potensial gesek di atas, maka dapat diperoleh formulasi energi potensial gesek sebagai berikut:

$$Ep_{gesek} = k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \quad (2.5)$$

Berdasarkan energi potensial pegas pada persamaan (2.2), energi potensial tegangan dawai pada persamaan (2.3) dan energi potensial gesek pada persamaan (2.5), maka dapat diperoleh Ep_{model} yang merupakan jumlahan energi

potensial-energi potensial, yaitu:

$$Ep_{model} = \left(\frac{1}{2}k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.6)$$

$$+ \left(-k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \quad (2.7)$$

2.4.6 Identifikasi Energi Kinetik

Tahap selanjutnya dari langkah pemodelan vibrasi dawai alat musik petik adalah memeriksa energi kinetik E_k . Pada fenomena gerak dawai yang terjadi setelah simpangan atau petikan dilepaskan, maka terjadi fenomena vibrasi, artinya energi kinetik berlaku pada kasus ini. Secara umum berdasarkan teori relativitas, energi kinetik didefinisikan sebagai:

$$Ek = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.8)$$

Dimana v adalah kecepatan vibrasi dawai, yang dapat dinotasikan sebagai $\frac{\partial u}{\partial t}$. Dalam hal ini m adalah massa dawai, yakni:

$$m = \rho l \quad (2.9)$$

Dengan demikian energi kinetik model dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$Ek_{model} = \frac{1}{2}\rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2.10)$$

2.4.7 Konstruksi Persamaan Lagrange

Selanjutnya memformulasikan persamaan Lagrange, yakni selisih antara energi kinetik model pada persamaan (2.10) dan

energi potensial pada persamaan (2.6). Berdasarkan hal tersebut, maka persamaan Lagrange model vibrasi dawai dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \\ & + k_b \eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) u \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dengan mempertimbangkan kembali persamaan (2.11), maka langkah pemodelan dilanjutkan pada:

1. menurunkan persamaan Lagrange terhadap simpangan u
2. menurunkan persamaan Lagrange terhadap gradien simpangan $\frac{\partial u}{\partial x}$
3. menurunkan persamaan Lagrange terhadap kecepatan $\frac{\partial u}{\partial t}$

Turunan Persamaan Lagrange

Dengan memperhatikan formula persamaan Euler-Lagrange yang telah didefinisikan sebelumnya pada, persamaan (2.1), yakni:

$$\frac{dL}{du} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right)$$

serta mempertimbangkan persamaan Lagrange pada (2.11) maka dapat dilakukan beberapa step langkah perhitungan menuju model matematika yang dimaksud. Langkah-langkah ini adalah sebagai berikut: *Pertama*, menghitung turunan persamaan Lagrange terhadap u untuk mendapatkan $\frac{dL}{du}$,

sehingga diperoleh:

$$\frac{dL}{du} = k_b \eta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.12)$$

Kedua, menurunkan persamaan Lagrange (2.11) terhadap $\frac{\partial u}{\partial x}$, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.13)$$

selanjutnya menurunkan persamaan (2.13) terhadap x , maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) = - \left(\frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

Ketiga, menurunkan persamaan Lagrange (2.11) terhadap $\frac{\partial u}{\partial t}$, diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} = \rho l \left(\frac{\partial u}{\partial t} + k_b \eta u \right) \quad (2.15)$$

selanjutnya menurunkan persamaan (2.15) terhadap t , maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) = \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.16)$$

Substitusi persamaan (2.12), (2.14), dan (2.16) pada persamaan Lagrange (2.1) maka diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l^2}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{E}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.17)$$

Dengan mengingat kembali bahwa modulus elastisitas E per massa jenis dawai dinyatakan sebagai $E = \rho c^2$ dengan c menyatakan kecepatan elastisitas dawai, maka persamaan (2.17) menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.18)$$

Selanjutnya dengan mempertimbangkan konstanta kelenturan dawai k_p , persamaan (2.18) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.19)$$

Pada fenomena alat musik petik, maka terdapat pengaturan tertentu agar vibrasi tidak berlangsung selama-lamanya. Oleh karena itu penambahan faktor peredam diperlukan pada persamaan (2.19) di atas. Faktor peredam ini adalah penambahan gaya peredam F_d yang bekerja pada dawai secara dinamis, didefinisikan sebagai:

$$F_d = k_d \frac{\partial u}{\partial t}$$

dengan k_d sebagai konstanta redaman. Sehingga persamaan (2.19) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) merupakan model matematika yang menggambarkan gerak vibrasi dawai pada alat musik yang dipetik di tengah-tengah.