

Matematika UIN



# Pemodelan Matematika dalam Perspektif Praktik

# Pemodelan Matematika dalam Perspektif Praktik

**Penerbit:**  
nama penerbit

## **Penulis:**

Ari Kusumastuti  
Nurul Anggraeni Hidayati  
Dian Nan Brylliant  
Syafitri Hidayahningrum

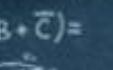
## **Editor dan Penyelaras Bahasa:**

Ari Kusumastuti  
Nurul Anggraeni Hidayati

## **Desain dan Tata Letak:**

Nurul Anggraeni Hidayati

# Bab 1 Model Matematika

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$     $\sin \alpha = 0,5$     $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$     $(a+b)^t = a^t + b^t$     $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$   
 $e^{i\pi} + 1 = 0$     $\bar{A} \cdot (B + \bar{C}) = y = kx + m$   
 $\left| \begin{array}{|c|c|} \hline \times & \times \\ \hline \end{array} \right| + \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \times & \times \\ \hline \end{array} \right|$     $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$     $\mathcal{P} =$      $x \in [3] + \infty$     $(x^n)'$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$     $\sinh x = -i \sin(ix)$   
 $(c_1 + b_1, c_2)$     $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$     $U = \int_a^b x f'(x)$   
 $(c_1 + b_1, c_2)$     $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N |x_n - a| < \epsilon$   
 $i = \sqrt{-1}$     $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$   
 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$     $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$     $c = \sqrt{a^2 + b^2}$   
 $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$     $\infty$     $\sin x$     $\log(x)$      
 $\sin A = \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A$   
 $a \mid m, a^{q(m)} \equiv 1 \pmod{m}$     $\log(ab) = \log a + \log b$     $S = \ln R^2$   
 $V = \frac{\pi}{3} R^3$     $\iiint$   
 $h = 0 \cdot \operatorname{tg} \alpha$     $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$     $(e^x)' = e^x$     $\mathcal{P} = 3,14$   
 $y = x^2$     $y = |x-2|$   
 $\cos 2\alpha = 2 \cos \alpha - 1$     $\int_a^b f(x) dx$   
 $\sum f^{(n)}(a) x^n$     $\ln(a-b)$

---

Pemodelan matematika adalah salah satu cabang dalam matematika. Di dalamnya termuat upaya melakukan formulasi masalah nyata ke dalam persamaan diferensial. Dapat dipahami bahwa model matematika merupakan penyederhanaan dari masalah nyata dan memiliki peran yang penting dalam mendeskripsikan masalah nyata tersebut ke dalam bentuk persamaan diferensial, baik persamaan diferensial parsial maupun persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial ini memuat sekumpulan variabel dan hubungan antara variabel-variabel tersebut. Namun, tidaklah mungkin untuk melibatkan semua variabel dan parameter yang mempengaruhi sistem sesungguhnya yang telah dimodelkan untuk mengurangi tingkat kompleksitas algoritma dan komputasi yang terlalu besar. Oleh karena itu, penting untuk terlebih dahulu menentukan variabel utama yang memiliki pengaruh secara signifikan sebelum menformulasikan masalah yang akan dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Dengan terbentuknya persamaan diferensial ini, maka komputasi dapat membantu proses analisis dari fenomena sehingga menghasilkan interpretasi yang kontekstual dan logis.

Selanjutnya, model matematika telah digunakan secara

---

luas yang mencakup fenomena dalam berbagai latar belakang disiplin ilmu, misalnya fisika, kedokteran, biologi, teknik, dan sosial. Pada Buku ini dikaji praktik pemodelan dasar yang ditujukan sebagai pendamping buku teori pemodelan dasar. Pembahasan yang dilakukan diarahkan pada berbagai masalah seperti: (a) masalah penyebaran penyakit pada suatu daerah dalam skala makro (di luar tubuh) maupun skala mikro (di dalam tubuh), (b) masalah penentuan fungsi kontrol dalam rangka mengurangi penyebaran suatu penyakit, (c) masalah keseimbangan ekosistem di dalam peristiwa mangsa memangsa yang melibatkan satu atau lebih predator dan prey, (d) masalah vibrasi dawai dengan berbagai variasinya, dan (e) masalah interaksi gen-gen di dalam tubuh yang melibatkan proses kimia dari enzim dan substrat. Simulasi pada berbagai kondisi disajikan dengan harapan menjadi penjelasan apakah model matematika yang telah diformulasikan mendekati kondisi riilnya atau tidak. Validasi model matematika selanjutnya menjadi perlu dan merupakan aktifitas terus menerus sampai didapatkan model matematika yang mendekati ideal. Dalam hal ini pemodelan matematika menjadi upaya terus menerus untuk merevisi model yang sudah ada.

Salah satu model dasar dan kerangka kerja pemodelan yang paling populer adalah model kompartemen. Model kompartemen dikonstruksi dengan membagi subjek-subjek yang terlibat dalam penyebaran penyakit tertentu menjadi beberapa kompartemen berdasarkan status kesehatannya secara spesifik. Menurut Almeida, dkk. (2019), model kompartemen bersifat dinamis karena jumlah individu setiap kompartemen dapat berfluktuasi seiring waktu ketika status

---

kesehatan individu berubah. Sebagian besar model kompartemen selanjutnya dapat dikonversi dalam persamaan diferensial. Model kompartemen yang disajikan dalam persamaan diferensial menunjukkan bahwa proses yang dimodelkan merupakan proses deterministik, artinya kondisi pada masa sekarang bergantung sepenuhnya pada kondisi pada masa lalu yang dideskripsikan melalui model tersebut(Brauer, 2008). Berikut ini dijelaskan beberapa kompartemen yang sering digunakan dalam model epidemi.

1. Kompartemen ini merupakan kompartemen yang berisi individu yang rentan terinfeksi penyakit dan memiliki potensi menjadi individu terinfeksi. Laju perubahan banyaknya individu pada kompartemen rentan biasanya digambarkan dalam bentuk model pertumbuhan eksponensial, artinya laju perubahannya proporsional dengan total individu dalam populasi.
2. Kompartemen *exposed* berisi individu yang sudah terinfeksi penyakit, namun masih dalam masa inkubasi sehingga tidak memiliki potensi menularkan penyakit. Kompartemen ini dimunculkan berdasarkan fakta bahwa individu yang terinfeksi penyakit tertentu tidak selalu langsung berpotensi menularkan penyakit. Misalnya seorang manusia terinfeksi virus *dengue* dari gigitan nyamuk terinfeksi. Virus *dengue* memerlukan masa inkubasi 4-7 hari, artinya manusia tersebut tidak akan mengalami gejala klinis dan belum berpotensi menularkan pada rentang waktu tersebut. Dengan demikian manusia tersebut dimasukkan ke dalam kompartemen *exposed*.

- 
3. Kompartemen ini berisi individu yang sudah terinfeksi dan berpotensi menularkan penyakit kepada individu lain. Individu di dalam kompartemen terinfeksi berperan besar dalam proses penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Individu pada kompartemen terinfeksi dapat sembuh dan berpindah ke kompartemen sembuh.
  4. Kompartemen sembuh berisi individu dari kompartemen terinfeksi yang sudah sembuh, baik secara alami, perawatan, atau vaksinasi. Individu di dalam kompartemen ini dapat masuk kembali ke dalam kompartemen rentan jika tidak mengalami pengebalan terhadap penyakit.

Dalam kajian pemodelan masalah penyebaran penyakit dalam skala epidemi menurut Almeida, dkk. (2019), model epidemi merupakan salah satu model matematika yang berguna dalam ilmu epidemiologi untuk memahami perilaku penyakit menular, seperti prevalensi dan durasi epidemi, serta dampaknya. Dalam pemodelan masalah penyebaran penyakit menggunakan kerangka kerja model kompartemen. Pada kasus ini, model kompartemen dikonstruksi dengan mengelompokkan individu yang terlibat dalam penyebaran penyakit tertentu menjadi beberapa kompartemen. Selanjutnya, kelompok individu ini merupakan variabel-variabel model. Pada masalah penyebaran penyakit misalnya, kompartemen yang sering digunakan antara lain: individu rentan (*susceptible*), terpapar (*exposed*), individu terinfeksi (*infected*), individu sembuh (*recovered*), dan individu pembawa (*carrier*). Kelima populasi individu

---

tersebut selanjutnya menjadi variabel-variabel model. Hubungan antara semua kelompok individu ini selanjutnya diukur dan dideskripsikan dari parameter-parameter yang telah didefinisikan pada sistem. Pendekatan seperti ini selanjutnya dapat diterapkan pada masalah penyebaran penyakit baik pada skala makro yang melibatkan populasi manusia, maupun pada skala mikro yang melibatkan populasi sel-sel dan gen-gen.

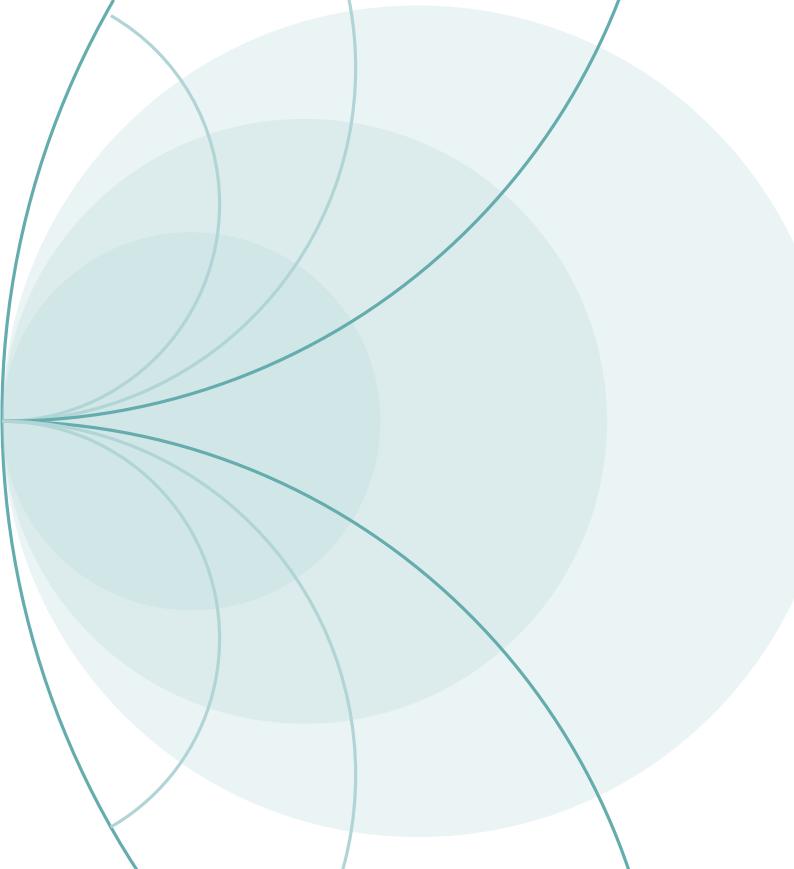
Dalam kajian pemodelan kasus keseimbangan ekosistem yang melibatkan peristiwa makan memakan predator kepada prey, maka model kompartemen di atas juga dilaksanakan. Selanjutnya, hubungan antara populasi predator dan prey dideskripsikan oleh parameter-parameter yang didefinisikan dalam sistem.

Sementara itu pada pemodelan kasus fisika, maka kaidah pemodelan dilaksanakan dengan memperhatikan beberapa aspek yang akan menjadi langkah pemodelan. Langkah-langkah itu adalah: (a) menguji asumsi-asumsi yang melatarbelakangi masalah, (b) menggambarkan dalam kompartemen sistem, dan menggambarkan semua gaya-gaya yang terlibat. Pada bagian ini sangat krusial, karena harus melibatkan kajian teoritik yang mendalam dan hati-hati. (c) Mengidentifikasi hukum-hukum yang berlaku pada masalah, (d) menentukan. Pada masalah pemodelan kasus vibrasi dawai misalnya, kelima langkah di atas diterapkan. Identifikasi gaya-gaya yang bekerja harus dilakukan secara cermat untuk mendapatkan gambaran total energi potensial. Selanjutnya jumlahkan total energi potensial dan energi kinetik dinyatakan sebagai persamaan Lagrange.

Bab selanjutnya dari buku ini akan mengupas pemodelan

---

matematika dengan membawa pembaca pada situasi riil masalah. Selanjutnya langkah-langkah pemodelan yang telah dipaparkan di atas disajikan untuk memberi deskripsi yang kongkrit sehingga diperoleh model prediksi yang diharapkan.



## Bab 2

# Model Matematika Vibrasi

## Dawai Alat Musik Petik



---

## **2.1 Pendahuluan**

Pemodelan matematika pada dawai alat musik petik merupakan proses mendeskripsikan masalah dawai yang diberikan simpangan atau petikan dan memformulasikannya dalam persamaan diferensial. Tujuan pemodelan pada masalah ini adalah memahami fenomena vibrasi merambat yang dihasilkan di sepanjang dawai sesaat setelah simpangan dilepaskan. Selain itu pemodelan matematika pada masalah ini dilakukan untuk menjawab pertanyaan klasik memainkan alat musik, yakni (a) bagaimana simpangan maksimum dapat dibuat saat dilakukannya petikan agar noise dapat diminimalkan, (b) bagaimana faktor-faktor internal dapat dikendalikan agar hasil petikan pada suatu nada tertentu mencapai kondisi yang maksimal. Melalui model matematika yang dibangun diharapkan dapat memberikan simulasi untuk pengaturan simpangan sehingga menghasilkan noise yang rendah. Model matematika juga bertujuan untuk membantu mempelajari secara komprehensif masalah vibrasi dawai pada alat musik petik.

Berbagai macam alat musik petik yang populer memiliki karakteristik masing-masing yang mempengaruhi teknis

---

petikannya untuk memproduksi suatu nada tertentu. Masing-masing alat musik tersebut memiliki karakteristik teknik petikannya masing-masing. Beberapa alat musik petik yang sering dijumpai misalnya gitar, kecapi, sasando (dari Nusa Tenggara Timur), Gondang Hasapi (dari daerah Tapanuli), Siter (dari Jawa Tengah), Ukulele (dari Maluku), Sapek (dari Kalimantan Timur), Panting (dari Kalimantan Selatan), Jentreng (dari Jawa Barat), Ketadu Mara (dari Nusa Tenggara Timur), dan masih banyak lagi. Bentuk fisik alat musik petik tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



**Gambar 2.1.** Alat musik petik tradisional di Indonesia

Hal yang menarik untuk analisa noise setelah petikan adalah dengan cara mengamati merekam profil vibrasi setelah dawai dipetik berulang-ulang untuk mengukur simpangan terbaik yang menghasilkan noise terkecil. Cara yang kedua adalah dengan memformulasikan model matematika. Setiap nada dasar akan memiliki patern lokasi petikan yang berbeda-beda, yang melibatkan panjang dawai. model matematika yang

---

dikonstruksi bertujuan untuk menjelaskan bagaimana fenomena vibrasi terjadi. Simpangan terbaik dilakukan dengan cara simulasi model matematika dengan berbagai input termasuk di dalamnya panjang dawai  $l$  sehingga diperoleh amplitudo vibrasi  $y$  yang paling kecil dengan frekwensi yang kecil pula. Formulasi model matematika ini didukung dengan melibatkan pengetahuan teoritik dari fenomena fisika dawai, hukum-hukum fisika yang lengkap melatarbelakangi sistem dawai, identifikasi secara teliti semua gaya dan energi yang terjadi pada sistem masalah. Khusus pada masalah ini maka dipertimbangkan dengan cermat total energi potensial, energi kinetik dan persamaan Lagrange.

Konstruksi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dilakukan dengan berbagai tahapan. *Pertama*, melakukan identifikasi masalah secara cermat; bagaimana vibrasi ini terjadi setelah petikan, apa yang signifikan mempengaruhi terjadinya noise setelah petikan. gejala-gejala apa saja yang bisa ditangkap dari masalah dan studi literatur yang mencukupi untuk membacup masalah yang akan dimodelkan. Termasuk di dalamnya sketsa gambar sistem dibuat untuk mempermudah identifikasi. *Kedua*, Menetapkan variabel model, menyusun list parameter dan melacaknya dalam berbagai sumber yang akurat. *Ketiga*, membangun asumsi, melibatkan rincian seluruh hasil identifikasi masalah dan mempertimbangkan semua kemungkinan dan efeknya. *Keempat*, konstruksi model yang melibatkan analisis gaya-gaya yang bekerja, energi potensial, total energi potensial yang terjadi, energi kinetik, persamaan Lagrange dan penurunan persamaan lagrange terhadap variabel tak bebas model. *Kelima*, analisis Validasi Model melalui analisis

---

profil grafik, solusi analitik model dan simulasinya. Langkah ini dilakukan sekaligus untuk menguji apakah profil grafik solusi dari model matematika yang dibangun telah cukup realistik atau perlu dilakukan *bedah model* untuk cek apakah ada komponen-komponen yang belum dipertimbangkan. Termasuk ketelitian proses menjadi target utama pada upaya validasi model ini. Model matematika yang telah valid diindikasikan dengan profil grafik dari variabel bebas mendekati kondisi yang sesungguhnya. Dasar inilah yang dapat memberi rekomendasi dilaksanakannya analisis pada tataran numerik, analitik dan kajian dari perspektif lainnya.

## 2.2 Dasar Teori

Sesaat setelah dawai dipetik/diberi simpangan, dawai bervibrasi sehingga terjadi gesekan antara dawai dan udara. Faktor kekentalan udara di sekitar dawai yang bergetar mempengaruhi kecepatan dawai dalam bervibrasi. Secara teoritik, komponen yang terlibat adalah: Massa Jenis Dawai ( $\rho$ ) merupakan massa *string* dawai per satuan volume dengan satuan  $kg/m^3$ . Secara matematis dituliskan sebagai  $\rho = \frac{m}{v}$ .

Tegangan Dawai (*Stress*)  $T$ . Tegangan muncul sebagai reaksi untuk menahan gaya yang sedang bekerja. Besar tegangan akan sebanding dengan gaya yang bekerja. Tegangan merupakan gaya  $F$  per satuan luas penampang dawai  $A$  yang memiliki satuan  $N/m^2$  dan dapat dinyatakan sebagai  $T = \frac{F}{A}$ .

Regangan (*Strain*)  $r$ . Regangan adalah perubahan panjang dawai. Perubahan ini merupakan akibat dari pergeseran internal di setiap titik sepanjang dawai. Selanjutnya regangan

---

merupakan perbandingan antara pertambahan panjang ( $\Delta l$ ) dengan panjang awalnya ( $l_0$ ) yakni  $r = \frac{\Delta l}{l_0}$ .

Dengan adanya kemampuan dawai untuk tegang dan regang setelah dikenai gaya inilah maka dawai dikatakan bersifat elastis. Keelastisitasan dawai ditunjukkan sebagai Modulus Elastisitas (*Modulus Young*)  $E$ , yang menunjukkan keterkaitan antara tegangan dengan regangan dalam hubungan  $E = \frac{T}{e}$ . Berikut disajikan modulus elastisitas dari beberapa material penyusun dawai yang mungkin:

**Tabel 2.1.** Modulus Elastis dari Beberapa Material

Material	Modul Elastis ( $N/m^2$ )
Besi	$1 \times 10^{11}$
Baja	$2 \times 10^{11}$
Perunggu	$1 \times 10^{11}$
Alumunium	$7 \times 10^{10}$
Beton	$2 \times 10^{10}$
Batu bara	$1.4 \times 10^{10}$
Marmer	$5 \times 10^{10}$
Granit	$4.5 \times 10^{10}$
Kayu pinus	$1 \times 10^{10}$
Nilon	$0.5 \times 10^{10}$
Tulang muda	$1.5 \times 10^{10}$

Berikutnya adalah konsep amplitudo  $A$  yang merupakan simpangan maksimal dari titik kesetimbangan saat dawai bervibrasi sesaat setelah dikenai petikan. Amplitudo maksimum disebut perut dan amplitudo sama dengan nol disebut simpul. Selanjutnya vibrasi ini akan merambat membentuk gelombang mencapai jarak tertentu. Secara teoritik, perbandingan perpindahan satu gelombang dengan periodenya disebut cepat rambat gelombang  $v$  dalam satuan

---

$m/s$ . Sekali lagi, besar cepat rambat gelombang dipengaruhi besar gaya tegangan  $F$  dan massa jenis *string* dawai  $\mu$ . Kaidah hukum Melde memberikan dasar teoritik hubungan antara gaya tegangan dan cepat rambat gelombang dalam ekspresi matematika  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ . Jika dikaitkan dengan modulus elastisitas  $E$  penyusun materi dawai dengan Massa jenis dawai elastis linear  $\rho$ , maka cepat rambat gelombang  $v$  juga dapat didefisikan sebagai  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Hubungan antara gaya dan usaha menjadi sangat penting pada masalah dawai dengan simpangan tertentu. perambatan energi oleh partikel-partikel, melibatkan pula gaya-gaya yang bekerja akan berdampak pada besar usaha yang bekerja. Secara teoritik, Usaha sangat dipengaruhi oleh kondisi dari gaya. Gaya yang terjadi pada suatu dawai dapat bernilai konstan bahkan dapat pula berubah sesuai dengan perubahan lokasi dimana gaya ini bekerja dan tidak dipengaruhi oleh cara perpindahan partikel merambatkan energi. Jika gaya berubah dipengaruhi lokasi gaya bekerja maka gaya seperti ini disebut gaya konservatif. Untuk kondisi pertama dimana diasumsikan gaya bersifat konstant, maka besar usaha ( $W$ ) didefinisikan sebagai  $W = F\Delta x$ . Sementara itu untuk kasus dengan gaya yang konservatif maka besar usaha ( $W$ ) yang diperlukan untuk melakukan perpindahan dari titik awal ( $x_i$ ) dan titik akhir ( $x_j$ ), secara matematis dinyatakan sebagai  $W = \int_{x_i}^{x_j} F(x)dx$ .

Berdasarkan hal tersebut, maka terjadi perubahan besar energi potensial ( $\Delta Ep$ ) dalam sistem. Perubahan ini berlawanan arah dengan usaha, yang dinyatakan sebagai  $\Delta Ep = -W$  Oleh karena itu dapat dinyatakan besar

---

perubahan energi potensial adalah:

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx$$

Dari persamaan (2.2) didefinisikan satuan dalam Standart Internasional untuk energi potensial dalam *Joule* atau  $kgm^2/s^2$ .

Energi Kinetik Energi kinetik dari sebuah benda berkaitan dengan kondisi benda bergerak. Dalam hal dawai yang diberikan simpangan dan dilepaskan, maka berlaku energi kinetik sebagai konsekwensi gerak bolak balik dawai di sekitar kesetimbangan dan perambatan vibrasi dari titik ke titik sepanjang dawai. secara teoritik, energi kinetik merupakan selisih dari energi total benda (diukur dari sebarang kerangka acuan) ( $E$ ) dengan energi benda yang diukur dari kerangka diamnya ( $E_0$ ). Besar energi total dari sebuah benda bermassa  $m$  menurut teori relativitas khusus Einstein jika diukur dari sebarang kerangka acuan adalah:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dimana  $E$  adalah energi kinetik total (*Joule*),  $m$  adalah massa benda ( $kg$ ),  $c$  adalah kecepatan cahaya dalam ruang hampa ( $299792458m/s$ ), dan  $v$  adalah kecepatan benda bergerak ( $m/s$ ). Sementara besar energi jika diukur dari kerangka diam adalah

$$E_0 = mc^2$$

Sehingga energi kinetik dari benda tersebut adalah  $E_k = E - E_0$ . Dengan melakukan ekspansi deret Taylor maka

---

diperoleh  $E_k = mc^2 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$ . Besar cepat rambat benda yang jauh lebih kecil dibanding cepat rambat cahaya menjadikan energi kinetik dari benda dapat dinyatakan sebagai:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

## 2.3 Kajian Hukum Fisika

### Hukum Newton

Pada masalah gerak dawai alat musik petik setelah diberikan aksi berupa simpangan/petikan, maka hukum Newton menjadi utama untuk diperhatikan. Hukum Newton terdiri atas tiga bagian utama, yakni:

#### 1. Hukum I Newton

Hukum I Newton memandang sebuah objek yang berada dalam keadaan diam akan tetap diam, sementara itu objek yang bergerak akan terus bergerak dengan percepatan tetap di sepanjang garis lurusnya jika tidak mendapat pengaruh berupa gaya luar yang mengenai benda tersebut.

#### 2. Hukum II Newton

Hukum II Newton menyatakan hubungan antara percepatan benda ( $a$ ), massa benda ( $m$ ), dan gaya yang bekerja ( $F$ ). Disebutkan bahwa percepatan gerak benda berbanding lurus dengan gaya yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massa benda itu sendiri. Hubungan tersebut secara matematis dapat dituliskan seperti pada persamaan (2) berikut:

$$\Sigma F = m.a$$

---

Persamaan (2) menunjukkan jika gaya yang bekerja pada benda tersebut lebih dari satu, maka percepatan gerak benda dipengaruhi oleh gaya total  $\Sigma F$ . Gaya total pada benda adalah jumlah semua vektor gaya yang bekerja pada benda tersebut.

### 3. Hukum III Newton

Hukum III Newton menyatakan bahwa sebuah benda yang dikenai gaya oleh benda lain juga akan memberikan gaya yang sama terhadap benda tersebut dengan arah yang berlawanan. Hal ini berarti bahwa setiap gaya aksi akan menghasilkan gaya reaksi yang sama besar, namun dengan arah yang berlawanan.

$$F_{aksi} = F_{reaksi}$$

**Hukum Hooke** Dawai alat musik petik adalah objek yang bersifat elastis; dawai akan kembali ke keadaan semula setelah dikenai suatu gaya tertentu. Setelah petikan misalnya, dawai akan bergetar di sekitar posisi kesetimbangannya dan akan kembali ke posisi semula. Sementara pada saat diberi simpangan, maka dawai akan meregang/mulur yang selanjutnya akan kembali ke posisi semula setelah beberapa saat meregang. Pada suatu dawai elastis seperti ini, berlaku Hukum Hooke yang bekerja untuk memulihkan dawai ke keadaan semula menuju ke kondisi relaks. Hukum Selanjutnya hukum Hooke ini menjelaskan tentang hubungan antara gaya dan perubahan gaya. Besar gaya pegas ( $F_s$ ) sebanding dengan besar perpanjangan pegas ( $d$ ), dinyatakan

---

dalam persamaan (2.3) berikut:

$$F_s = -kx$$

Gaya pegas dawai  $F_s$  sebanding dengan perkalian antara konstanta pegas  $k$  dengan pertambahan panjang dawai  $x$ . Minus pada ruas kanan persamaan (2.3) menunjukkan bahwa gaya pemulih akan terjadi dengan arah yang berlawanan dengan arah perpanjangan pegas (Holliday, dkk., 2010). Konstanta pegas dapat dicari dengan menggunakan hubungan antara modulus elastisitas dawai  $E$ , luas penampang dawai  $A$ , dan panjang dawai  $l$ , yang dirumuskan sebagai:

$$k = \frac{EA}{l}$$

**Hukum Stokes** Pada kasus dawai alat musik petik, maka sesaat setelah petikan terjadilah gesekan antara dawai yang bervibrasi dengan udara di sekitar dawai. Arah gesekan tentunya berlawanan dengan arah vibrasi dawai. Oleh karena itu gaya gesek bersifat mengerem (*drag force*) yang memperlambat vibrasi dawai di udara. Pada kasus demikian maka hukum Stokes bekerja di sana. Hukum Stokes menyebutkan jika suatu benda bergerak pada suatu fluida yang diam maka timbul gaya gesekan antara benda dengan fluida di sekitar benda tersebut. Gaya gesekan ini sebanding dengan viskositas fluida dinamis zat alir  $\eta$  dan kecepatan relatif benda terhadap zat alir  $v$  (Rosyid ,2015). Formula gaya gesek  $F_s$  selanjutnya dinyatakan sebagai:

$$F_s = k\eta v$$

---

Berikut disajikan data kekentalan beberapa fluida yang sering digunakan pada berbagai kasus.

**Tabel 2.2.** Kekentalan dinamika beberapa fluida

Bahan	Kekentalan (Ns/m <sup>2</sup> )	Dinamik
Air	0,010	
Udara	0,000018	
Alkohol	0,018	
Gliserinm	8,5	
Air Raksa	0,0156	

### Prinsip Hamilton dan Persamaan Euler-Langrange

Teori relativitas adalah teori yang berkenaan dengan pengaturan struktur ruang dan waktu yang diperkenalkan oleh Albert Einstein. Di dalam teori relativitas, persamaan Lagrange didefinisikan sebagai selisih antara energi kinetik ( $E_k$ ) dan energi potensial ( $E_p$ ), sehingga dapat dituliskan:

$$L = E_k - E_p$$

Bentuk implisit untuk persamaan Lagrange mendeskripsikan suatu sistem yang memuat fungsi posisi  $u(x, t)$  yang tergantung pada keadaan  $x$  dan waktu  $t$  serta turunan-turunan parsial terhadap dimensi ruang dan waktu berturut-turut, yang dinyatakan sebagai:

$$L \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), u(x, t), x, t \right)$$

Selanjutnya didefinisikan persamaan gerak sebagai:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{\infty} L \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), u(x, t), x, t \right) dx$$

---

Persamaan gerak ini selanjutnya disebut persamaan Euler-Lagrange (Arfken dan Hans, 2005). Turunan Persamaan Euler-Lagrange terhadap sistem posisi ini dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dL}{du} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) \quad (2.1)$$

## 2.4 Formulasi Model Matematika

Formulasi model matematika merupakan proses analisis yang melibatkan urutan langkah-langkah yang saling berkaitan, dimulai dari memahami masalah, penentuan variabel model, menguji asumsi-asumsi yang berlaku, menetapkan satuan model, uji validasi model dan interpretasinya. Pada kasus fisika dan kasus biologi memungkinkan ada urutan langkah yang berbeda. Perbedaan ini terutama sangat berkaitan dengan sistem yang dibangun sehingga memudahkan bagaimana fenomena dapat dideskripsikan dengan lebih teknis. Pada bagian ini akan dikaji langkah-langkah formulasi model matematika pada kasus vibrasi dawai setelah diberikan simpangan tertentu. Tujuan pemodelan masalah ini untuk mendapatkan gambaran pola vibrasi yang terjadi. Dari sini dapat dilihat realistik atau tidaknya model yang telah dibangun. Simulasi yang dilakukan juga dapat memberi gambaran simpangan maksimal sehingga didapatkan noise yang paling kecil dikaitkan dengan amplitudo dan frekwensi gelombangnya. Pada pemodelan masalah vibrasi dawai alat musik petik yang difokuskan untuk mendapatkan nada dasar do, maka diterapkan urutan langkah-langkah pemodelan

---

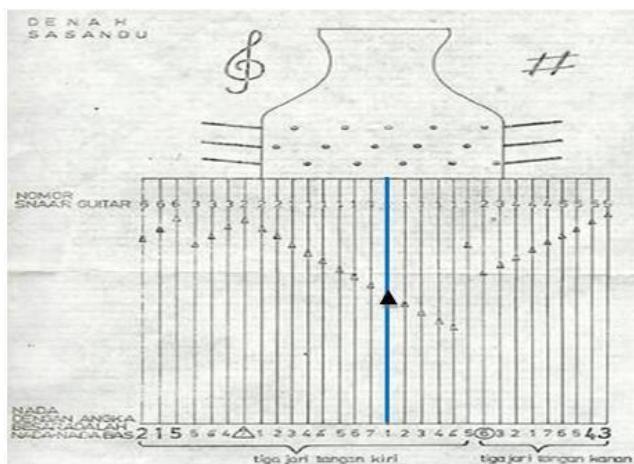
sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah yang akan dimodelkan
2. Identifikasi seluruh variabel yang signifikan terlibat dan analisis parameter-parameter yang melengkapi variabel model
3. Identifikasi gaya-gaya yang bekerja pada model dan menggambar semua vektor gaya dengan cermat.
4. Identifikasi dan uji asumsi yang berlaku
5. Formulasi energi potensial, energi potensial total dan energi kinetik
6. Konstruksi persamaan Lagrange dan turunannya terhadap waktu

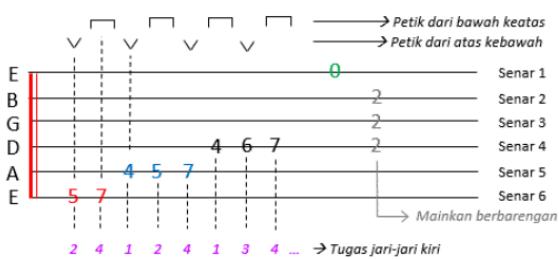
#### **2.4.1 Identifikasi Masalah**

Secara umum, untuk memproduksi suatu nada alat musik petik adalah memberikan simpangan/petikan pada senar. Bahan senar dapat bervariasi, namun keelastisan senar telah didesain sedemikian rupa sehingga tahan pada efek suhu yang menyebabkan dawai dapat mulur secara alamiah. Denah dawai pada alat musik petik berbeda-beda yang merupakan karakteristik spesifik alat musik petik yang dimaksud. Pada intinya semua alat musik petik akan memproduksi nada tertentu yang sama. lokasi petikan *fingerboard* selanjutnya memberikan petunjuk lokasi kolom dawai yang harus ditekan/dikunci dan kemudian dipetik untuk menghasilkan suatu nada tertentu. Perbedaannya adalah pada desain alat musik petik itu sendiri. Ada beberapa alat musik petik yang membutuhkan untuk dilakukan tekanan pada beberapa titik

pada dawai terlebih dahulu sebelum dilakukan petikan, misalnya gitar. Sementara alat musik petik lainnya seperti sasando, petikan langsung dapat dilakukan tanpa harus mengunci/menekan kolom pada dawai secara manual. Selanjutnya denah tangga nada pada kedua contoh alat musik petik yang disebut di atas dapat diperlihatkan pada gambar berikut untuk memberi deskripsi secara umum:



(a) Sasando



(b) Alat Musik Petik Lain

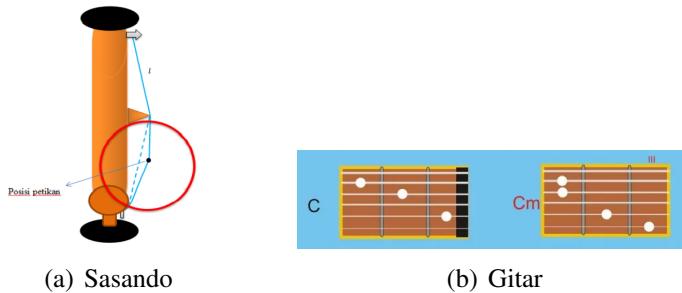
### **Gambar 2.2. Fingerboard**

Berdasarkan denah dawai dari kedua alat musik tersebut

---

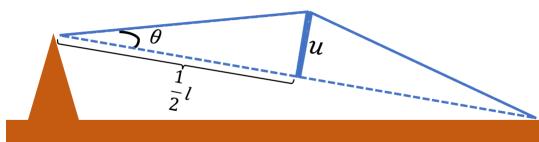
yang disajikan pada Gambar 2.2(a), misalnya akan diproduksi nada dasar do, posisi dawai nomor 16 yang diberi warna biru secara langsung dapat dipetik. Dawai ini telah didesain sedemikian sehingga pemain secara langsung dapat melakukan petikan. Sedangkan pada dawai gitar harus dilakukan tekanan pada beberapa titik untuk memproduksi nada yang sama.

Pada dasarnya dawai pada alat musik petik tertangguhkan di kedua sisi/pengait yang berbeda yang disebut *tuning peg*. Untuk memodelkan kasus ini maka diasumsikan panjang dawai adalah  $l$ , dengan luas penampang dawai yang digunakan pada alat musik petik sangat kecil sebesar  $A$ . Akibatnya, volume dawai  $V$  berbanding lurus dengan panjang dawai. Selanjutnya, massa jenis dawai  $\rho$  merupakan massa per satuan panjang dawai. Selanjutnya jenis material dawai yang digunakan dapat bervariasi dengan modulus elastisitas sebagai ukuran tingkat keelastisan atau kelenturan dawai adalah  $E = 5 \times 10^{-9} N/m^2$ . Oleh karena itu untuk menjaga agar dawai tidak putus saat permainan, maka besar simpangan yang diberikan tidak boleh melebihi batas keelastisan dari dawai. Hal inilah yang menjadi fokus utama pertanyaan penelitian, yakni menganalisis simpangan maksimal  $y(t)$  yang diberikan pada dawai sehingga dapat dimodelkan serta dapat disimulasikan untuk menjawab persoalan ini. Perbandingan petikan pada dawai penghasil nada dasar do dipetik dapat disaksikan pada gambar di bawah ini. Pada alat musik petik, posisi petikan untuk nada dasar do adalah  $\frac{1}{2}l$  dari pajang dawai  $l$ .



**Gambar 2.3.** Penghasil Nada do

Pemodelan matematika yang dimaksud dalam bagian ini adalah difokuskan pada pemodelan alat musik petik yang diasumsikan bahwa lokasi petikan adalah pada  $\frac{1}{2}l$ . Gambar 2.4 berikut ini mendeskripsikan kondisi dawai yang dimaksud:

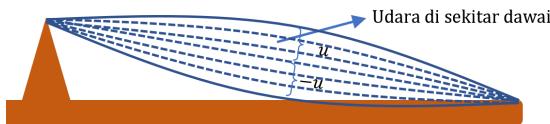


**Gambar 2.4.** Partisi Kondisi Dawai ketika Dipetik pada Posisi  $\frac{1}{2}l$

Dari Gambar 2.4, menunjukkan kondisi dawai dipetik pada posisi  $\frac{1}{2}l$  dari panjang dawai mula-mula  $l$ . Petikan yang dimaksud adalah memberikan simpangan sebesar  $u$  sehingga terbentuk sudut sebesar  $\theta$ . Sesaat setelah petikan dilepaskan maka terjadi vibrasi atau gerak bolak-balik di sekitar posisi normal dawai sampai suatu saat dawai berhenti. Selanjutnya vibrasi yang terjadi akan membentuk gelombang stasioner yang memiliki 1 perut dan 2 simpul. Hal ini mengakibatkan

---

dawai yang bervibrasi sepanjang  $\frac{1}{2}\lambda$ , dengan  $\lambda$  adalah panjang gelombang seluruhnya. Akibat lain dari vibrasi ini adalah terjadinya secara spontan gesekan antara dawai dengan fluida udara di sekitar dawai yang bergetar ini. Gesekan ini selanjutnya mempengaruhi kecepatan dawai dalam berosilasi. Didefinisikan faktor peredam  $k_d$  yang mempengaruhi kecepatan dawai bervibrasi sampai akhirnya berhenti pada waktu  $t$ . Faktor peredam  $k_d$  berasal dari terjadinya gesekan internal dari dawai. Diasumsikan pula bahwa gesekan antara dawai dan udara bergantung pada dimensi ruang  $x$  dan dimensi waktu  $t$ . Hal ini diilustrasikan pada gambar berikut:



**Gambar 2.5.** Gesekan dawai dan udara pada posisi petikan  $\frac{1}{2}l$

Hal lain yang terjadi adalah munculnya energi kinetik sebagai dampak langsung vibrasi. selain itu muncul pula energi potensial sebagai dampak terjadinya gaya reaksi dawai melawan gaya tarikan/simpangan pada dawai ketika dipetik dan gaya-gaya lain yang bekerja pada dawai.

#### 2.4.2 Identifikasi Parameter dan Variabel

Beberapa parameter dipertimbangkan pada masalah vibrasi dawai, yakni:

1. Panjang dawai ( $l$ ) adalah besaran yang menyatakan jarak (pada posisi normal dawai) dari ujung yang satu

---

ke ujung lainnya dimana masing-masing ujung dawai diikat/ditangguhkan.

2. Luas penampang dawai ( $A$ ) adalah besaran yang menyatakan ukuran penampang dawai. Diasumsikan luas penampang dawai berukuran sangat kecil, akibatnya volume dawai sebanding dengan panjang dawai.
3. Massa dawai ( $m$ )
4. Modulus elastisitas dawai alat musik petik ( $E$ ) merupakan ukuran keelastisan atau kelenturan dawai dalam satuan  $N/m^2$ . Keelastisitasan dawai sangat bergantung pada bahan/material penyusun dawai. Besar modulus elastisitas dawai dapat disimulasikan pada model sesuai keperluan, misalkan jika dawai berbahan nilon maka besar modulus elastisitasnya adalah  $5 \times 10^{-9} N/m^2$ .
5. Konstanta pegas ( $K_p$ ) merupakan ukuran kekakuan dawai. Untuk beberapa bahan yang berbeda, maka memiliki ukuran kekakuan yang berbeda pula. Sebagai ilustrasi untuk dawai yang berbahan nilon memiliki nilai kekakuan sebesar  $K_p = \frac{E}{l} N/m$ .
6. Koefisien gesek dawai dengan udara  $k_b$  adalah konstanta sebesar  $k_b = 6\pi r$  dengan  $r$  adalah jari-jari permukaan melintang dawai.
7. Koefisien viskositas ( $\eta$ ) merupakan ukuran kekentalan fluida atau zat alir. Beberapa fluida yang berbeda-beda memiliki kekentalan yang berbeda-beda pula. Koefisien viskositas udara sebesar  $0,000018 \text{ Ns}/m^2$ . kekentalan

---

fluida selanjutnya juga bergantung pada tekanan dan suhu dimana fluida berada.

8. Kecepatan elastisitas ( $c$ ) merupakan akar kuadrat dari modulus elastisitas  $E$  per massa jenis dawai ( $\rho$ ) dengan satuananya adalah  $m/s$ .
9. Konstanta peredam ( $k_d$ ) yang mempengaruhi kecepatan dawai selama dawai berosilasi.

Selanjutnya dilakukan identifikasi variabel-variabel yang berperan signifikan terhadap masalah yang akan dimodelkan. Variabel-variabel keputusan model adalah variabel yang mampu menginterpretasikan pertanyaan masalah, biasanya dinyatakan sebagai variabel bebas. Sedangkan variabel tak bebas dalam pemodelan matematika merujuk pada variabel dimensi, yakni ruang/space  $x$  dan waktu  $t$ . Dalam kasus model matematika vibrasi dawai alat musik petik misalnya, kita sering bertanya tentang bagaimana simpangan maksimal dibuat dan sudut maksimal harus diatur sehingga dawai tidak putus saat dipetik atau dawai tidak menghasilkan noise saat vibrasi berlangsung. Oleh karena itu dalam pemodelan matematika kasus ini, variabel terikat model adalah:

1. Besar simpangan ( $u$ )
2. Besar sudut ( $\theta$ ).

Keduanya adalah variabel yang bergantung pada ruang  $x$  dan waktu  $t$ . Sementara itu variabel lainnya bersifat secara implisit mendukung variabel utama pada penelitian ini adalah:

1. Kecepatan vibrasi dawai ( $v$ ) merupakan perubahan besar simpangan ( $u$ ) per satuan waktu ( $t$ ). Secara

---

*Leibniz*, kecepatan ini dinyatakan dalam  $\frac{\partial u}{\partial t}$  dengan satuan  $m/s$ .

2. Percepatan vibrasi dawai merupakan perubahan kecepatan terhadap waktu  $t$  yang dinotasikan sebagai  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  dalam satuan  $m/s^2$ .
3. Koefisien garis singgung atau kemiringan sebagai  $\tan \theta$  yang merupakan  $\frac{\partial u}{\partial x}$  merupakan perubahan besar simpangan  $u$  terhadap titik  $x$ .

Langkah berikutnya adalah mengidentifikasi energi-energi yang mengakibatkan pergerakan pada dawai. Energi-energi yang membuat pergerakan dawai yang secara tepat berlaku atau terjadi pada masalah riil. Maka berdasarkan uraian di atas, energi-energi yang terlibat dan melatarbelakangi model vibrasi sepanjang dawai karena efek petikan adalah:

1. Energi potensial ( $E_p$ ) timbul akibat reaksi gaya-gaya yang bekerja pada dawai. Gaya-gaya yang bekerja sesungguhnya adalah gaya reaksi ketika dawai diberi simpangan dan dilepaskan. Selanjutnya satuan energi potensial dinyatakan sebagai *Joule* atau setara dengan  $kgm^2/s^2$ .
2. Energi kinetik ( $E_k$ ) dipengaruhi oleh kecepatan vibrasi dawai. Satuan energi kinetik adalah *Joule* atau setara dengan  $kgm^2/s^2$ .

#### 2.4.3 Identifikasi Gaya-Gaya yang Bekerja

Vibrasi dawai akan terjadi tepat setelah dawai dipetik. Gerak bolak-balik disepanjang dawai dan disekitar posisi dawai ini memberikan indikasi adanya gaya reaksi untuk

---

mempertahankan dan mengembalikan dawai pada posisi setimbang. *Pertama* adalah gaya pegas ( $F_{\text{pegas}}$ ). Gaya pegas bekerja pada dawai ketika dawai bervibrasi. Selanjutnya  $F_{\text{pegas}}$  dinyatakan dalam Hukum Hooke berikut:

$$F_{\text{pegas}} = -k_p x$$

dengan  $k_p$  merupakan konstanta pegas *string* dawai dan  $x$  adalah pertambahan panjang dawai. Jika dawai dipetik di bagian tengah *string* dawai maka akan muncul gaya pegas di sisi kiri dan kanan dawai. Gaya pegas di sisi kiri dawai  $F_{\text{pegas kiri}}$  sebagai berikut:

$$F_{\text{pegas kiri}} = -k_p x^-$$

dengan  $x^-$  merupakan pemanjangan panjang dawai di sisi kiri. Analog dengan gaya pegas di sisi kiri, gaya pegas yang terjadi di sisi kanan dawai ( $F_{\text{pegaskanan}}$ ) sebagai berikut:

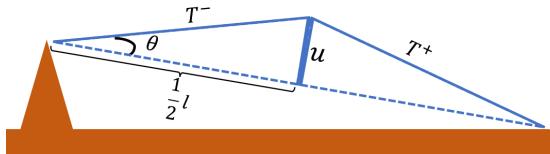
$$F_{\text{pegaskanan}} = -k_p x^+$$

dengan  $x^+$  adalah pertambahan panjang dawai di sisi kanan.

*Kedua* adalah gaya tegangan ( $F_{\text{tegangan}}$ ).  $F_{\text{tegangan}}$  adalah gaya dawai yang melawan gaya tarikan akibat petikan. Selanjutnya  $F_{\text{tegangan}}$  sebagai hasil kali dari besarnya tegangan ( $T$ ) dan luas penampang ( $A$ ). Pada peristiwa vibrasi alat musik petik, luas penampang melintang dawai sangatlah kecil, akibatnya  $F_{\text{tegangan}}$  sebanding dengan besar tegangan dawai yang dinyatakan sebagai:

$$-F_{\text{tegangan}} = T$$

Tanda minus menunjukkan bahwa arah  $F_{tegangan}$  berlawanan arah dengan arah petikan awal. Ketika dawai diberi simpangan maka terjadi tegangan di sepanjang dawai.



**Gambar 2.6.** Tegangan pada Dawai Alat Musik Petik

Gambar 2.6 menunjukkan adanya tegangan di sisi kiri dan kanan dawai. Gaya tegangan di sisi kiri dawai ( $F_{tegangan\ kiri}$ ) dinyatakan sebagai:

$$F_{tegangan\ kiri} = -T^-$$

dengan  $T^-$  merupakan tegangan di sisi kiri dawai. Sementara itu, gaya tegangan di sisi kanan dawai ( $F_{tegangan\ kanan}$ ) dinyatakan sebagai:

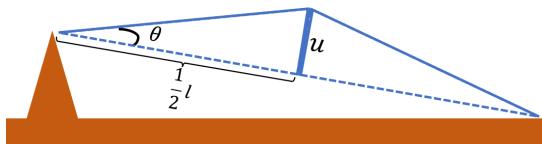
$$F_{tegangan\ kanan} = -T^+$$

Ketiga adalah gaya gesek ( $F_{gesek}$ ). Sesaat setelah dawai dipetik, maka terjadi gesekan antara dawai dengan udara di sekitar dawai. Oleh karena itu, gaya gesek dengan udara tersebut merupakan gaya gesek yang bekerja pada dawai. Gaya gesek terjadi di sepanjang kurva  $u$  dan mengikuti hukum Stokes, yaitu:

$$F_{gesek} = k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

---

dengan  $k_b$  adalah koefisien gesek dawai,  $\eta$  adalah koefisien viskositas udara, dan  $\frac{\partial u}{\partial t}$  adalah kecepatan vibrasi dawai yang didefinisikan sebagai perubahan simpangan  $u$  tiap satuan waktu  $t$ . Ilustrasi gaya gesek dawai dengan udara dinyatakan sebagai berikut:



**Gambar 2.7.** Ilustrasi Gesekan Dawai terhadap Udara

#### 2.4.4 Membangun Asumsi

Tahap penting selanjutnya pada pemodelan matematika adalah membangun semua asumsi dari masalah yang akan dimodelkan. Asumsi-asumsi dasar pada masalah vibrasi dawai pada alat musik petik adalah:

1. Dawai diasumsikan lentur sempurna dan berada pada posisi setimbang di sepanjang sumbu  $x$ .
2. Gerak dawai diasumsikan adalah gerak vibrasi di sekitar posisi setimbang dawai. Suatu saat vibrasi ini akan berhenti pada waktu  $t$  tertentu dan tidak berlangsung selama-lamanya, karena adanya kontribusi gaya gesek dawai dengan udara.
3. Vibrasi yang terjadi berbentuk gelombang transversal bolak balik, yang merupakan perpaduan gelombang datang dan gelombang pantul.
4. Simpangan yang terbentuk pada titik  $x$  sebesar  $u$  yang berubah setiap bertambahnya waktu  $t$ . Diasumsikan

---

simpangan  $u$  sangat kecil sehingga kemiringan di setiap titik di sepanjang dawai besarnya sangat kecil.

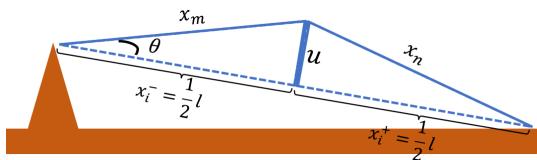
5. Ketika dawai berada pada posisi setimbang, berlaku hukum Newton I. Sementara ketika dawai bervibrasi, berlaku hukum Newton II.
6. Tegangan lebih besar dibandingkan dengan gaya grafitasi, sehingga diasumsikan gaya grafitasi dapat diabaikan. Gaya tegangan selanjutnya adalah reaksi dari dawai yang ditarik atau diberi simpangan. Gaya tegangan ini menyebabkan dawai kembali ke posisi setimbang.
7. Gaya gesek antara dawai dengan udara selama vibrasi. Gaya gesek ini menghambat laju vibrasi dawai, sehingga kecepatan vibrasi dawai berkurang.

#### 2.4.5 Energi Potensial dan Energi Potensial Total

Petikan yang diberikan pada dawai menimbulkan adanya gaya-gaya pada dawai. Selanjutnya semua gaya tersebut akan berkontribusi dalam menelaah semua energi potensial  $Ep$  yang terjadi pada dawai. Dalam menganalisis energi potensial ini, maka peran peregangan  $e$  dawai cukup penting. Karena diasumsikan bahwa petikan tepat diberikan di posisi setengah panjang dawai  $l$ , maka peregangan yang terjadi di sisi kanan dan di sisi kiri perlu dihitung.

*Pertama*, peregangan dawai  $e$ . Peregangan dawai terjadi pada saat dawai diberi simpangan atau petikan. Ketika dawai dipetik pada posisi  $\frac{1}{2}l$  maka dawai terbagi menjadi dua fokus perhatian, yakni panjang sisi kiri dawai adalah  $x_i^- = -\frac{1}{2}l$  dan panjang sisi kanan dawai adalah  $x_i^+ = \frac{1}{2}l$ . Akibat dawai dipetik

atau dikenai simpangan pada posisi setengah panjang dawai  $l$ , maka terjadi peregangan sebesar  $e$  pada dawai, diilustrasikan gambar berikut:



**Gambar 2.8.** Peregangan pada Dawai Alat Musik Petik

Berdasarkan Gambar 2.8, terdapat peregangan di kedua sisi dinotasikan sebagai  $e^-$  dan  $e^+$ . Peregangan sisi kiri dawai menyebabkan pertambahan panjang dawai di sisi kiri, dari panjang mula-mula  $x_i^-$  menjadi  $x_m$ . Secara sama, peregangan yang terjadi menyebabkan sisi kanan dawai mengalami pertambahan panjang menjadi  $x_n$  dari panjang kanan semula  $x_i^+$ .

*Kedua*, simpangan dawai  $u$ . Perhatikan Gambar 2.8 di atas dimana dawai dikenai simpangan sebesar  $u$  yang merupakan fungsi terhadap ruang  $x$  dan waktu  $t$ . Terbentuknya simpangan  $u$  ditinjau dari sisi kiri dawai dapat dihitung sebagai:

$$u_{kiri} = x_i^- \tan \theta = -\frac{1}{2}l \tan \theta = -\frac{1}{2}l \frac{\partial u}{\partial x}$$

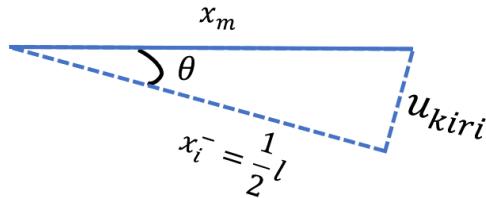
Sementara itu jika ditinjau dari sisi kanan dawai maka besar simpangan kanan adalah:

$$u_{kanan} = x_i^+ \tan \theta = \frac{1}{2}l \tan \theta = \frac{1}{2}l \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dalam hal ini,  $\tan \theta$  merujuk pada kemiringan dawai yang dinotasikan sebagai  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

---

Ketiga, menghitung panjang kemuluran sisi kiri  $x_m$  sebagai dampak peregangan kiri dawai. Untuk lebih mudah menganalisa panjang kemuluran kiri  $x_m$ , perhatikan gambar berikut:



**Gambar 2.9.** Peregangan di Sisi Kiri Dawai

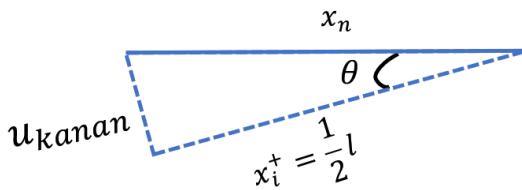
Dari Gambar 2.9 di atas, maka dengan kaidah Phytagoras diperoleh panjang kemuluran kiri:

$$x_m = \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

Keempat, menghitung pertambahan panjang sisi kiri  $x^-$ . Dari panjang kemuluran  $x_m$  di atas, maka pertambahan panjang di sisi kiri dawai ( $x^-$ ) yang merupakan selisih panjang kemuluran  $x_m$  dengan panjang mula-mula  $x_i^-$ . Sehingga  $x^-$  secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$x^- = \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} + 1 \right)$$

Kelima, menghitung panjang kemuluran kanan  $x_n$ . Perhatikan gambar berikut ini:



**Gambar 2.10.** Peregangan di Sisi Kanan Dawai

Dari Gambar 2.10, panjang kemuluran  $x_n$  dapat ditentukan, berdasarkan kaidah Phytagoras diperoleh:

$$x_n = \frac{1}{2}l \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

*Keenam*, menghitung besar pertambahan panjang dawai di sisi kanan ( $x^+$ ). Pertambahan panjang sisi kanan ini merupakan selisih antara kemuluran kanan  $x_n$  dengan panjang mula-mula sisi kanan  $x_i^+$ , yakni:

$$x^+ = \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1} - 1 \right)$$

Akhirnya, berdasarkan pertambahan panjang dawai di sisi kiri ( $x^-$ ) dan kanan ( $x^+$ ) yang telah dihitung di atas, dapat ditentukan besar peregangan  $e$  pada dawai. Konsep elastisitas menyatakan besar regangan  $e$  didefinisikan sebagai berikut:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0}$$

dengan  $\Delta l$  adalah pertambahan panjang dawai dan  $l_0$  adalah

---

panjang dawai mula-mula. Berdasarkan analisis dan perhitungan di atas, dapat dipertimbangkan kembali secara kontekstual bahwa pertambahan panjang dawai di sisi kiri sebagai  $x^-$  dan pertambahan panjang dawai di sisi kanan sebagai  $x^+$ . Sementara itu panjang dawai mula-mula di sisi kiri dan kanan berturut-turut adalah  $x_i^-$  dan  $x_i^+$ . Dengan demikian, besar peregangan di sisi kiri dawai dinyatakan sebagai  $e^-$ :

$$e^- = \frac{x^-}{x_i^-} = - \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right)$$

Secara sama, maka besar peregangan di sisi kanan dawai  $e^+$  dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$e^+ = \frac{x^+}{x_i^+} = - \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right)$$

### Identifikasi Energi Potensial $Ep$

Energi potensial  $Ep$  pada dawai alat musik petik yang bervibrasi dianalisis satu pada bagian ini, yang meliputi:

1. energi potensial pegas ( $Ep_{pegas}$ )
2. energi potensial tegangan ( $Ep_{tegangan}$ )
3. energi potensial gesek ( $Ep_{gesek}$ )

Proses analisis tiap energi potensial ini, langkah yang harus dilakukan adalah menganalisis gaya pegas, gaya tegangan, dan gaya gesek yang terjadi pada dawai saat bervibrasi karena efek diberikannya simpangan/petikan. Energi potensial total  $Ep_{total}$  selanjutnya merupakan jumlahan dari semua energi

---

potensial yang dituliskan di atas. Pada bagian ini dilakukan analisis terhadap masing-masing energi potensial tersebut: **1.**

## Energi Potensial Pegas

Ada beberapa hal tentang energi potensial pegas ( $Ep_{pegas}$ ), yakni:

- Pertama,  $Ep_{pegas}$  terjadi akibat adanya gaya pegas pada dawai yang dinotasikan sebagai  $F_{pegas}$ . Gaya pegas ini merupakan gaya yang bekerja ketika dawai dipetik atau diberi simpangan tertentu sehingga terjadi gerakan naik turun di sekitar posisi kesetimbangannya (posisi normal dawai). Pada pemodelan ini gaya pegas yang digunakan mempertimbangkan pertambahan panjang pegas saat mencapai kondisi maksimal naik/turunnya. Oleh karena itu, gaya pegas yang digunakan adalah gaya pegas yang didefinisikan mengikuti kaidah Hukum Hooke, yaitu:

$$F_p = -k_p x$$

dengan  $k_p$  merupakan konstanta pegas dan  $x$  merupakan pertambahan panjang *string* dawai. Oleh karena itu, pertambahan panjang dawai di sisi kiri  $x^-$  dan pertambahan panjang dawai di sisi kanan  $x^+$  yang telah dihitung sebelumnya akan dipertimbangkan.

- Kedua, diasumsikan besar pertambahan panjang dawai di sisi kiri maupun sisi kanan pada posisi setimbangnya adalah nol. Sehingga secara berturut-turut dinyatakan  $x_{setimbang}^- = 0$  dan  $x_{setimbang}^+ = 0$ . Posisi setimbang atau posisi normal dawai ini diartikan sebagai kondisi dawai

---

sebelum dawai dipetik. Efek mulur dawai karena faktor suhu luar diabaikan.

- Ketiga, besar pertambahan panjang dawai di sisi kiri dan sisi kanan setelah petikan berturut-turut dinotasikan sebagai  $x_{setelah\ petikan}^-$  dan  $x_{setelah\ petikan}^+$  juga dipertimbangkan pada pemodelan ini.
- Keempat, besar energi potensial pegas selama posisi setimbang (sebelum dikenai simpangan) baik di kanan maupun di kiri adalah nol, yaitu  $E_p_{pegas\ kiri\ setimbang} = 0$  dan  $E_p_{pegas\ kanan\ setimbang} = 0$ .
- Kelima, energi potensial pegas ( $E_p_{pegas}$ ) dawai di sisi kiri dan di sisi kanan berturut-turut dinotasikan sebagai  $E_p_{pegas\ kiri}$  dan  $E_p_{pegas\ kanan}$ .
- Keenam, perubahan energi potensial pegas ( $\Delta E_p_{pegas}$ ) merupakan minus integral dari  $F_{pegas}$  seperti yang telah didefinisikan pada teori sebelumnya.

Berdasarkan paparan di atas, maka langkah yang dilakukan untuk mendapatkan energi potensial pegas terbagi atas tiga bagian utama, yaitu:

1. Menentukan energi potensial pegas kiri  $E_p_{pegas\ kiri}$
2. Menentukan energi potensial pegas kanan  $E_p_{pegas\ kanan}$
3. Menentukan energi potensial pegas  $E_p_{pegas}$

Berdasarkan ketiga poin di atas, maka dilakukan analisis pada masing-masing bagiannya sebagai berikut:

## Energi Potensial Pegas Kiri

---

Energi potensial pegas kiri dicapai dengan menghitung terlebih dahulu perubahan energi potensial pegas kiri, yang mempertimbangkan beberapa hal. *Pertama*, perubahan energi potensial pegas kiri  $\Delta E_{p\text{egaskiri}}$  adalah selisih dari energi potensial pegas kiri setelah diberikan simpangan/petikan terhadap energi potensial pegas kiri saat posisi setimbangnya, yakni:

$$\Delta E_{p\text{egaskiri}} = E_{p\text{egas kiri}} - E_{p\text{egas kiri setimbang}}$$

*Kedua*, perubahan pertambahan panjang sisi kiri dawai adalah sangat kecil menuju nol. *Ketiga*, secara teoritik adalah bahwa perubahan energi potensial adalah minus dari integral gaya pegas terhadap perubahan pertambahan panjang sisi kirinya, yakni:

$$\Delta E_{p\text{egaskiri}} = - \int_{x_{\text{setimbang}}^-}^{x_{\text{setelah petikan}}^-} F_{\text{egas}}(x^-) d(x^-)$$

Berdasarkan hal tersebut dan pertimbangan mengenai  $x_{\text{setelah petikan}}^- = x^-$  dan  $x_{\text{setimbang}}^- = 0$  serta  $F_{\text{egas}}(x^-) = -k_p x^-$ , maka dapat dinyatakan energi potensial pegas kiri adalah:

$$E_{p\text{egas kiri}} = \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right) \right)^2$$

### Energi Potensial Pegas Kanan

Langkah kedua, adalah menetukan energi potensial pegas kanan  $E_{p\text{egas kanan}}$ . Secara analog, dipertimbangkan: *pertama* perubahan energi potensial pegas kanan

---

$\Delta E p_{\text{pegaskanan}}$  adalah selisih dari energi potensial pegas kanan setelah diberikan simpangan/petikan terhadap energi potensial pegas kanan saat posisi setimbangnya, yakni:

$$\Delta E p_{\text{pegaskanan}} = E p_{\text{pegaskanan}} - E p_{\text{pegaskanan setimbang}}$$

Kedua, perubahan pertambahan panjang sisi kanan dawai adalah sangat kecil menuju nol. Ketiga, secara teoritik adalah bahwa perubahan energi potensial adalah minus dari integral gaya pegas terhadap perubahan pertambahan panjang sisi kanannya, yakni:

$$\Delta E p_{\text{pegaskanan}} = - \int_{x_{\text{setimbang}}^+}^{x_{\text{setelah petikan}}^+} F_{\text{pegas}}(x^+) d(x^+)$$

dengan mempertimbangkan  $x_{\text{setelah petikan}}^+ = x^+$  dan  $x_{\text{setimbang}}^+ = 0$  serta  $F_{\text{pegas}}(x^+) = -k_p x^+$ , maka dapat dinyatakan energi potensial pegas kanan sebagai berikut:

$$E p_{\text{pegaskanan}} = \frac{1}{2} k_p \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right) \right)^2$$

### Energi Potensial Pegas Total

Akhirnya dengan didapatkannya nilai energi potensial pegas kiri dan energi potensial pegas kanan di atas, maka dapat dihitung energi potensial pegas total  $E p_{\text{pegas}}$  yang merupakan jumlahan dari kedua energi potensial pegas di sisi kanan dan kiri, yakni:

$$E p_{\text{pegas}} = \frac{1}{2} k_p l^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.2)$$

---

## 2. Enegi Potensial Tegangan Dawai

Pada analisis penurunan energi potensial tegangan dawai atau dapat disebut saja energi potensial tegangan yang dinotasikan sebagai  $E_{p_{tegangan}}$ , maka diperhatikan beberapa kondisi umum sebagai berikut:

- Pertama, terjadinya energi potensial tegangan  $E_{p_{tegangan}}$  pada dawai adalah sebagai akibat adanya gaya tegangan  $F_{tegangan}$  ketika dawai diberi simpangan  $u$ .
- Kedua, perubahan energi potensial tegangan dawai dinotasikan sebagai  $\Delta E_{p_{tegangan}}$ , yang didefinisikan sebagai minus integral dari  $F_{tegangan}$  terhadap pertambahan panjang dawai baik di sisi kiri maupun di sisi kanan sesaat ketika terjadi simpangan  $u$ . Proses formulasi Perubahan energi potensial tegangan baik di sisi kiri maupun di sisi kanan serta total energi potensial tegangan dawai dipaparkan secara rinci di bagian berikutnya pembahasan tentang ini.
- Ketiga, gaya tegangan sendiri merupakan gaya penolak yakni reaksi dari besar tegangan  $T$  yang diberikan ketika aksi berupa simpangan diberikan. Karena bersifat penolak, maka gaya tegangan memiliki besar yang sama terhadap nilai  $T$  namun berlawanan arahnya. Berdasarkan hal tersebut, maka gaya tegangan dawai  $F_{tegangan}$  dinyatakan sebagai:

$$F_{tegangan} = -T$$

- Keempat, berdasarkan konsep elastisitas, besar tegangan

---

dawai didefinisikan sebagai hasil kali besar peregangan ( $e$ ) dan modulus elastisitas ( $E$ ) dawai.

- Kelima, dalam menentukan besarnya energi potensial tegangan ( $Ep_{tegangan}$ ) maka harus mempertimbangkan keterlibatan peregangan dawai di sisi kiri ( $e^-$ ) dan di sisi kanan ( $e^+$ ) ketika terjadi simpangan  $u$  yang memberikan tegangan sebesar  $T$ .
- Keenam, besar peregangan dawai ketika dikenai simpangan  $u$  di sisi kiri diasumsikan  $e^-_{setelah\ petikan} = e^-$ . Secara sama,  $e^+_{setelah\ petikan} = e^+$ . Sementara itu diasumsikan besar peregangan dawai di sisi kiri maupun di sisi kanan pada posisi setimbang (belum ada peregangan karena belum diberikan simpangan  $u$ ) adalah nol, yakni secara berturut-turut  $e^-_{setimbang} = 0$  dan  $e^+_{setimbang} = 0$ .
- Ketujuh, diasumsikan besar energi potensial tegangan yang terjadi sebelum terjadinya peregangan baik di sisi kiri maupun di sisi kanan dawai adalah nol. Selanjutnya energi potensial yang bersifat seperti ini disebut energi potensial tegangan setimbang dan bernilai nol baik di sisi kiri yaitu:  $Ep_{tegangan\ kiri\ setimbang} = 0$  dan energi potensial tegangan dawai di sisi kanan adalah  $Ep_{tegangan\ kanan\ setimbang} = 0$ .

Berdasarkan hal tersebut, maka penentuan energi potensial tegangan terbagi atas 3 step, yakni:

1. Menghitung energi potensial tegangan kiri  $Ep_{tegangan\ kiri}$
2. Menghitung energi potensial tegangan di sisi kanan  $Ep_{tegangan\ kanan}$

---

### 3. Menetukan energi potensial tegangan total $E_{P_{tegangan}}$

#### Energi Potensial Tegangan Kiri

Energi potensial tegangan dawai di sisi kiri sesaat ketika dawai dikenai simpangan  $u$  dengan besar tegangan  $T$  memperhatikan besar peregangan kiri  $e^-$ . Selain itu perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri  $\Delta E_{P_{tegangan\,kiri}}$  didefinisikan sebagai selisih antara energi potensial tegangan kiri terhadap energi potensial tegangan kiri pada posisi setimbang, yakni :

$$\Delta E_{P_{tegangan\,kiri}} = E_{P_{tegangan\,kiri}} - E_{P_{tegangan\,kiri\,setimbang}}$$

Hal berikutnya didefinisikan bahwa perubahan energi potensial tegangan di sisi kiri adalah minus integral dari gaya tegangan kiri dikalikan peregangan kiri  $e^-$  yang bernilai sangat kecil. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Delta E_{P_{tegangan\,kiri}} = - \int_{e^-_{setimbang}}^{e^-_{setelah\,petikan}} F_{tegangan\,kiri}(e^-) d(e^-)$$

Dalam hal ini digunakan definisi gaya tegangan kiri  $F_{tegangan\,kiri} = -Ee^-$ . Akibatnya diperoleh energi potensial tegangan kiri:

$$E_{P_{tegangan\,kiri}} = \frac{1}{2} E \left( \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} + 1 \right)^2 \right)$$

#### Energi Potensial Tegangan Kanan

Dengan konsep berpikir yang sama dengan sebelumnya, maka formulasi energi potensial tegangan kanan  $E_{P_{tegangan\,kanan}}$

---

memperhatikan beberapa hal. *Pertama*, perubahan energi potensial tegangan kanan adalah selisih antara energi potensial tegangan kanan dengan energi potensial tegangan kanan pada saat setimbang, yakni:

$$\Delta E_{P_{\text{tegangan kanan}}} = E_{P_{\text{tegangan kanan}}} - E_{P_{\text{tegangan kanan setimbang}}}$$

Dalam hal ini besar energi potensial tegangan kanan pada saat setimbang (sebelum dikenai simpangan  $u$ ) bernilai nol, yakni  $E_{P_{\text{tegangan kanan setimbang}}} = 0$ . *Kedua* besar peregangan kanan  $e^+$  adalah seperti yang telah dihitung pada bagian sebelumnya dari section ini. Sementara itu peregangan kanan saat belum dikenai simpangan diasumsikan bernilai nol, yaitu  $e_{\text{setimbang}}^+ = 0$ . *Ketiga*, gaya tegangan kanan  $F_{\text{tegangan kanan}} = -Ee^+$ . *Keempat*, perubahan energi potensial tegangan kanan adalah minus integral gaya tegangan kanan terhadap perubahan besar peregangan kanannya, yaitu:

$$\Delta E_{P_{\text{tegangan kanan}}} = - \int_{e_{\text{setimbang}}^-}^{e_{\text{setelah petikan}}^-} F_{\text{tegangan kanan}}(e^+) d(e^+)$$

Berdasarkan hal-hal tersebut, maka dapat dinyatakan formula energi potensial tegangan kanan sebagai:

$$E_{P_{\text{tegangan kanan}}} = \frac{1}{2} E \left( \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1} - 1 \right)^2 \right)$$

### **Energi Potensial Tegangan Total**

Dengan nilai energi potensial tegangan kiri dan energi potensial tegangan kanan yang telah diperoleh, dapat dihitung energi potensial tegangan total yang disebut energi potensial

---

tegangan saja. Energi ini didefinisikan merupakan jumlahan dari energi potensial tegangan kiri dan energi potensial tegangan kanan. Maka diperoleh formula energi potensial sebagai berikut:

$$E_{P_{\text{tegangan}}} = 2E \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.3)$$

### 3. Enengi Potensial gesek

Energi potensial gesek ( $E_{P_{\text{gesek}}}$ ) muncul karena adanya gaya gesek antara dawai dengan udara ketika terjadi vibrasi sesaat setelah simpangan dilepaskan. Analisis energi potensial gesek ini dimulai dengan mengidentifikasi gaya gesek yang bekerja selama vibrasi terjadi. Analisis energi potensial gesek dilakukan dengan mempertimbangkan beberapa hal berikut:

- Pertama, gaya gesek ( $E_{P_{\text{gesek}}}$ ) timbul karena adanya  $F_{\text{gesek}}$  yang terjadi antara dawai dengan udara.
- Kedua, perubahan energi potensial gesek  $\Delta E_{P_{\text{gesek}}}$  didefinisikan sebagai minus integral dari  $F_{\text{gesek}}$  yang bekerja pada dawai, yaitu:

$$\Delta E_{P_{\text{gesek}}} = - \int_{u_{\text{setimbang}}}^{u_{\text{setelah petikan}}} F_G(u) d(u)$$

- Gaya gesek  $F_{\text{gesek}}$  dawai dengan udara didefinisikan dengan mengikuti hukum Stokes, yaitu:

$$F_{\text{gesek}} = k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.4)$$

dengan  $\frac{\partial u}{\partial t}$  adalah kecepatan dawai bervibrasi,  $k_b$  adalah

---

koefisien gesek, sementara itu  $\eta$  adalah koefisien kekentalan udara yang dapat disimulasikan untuk beberapa nilai dalam rentang yang didefinisikan (Keofisian kekentalan fluida dapat dilihat kembali pada Tabel 2.2 di atas).

- Ketiga, gaya gesek ( $Ep_{gesek}$ ) melibatkan besar simpangan yang terbentuk pada posisi setimbang, yakni  $u_{setimbang} = 0$ . Sementara itu besar simpangan yang terbentuk setelah petikan diasumsikan sebesar  $u$ , yakni  $u_{setelah\ petikan} = u$ . Di lain pihak, besar energi potensial gesek yang terjadi pada posisi setimbang diasumsikan bernilai nol, yakni  $Ep_{gesek\ setimbang} = 0$ .
- Keempat, besar perubahan energi potensial gesek didefinisikan sebagai selisih dari energi potensial gesek dengan energi potensial gesek pada saat setimbang, yaitu:

$$\Delta Ep_{gesek} = Ep_{gesek} - Ep_{gesek\ setimbang}$$

Berdasarkan gaya gesek dan perubahan energi potensial gesek di atas, maka dapat diperoleh formulasi energi potensial gesek sebagai berikut:

$$Ep_{gesek} = k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \quad (2.5)$$

Berdasarkan energi potensial pegas pada persamaan (2.2), energi potensial tegangan dawai pada persamaan (2.3) dan energi potensial gesek pada persamaan (2.5), maka dapat diperoleh  $Ep_{model}$  yang merupakan jumlahan energi

---

potensial-energi potensial, yaitu:

$$Ep_{model} = \left( \frac{1}{2}k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \quad (2.6)$$

$$+ \left( -k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right) \quad (2.7)$$

#### 2.4.6 Identifikasi Energi Kinetik

Tahap selanjutnya dari langkah pemodelan vibrasi dawai alat musik petik adalah memeriksa energi kinetik  $E_k$ . Pada fenomena gerak dawai yang terjadi setelah simpangan atau petikan dilepaskan, maka terjadi fenomena vibrasi, artinya energi kinetik berlaku pada kasus ini. Secara umum berdasarkan teori relativitas, energi kinetik didefinisikan sebagai:

$$Ek = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.8)$$

Dimana  $v$  adalah kecepatan vibrasi dawai, yang dapat dinotasikan sebagai  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Dalam hal ini  $m$  adalah massa dawai, yakni:

$$m = \rho l \quad (2.9)$$

Dengan demikian energi kinetik model dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$Ek_{model} = \frac{1}{2}\rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2.10)$$

#### 2.4.7 Konstruksi Persamaan Lagrange

Selanjutnya memformulasikan persamaan Lagrange, yakni selisih antara energi kinetik model pada persamaan (2.10) dan

---

energi potensial pada persamaan (2.6). Berdasarkan hal tersebut, maka persamaan Lagrange model vibrasi dawai dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \\ & + k_b \eta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dengan mempertimbangkan kembali persamaan (2.11), maka langkah pemodelan dilanjutkan pada:

1. menurunkan persamaan Lagrange terhadap simpangan  $u$
2. menurunkan persamaan Lagrange terhadap gradien simpangan  $\frac{\partial u}{\partial x}$
3. menurunkan persamaan Lagrange terhadap kecepatan  $\frac{\partial u}{\partial t}$

### Turunan Persamaan Lagrange

Dengan memperhatikan formula persamaan Euler-Lagrange yang telah didefinisikan sebelumnya pada, persamaan (2.1), yakni:

$$\frac{dL}{du} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right)$$

serta mempertimbangkan persamaan Lagrange pada (2.11) maka dapat dilakukan beberapa step langkah perhitungan menuju model matematika yang dimaksud. Langkah-langkah ini adalah sebagai berikut: *Pertama*, menghitung turunan persamaan Lagrange terhadap  $u$  untuk mendapatkan  $\frac{dL}{du}$ ,

---

sehingga diperoleh:

$$\frac{dL}{du} = k_b \eta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.12)$$

*Kedua*, menurunkan persamaan Lagrange (2.11) terhadap  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} = - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.13)$$

selanjutnya menurunkan persamaan (2.13) terhadap  $x$ , maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) = - \left( \frac{1}{2} k_p l^2 + 2E \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

*Ketiga*, menurunkan persamaan Lagrange (2.11) terhadap  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} = \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial t} + k_b \eta u \right) \quad (2.15)$$

selanjutnya menurunkan persamaan (2.15) terhadap  $t$ , maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) = \rho l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_b \eta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.16)$$

Substitusi persamaan (2.12), (2.14), dan (2.16) pada persamaan Lagrange (2.1) maka diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l^2}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{E}{\rho l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.17)$$

---

Dengan mengingat kembali bahwa modulus elastisitas  $E$  per massa jenis dawai dinyatakan sebagai  $E = \rho c^2$  dengan  $c$  menyatakan kecepatan elastisitas dawai, maka persamaan (2.17) menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{k_p l}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{c^2}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.18)$$

Selanjutnya dengan mempertimbangkan konstanta kelenturan dawai  $k_p$ , persamaan (2.18) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.19)$$

Pada fenomena alat musik petik, maka terdapat pengaturan tertentu agar vibrasi tidak berlangsung selama-lamanya. Oleh karena itu penambahan faktor peredam diperlukan pada persamaan (2.19) di atas. Faktor peredam ini adalah penambahan gaya peredam  $F_d$  yang bekerja pada dawai secara dinamis, didefinisikan sebagai:

$$F_d = k_d \frac{\partial u}{\partial t}$$

dengan  $k_d$  sebagai konstanta redaman. Sehingga persamaan (2.19) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) merupakan model matematika yang menggambarkan gerak vibrasi dawai pada alat musik yang dipetik di tengah-tengah.

---

## 2.5 Uji Validasi Model

Untuk melihat sejauh mana model yang telah diformulasikan mencukupi dan mampu mendeskripsikan miniatur fenomena, maka perlu dilakukan uji validasi model. Selanjutnya, model matematika yang diformulasikan dikatakan valid jika grafik hasil simulasi yang dihasilkan cukup realistik menjelaskan fenomena yang dimodelkan. Oleh karena itu, dalam uji validasi model dilakukan dengan beberapa alternatif pendekatan, yakni:

### 1. Pendekatan langsung.

Metode pendekatan ini dilaksanakan dengan membandingkan profil grafik model matematika yang telah dikonstruksi terhadap profil grafik yang direkam dari kejadian sesungguhnya. Pada model vibrasi dawai alat musik petik misalnya, vibrasi dawai direkam sehingga dapat diamati pada layar monitor. Selanjutnya profil grafik model matematika yang telah dibangun akan dibandingkan dengan profil grafik kejadian sesungguhnya.

### 2. Pendekatan tidak langsung.

Jika sangat sulit diperoleh grafik dari rekaman kejadian sesungguhnya, maka pendekatan tidak langsung dapat dilakukan. Cara ini dilakukan melalui analisis profil grafik solusi analitik dari model matematika yang telah dibangun, yang melibatkan beberapa simulasi dari parameter-parameter yang terlibat, maka tingkat realistik atau tidaknya grafik dalam memperkirakan kejadian sesungguhnya dapat dianalisis. Selanjutnya kesimpulan model atau tindakan rekonstruksi model

---

dipertimbangkan dan dianalisis ulang.

Pada akhirnya interpretasi profil grafik dari model matematika yang telah diformulasikan, menjadi ukuran tingkat realistik atau tidaknya model matematika tersebut. Artinya, tahap analisis uji validasi model sampai diperoleh profil grafik harus mampu menjelaskan secara akurat model matematika dari suatu masalah. Jika grafik model matematika yang dihasilkan dari beberapa simulasi sudah cukup baik dalam menjelaskan dan mendekati fenomena, maka model dikatakan cukup valid. Namun, sebaliknya jika model matematika melalui profil grafiknya belum mampu menjelaskan fenomena atau bahkan memuat kejanggalan, maka diperlukan langkah formulasi ulang model matematika, yakni dilakukan reka ulang model dengan menganalisis kembali apakah ada prosedur atau tahapan pemodelan yang terlewatkan, menganalisis ulang asumsi yang digunakan, cek ulang apakah ada hukum-hukum yang belum dipertimbangkan dengan seksama sampai pada menganalisis ulang aljabar matematika yang *missing* dan seterusnya. Pada kasus pemodelan alat musik petik misalnya, dianalisis pula apakah ada vektor-vektor gaya yang perlu diperbaiki, langkah penurunan gaya, energi serta prosedur teknis yang mungkin terlewatkan dan seterusnya. Proses pemodelan ini dilakukan secara berulang, melibatkan analisis uji validasi yang berulang pula sampai diperoleh model matematika yang cukup akurat menjelaskan fenomena yang dimaksud. Pada buku ini, disajikan gambaran pendekatan tidak langsung untuk uji validasi model matematika melalui analisis profil grafik solusi analitik dan simulasinya untuk berbagai kondisi.

---

### 2.5.1 Solusi Analitik dan Interpretasi Profil Grafik

Model matematika pada vibrasi dawai alat musik petik pada buku ini telah diformulasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial orde dua, yakni pada persamaan (2.20). Seperti telah dipaparkan sebelumnya bahwa untuk melihat tingkat realistik atau tidaknya model matematika dapat ditempuh dengan menganalisis profil grafik solusi analitiknya serta interpretasinya. Oleh karena itu pada bagian ini diuraikan langkah-langkah penyelesaian secara analitik dari model. Pendekatan ini dilakukan dengan harapan pembaca dapat mengikuti langkah solusi analitik menggunakan salah satu metode matematika yang sering digunakan. Solusi analitik pada masalah model matematika vibrasi dawai alat musik petik ini adalah membangkitkan grafik simpangan  $u(x, t)$  sebagai variabel tak bebas model.

Penyelesaian analitik pada bagian ini dilaksanakan dengan mengaplikasikan metode pemisahan variabel. Metode ini dapat diaplikasikan pada persamaan diferensial parsial, sehingga terbentuk sistem persamaan diferensial biasa. Dengan mengingat kembali persamaan (2.20) yakni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

yang selanjutnya diberikan dua nilai awal, yakni:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \quad (2.21)$$

dan kondisi batas:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{dan} \quad u(l, t) = 0, \quad (2.22)$$

---

maka model matematika vibrasi dawai alat musik petik di atas dapat dianalisis solusi analitiknya. Parameter-parameter yang terlibat di dalam model dianggap sebagai konstanta yang secara dapat dipilih sebarang berdasarkan kaidah teoritiknya.

Secara teknis, analisis solusi analitik model dilakukan dengan memisalkan variabel tak bebas yakni simpangan  $u(x,t)$  sebagai perkalian dari dua variabel tak bebasnya, yakni variabel ruang  $X(x)$  dan variabel waktu  $T(t)$ , yang dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (2.23)$$

Dari definisi pada persamaan (2.23) di atas itulah, maka dapat dituliskan semua ekspresi turunan parsial yang terlibat pada model matematika, yang secara berturut-turut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= X'(x)T(t) \text{ sehingga } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= X(x)\dot{T}(t) \text{ sehingga } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\ddot{T}(t) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan semua ekspresi turunan parsial yang telah diperoleh di atas ke dalam persamaan (2.20), maka model matematika vibrasi alat musik petik dapat dituliskan dalam bentuk baru sebagai berikut:

$$X(x)\ddot{T}(x) - \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)X''(x)T(t) + k_d(X(x)\dot{T}(t)) = 0 \quad (2.24)$$

Berdasarkan bentuk persamaan (2.24) inilah solusi analitik model matematika yang telah diformulasikan dapat dianalisis menggunakan kondisi awal dan kondisi batas yang telah

---

diberikan. Selanjutnya dengan teknik pemisahan variabel, maka persamaan (2.24) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + \frac{k_d}{\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \quad (2.25)$$

Persamaan (2.25) sudah terpisah secara variabel di masing-masing ruasnya. Selanjutnya setiap ruas pada persamaan (2.25) diselesaikan satu persatu.

Jika dimisalkan ruas kanan persamaan (2.25) sebagai  $k$ , maka dapat dinyatakan dua persamaan diferensial biasa yang berturut-turut sebagai berikut:

1. Persamaan Diferensial Biasa jenis pertama:

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) hanya mengandung variabel bebas ruang  $X(x)$  dan turunannya. Penyelesaian persamaan (2.26) diarahkan untuk mendapatkan solusi  $X(x)$  dan nilai  $k \in \mathbb{R}$ . yang besesuaian. Nilai  $k$  yang telah diperoleh ini selanjutnya akan disubstitusikan pada persamaan diferensial jenis kedua.

2. Persamaan Diferensial Biasa jenis kedua:

$$\ddot{T}(t) + k_d \dot{T}(t) - k \left( \frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l} \right) T(t) = 0 \quad (2.27)$$

Dimana nilai  $k$  pada persamaan (2.27) menggunakan nilai yang telah dihitung sebelumnya pada persamaan (2.26).

---

Dari kedua persamaan diferensial biasa di atas, maka dapat dimulai langkah solusi analitik. *Langkah Pertama*, adalah menyelesaian persamaan (2.26) dengan meninjau semua nilai  $k$  sebagai bilangan real mana saja yang mungkin. Nilai  $k$  yang memenuhi persamaan (2.26) adalah pada tiga kondisi, yakni  $\forall k > 0$ ,  $k = 0$ , dan  $\forall k < 0$ . Analisis ketiga kondisi diuraikan sebagai berikut:

- Kondisi pertama ketika  $\forall k > 0$ .

Pada kondisi ini nilai  $k > 0$  disubstitusi pada persamaan karakteristik yang bersesuaian untuk persamaan (2.26), sehingga dapat dinyatakan:

$$m^2 - k^2 = 0, \quad (2.28)$$

sehingga berlaku  $m^2 = k^2$ , yang menghasilkan  $m_{1,2} = \pm k$ , sebagai akar-akar persamaan karakteristik untuk (2.28). Maka disimpulkan  $m_1 \neq m_2$ . Hal ini berarti bahwa  $m_1$  dan  $m_2$  keduanya adalah akar-akar real dan berbeda. Sehingga dapat dinyatakan bahwa pada kondisi  $k > 0$  diperoleh solusi  $X_1(x) = e^{m_1 x}$  dan  $X_2(x) = e^{m_2 x}$  yang keduanya secara berturut-turut dibangun oleh akar-akar bilangan *real* dan berbeda tersebut. Perhatikan juga bahwa  $X_1(x) = e^{m_1 x}$  dan  $X_2(x) = e^{m_2 x}$  keduanya bersifat solusi yang bebas linier dari persamaan diferensial (2.26). Selanjutnya dapat dinyatakan solusi umum yang berbentuk:

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} \quad (2.29)$$

Dengan menggunakan kondisi batas pertama seperti

---

yang telah disajikan pada persamaan (2.22), didapatkan

$$X(0) = C_1 e^{k \cdot 0} + C_2 e^{-k \cdot 0} = 0$$

sehingga diperoleh

$$C_1 = -C_2 \quad (2.30)$$

Akibatnya, solusi untuk persamaan (2.29) adalah:

$$X(x) = -C_2 e^{kx} + C_2 e^{-kx} \quad (2.31)$$

Selanjutnya dengan menggunakan kondisi batas kedua pada persamaan (2.22) didapatkan

$$X(l) = -C_2 e^{kl} + C_2 e^{-kl} = 0 \quad (2.32)$$

yakni

$$C_2 (-e^{kl} + e^{-kl}) = 0 \quad (2.33)$$

Jika dan hanya jika setidaknya salah satu  $C_2 = 0$  atau  $-e^{kl} + e^{-kl} = 0$ . Jika  $C_2 = 0$ , maka  $C_1 = 0$ , sehingga solusi khusus (2.29) dari kasus I adalah

$$X(x) \equiv 0$$

Sehingga solusi dari (2.5.1) yang didapat

$$u(x, t) = 0 \cdot T(t) \equiv 0$$

Yang berarti tidak ada solusi nontrivial untuk  $u(x, t)$ . Artinya tidak mungkin dipilih  $C_2 = 0$ . Berdasarkan hal

---

ini maka haruslah dipilih:

$$-e^{kl} + e^{-kl} = 0 \quad (2.34)$$

Perhatikan persamaan (2.34) di atas; dalam hal ini tidak mungkin panjang dawai  $l$  bernilai nol, sementara itu  $k$  bernilai positif. Akibatnya, tidak mungkin terjadi  $-e^{kl} + e^{-kl} = 0$ . Dari sini, maka saat  $-e^{kl} + e^{-kl} = 0$  juga tidak diperoleh solusi nontrivial untuk  $X(x)$ . Maka dapat disimpulkan  $\forall k > 0$  gagal didapatkan solusi untuk  $X(x)$  yang pada akhirnya berarti tidak ada solusi nontrivial untuk  $u(x,t)$ . Sehingga perlu ditinjau kondisi kedua yang berlaku ketika  $k = 0$  sebagai berikut.

- Kondisi kedua ketika  $k = 0$ .

Persamaan karakteristik yang bersesuaian untuk persamaan (2.26) dengan  $k = 0$  adalah:

$$m^2 = 0 \quad (2.35)$$

Berdasarkan persamaan (2.35) di atas, diperoleh akar-akar real dan kembar, yakni  $m_1 = m_2 = 0$ , maka solusi umumnya adalah

$$X(x) = C_1 + xC_2 \quad (2.36)$$

Dengan menggunakan kondisi batas pertama yang disajikan pada persamaan (2.22) maka didapatkan

$$C_1 = 0$$

Akibatnya solusi  $X(x)$  pada persamaan (2.26) menjadi

---

$X(x) = xC_2$ . Selanjutnya menggunakan kondisi batas kedua (2.22) diperoleh

$$X(l) = lC_2 = 0$$

Karena  $l \neq 0$ , haruslah

$$C_2 = 0.$$

Akibatnya diperoleh solusi  $X(x) = 0$ . Hal ini berakibat

$$u(x, t) = 0 \cdot T(t) \equiv 0 \quad (2.37)$$

Demikian pada kasus ini juga gagal mendapatkan solusi nontrivial untuk  $X(x)$ . Sehingga perlu diselidiki kondisi ketiga ketika  $\forall k < 0$  sebagai berikut:

- Kondisi ketiga ketika  $\forall k < 0$ .

Pada kondisi ketiga ini didapatkan persamaan karakteristiknya adalah:

$$m^2 + k^2 = 0 \quad (2.38)$$

Yakni  $m^2 = -k^2$ , dan  $m_{1,2} = \pm ik$ . Dapat dilihat bahwa akar-akarnya yang didapatkan berbentuk bilangan kompleks, sehingga solusi umumnya berbentuk

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (2.39)$$

Dengan menggunakan kondisi batas pertama (2.22) didapatkan

$$C_1 = 0$$

---

Selanjutnya menggunakan kondisi batas kedua didapatkan

$$C_2 \sin(kl) = 0 \quad (2.40)$$

Jika dan hanya jika setidaknya salah satu  $C_2 = 0$  atau  $\sin(kl) = 0$ . Jika dipilih  $C_2 = 0$ , maka solusi (2.39) adalah  $X(x) = 0$ , yang mengakibatkan

$$u(x, t) = 0, T(t) \equiv 0$$

Artinya tidak ada solusi nontrivial untuk  $X(x)$  pada kondisi ini; sehingga tidak mungkin dipilih  $C_2 = 0$ . Berdasarkan hal tersebut maka haruslah  $\sin(\lambda l) = 0$ . Artinya  $\lambda l = \arcsin(0)$  sehingga

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad \forall l \neq 0, n = 1, 2, \dots$$

Akhirnya diperoleh solusi  $X(x)$  (2.39) yang berbentuk

$$X_n(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (2.41)$$

- Persamaan Diferensial Biasa Jenis kedua

Pandang kembali persamaan diferensial biasa yang disajikan pada persamaan (2.27) yang memuat variabel  $T$  dan semua turunannya, serta menggunakan nilai  $k = \frac{n\pi}{l}$  yang telah dihitung pada bagian sebelumnya. Maka persamaan (2.27) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\ddot{T}(t) + k_d \dot{T}(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) T(t) = 0$$

---

Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan persamaan tersebut adalah:

$$p^2 + k_d p + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) = 0$$

sehingga dapat dihitung akar-akar  $p$  yang memenuhi adalah:

$$p_{1,2} = \frac{-k_d \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2.42)$$

dengan  $\Delta$  sebagai diskriminan yang dinyatakan sebagai:

$$\Delta = k_d^2 - 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$$

Selanjutnya dianalisis kondisi-kondisi yang memenuhi diskriminan  $\Delta$  di atas dalam beberapa kasus, sebagai berikut:

- **Kasus I:** Jika diasumsikan nilai  $\Delta > 0$

Pada kasus ini berakibat  $k_d^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$ .

Dalam hal karena nilai panjang dawai  $l > 0$ , dengan  $n = 1, 2, \dots$  dan  $\forall c$ , maka menghasilkan nilai positif pada diskriminan  $\Delta$ . Akibatnya, diperoleh akar-akar dari persamaan karakteristik (2.42) sebagai bilangan riil dan berbeda. Sehingga didapatkan solusi umum untuk persamaan (2.42) sebagai:

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t} \left( C_3 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + C_4 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} \right)$$

dirubah dalam bentuk fungsi hiperbolik sehingga

---

didapatkan alternatif bentuk solusi umum adalah

$$T_n(t) = e^{-\frac{k_d}{2}t} \left( C_3 \cosh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t \right) + C_4 \sinh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t \right) \right) \quad (2.43)$$

Berdasarkan (2.41) dan (2.43) maka solusi umum model matematika vibrasi dawai dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right) \left( A_n \cosh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t \right) + B_n \sinh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t \right) \right) \quad (2.44)$$

Dengan  $A_n = C_2 C_3$  dan  $B_n = C_2 C_4$ . Selanjutnya menentukan nilai  $A_n$  dengan kondisi awal pertama pada (2.21),

$$f(x) = A_n \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right).$$

Berdasarkan definisi deret Fourier sinus, diperoleh

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right) dx \quad (2.45)$$

dengan  $f(x)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{d}, & 0 \leq x \leq d \\ \frac{h(l-x)}{l-d}, & d \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.46)$$

$h$  adalah besar simpangan dawai yang terjadi pada suatu titik  $x$ . Sehingga berdasarkan persamaan (2.45) dan

---

(2.46), diperoleh nilai  $A_n$ .

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{l} \left( \int_0^d \frac{hx}{d} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_d^l \left(\frac{h(l-x)}{l-d}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \right) \\
 &= \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2 d(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Selanjutnya menggunakan kondisi awal kedua, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} &= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( A_n e^{-\frac{k_d}{2}t} \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left( B_n e^{-\frac{k_d}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right) \right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left( A_n \left( -\frac{k_d}{2} e^{-\frac{k_d}{2}t} \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-\frac{k_d}{2}t} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + B_n \left( -\frac{k_d}{2} e^{-\frac{k_d}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{-\frac{k_d}{2}t} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Substitusikan  $t = 0$  pada persamaan (2.48) dimana  $\frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t} = 0$  adalah sebagai berikut. Sehingga didapatkan

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left( A_n \left( -\frac{k_d}{2} \right) + B_n \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) = 0$$

---

Maka diperoleh nilai  $B_n$  dari kasus 1 adalah

$$B_n = \frac{k_d \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \sin \left( \frac{n\pi d}{l} \right)}{\sqrt{\Delta}} \quad (2.49)$$

Solusi khusus model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t} \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right) \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \\ &\quad \sin \left( \frac{n\pi d}{l} \right) \left( \cosh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_d}{\sqrt{\Delta}} \sinh \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t \right) \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Solusi (2.50) menginterpretasikan gerak dawai pada alat musik petik kasus pertama, dan dapat dinyatakan sebagai solusi yang sah jika solusi tersebut memenuhi kondisi awalnya. Kondisi awal vibrasi dawai alat musik petik adalah:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= A_n \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right); \quad 0 < x < l, \quad \text{dan} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Pertama dilakukan analisis terhadap solusi  $u(x,t)$  memenuhi kondisi awal yang pertama, yakni:  
 $u(x,0) = f(x)$

$$\begin{aligned} u_n(x,0) &= \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right) \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \sin \left( \frac{n\pi d}{l} \right) \\ &= A_n \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right) \end{aligned}$$

---


$$= f(x) \quad (2.51)$$

Kedua menganalisis solusi  $u(x,t)$  memenuhi kondisi awal yang kedua, yakni haruslah dipenuhi  $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$ , sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) &= \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \\ &\quad \left( -\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t} \cosh\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{k_d}{2}t} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right. \\ &\quad \left. \frac{k_d}{\sqrt{\Delta}} \left( -\frac{k_d}{2}e^{-\frac{k_d}{2}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\frac{k_d}{2}t} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Substitusi  $t = 0$  sehingga diperoleh  $\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0)$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_n(x,0) &= \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) \left( -\frac{k_d}{2} + \frac{k_d}{2} \right) \\ &= 0 \quad (2.52) \end{aligned}$$

Demikian berdasarkan (2.51) dan (2.52), maka solusi (2.50) dapat dinyatakan sebagai solusi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik kasus pertama yakni untuk  $\Delta > 0$  yang sah. Selanjutnya dianalisis untuk  $\Delta = 0$  sebagai kasus 2 berikut.

- 
- **Kasus II:** Jika diasumsikan nilai  $\Delta = 0$

Pada kasus ini, jika  $\Delta = 0$  maka artinya  $k_d^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$ . Dari sini dapat dihitung  $\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right) = \left(\frac{k_d l}{2n\pi}\right)^2$ . Selanjutnya dapat dinyatakan persamaan karakteristik yang bersesuaian sebagai berikut:

$$p^2 + k_d p + \frac{k_d^2}{4} = 0 \quad (2.53)$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.53) adalah bilangan real kembar, yakni:  $p_{1,2} = -\frac{k_d}{2}$ . Selanjutnya solusi umum dapat dinyatakan sebagai:

$$T_n(t) = C_3 e^{\frac{k_d}{2}t} + tC_4 e^{\frac{k_d}{2}t}, \quad (2.54)$$

sehingga solusi umum model matematika vibrasi dawai alat musik petik untuk kasus 2 adalah:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left( A_n e^{-\frac{k_d}{2}t} + B_n t e^{-\frac{k_d}{2}t} \right)$$

Dengan  $A_n = C_2 C_3$  dan  $B_n = C_2 C_4$ . Dengan cara analog pada kasus 1, maka diperoleh solusi khusus dari model matematika vibrasi dawai alat musik petik kasus 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left( \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \right. \\ &\quad \left. \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) e^{-\frac{k_d}{2}t} + \frac{k_d}{2} \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \right. \\ &\quad \left. \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right) t e^{-\frac{k_d}{2}t} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Selanjutnya seperti langkah uji keabsahan solusi pada kasus 1 di atas, maka pada kasus kedua ini solusi (2.55) yang menginterpretasikan gerak gelombang dawai pada alat musik petik saat  $\Delta = 0$  sah sebagai solusi dari model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik kasus 2.

- **Kasus III:** Jika diasumsikan nilai  $\Delta < 0$

Artinya  $k_d^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$ , maka akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah akar kompleks. Yakni

$$p_{1,2} = \frac{-k_d \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad (2.56)$$

Sehingga didapatkan solusi umum

$$T_n(t) = C_3 e^{\frac{-k_d+i\sqrt{|\Delta|}}{2}t} + C_4 e^{\frac{-k_d-i\sqrt{|\Delta|}}{2}t} \quad (2.57)$$

Persamaan (2.57) dilakukan transformasi kutub, sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_d}{2}t} \left( \frac{n\pi}{l}x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right) \\ &\quad \left( a_n \cos \left( \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t \right) + b_n \sin \left( \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t \right) \right) \end{aligned}$$

Dengan  $a_n = C_2(C_3 + C_4)$  dan  $b_n = C_2(C_3i - C_4i)$ . Selanjutnya nilai  $a_n$  dan  $b_n$  dicari dengan kondisi awal dengan cara yang analog dengan cara pada kasus 1 dan kasus 2, dan diperoleh solusi khusus sebagai berikut.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2hl^2}{n^2\pi^2d(l-d)} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{l}x \right)$$

---

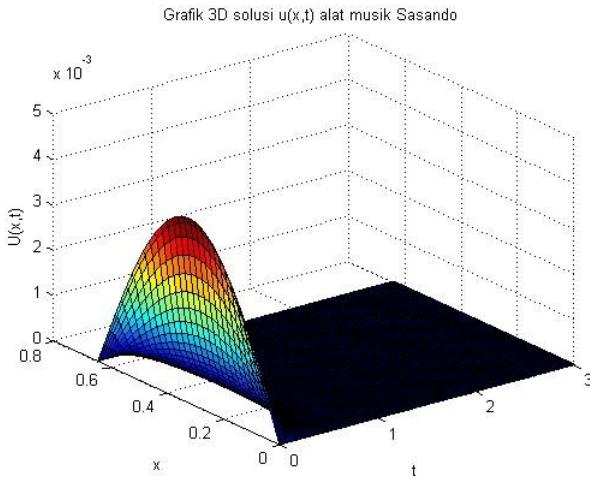

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right)e^{-\frac{k_d}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right)\right. \\ & \left. + \frac{k_d}{\sqrt{|\Delta|}}\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right)\right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Solusi (2.58) menginterpretasikan gerak vibrasi dawai pada alat musik petik. Selanjutnya pada kasus III dapat disimpulkan bahwa solusi bersifat *sahih* karena memenuhi kondisi awal yang diberikan.

## 2.6 Simulasi dan Analisis Profil Grafik

### 1. Analisis Grafik untuk Kasus I

Simulasi terhadap kasus I yang telah dianalisis di atas, dilakukan dengan memilih nilai parameter  $k_d = 2x$  dan panjang dawai  $l = 0.64$ , dimana  $k_d^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$ . Berikut ini grafik solusi kasus I yang dihasilkan dari simulasi dengan MATLAB dengan nilai parameter yang telah dipilih.

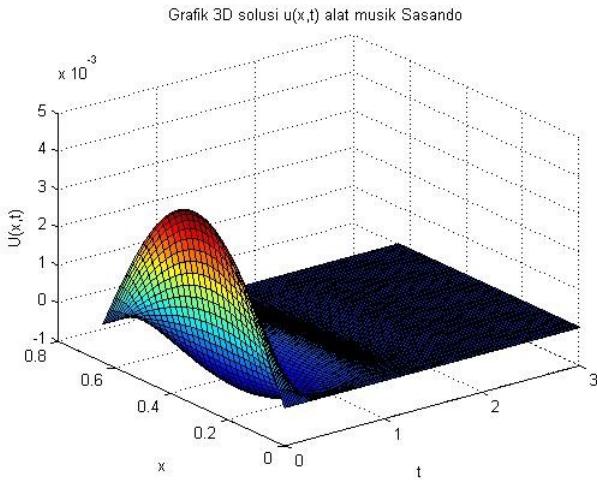


**Gambar 2.11.** Grafik Solusi Kasus I

Dari grafik hasil simulasi kasus I tersebut, gelombang yang terjadi dalam waktu 3 detik pertama adalah seperempat gelombang dan tidak mengalami vibrasi lagi setelahnya. Frekuensi gelombang pada kasus I ini adalah sebesar  $0.083 \text{ Hz}$ .

## 2. Analisis Grafik untuk Kasus II

Dipilih nilai parameter  $k_d = 6.283185310, c = 0.5$  dan  $l = 0.64$ , memenuhi kasus II, yaitu  $k_d^2 = 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$ . Gambar 2.12 di bawah ini merupakan grafik solusi kasus II dari simulasi MATLAB dengan nilai parameter yang sudah dipilih.

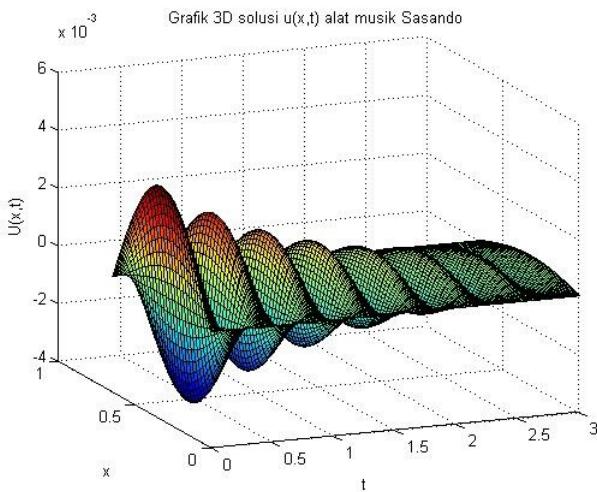


**Gambar 2.12.** Grafik Solusi Kasus II

Dari grafik solusi kasus II tersebut, terjadi 3.5 gelombang dalam waktu 3 detik pertama. Gelombang yang terbentuk yakni 4 puncak dan 3 lembah. Frekuensi gelombang dawai pada kasus II adalah  $1.67 \text{ Hz}$ . Selain itu, amplitudo gelombang yang terbentuk adalah sekitar  $10^{-25}$ .

### 3. Analisis Grafik untuk Kasus III

Dipilih nilai parameter  $k_d = 1.5, c = 1$  dan  $l = 0.64$  yang memenuhi kasus 3, yaitu  $k_d^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2}c^2 + 2\frac{c^2}{l}\right)$ . Gambar 2.13 menunjukkan grafik solusi yang dihasilkan MATLAB dari kasus III dengan nilai parameter yang memenuhi.



**Gambar 2.13.** Grafik Solusi Kasus III

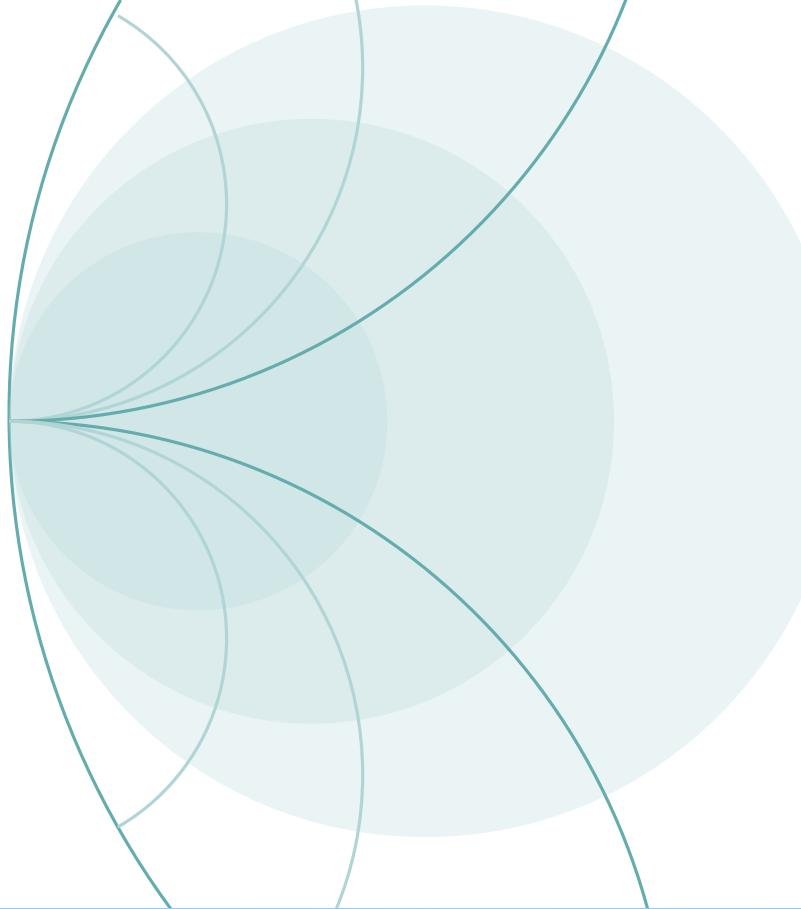
Dari hasil simulasi kasus III tersebut, amplitudo gelombang dawai berkurang seiring berjalannya waktu. Jika interval  $t$  diperbesar, amplitudo gelombang akan terus mengecil sampai berhenti dan kembali pada posisi setimbang. Visualisasi gelombang dawai alat musik dawai kasus III pada gambar 2.13, menunjukkan gerak dawai yang paling mendekati keadaan riil gelombang dawai alat musik petik. Dawai yang dipetik akan bervibrasi, dan besar amplitudo akan berkurang secara berkala sampai berhenti pada suatu batas waktu tertentu.

Sementara jika dilihat dari jumlah gelombang, terbentuk 7,5 gelombang dalam waktu 3 detik pertama, yakni 8 puncak dan 7 lembah. Frekuensi gelombang dawai kasus III adalah sebesar  $2.83 \text{ Hz}$ . Frekuensi gelombang pada kasus III ini merupakan frekuensi yang paling besar jika dibandingkan dengan kedua kasus

---

terdahulu.

# Bab 3 Model Gelombang Flying Fox



---

### **3.1 Gambaran Umum *Flying Fox***

*Flying fox* adalah salah satu variasi dari teknologi berbasis dawai. Teknologi ini memungkinkan massa benda dapat menggantung pada dawai dan meluncur bebas di sepanjang dawai karena pengaruh gravitasi dan kemiringan dawai tersebut. Oleh karena itu istilah luncur gantung atau *zip line* biasanya diatributkan pada teknologi *flying fox* ini. Dalam hal konstruksinya, dawai *flying fox* didesain dengan menagguhkan atau mengikatkan kedua sisi dawai pada ketinggian yang berbeda. Akibatnya dawai terbentang dengan kemiringan tertentu. Selanjutnya massa benda yang menggantung pada dawai dapat meluncur dari satu titik ke titik lain. Teknologi dawai seperti ini dapat dimanfaatkan untuk berbagai keperluan, misalnya pengiriman barang atau jasa dari satu lokasi ke lokasi lain yang memiliki medan berat atau bertebing sehingga tidak memungkinkan diakses melalui jalur darat. Contoh lainnya adalah dapat dimanfaatkannya teknologi ini pada pengecatan gedung-gedung pencakar. proses menaburkan pupuk atau penyemprotan desinfektan masal pada lahan-lahan perkebunan berkontur miring juga memungkinkan menggunakan teknologi *zip-line* seperti ini.

---

Sebagai wahana permainan edukasi keluarga dan wisata adrenalin dalam skala kecil, maka *flying fox* saat diminati saat ini.

*Flying fox* terdiri dari dawai yang dapat terbuat dari sling baja atau bahan lainnya yang berfungsi sebagai lintasan, cincin kait yang dikaitkan pada dawai yang umumnya terbuat dari *stainless steel* sehingga massa benda dapat menggantung dan meluncur bebas sepanjang dawai dari satu sisi ke sisi lainnya. Betapa menariknya wahana berbasis *zip-line* seperti *flying fox* ini, maka sangat menarik mempelajari fenomena tersebut secara ilmiah. Hal yang penting dipelajari adalah bagaimana pemahaman perilaku *flying fox* sehingga fenomenanya dapat diamati, diukur dan disimulasikan untuk berbagai keperluan. Oleh karena itu penting mempelajari salah satu beberapa kaidah berikut:

1. analisis kekuatan maksimal dan kelenturan dawai.
2. analisis lendutan maksimal yang diperkenankan pada dawai sesaat ketika dikenai massa benda yang menggantung sehingga harmonis dengan kekuatan maksimal dan kelenturan dawai.
3. analisis sudut maksimal yang terbentuk akibat lendutan yang terjadi.

Berdasarkan hal tersebut di atas, maka model matematika adalah salah satu cara yang dapat ditempuh untuk memahami masalah *flying fox* ini. Model matematika bertugas mentranslate fenomena *flying fox* ke dalam persamaan diferensial yang melibatkan analisis yang cermat dan langkah yang sistematis. Selanjutnya model yang telah diformulasikan

---

akan mampu memberikan ruang untuk komputasi dapat melakukan interpretasi secara grafik.

Dalam melakukan formulasi model matematika vibrasi dawai *flying fox*, harus memperhatikan dengan seksama kejadian meluncurnya benda pada dawai flying fox. Sesaat ketika dawai dikenai massa, maka dawai akan mulur dan tegang. Pada kondisi benda bermassa meluncur sepanjang dawai, maka juga terjadi gesekan baik gesekan antara benda bermassa dengan permukaan dawai, gesekan antara benda bermassa dengan udara, dan gesekan dawai dengan udara. Berdasarkan hal tersebut, maka perlu mendasarkan kaidah pemodelan pada beberapa hukum fisika yang secara langsung terlibat dan mendasari fakta ini. Oleh karena itu, pemodelan kasus *flying fox* pada buku ini mempertimbangkan hal-hal berikut:

1. Mengidentifikasi hukum-hukum fisika mana yang berperan pada masalah yang akan dimodelkan.
2. Mengidentifikasi semua parameter yang mempengaruhi secara signifikan pada masalah yang akan dimodelkan.
3. Menganalisis dengan seksama konstruksi gaya-gaya yang terlibat pada masalah.
4. Menghitung energi yang bekerja pada masalah yang dimodelkan. Energi yang berperan adalah energi potensial  $EP$  dari setiap gaya yang bekerja, energi potensial total model  $EP_{total}$ , dan energi kinetik  $EK$ .
5. Menyusun persamaan Lagrangian beserta turunannya. Turunan dari persamaan Lagrangian memperhatikan pada arah pertanyaan pemodelan yang ingin diinterpretasi.

---

Pertama, mengidentifikasi hukum-hukum fisika dari fenomena yang dihadapi. Terlibatnya hukum-hukum fisika dapat dipandang dari detail kondisi untuk masalah yang dihadapi. Pada masalah gelombang pada dawai *flying fox*, maka hukum I Newton, hukum II Newton dan hukum III Newton terlibat. Hal dikarenakan terjadi fenomena gerak pada dawai sesaat setelah benda bermassa meluncur dari satu sisi ke sisi lainnya. Secara teoritis, hukum I Newton berlaku jika benda yang menggantung pada dawai meluncur dengan kecepatan konstan, sehingga resultan gayanya sama dengan nol. Hukum II Newton berlaku jika terjadi perubahan kecepatan benda ketika meluncur pada dawai sehingga resultan gayanya sama dengan perkalian massa benda dengan percepatan. Sedangkan hukum III Newton berlaku ketika benda yang digantung pada dawai *flying fox* memberikan gaya aksi terhadap dawai, sehingga dawai memberikan gaya reaksi yang besarnya sama dengan gaya aksi dari benda. Dengan demikian dawai *flying fox* cenderung mempertahankan posisinya sehingga dawai tersebut tidak putus (Rosyid, dkk, 2015). Sementara itu hukum Stokes terlibat karena terjadi fenomena gesekan; baik gesekan antara permukaan benda bermassa dengan dawai, gesekan antara dawai dengan udara, dan gesekan antara benda bermassa dengan udara. Jika melibatkan gesekan dengan fluida yang dalam hal ini adalah udara, maka kekentalan udara juga ikut mempengaruhi besar kecilnya gesekan. Selanjutnya, hukum Hooke karena terjadi tegangan dan regangan dawai. Dawai dapat bersifat elastis atau plastis bergantung pada kemampuan dawai kembali ke posisi kesetimbangan saat diberi gaya tarik oleh benda bermassa yang menggantung pada dawai.

---

*Kedua*, mengidentifikasi semua parameter dari masalah yang akan dimodelkan. Parameter yang secara signifikan memberikan kontribusi terjadinya vibrasi dawai *flying fox*, antara lain (Halliday, dkk, 2010):

1. Panjang dawai, yang dinotasikan sebagai  $l$  dan didesain memiliki kemiringan tertentu.
2. Konstanta pegas, dinotasikan dalam  $k$  yang mempengaruhi besar perpanjangan/kemuluran dawai dan gaya pegas.
3. Koefisien gaya gesek, dinotasikan dalam  $\mu_k$  sebagai ukuran kekasaran permukaan dawai dan sling baja. Besaran ini memberikan ukuran gesekan pada dawai saat benda meluncur.
4. Massa benda yang menggantung sebagai  $m_b$  dan massa dawai disimbolkan sebagai  $m_d$ . Nilai  $m_b$  dan  $m_d$  diatur sedemikian sehingga lendutan alamiah pada dawai dapat terjadi.

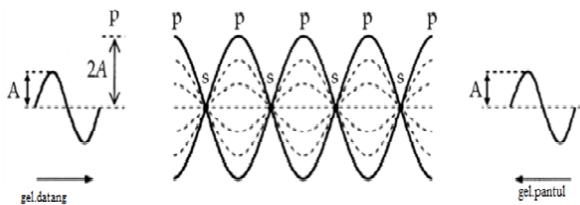
*Ketiga*, menganalisis semua gaya yang terlibat dalam masalah. Analisis gaya-gaya yang terlibat dilakukan dengan menganalisa masalah dengan seksama, mengidentifikasi gejala-gejala yang mungkin terjadi pada masalah dan melakukan sketsa gaya pada objek yang diteliti dengan detail. Pada kasus *flying fox* misalnya, terjadi gaya berat sebagai akibat benda bermassa mendapat pengaruh oleh efek gravitasi bumi. Gaya gesek sebagai akibat langsung dari gejala gesekan yang terjadi antara dawai dengan benda bermassa, antara benda bermassa dengan udara, dan antara dawai dengan udara. Sekali lagi fenomena gesekan ini muncul saat benda

---

bermassa meluncur dari satu titik ke titik lainnya sampai mencapai ujung sisi dawai *flying fox*. Sementara itu gaya tegangan terjadi karena dawai yang mulur dan tegang sesaat ketika benda bermassa melintas pada dawai sehingga terbentuk simpangan/lendutan sebesar  $y(t)$  pada dawai dan sudut lendutan  $\theta(t)$ .

*Keempat*, menghitung semua energi yang bekerja pada masalah yang akan dimodelkan yang meliputi energi potensial total dan energi kinetik. energi potensial  $EP$  didefinisikan sebagai minus integral dari formula setiap gaya yang bekerja pada objek. Oleh karena itu analisis dari setiap gaya yang bekerja memerlukan langkah yang cermat dan teliti. Selanjutnya menyusun energi potensial total  $EP_{total}$  yang merupakan jumlahan dari semua energi potensial yang terjadi yang selanjutnya disebut energi potensial dari model. Tahap terakhir adalah memformulasikan energi kinetik  $EK$  yang terjadi pada dawai *flying fox* serta persamaan Lagrangian.

Gelombang yang terjadi pada dawai *flying fox* termasuk gelombang stationer yang merupakan perpaduan antara dua gelombang yang memiliki panjang gelombang, amplitudo, dan frekuensi yang sama, namun berlawanan arah. Akibatnya, amplitudo gelombang stationer selalu berubah-ubah (Saripudin, 2009). Secara matematis, simpangan gelombang dapat dituliskan sebagai  $y_s = y_1 + y_2$ . Dalam hal ini  $y_s$  adalah gelombang stationer,  $y_1$  adalah simpangan pertama dan  $y_2$  adalah simpangan kedua. Gambar di bawah ini mendeskripsikan profil gelombang stationer yang dimaksud:



**Gambar 3.1.** Gelombang Stationer

## 3.2 Identifikasi Hukum-Hukum Fisika yang Bekerja

### 3.2.1 Hukum Newton

#### 1. Hukum 1 Newton

Menurut hukum 1 Newton, setiap benda memiliki kecenderungan untuk mempertahankan posisinya, baik diam atau bergerak (Rosyid, dkk, 2015). Jika benda tersebut awalnya diam maka akan cenderung mempertahankan posisi agar tetap diam. Begitu pula sebaliknya suatu benda akan cenderung bergerak dengan kecepataan tertentu jika pada awalnya bergerak. Kecenderungan menolak perubahan inilah yang disebut sebagai inersia atau hukum kelembaman. Dalam kasus dawai, ketika terdapat sebuah benda terletak di tengah dawai dalam keadaan diam atau berjalan dengan kecepatan konstan, maka gaya yang bekerja pada benda memenuhi hukum I Newton, yaitu resultan gayanya sama dengan nol. Pernyataan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$\Sigma F = 0 \quad (3.1)$$

Hukum I Newton berlaku jika kerangka acuan benda bersifat inersial, artinya benda tidak mengalami

---

perubahan massa akibat pergerakan tersebut, seperti halnya benda yang menggantung pada dawai *flying fox*. Oleh karena itu hukum I Newton berlaku pada benda yang menggantung pada dawai *flying fox* (Rosyid, dkk., 2015).

## 2. Hukum II Newton

Hukum II Newton mendasarkan pada besar perubahan kecepatan untuk benda bergerak. Perubahan kecepatan benda tiap satuan waktu disebut sebagai percepatan. Artinya, benda yang mengalami perubahan kecepatan gerak akan memiliki besar percepatan yang tidak sama dengan nol. Selain percepatan, terdapat perubahan momentum pada benda yang mengalami perubahan kecepatan. Momentum adalah perkalian kecepatan benda dengan massa inersianya (Rosyid, dkk, 2015). Dengan demikian, hukum II Newton tentang gerak menyatakan bahwa resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sebanding dengan perubahan momentum tiap satuan waktu. Secara umum, hukum II Newton dapat dituliskan sebagai:

$$\sum F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (3.2)$$

dengan  $\sum F$  adalah resultan gaya,  $\Delta p$  adalah perubahan momentum dan  $\Delta t$  adalah selang waktu. Selanjutnya dari persamaan (3.2), diperoleh

$$\sum F = m \times a \quad (3.3)$$

Hukum II Newton pada dawai *flying fox* berlaku jika

---

benda yang meluncur pada dawai mengalami perubahan kecepatan. Selain itu, dapat juga terjadi jika gerak benda tersebut dipengaruhi oleh gerakan angin. Gerakan angin tersebut menyebabkan gerak bolak-balik seperti pada pendulum (Rosyid, dkk, 2015).

### 3. Hukum III Newton.

Hukum III Newton berisi mengenai aksi satu benda yang menimbulkan reaksi dari benda lainnya. Maksudnya jika sebuah benda memberikan gaya aksi kepada benda lain, maka benda tersebut akan memberikan gaya reaksi dengan besar yang sama, namun dengan arah yang berlawanan (Rosyid, dkk, 2015). Hukum III Newton menunjukkan bahwa setiap gaya selalu memiliki pasangan. Secara matematis, hukum III Newton dapat dituliskan:

$$F_{aksi} = -F_{reaksi} \quad (3.4)$$

Tanda minus menunjukkan bahwa kedua gaya yakni gaya aksi dan gaya reaksi berlawanan arah (Rosyid, dkk, 2015). Hukum III Newton juga berlaku pada dawai *flying fox*, karena benda yang menggantung pada dawai *flying fox* menarik dawai ke bawah sehingga dawai memberikan gaya reaksi berupa tegangan tali dawai seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 berikut.



**Gambar 3.2.** Identifikasi Gaya-gaya pada Dawai *Flying Fox*

Dari Gambar 3.2, ketika terdapat sebuah benda menggantung pada dawai *flying fox*, gaya aksi yang terjadi adalah gaya tarikan tali pada kedua sisi kiri ( $F_1$ ) dan kanan ( $F_2$ ) beban. Akibat gaya tarikan ini, terjadi gaya tegangan tali sebagai bentuk reaksi yang arahnya berlawanan dengan gaya tarikan, yakni  $T_1$  dan  $T_2$ . Gaya tegangan ini harus tetap selaras dengan modulus elastisitas sehingga dawai tidak sampai putus meski digantungi massa (Rosyid, dkk., 2015).

### 3.2.2 Hukum Amontons

Hukum amontons berlaku jika terjadi potensi gesekan pada dua objek atau lebih. Pada kasus *flying fox*, dawai dan benda bermassa diasumsikan bergesekan karena kedua bahan saling berinteraksi. Secara teoritik, gaya gesek terjadi jika antara dua benda saling berinteraksi dengan disertai adanya gaya ikat antar molekul pada permukaan kedua benda yang menyebabkan munculnya fenomena gaya gesek. Kondisi inilah yang diasumsikan

---

terjadi pada dawai *flying fox* dan benda bermassa. Besar kecilnya gaya gesek bergantung pada seberapa kuat interaksi permukaan kedua benda. Jika besar interaksi ikatan antar molekul pada kedua permukaan benda terjadi dengan baik, maka gaya gesek semakin besar. begitu juga sebaliknya, interaksi antar molekul tidak terjadi dengan baik maka menyebabkan kecilnya gaya gesek yang terjadi. Bahkan jika kedua permukaan benda yang bersentuhan sangat licin sehingga tidak ada gaya ikat antar molekul, maka gaya gesek akan kecil kemungkinannya terjadi. Ukuran yang menyatakan gaya ikat antar molekul inilah yang dinyatakan sebagai koefisien gesek. Koefisien gesek bergantung pada jenis bahan dan kekasaran permukaan kedua benda yang bersentuhan (Rosyid, dkk, 2015). Pada dawai terdapat tiga macam gaya gesek, yaitu gaya gesek dawai dengan benda, gaya gesek dawai dengan fluida udara, dan gaya gesek benda bermassa dengan fluida udara. Khusus berkenaan dengan interaksi antar molekul benda dengan fluida udara maka berlaku hukum Stokes. Secara terperinci, kaidah hukum Stokes pada pemodelan kasus vibrasi dawai *flying fox* dibahas pada bagian berikutnya. Oleh karena itu pada bagian ini yang difokuskan pada hukum amontons, maka hanya terdapat satu koefisien gaya gesek, yaitu koefisien gaya gesek yang terjadi antara benda dengan dawai. Hukum Amontons terbagi menjadi dua yaitu:

- (a) Hukum I Amontons.

hukum ini menyatakan bahwa gaya gesek dawai

---

sebanding dengan gaya sentuhan normal. Koefisien gaya gesek dawai tidak bergantung pada luas permukaan yang bersentuhan dan gaya normal benda. Koefisien gaya gesek dawai mendekati tetapan yang bernilai selalu kurang dari satu.

- (b) Hukum II Amontons atau hukum Coulomb.

Hukum ini menyatakan bahwa koefisien gaya gesek dawai tidak bergantung pada kecepatan relatif saat dawai dan benda yang bersentuhan (Rosyid, dkk, 2015).

Koefisien gaya gesek dawai terbagi menjadi dua macam, yaitu koefisien gesek statis dawai  $\mu_s$  dan koefisien gesek kinetis dawai  $\mu_k$  (Rosyid, dkk, 2015). Koefisien gesek statis dawai merupakan perbandingan antara gaya gesek statis dawai dan gaya normal  $N$  yang dapat dituliskan sebagai:

$$\mu_s = \frac{f_s}{N} \quad (3.5)$$

dimana  $\mu_s$  adalah koefisien gesek statis,  $f_s$  adalah gaya gesek statis benda dengan dawai, dan  $N$  adalah gaya normal. Dengan demikian koefisien gesek statis tidak memiliki satuan. Gaya gesek statis pada dawai berlaku ketika benda berinteraksi dengan dawai dalam keadaan diam atau tidak bergerak (Young dan Friedman, 2002). Sama halnya dengan koefisien gesek statis, koefisien gesek kinetis dawai merupakan perbandingan gaya

---

gesek kinetis dawai dan gaya normal, dapat dituliskan:

$$\mu_k = \frac{f_k}{N} \quad (3.6)$$

dimana  $\mu_k$  adalah koefisien gesek kinetis,  $f_k$  adalah gaya gesek kinetis benda dengan dawai, dan  $N$  adalah gaya normal. Gaya gesek kinetis pada dawai berlaku ketika benda berinteraksi dengan dawai ketika terjadi perpindahan posisi benda dari posisi awal  $x_0$  (Young dan Friedman, 2002). Koefisien gaya gesek dari beberapa jenis benda dapat dilihat pada Tabel berikut:

**Tabel 3.1.** Koefisien Gesek

Bahan	Statis ( $\mu_s$ )	Kinetis ( $\mu_k$ )
Baja pada baja	0.74	0.57
Aluminium pada baja	0.61	0.47
Tembaga pada baja	0.53	0.36
Kuningan pada baja	0.51	0.44
Seng pada besi cor	0.85	0.21
Tembaga pada besi cor	1.05	0.29
Kaca pada kaca	0.94	0.40
Tembaga pada kaca	0.68	0.53
Teflon pada teflon	0.04	0.04
Teflon pada baja	0.04	0.04
Karet pada beton (kering)	1.0	0.8
Karet pada beton (basah)	0.30	0.25

---

### 3.2.3 Hukum Stokes

Jika suatu benda bergerak di dalam suatu zat alir berbentuk fluida, maka benda itu akan mengalami gaya hambat oleh zat alir tersebut. Ada dua kemungkinan jenis gaya hambat oleh zat alir, pertama, gaya gesekan karena zat alir yang kental (*viscous*) dengan permukaan benda. Kedua, gaya penggereman (*drag force*) oleh zat alir sehingga Hukum Stokes berlaku dalam hal ini. Kaidah hukum Stokes dapat diformulasikan sebagai:

$$F_s = k\eta v \quad (3.7)$$

dimana  $F_s$  gaya gesek antara fluida dengan benda,  $k$  konstanta yang mewakili bentuk benda,  $\eta$  kekentalan (viskositas) dinamis zat alir,  $v$  kecepatan relatif benda terhadap zat alir. Ketika benda meluncur pada suatu dawai, terjadi gaya gesek antara benda dengan udara. Udara berperan sebagai penghambat perpindahan benda sehingga terjadi perlambatan pada kecepatan benda saat meluncur (Arifudin, 2007). Daftar kekentalan dari beberapa zat alir dapat dilihat pada Tabel berikut:

**Tabel 3.2.** Kekentalan Zat Alir

No	Bahan	Kekentalan Dinamik ( $Ns/m^2$ )
1	Air	0.010
2	Udara	0.000018
3	Alkohol	0.018
4	Gliserin	8.5
5	Air Raksa	0.0156

---

### 3.2.4 Hukum Hooke

Secara umum, gaya dari suatu pegas  $F_s$  sebanding dengan perpindahan  $d$  ujung bebas pegas dari posisinya (ketika pegas dalam keadaan relaks) (Halliday, dkk, 2010). Gaya pegas bekerja untuk memulihkan pegas ke keadaan relaks, sehingga biasa dikenal sebagai gaya pemulih dan dinyatakan sebagai:

$$F = kx \quad (3.8)$$

dengan  $F$  gaya pegas dawai,  $k$  konstanta pegas atau ukuran kekakuan pegas,  $x$  pertambahan panjang dawai. Tanda minus pada persamaan di atas mengindikasikan bahwa gaya pemulih selalu berlawanan arah dengan perpindahan (Bueche dan Hecht, 2006). Pada kasus dawai *flying fox* yang dikenai beban bermassa di tengah-tengahnya, maka dawai dapat dipartisi menjadi dua sisi pegas, yaitu dawai pada sisi kiri dan dawai pada sisi kanan (Bueche dan Hecht, 2006). Pada sisi kiri dawai dapat dituliskan sebagai:

$$F^- = -kx^- \quad (3.9)$$

dimana  $F^-$  gaya pegas yang bekerja pada sisi kiri dawai,  $k$  konstanta pegas dawai,  $x^-$  pertambahan panjang dawai di sisi kiri. Sedangkan gaya pegas yang terjadi di sisi kanan dawai dapat dituliskan sebagai:

$$F^+ = -kx^+ \quad (3.10)$$

---

dimana  $F^+$  gaya pegas yang bekerja pada sisi kanan dawai,  $k$  konstanta pegas dawai,  $x^+$  pertambahan panjang dawai di sisi kanan. Dikarenakan dawai ditarik tepat di bagian tengahnya, maka besar pertambahan panjang di sisi kiri dawai sama dengan pertambahan panjang di sisi kanan dawai dan dimisalkan sama dengan  $x$  atau dapat dituliskan:

$$x^+ = x^- = x \quad (3.11)$$

Dengan demikian, total gaya pegas yang terjadi pada dawai yang ditarik pada bagian tengahnya sama dengan jumlah gaya pegas di sebelah kiri dan gaya pegas di sebelah kanan. Hal ini dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} F &= F^+ + F^- \\ &= kx^+ + kx^- \\ &= kx + kx \\ &= 2kx \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.3 Asumsi yang Berlaku

#### 3.3.1 Amplitudo

Amplitudo  $A$  adalah jarak maksimum dawai dari posisi setimbangnya. Objek dawai dalam gerak harmonik sederhana berosilasi antara posisi setimbang ke arah bawah dinyatakan sebagai  $y = -A$  dan antara posisi setimbang ke arah atas  $y = +A$  Serway dan Vuille, 2012). Dikarenakan besar amplitudo berkaitan dengan

---

jarak, maka satuan yang digunakan adalah meter.

### 3.3.2 Frekuensi

Frekuensi  $f$  adalah jumlah kompresi yang melewati suatu titik dawai tertentu setiap detiknya (Giancoli, 2014). Serway dan Vuille (2012) mendefinisikan frekuensi sebagai jumlah siklus lengkap atau banyaknya getaran yang terjadi pada dawai per satuan waktu, dan berbanding terbalik dengan periode  $T$  dapat dituliskan:

$$f = \frac{1}{T}$$

### 3.3.3 Modulus Elastisitas dan Konstanta Pegas Dawai

Modulus elastisitas dawai  $E$  adalah besaran yang menggambarkan tingkat elastisitas bahan dawai. Modulus elastisitas pada dawai didefinisikan sebagai perbandingan tegangan dan regangan pada dawai (Kanginan, 2006). Jika semakin besar modulus elastisitas dawai, maka semakin besar pula tegangan yang diperlukan untuk regangan dawai tersebut. Secara matematis, modulus elastisitas dapat dituliskan:

$$E = \frac{\sigma}{e} \quad (3.13)$$

Dengan  $E$  adalah modulus elastisitas,  $\sigma$  tegangan dawai, dan  $e$  regangan dawai. Selanjutnya Regangan  $e$  dawai

---

dapat diperoleh melalui rumus:

$$E = \frac{\Delta X}{X} \quad (3.14)$$

dengan  $\Delta X$  adalah besar pertambahan panjang dawai dan  $X$  adalah panjang awal dawai. Tegangan dawai berkaitan dengan modulus elastisitas dawai yang dapat terbuat dari beberapa bahan dan modulus elastisitas ini dapat dilihat pada:

**Tabel 3.3.** Modulus Elastisitas Dawai dari Beberapa Bahan

Bahan	Modulus Elastisitas ( $E$ ) dalam satuan ( $N/m^2$ )
Besi	$100 \times 10^9$
Baja	$200 \times 10^9$
Perunggu	$100 \times 10^9$
Aluminium	$70 \times 10^9$
Beton	$20 \times 10^9$
Batu Bara	$14 \times 10^9$
Marmer	$50 \times 10^9$
Granit	$45 \times 10^9$
Kayu (Pinus)	$10 \times 10^9$
Nilon	$5 \times 10^9$
Tulang muda	$15 \times 10^9$

Selanjutnya modulus elastisitas juga berperan dalam menentukan Konstanta pegas. Konstanta pegas dapat

---

dicari dengan menggunakan rumus:

$$k = \frac{EA}{l} \quad (3.15)$$

dengan  $k$  adalah konstanta pegas dawai.  $E$  adalah modulus elastisitas dawai,  $A$  luas penampang dawai dan  $l$  panjang dawai

### 3.3.4 Kecepatan Gelombang pada Dawai

Menurut Serway dan Vuille (2012), pada suatu dawai yang bergetar, terdapat dua macam kecepatan yang dapat dipertimbangkan, yaitu kecepatan fisik dawai dan kecepatan gelombang. Kecepatan fisik dawai yang bergetar naik dan turun, untuk dawai melintang pada arah  $y$ . Sedangkan kecepatan gelombang merambat sepanjang dawai pada arah sumbu- $X$ . Kecepatan gelombang tergantung pada sifat medium di mana benda bergerak. Kecepatan gelombang  $v$  adalah kecepatan di mana masing-masing kompresi yang tampak bergerak merupakan hasil kali dari panjang gelombang  $\lambda$  dan frekuensi  $f$  dapat dituliskan:

$$v = \lambda f \quad (3.16)$$

dengan  $v$  kecepatan gelombang,  $\lambda$  panjang gelombang  $f$  frekuensi gelombang (Giancoli, 2014). Jika sistem dawai mengalami gerak rotasi, terdapat kecepatan sudut  $\omega$  yang merupakan perbandingan antara kecepatan gelombang  $v$  dengan jari-jari  $r$  yang dapat dituliskan

---

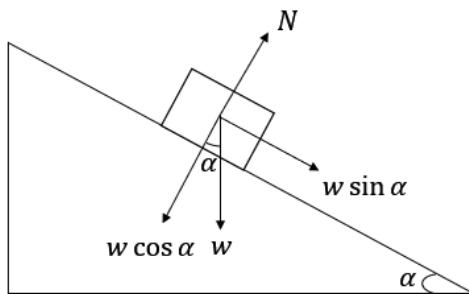
dengan rumus:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (3.17)$$

dengan  $\omega$  kecepatan sudut dawai,  $v$  kecepatan gelombang dawai dan  $r$  adalah jari-jari dawai (Giancoli, 2014).

### 3.3.5 Kecepatan Kecepatan Benda Meluncur

Ketika benda meluncur pada suatu dawai yang diasumsikan sebagai sistem bidang miring, maka terdapat suatu kecepatan benda meluncur  $v$ . Hal ini dapat diilustrasikan seperti Gambar:



**Gambar 3.3.** Benda Meluncur pada bidang miring dengan sudut  $\alpha$

Menurut Hartanto (2015), kecepatan dari benda meluncur pada bidang miring dapat diperoleh melalui:

$$v = \sqrt{2g(h - \mu_k \cos \alpha)} \quad (3.18)$$

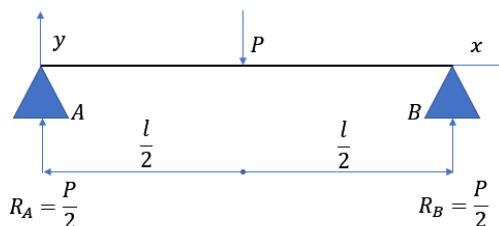
dengan  $v$  kecepatan benda meluncur,  $g$  percepatan gravitasi,  $h$  tinggi dawai  $\mu_k$  koefisien gesek kinetis

---

benda dengan dawai  $\alpha$  sudut dawai dalam derajat.

### 3.3.6 Lendutan Maksimum Dawai

Lendutan maksimum dapat diketahui dengan melihat gambar deformasi struktur dan menempatkan nodal pada titik paling bawah. Menurut Dewobroto (2007), nodal merupakan wilayah yang secara fungsional memiliki sifat saling ketergantungan antara pusat (inti) dengan daerah di belakangnya. Suatu nodal terletak pada lendutan maksimum jika rotasi nodal sama dengan nol. Benda yang tergantung di bawah dawai dapat diilustrasikan seperti Gambar:



**Gambar 3.4.** Ilustrasi Posisi Benda di tengah Dawai

$P$  merupakan besarnya gaya beban pada dawai dengan satuan Newton dan  $L$  merupakan panjang dawai. Pada dawai terdapat momen beban  $M$  yang dirumuskan sebagai perkalian modulus elastisitas dawai  $E$  dengan momen inersia dawai  $I$  yang berporos di tengah dawai tersebut (Dewobroto, 2007). Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Mx = R_A x$$

---


$$= \frac{Px}{2} \quad (3.19)$$

Dikarenakan  $M_x = EI \frac{d^2y}{dx^2}$ , maka persamaan (3.19) dapat dituliskan sebagai:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{2} \quad (3.20)$$

Selanjutnya, persamaan (3.20) diintegralkan terhadap  $x$  sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \int EI \frac{d^2y}{dx^2} dx &= \int \frac{Px}{2} dx \\ EI \frac{dy}{dx} &= \frac{Px^2}{4} + C \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dengan memberikan suatu kondisi batas  $x = \frac{L}{2}$ , maka nilai  $\frac{dy}{dx} = 0$ , sehingga diperoleh nilai konstanta  $C_1$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} EI(0) &= \frac{P}{4} \frac{L^2}{4} + C_1 \\ 0 &= \frac{PL^2}{16} + C_1 \\ C_1 &= \frac{PL^2}{16} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dengan mensubstitusikan  $C_1$  pada persamaan (3.22) ke (3.21) diperoleh:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{P}{4} x^2 - \frac{PL^2}{16} \quad (3.23)$$

Selanjutnya persamaan (3.23) diintegralkan terhadap  $x$

---

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\int EI \frac{dy}{dx} dx &= \int \left( \frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16} \right) dx \\ \int EI dy &= \int \left( \frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16} \right) dx \\ EIy &= \frac{Px^3}{16} - \frac{PL^2}{16}x + C_2\end{aligned}\quad (3.24)$$

Dengan memberikan kondisi batas  $y = 0$  untuk  $x = 0$  maka dapat diperoleh nilai  $C_2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}EL(0) &= \frac{P}{4}(0) - \frac{PL^2}{16}(0) + C_2 \\ 0 &= 0 - 0 + C_2 \\ C_2 &= 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

sehingga persamaan (3.24) menjadi:

$$ELy = \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2}{16}x\quad (3.26)$$

Dengan demikian, lendutan maksimum  $y$  ketika benda berada tepat di tengah dawai  $x = \frac{1}{2}L$  adalah:

$$\begin{aligned}ELy_{maks} &= \frac{P}{12} \left( \frac{1}{2}L \right)^3 - \frac{PL^2}{16} \left( \frac{1}{2}L \right) \\ &= \frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} \\ &= \frac{PL^3 - 3PL^3}{96} \\ &= -\frac{2PL^3}{96} \\ &= -\frac{PL^3}{48}\end{aligned}\quad (3.27)$$

---

Sehingga dapat diperoleh  $y_{maks}$  persamaan (3.27) sebagai berikut:

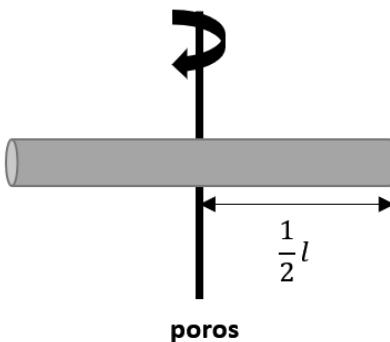
$$y_{maks} = -\frac{PL^3}{48EI} \quad (3.28)$$

### 3.3.7 Momen Inersia

Momen inersia merupakan ukuran kelembaman suatu benda untuk berotasi terhadap porosnya (Saripudin, 2009). Momen inersia berperan dalam dinamika rotasi seperti massa dalam dinamika dasar, menentukan hubungan antara momentum sudut dan kecepatan sudut, momen gaya dan percepatan sudut, serta beberapa besaran lainnya. Momen inersia bekerja pada benda tegar. Benda tegar adalah suatu benda yang memiliki satu kesatuan massa yang kontinu (tidak terpisahkan antara satu sama lain) dan memiliki bentuk yang teratur. Pada benda tegar, massa benda terkonsentrasi pada pusat massanya dan tersebar pada jarak yang sama dari titik pusat massa benda. Oleh karena itu, Saripudin (2009) menyebutkan momen inersia benda tegar dapat dihitung menggunakan teknik integral dengan persamaan:

$$I = \int r^2 dm \quad (3.29)$$

dengan  $r$  merupakan jari-jari benda. Kasus dawai seperti dawai *flying fox* yang di tengahnya digantungkan suatu benda bermassa, mengikuti momen inersia yang bekerja pada batang silinder dengan pusat sebagai poros.



**Gambar 3.5.** Batang Silinder dengan Pusatnya sebagai Poros

Momen inersia dari benda berbentuk batang silinder dengan pusatnya sebagai poros dituliskan sebagai berikut.

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

dengan  $I$  momen inersia yang bekerja pada batang silinder,  $m$  massa benda,  $l$  panjang batang silinder.

### 3.3.8 Energi Potensial

Benda dipertimbangkan seperti partikel yang merupakan bagian dari suatu terjadi gaya konservatif  $F$ . Apabila gaya  $F$  memberikan usaha  $W$  pada tersebut, maka perubahan energi potensial  $\Delta EP$  yang berkaitan dengan berlawanan arah dengan usaha yang dilakukan. Perubahan energi potensial  $\Delta EP$  dapat dituliskan sebagai:

$$\Delta EP = -W \quad (3.30)$$

Gaya yang bekerja pada suatu benda mungkin bervariasi terhadap posisi, sehingga dapat dituliskan

---

usaha  $W$  sebagai:

$$W = \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx \quad (3.31)$$

Artinya, usaha yang dilakukan oleh gaya ketika objek bergerak dari titik  $x_i$  ke titik  $x_j$  mengubah konfigurasi sistem. Jika diketahui gaya yang bekerja adalah gaya konservatif, maka besar usaha yang dilakukan akan sama untuk semua jalur yg dilewati antara dua titik tersebut (Halliday, dkk, 2010). Dengan mensubstitusikan persamaan (3.31) ke dalam (3.30) maka diperoleh bentuk umum energi potensial sebagai berikut:

$$\Delta EP = - \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx \quad (3.32)$$

Ada beberapa contoh energi potensial yang terjadi pada suatu benda, yaitu energi potensial gravitasi dan energi potensial elastis. Pada masalah Flying Fox, maka diasumsikan hanya berlaku Energi Potensial Gravitasi. Suatu benda dengan massa  $m$  bergerak secara vertikal sepanjang sumbu-y(arah ke atas positif). Jika benda bergerak dari titik  $y_i$  menuju titik  $y_j$ , maka gaya gravitasi  $F_g$  melakukan usaha pada benda tersebut (Halliday, dkk, 2010). Untuk menentukan besar perubahan energi potensial gravitasi dapat dilakukan dengan mensubstitusikan  $-mg$  sebagai simbol gaya  $F$  pada persamaan (3.32). Tanda negatif menunjukkan arah gaya ke bawah sumbu-y Sehingga diperoleh

---

bentuk:

$$\begin{aligned}\Delta EP &= - \int_{y_i}^{y_j} -mgdy \\&= mg \int_{y_i}^{y_j} dy \\&= mg [y] dy \\&= mg (y_j - y_i) \\&= mg\Delta y\end{aligned}\tag{3.33}$$

Dengan memilih kerangka acuan posisi awal  $y_i = 0$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned}EP - 0 &= mg (y_j - 0) \\EP &= mgy_j \\&= mgy\end{aligned}\tag{3.34}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa energi potensial gravitasi yang berkaitan dengan sistem benda dengan bumi hanya bergantung pada posisi vertikal  $y$  yang menyatakan ketinggian benda. Ketinggian benda tersebut relatif pada posisi acuan  $y = 0$  bukan posisi horizontalnya (Halliday, dkk, 2010).

### 3.3.9 Energi Kinetik

Energi kinetik suatu benda merupakan energi yang terkait dengan keadaan gerak benda itu. Jika massa benda selama pengamatan tidak berubah, maka keadaan gerak benda cukup dilihat dari kecepatannya (Rosyid, dkk, 2015). Berdasarkan teori relativitas khusus

---

Einstein, energi total dari suatu benda bermassa  $m$  jika diukur dari sebarang kerangka acuan adalah:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.35)$$

dengan  $E$  energi total kinetik,  $m$  massa benda,  $c$  kecepatan cahaya dalam ruang hampa  $v$  kecepatan benda bergerak Selanjutnya jika suatu energi diukur dari kerangka diamnya, energi tersebut dapat dituliskan:

$$E_0 = mc^2 \quad (3.36)$$

Dengan demikian energi kinetik dari benda tersebut adalah selisih dari energi total benda jika diukur dari sebarang kerangka acuan dengan energi benda jika diukur dari kerangka diamnya. Sehingga dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} EK &= E - E_0 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \\ &= mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

dengan:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{v^2 c^2}} - 1 = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (3.38)$$

---

Dengan demikian energi kinetik benda tersebut adalah:

$$\begin{aligned} EK &= mc^2 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} mv^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dalam kasus ini, kecepatan benda diasumsikan sangat kecil jika dibandingkan dengan cepat rambat cahaya dalam ruang hampa, sehingga energi kinetik benda tersebut cukup dituliskan sebagai:

$$EK = \frac{1}{2} mv^2 \quad (3.40)$$

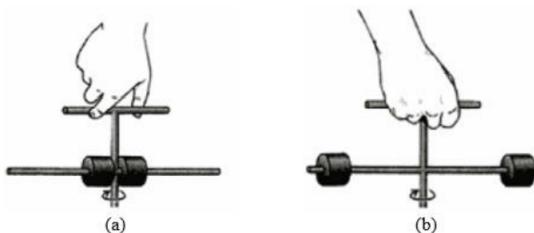
Dalam hubungannya dengan momen inersia  $I$  energi kinetik rotasi  $EK_R$  dari benda tegar adalah:

$$EK_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.41)$$

dengan  $EK_R$  energi kinetik rotasi,  $I$  Momen inersia benda berotasi  $\omega$  kecepatan sudut benda berotasi (Young dan Friedman, 2002). Energi kinetik yang diberikan oleh persamaan (3.41) bukan merupakan bentuk yang baru dari energi melainkan memberikan bentuk pengertian fisika sederhana tentang momen inersia, yaitu semakin besar momen inersia, semakin besar pula energi kinetik benda tegar yang berotasi dengan kecepatan sudut  $\omega$  tertentu. Dengan demikian, semakin besar momen inersia benda, semakin sulit benda itu melakukan perputaran dari keadaan diam dan semakin sulit benda berhenti dari keadaan berotasi (Young dan Friedman, 2002). Ilustrasi mekanisme

---

rotasi dapat dideskripsikan pada gambar berikut:



**Gambar 3.6.** Rotasi pada Sumbu Vertikal, Young dan Freedman, 2002

suatu alat peraga yang bebas berotasi pada sumbu vertikal. Dua buah silinder bermassa  $m$  dapat dikunci di setiap tempat sepanjang palang horizontal. Gambar (a) menjelaskan bahwa jika kedua silinder ditempatkan di dekat sumbu putar, momen inersia akan kecil dan akan mudah mengawali rotasi alat. Sedangkan Gambar (b) menjelaskan bahwa jika silinder tersebut terletak lebih jauh dari sumbu pusat, momen inersia lebih besar dan lebih sulit untuk memulai atau menghentikan rotasi.

### 3.4 Prinsip Hamilton dan Persamaan Euler-Lagrange pada Dawai

Arfken dan Hans (2005) mendefinisikan persamaan Lagrange untuk benda relativistik sebagai selisih antara energi kinetik  $EK$  dengan energi potensial  $EP$  seperti persamaan berikut:

$$L = EK - EP \quad (3.42)$$

---

Diasumsikan bahwa waktu  $t$  sebagai variabel bebas serta  $x_i(t)$  sebagai variabel yang terikat waktu  $t$ . Variabel  $x_i(t)$  merupakan posisi benda dan  $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt}$  merupakan kecepatan benda  $i$  sebagai fungsi terhadap waktu  $t$ . Berdasarkan prinsip Hamilton  $\delta J = 0$  dengan  $J$  didefinisikan sebagai:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (3.43)$$

maka diperoleh suatu persamaan baru berdasarkan prinsip Hamilton sebagai berikut:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt = 0 \quad (3.44)$$

Prinsip Hamilton berlaku ketika sistem bergerak dari waktu  $t_1$  menuju  $t_2$  sehingga integral persamaan Lagrange terhadap waktu  $t$  memiliki nilai yang tetap. Persamaan Lagrange pada sistem yang bergerak disebut juga persamaan Euler-Lagrange (Arfken dan Hans, 2005). Persamaan Euler-Lagrange dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (3.45)$$

Sistem dawai merupakan sistem yang bergerak. Persamaan Lagrange pada dawai memuat dua variabel  $y$  dan  $\theta$  yang masing-masing merupakan besar lendutan dawai dan sudut dawai yang terbentuk dikarenakan adanya benda yang menggantung. Merujuk pada persamaan (3.43), dapat dituliskan:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \theta(t)$$

---

$$\dot{x}_1 = y(t), \quad \dot{x}_2 = \theta(t) \quad (3.46)$$

Sehingga persamaan (3.44) berubah menjadi:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2; t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}; t) dt = 0 \quad (3.47)$$

Dengan demikian, persamaan (3.45) dapat diubah menjadi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (3.48)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.49)$$

Persamaan (3.48) dan (3.49) disebut sebagai persamaan Euler-Lagrange yang bekerja pada sistem dawai yang memiliki variabel  $y$  dan  $\theta$  dan bergantung pada waktu  $t$  (Arfken dan Hans, 2005).

### 3.5 Analisis Konstruksi Model Matematika Vibrasi pada Dawai *Flying Fox*

Dalam mengonstruksi model matematika vibrasi dawai *flying fox*, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah: (1) mengidentifikasi masalah yang terjadi pada *flying fox*, (2) mengidentifikasi variabel dan parameter yang terlibat pada dawai *flying fox*, (3) mengidentifikasi gaya-gaya yang bekerja pada dawai *flying fox*, (4) membangun asumsi yang berlaku pada dawai *flying fox*, (5) mengidentifikasi bentuk energi potensial dari

---

masing-masing gaya yang terjadi pada *flying fox* dan energi kinetiknya, serta bentuk persamaan Lagrange dawai *flying fox*, dan (6) menurunkan persamaan Lagrange terhadap variabel  $y$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\theta$  dan  $\frac{d\theta}{dt}$  membentuk sistem persamaan diferensial dua variabel orde dua.

### 3.6 Identifikasi Masalah pada Dawai *Flying Fox*

Secara umum, permainan *flying fox* diperlihatkan seperti:



**Gambar 3.7.** *Flying Fox* dengan Salah Satu Penyangganya (Wicker, 2016)

Dawai *flying fox* merupakan dawai yang diikat kedua ujungnya pada dua penyangga yang memiliki ketinggian berbeda. Keadaan ini mengakibatkan terjadinya kemiringan dawai *flying fox* dengan besar sudut berkisar antara  $30^0 - 45^0$ . Hal ini dimaksudkan untuk memudahkan benda dapat meluncur dengan kecepatan rendah. Jarak antara kedua penyangga berkisar antara 250-400 m yang didefinisikan sebagai panjang dawai *flying fox* itu sendiri. Jenis bahan yang

---

digunakan pada dawai *flying fox* adalah kabel baja dengan modulus elastisitas  $200 \times 10^9, N/m^2$ , sehingga dawai *flying fox* cenderung kaku dan dapat menahan beban dengan berat maksimal yang setara dengan batas elastisitasnya. Artinya, untuk setiap satuan luas penampang dawai *flying fox* dalam satuan  $m^2$ , gaya berat maksimum yang ditoleransi adalah  $200 \times 10^9 N$ . Akan tetapi, pada umumnya massa benda yang meluncur pada dawai *flying fox* dibatasi antara  $20 - 120 Kg$ . Dawai *flying fox* berbahan kabel baja memiliki massa jenis sebesar  $78,5 \times 102 Kg/m^3$ , sehingga dawai *flying fox* memiliki kumpulan partikel yang cukup rapat untuk setiap satuan volumenya yaitu  $m^3$ . Permukaan dawai *flying fox* berbahan dasar kawat baja cukup licin, tetapi masih terdapat koefisien gaya gesek sehingga benda dapat meluncur dengan tetap menjaga perlambatannya. Selanjutnya, benda yang meluncur pada dawai *flying fox* tidak menempel secara langsung pada dawai itu. Akan tetapi, dihubungkan oleh sling baja berdiameter  $10 mm$ . Sling baja berfungsi sebagai connector antara benda dengan katrol sekaligus sebagai alat pegangan tangan untuk keseimbangan. Pada batasan masalah sebelumnya, benda meluncur pada dawai *flying fox* dari titik awal hingga mencapai titik tengah dawai tersebut. Ketika benda meluncur pada dawai *flying fox*, terjadi dua buah gesekan yaitu gesekan antara sling baja dengan dawai *flying fox* dan gesekan antara benda dengan udara. Kemudian pada saat benda berada tepat di tengah dan dalam posisi sesaat diam, terjadi sebuah gesekan yaitu gesekan

---

antara dawai *flying fox* dengan udara. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar:



**Gambar 3.8.** Ilustrasi Gaya Gesek (Wicker,2016)

Selanjutnya, saat benda meluncur pada dawai *flying fox*, terdapat energi kinetik akibat dari pergerakan dan perpindahan benda tersebut. Massa saat meluncur tidak mengalami perubahan, sehingga keadaan gerak benda meluncur tersebut cukup dilihat dari kecepatannya saat meluncur. Kemudian ketika benda telah berada tepat di tengah dawai *flying fox* dan dalam keadaan sesaat erdapat energi potensiaan dawai *flying fox*. Energi potensial oleh adanya gaya berat. Sedangkan energi potensial dawai *flying fox* dipengaruhi oleh adanya gaya pegas dawai yang diakibatkan oleh gaya tarik

### 3.7 Identifikasi Parameter, Variabel, dan Energi

Langkah selanjutnya setelah mengidentifikasi masalah yang terjadi pada *flying fox* adalah mengidentifikasi parameter yang terlibat dalam mengonstruksi model

---

matematika vibrasi dawai *flying fox*. Parameter yang terlibat dalam sebagai berikut:

- (a) Panjang dawai *flying fox*  $l$  merupakan jarak antara dua buah penyangga dan dihubungkan oleh dawai *flying fox*. Satuan panjang dawai *flying fox* adalah meter  $m$ .
- (b) Massa benda  $m_b$ , merupakan besaran massa dari objek yang meluncur pada dawai *flying fox*. Satuan massa benda adalah kilogram  $Kg$ .
- (c) Massa dawai *flying fox*  $m_d$ , merupakan besaran massa dawai yang berbahan kawat baja. Satuan massa dawai *flying fox* adalah kilogram  $Kg$
- (d) Modulus elastisitas dawai *flying fox*  $E$  merupakan konstanta yang menyatakan ukuran kelenturan dawai *flying fox* berbahan kawat baja. Satuan modulus elastisitas dawai *flying fox* adalah  $N/m^2$ . Besar modulus elastisitas dawai *flying fox* yang berbahan kabel baja adalah  $200 \times 10^9 N/m^2$ .
- (e) Koefisien gaya gesek dawai *flying fox* dengan sling baja  $\mu_k$ , merupakan konstanta yang menyatakan besaran interaksi dawai *flying fox* dengan sling baja sebesar 0.57.
- (f) Konstanta  $b$  merupakan besaran yang mewakili bentuk benda yang bergesekan dengan udara. Dalam penelitian ini, benda diasumsikan sebagai sistem bundar, sehingga konstanta  $b = 6\pi r_b$  dengan  $r_b$  adalah jari-jari benda. Semakin besar jari-jari benda, maka semakin besar pula gaya hambatnya dengan fluida (udara).

- 
- (g) Konstanta  $d$  merupakan besaran yang mewakili bentuk dawai yang bergesekan dengan udara. Konstanta  $d$  dapat dicari dengan  $d = 6\pi r_d$  dengan  $r_d$  merupakan jari-jari dawai *flying fox*.
- (h) Koefisien viskositas  $\eta$  merupakan besaran yang menunjukkan tingkat kekentalan fluida atau zat alir. Dalam penelitian ini, jenis fluida atau zat alir yang dipertimbangkan adalah udara dengan koefisien viskositas sebesar  $0,000018 \text{ Ns/m}^2$
- (i) Percepatan gravitasi  $g$  merupakan percepatan yang diakibatkan oleh gaya tarik bumi. Ketentuan percepatan gravitasi adalah  $9,8 \text{ m/s}^2$ .
- (j) Frekuensi gerak dawai *flying fox*  $f$  merupakan jumlah kompresi yang melewati titik dawai *flying fox*. Satuan frekuensi gerak dawai *flying fox* adalah  $\text{Hz}$  atau  $1/\text{s}$ .
- (k) Panjang gelombang dawai *flying fox* ( $l$ ) merupakan jarak antara satuan berulang dari pola gelombang dawai *flying fox* yang tersusun atas satu lembah dan satu bukit. Satuan panjang gelombang dawai *flying fox* adalah meter  $\text{m}$ .
- (l) Kecepatan benda meluncur pada dawai *flying fox*  $v$  dengan satuan  $\text{m/s}$
- (m) Luas penampang dawai *flying fox*  $A$  dengan satuan  $\text{m}^2$ . Dawai *flying fox* biasanya berdiameter  $10,5 \text{ mm} = 0,0105 \text{ m}$ , sehingga besar jari-jarinya adalah  $0,00525 \text{ m}$ . Dengan demikian luas penampang dawai *flying fox* adalah sebesar  $A = \pi r^2 = 0,87 \times 10^{-5} \text{ m}$  dengan  $\pi = 3,14$ .

---

Selanjutnya adalah mengidentifikasi variabel yang terlibat pada dawai *flying fox*. Variabel-variabel yang digunakan terbagi menjadi dua macam, yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Dalam penelitian ini, model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang akan dikonstruksi diasumsikan bervibrasi terhadap waktu  $t$ . Sedangkan untuk variabel terikatnya adalah sebagai berikut:

- (a) Lendutan dawai *flying fox*  $y$  merupakan besar simpangan gerak osilasi yang terjadi ketika benda meluncur pada dawai *flying fox*. Satuan lendutan adalah meter  $m$  Lendutan maksimum dawai *flying fox* berbahan kabel baja adalah  $-2,042 \times 10^{-10}m$  untuk massa maksimum benda 50 Kg. Tanda negatif menandakan bahwa lendutan mengarah ke bawah.
- (b) Kecepatan gerak dawai *flying fox* pada saat berosilasi  $\frac{dy}{dt}$  dengan satuan  $m/s$ .
- (c) Percepatan gerak dawai *flying fox* pada saat berosilasi  $\frac{d^2y}{dt^2}$  dengan satuan  $m/s^2$ .
- (d) Besar sudut  $\theta$  merupakan sudut dawai *flying fox* yang terbentuk pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox* dari posisi setimbangnya.
- (e) Kecepatan sudut dawai *flying fox* yang terbentuk pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox*  $\frac{d\theta}{dt}$  dengan satuan  $mrad/s$ .
- (f) Percepatan sudut dawai *flying fox* yang terbentuk pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox*  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  dengan satuan  $mrad/s^2$

---

Kemudian langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi energi-energi yang bekerja pada dawai *flying fox*. Energi-energi yang bekerja adalah sebagai berikut:

- (a) Energi potensial *EP* energi yang terdapat pada saat benda diam di tengah dawai *flying fox*. Satuan energi potensial adalah joule atau setara dengan  $k\text{gm}^2/\text{s}^2$ .
- (b) Energi kinetik *EK* energi yang terdapat pada saat benda meluncur dari titik awal hingga tengah dawai *flying fox*. Satuan energi kinetik adalah joule atau setara dengan  $k\text{gm}^2/\text{s}^2$ .

### **3.8 Identifikasi Gaya-gaya yang Bekerja pada Flying Fox**

Sebelum memulai mengonstruksi model matematika vibrasi dawai *flying fox*, maka yang perlu dilakukan adalah mengidentifikasi gaya-gaya yang terlibat di dalamnya, seperti pada Gambar:



**Gambar 3.9.** Ilustrasi Gaya Tegangan Dawai Flying Fox (Wicker, 2016)

Gaya tarik benda di sisi kanan dan kiri dawai akan muncul jika terdapat sebuah benda yang menggantung. Ketika benda berada tepat di tengah dawai *flying fox* dan sesaat diam, maka terdapat gaya tarik benda di masing-masing sisi kiri dan kanan yang disimbolkan dengan  $F_1$  dan  $F_2$ . Gaya tarik benda diasumsikan sebagai aksi dari dawai, sehingga terdapat gaya reaksi berbentuk gaya tegangan yang merupakan perlawanan gaya tarik benda dan mencegah untuk dawai *flying fox* agar tidak putus. Gaya tegangan di sisi kiri dan sisi kanan disimbolkan berturut-turut  $T_1$  dan  $T_2$ . Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_1 &= -T_1, \quad F_2 = -T_2 \\ F_1 + T_1 &= 0, \quad F_2 + T_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dari persamaan (3.50) diperoleh hubungan sebagai

---

berikut:

$$\begin{aligned} F_1 + T_1 &= F_2 + T_2 \\ F_1 - F_2 &= T_2 - T_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Selain gaya tarik benda  $F$  dan gaya tegangan  $T$  pada dawai *flying fox* juga terdapat gaya berat  $W$  dan gaya normal  $N$ . Gaya berat selalu menuju arah pusat dan gaya normal  $N$  selalu tegak lurus dengan dawai *flying fox* seperti yang ditunjukkan pada Gambar:



**Gambar 3.10.** Ilustrasi Gaya berat terhadap Gaya Normal Dawai Flying Fox (Wicker, 2016)

Gaya normal  $N$  berlaku ketika benda berada tepat di tengah dan diam sesaat. Namun, pada saat benda meluncur secara bebas pada dawai *flying fox*, tidak berlaku gaya normal  $N$ . Hal ini dikarenakan gaya normal akan bekerja ketika benda bersentuhan secara langsung dengan benda lainnya. Gaya selanjutnya adalah gaya gesek yang terjadi pada dawai *flying fox*. Ilustrasi gaya gesek saat benda meluncur pada dawai *flying fox* dapat dilihat pada Gambar:



**Gambar 3.11.** Ilustrasi Gaya Gesek pada saat Benda Meluncur di Dawai Flying Fox (Wicker, 2016)

Pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox*, terjadi perubahan posisi benda sehingga mengakibatkan adanya gaya gesek kinetis. Ada dua gaya gesek kinetis yang terjadi pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox*, yaitu gaya gesek antara sling baja dengan dawai *flying fox* dan gaya gesek kinetis antara benda dengan udara. Berdasarkan identifikasi variabel dan parameter sebelumnya, besaran interaksi gesekan yang terjadi antara dawai *flying fox* dengan sling baja dinotasikan dengan  $\mu_k$ . Sedangkan gaya gesek yang terjadi antara benda dengan udara mengikuti kaidah hukum Stokes yang dipengaruhi oleh besar koefisien viskositas dari udara  $\eta$  dan koefisien yang menyatakan bentuk dari benda  $b$ . Dalam penelitian ini, penulis mengasumsikan benda yang meluncur berbentuk bola, sehingga koefisien benda tersebut adalah  $b = 6\pi r$ . Selanjutnya, pada saat benda berada di tengah dawai *flying fox* dan diam sesaat, terjadi sebuah gaya gesek kinetis yaitu antara dawai dengan udara. Seperti halnya

---

dengan gaya gesek antara benda dengan udara, gesekan antara dawai *flying fox* dengan udara juga mengikuti kaidah hukum Stokes. Besar gaya gesek yang terjadi dipengaruhi oleh koefisien viskositas udara  $\eta$  dan koefisien yang menyatakan bentuk dari dawai *flying fox*  $d$ . Ilustrasi gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan udara dapat dilihat pada Gambar:



**Gambar 3.12.** Ilustrasi Gaya Gesek Dawai Flying Fox dengan Udara (Wicker, 2016)

### 3.9 Asumsi yang Berlaku pada Dawai Flying Fox

Berdasarkan identifikasi masalah dawai *flying fox* sebelumnya, maka asumsi dasar yang berlaku pada gerak dawai *flying fox* adalah:

- (a) Dawai *flying fox* merupakan dawai kaku dan memiliki lendutan pada posisi setimbang di sepanjang sumbu  $-X$
- (b) Getaran yang dihasilkan oleh dawai *flying fox* mengalami perpindahan secara vertikal searah

---

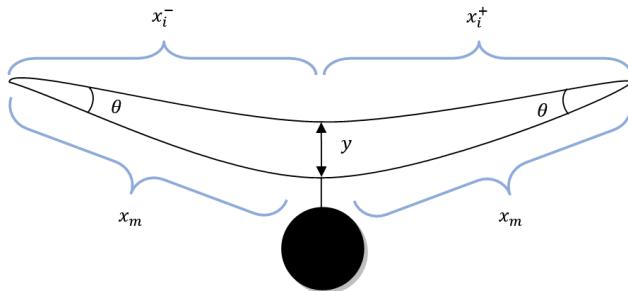
sumbu  $-Y$  dan merambat secara horizontal searah sumbu  $-X$ .

- (c) Ketika benda berada pada dawai *flying fox*, maka terjadi gaya pembebanan ke bawah.
- (d) Terjadi gelombang bolak balik dikarenakan kedua ujung dawai *flying fox* terikat pada penyangga.
- (e) Berlaku hukum I Newton pada saat benda berada di tengah dawai *flying fox* dan sesaat diam. Sedangkan hukum II Newton berlaku pada saat benda meluncur atau melakukan perpindahan posisi pada dawai *flying fox*.
- (f) Berlaku hukum III Newton antara gaya tarik benda pada dawai *flying fox* dengan tegangan pada sling baja yang menghubungkan benda dengan dawai *flying fox*.
- (g) Massa jenis dawai *flying fox* berbahan kawat baja adalah homogen. Bersifat elastis tetapi cenderung kaku dikarenakan modulus elastisitasnya sebesar  $200 \times 10^9 N/m^2$ .
- (h) Dawai *flying fox* mengalami gerak stasioner secara vertikal. Dengan kata lain, partikel-partikel dawai *flying fox* tersebut bergerak secara vertikal dengan defleksi dan nilai mutlak kemiringan di setiap titik dawai sangat kecil.
- (i) Gaya gesek antara benda dengan udara mengakibatkan perlambatan benda saat meluncur pada dawai *flying fox* (Kusumastuti, 2016).

---

### 3.10 Identifikasi Energi Potensial dan Energi Kinetik

Ketika benda berada tepat di tengah dawai *flying fox*, terjadi peregangan pada dawai seperti Gambar:



**Gambar 3.13.** Ilustrasi Peregangan pada Dawai Flying Fox

panjang dawai *flying fox* dimisalkan  $l$ . Berdasarkan Gambar 3.13, dawai *flying fox* dibagi menjadi dua sisi, yaitu sisi kiri dan sisi kanan. Pada sisi kiri, panjang dawai dimisalkan  $x_i^- = -\frac{1}{2}l$  dan sisi kanan dimisalkan  $x_i^+ = \frac{1}{2}l$ . Selanjutnya, dapat ditentukan besar  $y$  jika ditinjau dari sisi kiri dan sisi kanan. Dari sisi kiri dawai *flying fox*, diperoleh:

$$\begin{aligned}y &= x_i^- \tan \theta \\&= -\frac{1}{2}l \tan \theta\end{aligned}\quad (3.52)$$

Dan dari sisi kanan dawai *flying fox*, diperoleh:

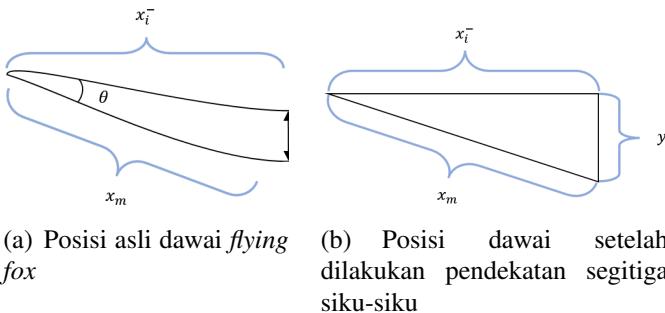
$$\begin{aligned}y &= x_i^+ \tan \theta \\&= \frac{1}{2}l \tan \theta\end{aligned}\quad (3.53)$$

---

### 3.11 Energi Potensial Dawai Flying Fox

#### 3.11.1 Energi Potensial Pegas

Sebelum mengidentifikasi energi potensial pegas pada dawai *flying fox*, langkah pertama adalah menggambarkan hasil partisi dari Gambar 3.13 Dengan melakukan pendekatan segitiga siku-siku di sisi kiri, maka ilustrasi dawai *flying fox* dapat digambarkan menjadi Gambar berikut:



(a) Posisi asli dawai *flying fox*      (b) Posisi dawai setelah dilakukan pendekatan segitiga siku-siku

**Gambar 3.14.** Ilustrasi Peregangan pada Dawai *Flying Fox* Sisi Kiri

Setelah diasumsikan bahwa bentuk dawai *flying fox* setelah digantungkan benda di bawahnya membentuk segitiga siku-siku seperti Gambar 3.14, maka penulis dapat mengidentifikasikan bahwa  $x_i^2$  merupakan panjang mula-mula dawai *flying fox* di sebelah kiri sebelum digantungkan benda di bawahnya,  $x_m$  merupakan panjang dawai *flying fox* setelah benda digantungkan di bawahnya, dan  $y$  merupakan lendutan dawai *flying fox* ketika benda digantungkan di

---

bawahnya. Sehingga panjang dari  $x_m$  dari sisi kiri adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}x_m &= \sqrt{y^2 + (x_i^-)^2} \\&= \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}\end{aligned}\quad (3.54)$$

Jika persamaan (3.52) disubstitusikan ke persamaan (3.54), maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_m &= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 \tan^2 \theta + \frac{1}{4}l^2} \\&= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 (\tan^2 \theta + 1)} \\&= \frac{1}{2}l\sqrt{\tan^2 \theta + 1}\end{aligned}\quad (3.55)$$

Selanjutnya dapat diketahui besar pertambahan panjang dawai *flying fox* di sisi kiri ketika digantungkan benda yang disimbolkan dengan  $x^-$  yang merupakan selisih antara  $x_m$  dengan  $x_i^-$ , sehingga dapat dituliskan:

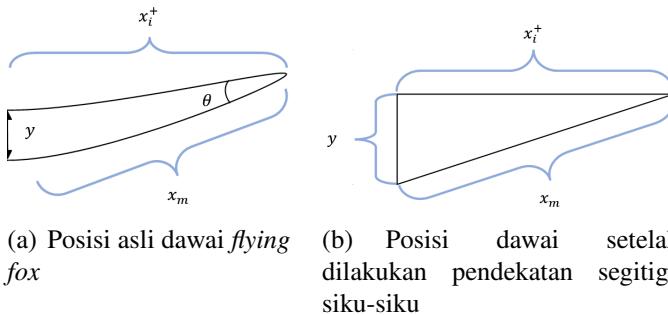
$$\begin{aligned}x^- &= x_m - x_i^- \\&= \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - \left(-\frac{1}{2}l\right) \\&= \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + \frac{1}{2}l\end{aligned}\quad (3.56)$$

atau dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}x^- &= x_m - x_i^- \\&= \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 + 1} - \left(-\frac{1}{2}l\right) \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \quad (3.57)$$

Langkah selanjutnya adalah menggambarkan hasil partisi dari Gambar 3.13 di sisi kanan menjadi seperti Gambar ??



**Gambar 3.15.** Ilustrasi Peregangan pada Dawai *Flying Fox* Sisi Kanan

Seperti halnya pada peregangan dawai *flying fox* di sisi kiri, nilai  $x_m$  dapat ditentukan menggunakan kaidah Phytagoras. Dari Gambar 3.15  $x_i^+$  merupakan panjang mula-mula dawai *flying fox* di sebelah kanan sebelum digantungkan benda di bawahnya,  $x_m$  merupakan panjang dawai *flying fox* setelah benda digantungkan di bawah dawai *flying fox*, dan  $y$  merupakan lendutan dawai *flying fox* ketika benda digantungkan di bawahnya. Panjang  $x_m$  dapat dituliskan sebagai persamaan:

$$\begin{aligned} x_m &= \sqrt{y^2 + (x_i^+)^2} \\ &= \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

---

Jika persamaan (3.53) disubstitusikan ke persamaan (3.58), maka diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}
 x_m &= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 \tan^2 \theta + \frac{1}{4}l^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4}l^2 (\tan^2 \theta + 1)} \\
 &= \frac{1}{2}l\sqrt{\tan^2 \theta + 1}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Selanjutnya dapat diketahui besar pertambahan panjang dawai *flying fox* di sisi kiri ketika digantungkan benda yang disimbolkan dengan  $x^-$  yang merupakan selisih antara  $x_m$  dengan  $x_i^-$ , sehingga dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
 x^+ &= x_m - x_i^+ \\
 &= \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - \left(\frac{1}{2}\right)l
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

atau dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 x^+ &= x_m - x_i^+ \\
 &= \frac{1}{2}l\sqrt{\tan^2 \theta + 1} - \left(\frac{1}{2}\right)l \\
 &= \frac{1}{2}l\left(\sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Dikarenakan terjadi regangan pada dawai *flying fox* ketika diberikan benda bermassa  $m_b$  tepat di tengah dawai, maka terdapat energi potensial pegas dengan konstanta pegas  $k$  yang meregang pada sumbu  $-x$  dari posisi setimbangnya. Energi potensial pegas merupakan integral dari gaya pegas yang terjadi pada dawai.

Bentuk gaya pegas yang terjadi pada dawai adalah  $F = -kx$ . Berdasarkan Gambar ??, gaya pegas yang terjadi pada sisi kiri dawai *flying fox* bekerja di sepanjang  $x^-$ . Dengan demikian, dapat dituliskan gaya pegas pada sisi kiri dawai *flying fox* yang terjadi sebagai berikut

$$F(x^-) = -kx^- \quad (3.62)$$

Dengan mengambil nilai  $x_1^- = x^- = \frac{1}{2}l\sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1$  dalam persamaan (3.57) dan merujuk pada persamaan (3.32) dengan posisi awal  $x_0^- = 0$ , maka energi potensial pegas pada sisi kiri dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} \Delta EP_{GL} &= - \int_{x_0^-}^{x_1^-} F(x^-) dx^- \\ &= - \int_{x_0^-}^{x_1^-} -kx^- dx^- \\ &= [\frac{1}{2}k(x^-)^2]_{x_0^-}^{x_1^+} \\ &= \frac{1}{2}k((x_1^-)^2 - (x_0^+)^2) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{1}{2}l(\sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1)\right)^2 - 0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}l(\sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1)\right)^2 \quad (3.63) \end{aligned}$$

Dikarenakan posisi awal dawai *flying fox* dalam keadaan setimbang dan belum terdapat benda yang meluncur di bawahnya, maka dapat diasumsikan pada posisi awal  $x_0^-$  memiliki energi potensial pegas di sebelah kiri sebesar

---

nol ( $EP_{GLO} = 0$ ) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} EP_{GL} - EP_{GLO} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right)^2 \\ EP_{GL} - 0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right)^2 \\ EP_{GL} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Selanjutnya, gaya bekerja di sisi kanan dawai *flying fox* sepanjang  $x^+$ . Sehingga gaya pegas di sisi kanan dawai *flying fox* dapat dituliskan sebagai:

$$F(x^+) = -kx^+ \quad (3.65)$$

Dengan mengambil nilai  $x_1^+ = x^+ = \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right)$  pada persamaan (3.61), maka energi potensial pegas pada sisi kanan dawai *flying fox* I dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \Delta EP_{GR} &= - \int_{x_0^+}^{x_1^+} F(x^+) dx^+ \\ &= - \int_{x_0^+}^{x_1^+} kx^+ dx^+ \\ &= \left[ \frac{1}{2} k (x^+)^2 \right]_{x_0^+}^{x_1^+} \\ &= \frac{1}{2} k \left( (x_1^+)^2 - (x_0^+)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} k \left( \left( \frac{1}{2} l \sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right)^2 - 0^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} k \left( \frac{1}{2} l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

---

Jika diasumsikan pada posisi awal  $x_0^+$  memiliki energi potensial pegas di sebelah kanan sebesar nol ( $EP_{GRO} = 0$ ) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} EP_{GR} - EP_{GRO} &= \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right) \right)^2 \\ EP_{GR} - 0 &= \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right) \right)^2 \\ EP_{GR} &= \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Sehingga energi potensial total pegas ( $EP_G$ ) yang terjadi pada regangan di kedua sisi dawai dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} EP_G &= EP_{GL} + EP_{GR} \\ &= \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{2}l \left( \sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{4}l^2 \left( \tan^2 \theta + 1 + 2\sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{4}l^2 \left( \tan^2 \theta + 1 - 2\sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}k \left( \frac{1}{4}l^2 (2\tan^2 \theta + 4) \right) \\ &= \frac{1}{8}kl^2 (2\tan^2 \theta + 4) \\ &= \frac{1}{4}kl^2 (\tan^2 \theta + 2) \end{aligned} \quad (3.68)$$

---

### 3.12 Energi Potensial Berat

Pada saat dawai *flying fox* diberikan benda bermassa  $m_b$  maka terjadi gaya berat sebesar  $W$ . Gaya berat yang bekerja pada dawai *flying fox* dapat dituliskan sebagai:

$$F_W = m_b g \quad (3.69)$$

dengan  $F_W$  adalah gaya berat benda pada dawai *flying fox*,  $m_b$  massa benda dan  $g$  percepatan gravitasi  $9,8m/s^2$ . Energi potensial yang terjadi pada dawai *flying fox* yang diakibatkan adanya gaya berat sehingga terjadi perpindahan secara vertikal dari posisi kesetimbangan adalah:

$$\begin{aligned} \Delta EP_W &= - \int_{y_0}^{y_1} F_W dy \\ &= - \int_{y_0}^{y_1} m_b g dy \\ &= - [m_b g y]_{y_0}^{y_1} \\ &= -m_b g (y_1 - y_0) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dengan memilih kerangka acuan pada posisi setimbang  $y_0 = 0$  memiliki energi potensial berat sebesar nol  $EP_W = 0$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \Delta EP_W &= -m_b g y_1 \\ EP_W - EP_{W_0} &= -m_b g y_1 \\ EP_W - 0 &= -m_b g y_1 \\ EP_W &= -m_b g y_1 \end{aligned} \quad (3.71)$$

---

### 3.13 Energi Potensial Gesek

Ketika benda meluncur pada dawai *flying fox*, terjadi gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan sling baja. Besar gaya gesek ini dapat diperoleh berdasarkan persamaan (3.6). Gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan sling baja dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_k = \mu_k N \quad (3.72)$$

dengan  $f_k$  gaya gesek kinetis antara dawai *flying fox* dengan sling baja,  $\mu_k$  koefisien gesek kinetis  $N$  gaya normal benda. Gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan sling baja bekerja di sepanjang  $x_m$ . Dengan demikian energi potensial yang terjadi pada dawai *flying fox* yang diakibatkan oleh adanya gaya gesek kinetis antara dawai *flying fox* dengan sling baja di sepanjang  $x_m$  adalah:

$$\begin{aligned} \Delta EP_{f_k} &= - \int_{x_{m_0}}^{x_{m_1}} F_k dx_m \\ &= - \int_{x_{m_0}}^{x_{m_1}} -(\mu_k N) dx_m \\ &= [\mu_k N x_m]_{x_{m_0}}^{x_{m_1}} \\ &= \mu_k N (x_{m_1} - x_{m_0}) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Gaya gesek kinetis antara dawai *flying fox* dan sling baja hanya terjadi di sisi kiri dawai, dan mengarah ke arah kiri seperti Gambar 3.11. Dengan memilih kerangka acuan pada posisi setimbang  $x_{m_0} = 0$  memiliki energi potensial gesek sling baja dengan

---

dawai *flying fox* sebesar nol  $EP_{f_{k_0}}$  dan diketahui  $x_{m_1} = x_m = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}$  pada persamaan (3.55), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \Delta EP_{f_k} &= \mu k N x_{m_1} \\
 EP_{f_k} - EP_{f_{k_0}} &= \mu K N x_m \\
 EP_{f_k} - 0 &= \mu K N x_m \\
 EP_{f_k} &= \mu K N \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, ketika benda meluncur terjadi juga gaya gesek antara benda dengan udara seperti pada Gambar 3.5. Dikarenakan terjadi gaya gesek pada zat alir berbentuk udara, maka berlaku hukum Stokes seperti pada persamaan (3.7). Gaya gesek antara benda dengan udara dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_{ub} = -b\eta v \quad (3.75)$$

dengan  $f_{ub}$  gaya gesek udara dengan benda,  $b$  konstanta yang menyatakan bentuk benda,  $\eta$  kekentalan (viskositas) dinamis zat alir,  $v$  kecepatan benda meluncur pada dawai *flying fox*. Seperti halnya gaya gesek yang terjadi antara dawai *flying fox* dengan sling baja, arah gaya searah dengan panjang  $x_m$ . Dengan demikian energi potensial yang terjadi sebagai akibat dari gaya gesek benda dengan udara adalah:

$$\Delta EP_{f_k ub} = - \int_{x_{m_0}}^{x_{m_1}} f_{ub} dx_m$$

---


$$\begin{aligned}
 &= - \int_{x_{m_0}}^{x_{m_1}} -(b\eta v) dx_m \\
 &= [b\eta vx_m]_{x_{m_0}}^{x_{m_1}} \\
 &= b\eta v (x_{m_1} - x_{m_0})
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Seperti halnya dengan gaya gesek yang terjadi antara dawai *flying fox* dengan sling baja, gaya gesek antara udara dengan benda juga mengarah ke kiri. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.11. Dengan memilih kerangka acuan pada posisi setimbang  $x_{m_0} = 0$  yang memiliki energi potensial gesek udara dengan benda sebesar nol  $EP_{f_{kub}} = 0$  dan diketahui  $x_{m_1} = x_m = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}$  pada persamaan (3.55) yang terjadi pada sisi kiri dawai *flying fox*, maka diperoleh besar energi potensial yang merupakan akibat dari adanya gesekan antara benda dengan udara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \Delta EP_{f_{kub}} &= b\eta vx_{m_1} \\
 EP_{f_{kub_1}} - EP_{f_{kub_0}} &= b\eta vx_{m_1} \\
 EP_{f_{kub_1}} - 0 &= b\eta v \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \\
 EP_{f_{kub}} &= b\eta v \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

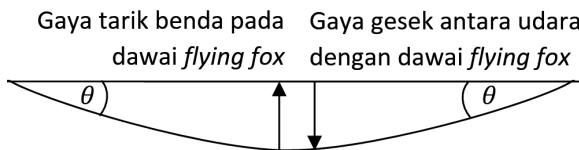
Ketika benda berada tepat di tengah dawai *flying fox* dan sesaat diam, terjadi gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan udara seperti pada Gambar 3.12. Gaya gesek ini juga merujuk pada hukum Stokes. Gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan udara bekerja searah dengan sumbu-y sehingga bentuk gayanya dapat

---

dituliskan sebagai berikut:

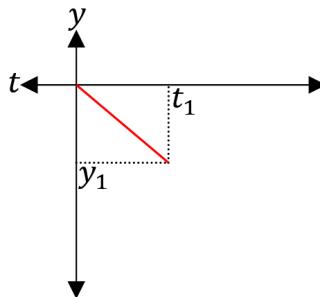
$$f_{ud} = d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \quad (3.78)$$

dengan  $f_{ud}$  gaya gesek antara dawai *flying fox* dengan udara  $d$  adalah konstanta yang menyatakan bentuk dawai *flying fox*,  $\eta$  kekentalan (viskositas) dinamis zat alir, dan  $\frac{dy}{dt}$  kecepatan dawai *flying fox* berosilasi. Ilustrasi gaya gesek antara udara dengan dawai *flying fox* dapat dilihat pada berikut:



**Gambar 3.16.** Gaya Geseck Flying Fox dengan Udara

Berdasarkan Gambar 3.16 terlihat bahwa benda menarik dawai *flying fox* ke bawah searah dengan sumbu-y Artinya, dalam rentang waktu awal  $t_0$  menuju waktu akhir  $t_1$  benda menarik dawai *flying fox* sehingga dawai mengalami perpindahan dari posisi awal  $y_0$  menuju posisi akhir  $y_1$ . Hal ini dapat dilihat pada Gambar berikut:



**Gambar 3.17.** Grafik Perpindahan Posisi dawai Flying Fox

Berdasarkan Gambar 3.17, dimisalkan bahwa waktu awal  $t_0 = 0$  dan posisi awal  $y_0 = 0$ . Dengan demikian koordinat titik posisi awal dawai *flying fox* adalah pada  $(0,0)$ . Selanjutnya tanda minus pada posisi akhir  $-y_1$  menandakan bahwa perpindahan menuju ke arah bawah. Untuk mencari nilai pada garis merah, digunakan konsep persamaan garis seperti berikut:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(t - t_0) \\ y - 0 &= m(t - t_0) \\ y &= mt \end{aligned} \tag{3.79}$$

Dari persamaan (3.78) dapat diketahui bahwa perpindahan posisi dawai *flying fox* memenuhi bentuk persamaan garis lurus. Dengan demikian dapat dicari kecepatan dawai *flying fox* mengalami perpindahan dengan menurunkan persamaan tersebut terhadap  $t$  dapat dituliskan:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(mt)}{dt} = m \tag{3.80}$$

Dikarenakan  $m$  merupakan gradien garis pada Gambar 3.17 dan bernilai konstan, maka dapat disimpulkan kecepatan dawai *flying fox* yang mengalami perpindahan ketika adanya sebuah tarikan dari benda adalah konstan. Dengan demikian energi potensial yang terjadi sebagai akibat dari adanya gaya gesek dawai *flying fox* dengan udara adalah:

$$\begin{aligned}\Delta EP_{fk_{ud}} &= -int_{y_0}^{y_1} f_{ud} dy \\ &= -int_{y_0}^{y_1} \left( d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) dy \\ &= -[d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) y]_{y_0}^{y_1} \\ &= -d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) (y_1 - y_0)\end{aligned}\quad (3.81)$$

Persamaan (3.81) diperoleh berdasarkan asumsi bahwa kecepatan dawai berosilasi  $\frac{dy}{dt}$  adalah konstan, sehingga proses integral mengikuti aturan integral biasa. Dengan memilih kerangka acuan pada posisi setimbang  $y_0 = 0$  yang memiliki energi potensial gesek udara dengan dawai sebesar nol  $EP_{fk_{ud_0}} = 0$  dan dimisalkan  $y_1 = y$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\Delta EP_{fk_{ud}} &= -d\eta \left( \frac{dy}{dt} y_1 \right) \\ EP_{fk_{ud}} - EP_{fk_{ud_0}} &= -d\eta y \left( \frac{dy}{dt} \right) \\ EP_{fk_{ud}} - 0 &= -d\eta y \left( \frac{dy}{dt} \right) \\ EP_{fk_{ud}} - 0 &= -d\eta y \left( \frac{dy}{dt} \right)\end{aligned}\quad (3.82)$$

---

### 3.14 Energi Potensial Tegangan Dawai

Ketika benda mencapai titik tengah dawai *flying fox*, terjadi gaya tarik ke bawah oleh benda pada dawai sehingga terdapat gaya tegangan di kedua sisi dawai *flying fox* tersebut. Seperti halnya pada gaya pegas di atas, gaya tegangan ini akan dibagi menjadi dua sisi. Gaya tegangan yang terjadi pada dawai *flying fox* dapat dituliskan sebagai:

$$f_T = \sigma A \quad (3.83)$$

dengan  $f_T$  gaya tegangan dawai *flying fox*,  $\sigma$  adalah tegangan dawai *flying fox*,  $A$  luas penampang dawai *flying fox*. Jika besar tegangan pada dawai *flying fox* dapat ditentukan melalui rumus:

$$\sigma = eE \quad (3.84)$$

dalam hal ini  $\sigma$  adalah tegangan dawai *flying fox*  $e$  adalah regangan dawai *flying fox* dan  $E$  sebagai modulus elastisitas dawai *flying fox*. Sebelum mendapatkan besar tegangan dawai *flying fox*, maka perlu diketahui besar regangan yang terjadi pada dawai *flying fox* terlebih dahulu. Dalam hal ini didefinisikan rumus regangan  $e$  dapat dituliskan sebagai:

$$e = \frac{\Delta X}{X} \quad (3.85)$$

dengan  $\Delta X$  besar pertambahan panjang dawai *flying fox*,  $X$  panjang awal dawai *flying fox*. Dalam penelitian ini,

$\Delta X$  disimbolkan dengan  $x^-$  dan  $x^+$  masing-masing untuk sisi kiri dan sisi kanan. Selanjutnya  $X$  disimbolkan dengan  $x_i^-$  dan  $x_i^+$  yang masing-masing untuk sisi kiri dan sisi kanan. Untuk sisi kiri dawai *flying fox*, besar pertambahan panjang di sisi kiri  $x^- = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{2}l}$  pada persamaan (3.57) dan panjang mula-mula dawai *flying fox* di sisi kiri  $x_i^- = -\frac{1}{2}l$ . Dengan demikian dapat diperoleh regangan di sisi kiri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} e^- &= \frac{x^-}{x_i^-} \\ &= \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{2}l}}{-\frac{1}{2}l} \\ &= -\left(\frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}}{l} + 1\right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Selanjutnya pada sisi kanan mengambil besar pertambahan panjang di sisi kanan  $x^+ = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - \frac{1}{2}l$  ada persamaan (3.60) dan panjang mula-mula dawai *flying fox* di sisi kanan  $x_i^+ = \frac{1}{2}l$ . Dengan demikian besar regangan di sisi kanan dawai *flying fox* adalah:

$$\begin{aligned} e^+ &= \frac{x^+}{x_i^+} \\ &= \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - \frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}l} \\ &= \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}}{l} - 1 \end{aligned} \quad (3.87)$$

---

Selanjutnya, akan diidentifikasi bentuk gaya tegangan  $f_T$  yang terjadi pada sisi kiri dan sisi kanan dawai *flying fox*. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.86) ke dalam persamaan (3.83), maka gaya tegangan pada sisi kiri dawai *flying fox*  $f_{T^-}$  dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 f_{T^-} &= \sigma^- A \\
 &= (e^- E) A \\
 &= \left( \frac{x^-}{x_i^-} \right) EA \\
 &= - \left( 2 \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

dengan  $\sigma^-$  merupakan tegangan yang terjadi di sisi kiri dawai *flying fox*. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.87) ke dalam persamaan (3.83), maka gaya tegangan pada sisi kanan dawai *flying fox* (3.83) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 f_{T^+} &= \sigma^- A \\
 &= (e^+ E) A \\
 &= \left( \frac{x^+}{x_i^+} \right) EA \\
 &= - \left( 2 \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh besar gaya tegangan dari masing-masing sisi dawai *flying fox*, langkah selanjutnya adalah menentukan besar energi potensial

tegangan yang terjadi. Gaya tegangan di sisi kiri dawai *flying fox* terjadi di sepanjang  $x_i^-$ . Dengan demikian energi potensial tegangan pada sisi kiri dawai *flying fox* dapat diperoleh dengan:

$$\begin{aligned}
 \Delta EP_{T^-} &= - \int_{x_{i_0}^-}^{x_{i_1}^-} f_{T^-} dx_i^- \\
 &= - \int_{x_{i_0}^-}^{x_{i_1}^-} - \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA dx_i^- \\
 &= - \left[ \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA x_i^- \right]_{x_{i_0}^-}^{x_{i_1}^-} \\
 &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA (x_{i_1}^- - x_{i_0}^-) \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

Jika diasumsikan pada posisi awal  $x_{i_0}^- = 0$  memiliki energi potensial pegas di sebelah kiri sebesar nol  $EP_{T_0^-} = 0$  dan  $x_{i_1}^- = x_i^- = -\frac{1}{2}l$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 EP_{T^-} &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA x_{i_1}^- \\
 EP_{T^-} - EP_{T_0^-} &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA x_i^- \\
 EP_{T^-} - 0 &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) EA \left( -\frac{1}{2}l \right)
 \end{aligned}$$

---


$$EP_{T^-} = \left( -\frac{1}{2}l \right) \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l} \right) \quad (BA1)$$

Selanjutnya, gaya tegangan di sisi kanan dawai terjadi di sepanjang  $x_{i^+}$ . Dengan demikian energi potensial pada sisi kanan dawai *flying fox* diperoleh:

$$\begin{aligned} \Delta EP_{T^-} &= - \int_{x_{i_0^+}}^{x_{i_1^+}} f_{T^+} dx_i^+ \\ &= - \int_{x_{i_0^+}}^{x_{i_1^+}} - \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA dx_i^+ \\ &= - \left[ \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA x_i^+ \right]_{x_{i_0^+}}^{x_{i_1^+}} \\ &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA (x_{i_1^+} - x_{i_0^+}) \end{aligned} \quad (3.92)$$

Jika diasumsikan pada posisi awal  $x_{i_0^+} = 0$  memiliki energi potensial pegas di sebelah kanan sebesar nol  $EP_{T_0^+} = 0$  dan  $x_{i_1^+} = x_{i^+} = \frac{1}{2}l$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} EP_{T^+} &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA x_{i_1^+}^+ \\ EP_{T^+} - EP_{T_0^+} &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA x_{i^+}^+ \\ EP_{T^+} - 0 &= \left( \frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l} \right) EA \left( -\frac{1}{2}l \right) \end{aligned}$$

---


$$EP_{T^+} = \left(-\frac{1}{2}l\right) \left(\frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l}\right) \quad (EA3)$$

Sehingga energi potensial total tegangan  $EP_T$  yang terjadi di kedua sisi dawai *flying fox* dapat dituliskan dengan:

$$\begin{aligned} EP_T &= EP_{T^-} + EP_{T^+} \\ &= \left( \left(-\frac{1}{2}l\right) \left(\frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l}\right) EA \right) \\ &\quad + \left( \left(-\frac{1}{2}l\right) \left(\frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l}\right) EA \right) \\ &= -\frac{1}{2}lEA \left( \left(\frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + 1}{l}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} - 1}{l}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2}lEA \left( \frac{4\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}}{l} \right) \\ &= -2\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} EA \end{aligned} \quad (3.94)$$

Setelah mengidentifikasi energi potensial dari masing-masing gaya yang bekerja pada dawai *flying fox*, maka dapat diperoleh suatu bentuk energi potensial total model  $EP_M$  energi potensial total model  $EP_M$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan seluruh energi potensial yang menjadi akibat dari gaya-gaya yang

---

bekerja pada dawai *flying fox* yang telah diidentifikasi sebelumnya. Berdasarkan uraian di atas, terdapat enam energi potensial yang terjadi pada dawai *flying fox*. Dengan demikian, energi potensial total model  $EP_M$  dari dawai *flying fox* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 EP_M &= EP_G + EP_W + EP_{fk} + EP_{fk_{ub}} + EP_{fk_{ud}} + EP_T \\
 &= \frac{1}{4}kl^2 (\tan^2 \theta + 2) + (-mg_b y) \\
 &\quad + \mu_k N \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} + b\eta v \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \\
 &\quad + \left( d\eta y \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) + \left( -2 \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} EA \right) \\
 &= \frac{1}{4}kl^2 (\tan^2 \theta + 2) - \left( m_b g + d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) y \\
 &\quad + \left( \mu_k N + b\eta v - 2EA \right) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}
 \end{aligned}$$

### 3.15 Energi Kinetik pada Dawai Flying Fox dan Benda

Setelah mengidentifikasi seluruh energi potensial yang terjadi, langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi energi kinetik yang terjadi pada dawai *flying fox*. Ketika benda meluncur pada dawai *flying fox*, terjadi gerak osilasi pada dawai sehingga energi kinetik yang terjadi pada dawai *flying fox* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$EK_d = \frac{1}{2}m_d \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \quad (3.95)$$

dengan  $EK_d$  adalah energi kinetik dawai *flying fox*,  $m_d$  massa dawai *flying fox*,  $\frac{dy}{dt}$  adalah kecepatan dawai *flying fox* berosilasi Ketika benda meluncur pada dawai *flying fox*, benda mengalami perpindahan posisi. Pada kasus ini, penulis membatasi benda meluncur hingga titik tengah dawai *flying fox*. Dengan demikian, terdapat energi kinetik  $EK_b$  yang bekerja pada benda yang meluncur dengan kecepatan  $v$ . Berdasarkan persamaan sebelumnya dimana didefinisikan  $v = \omega r$  dimana  $\omega$  merupakan kecepatan sudut dawai dan dapat dituliskan sebagai:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.96)$$

Berikutnya adalah analisis momen inersia pada dawai *flying fox*. Pandang pada dawai *flying fox* yang digantungkan suatu benda bermassa  $m_b$  mengikuti kasus batang silinder dengan poros yang melalui pusatnya. Hal ini dikarenakan benda terletak di tengah dawai *flying fox*. Dengan demikian momen inersia  $I$  adalah sebagai berikut:

$$I = \frac{1}{4}ml^2 \quad (3.97)$$

Dengan demikian dapat diketahui energi kinetik benda berotasi  $EK_b$  dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} EK_b &= \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{1}{24}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.98)$$

---

Setelah memperoleh bentuk energi kinetik dawai  $EK_d$  dan energi kinetik benda  $EK_b$  maka akan diperoleh energi kinetik model  $EK_M$  energi kinetik model dari dawai *flying fox* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 EK_M &= EK_d + EK_b \\
 &= \frac{1}{2}m_d \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{24}m_d l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_d \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{12}l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan energi potensial model dan energi kinetik model, langkah selanjutnya menentukan persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L &= EK_M - EP_M \\
 &= \left( \frac{1}{2}m_d \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{12}l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{1}{4}(\tan^2 \theta + 2) \right) + \left( m_bg + d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) y \right. \\
 &\quad \left. - (\mu_k N + b\eta v - 2EA) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \right)
 \end{aligned}$$

Persamaan (3.100) dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned}
 L &= EK_M - EP_M \\
 &= \left( \frac{1}{2}m_d \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{12}l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + 2 \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

---


$$+ \left( m_b g + d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) y - \\ (\mu_k N + b\eta v - 2EA) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \quad (3.100)$$

Selanjutnya persamaan Lagrange (3.100) diturunkan terhadap t, maka diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.101)$$

dan selanjutnya:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (3.102)$$

Tahap Pertama, menurunkan persamaan (3.100) terhadap variabel  $\theta$ , dengan menganggap suku yang lain sebagai suku konstant maka dapat dihitung:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta \sin \theta}{\cos \theta \cos \theta} \right) \quad (3.103)$$

Dari persamaan (3.103), misalkan  $p = \sin \theta \sin \theta$  dan  $q = \cos \theta \cos \theta$  maka:

$$\frac{dp}{d\theta} = \cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.104)$$

dan untuk  $q = \cos \theta \cos \theta$  diperoleh:

$$\frac{dq}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta = -2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.105)$$

Berdasarkan persamaan (3.104) dan (3.105) dapat diketahui turunan dari persamaan (3.103). Selanjutnya, turunan persamaan (3.103) dapat diperoleh menggunakan aturan sebagai berikut:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{p}{q} \right) = \frac{\left( \frac{dp}{dq} q - p \frac{dq}{d\theta} \right)}{q^2} \quad (3.106)$$

substuisikan persamaan (3.104) dan (3.105) ke dalam persamaan (3.106) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{p}{q} \right) &= \frac{\left( \frac{dp}{dq} q - p \frac{dq}{d\theta} \right)}{q^2} \\ &= \frac{\left( ((2 \sin \theta \cos \theta)(\cos \theta \cos \theta) \right.}{(\cos \theta \cos \theta)^2} \\ &\quad \left. - (\sin \theta \sin \theta)(-2 \sin \theta \cos \theta) \right)}{(\cos \theta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos^3 \theta + 2 \sin^3 \theta \cos \theta}{\cos^4 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\cos^4 \theta} \quad (3.107) \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat trigonometri  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} \quad (3.108)$$

Setelah diperoleh hasil turunan dari  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$  terhadap  $\theta$  maka dapat diketahui turunan persamaan (3.100) terhadap  $\theta$  sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{4} k l^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2 \right) \right) \quad (3.109)$$

Dengan mensubstitusikan hasil turunan dari  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$  terhadap  $\theta$  pada persamaan (3.108) ke dalam persamaan (3.109), maka dapat diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}kl^2 \left( \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) \quad (3.110)$$

Selanjutnya, menurunkan persamaan (3.100) terhadap variabel  $\frac{d\theta}{dt}$ . Pada persamaan tersebut, yang memuat variabel  $\frac{d\theta}{dt}$  adalah suku  $\frac{1}{24}m_d l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$ . Dengan demikian suku yang lain dianggap kosntanta dan memiliki turunan sama dengan 0, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} = \frac{1}{12}m_d l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (3.111)$$

Kemudian persamaan (3.111) diturunkan terhadap  $t$  menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{12}m_d l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{12}m_d l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (3.109) dan (3.112) ke dalam persamaan (3.101), sehingga diperoleh bentuk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{12}m_d l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - \left( -\frac{1}{2}kl^2 \left( \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12}m_d l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2}kl^2 \frac{\sin\theta^3}{\cos}\theta = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{12}{m_d m_d l^2} \left( \frac{1}{2}kl^2 \left( \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \right) \right) \\ &= -\frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \right)\end{aligned}\quad (3.113)$$

Selanjutnya, untuk memenuhi bentuk seperti pada persamaan (3.102), maka dilakukan proses menurunkan persamaan (3.100) terhadap variabel  $y$ . Perlu diingat bahwa pada persamaan (3.100) yang memuat variabel  $y$  adalah  $(m_b g + d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right))y$  dan  $-(\mu_k N + b\eta v + 2EA) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}$ . Dengan demikian suku-suku yang lain dianggap konstanta dan memiliki hasil turunan sama dengan 0. Sebelumnya, harus dilakukan tahap menurunkan suku  $\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}$  terhadap  $y$ . Misalkan  $u = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}$ , sehingga diperoleh turunannya terhadap  $y$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dy} &= \frac{d}{dy} \left( \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \right) \\ &= \frac{d}{dy} \left( y^2 + \frac{1}{4}l^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( y^2 + \frac{1}{4}l^2 \right)^{\frac{-1}{2}} (2y) \\ &= \frac{y}{y^2 + \frac{1}{4}l^2}\end{aligned}\quad (3.114)$$

---

Sehingga persamaan (3.100) jika diturunkan terhadap  $y$  menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( m_b g + d\eta \frac{dy}{dt} \right) y - \right. \\
 &\quad \left. (\mu_k N + b\eta v - 2EA) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \right) \\
 &= \left( m_b g + d\eta \frac{dy}{dt} \right) - (\mu_k N + b\eta v - 2EA) \\
 &\quad \left( \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2} \right) \\
 &= \left( m_b g + d\eta \frac{dy}{dt} \right) - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} \quad (3.115)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, menurunkan persamaan (3.100) terhadap variabel  $\frac{dy}{dt}$ . Pada persamaan tersebut, yang memuat variabel  $\frac{dy}{dt}$  adalah  $\left( \frac{1}{2}m_d \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right)$  dan  $d\eta y \frac{dy}{dt}$ . Dengan demikian, suku-suku yang lain pada persamaan (3.100) dianggap sebagai suatu konstanta dan jika diturunkan maka memiliki nilai turunan sama dengan 0, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \frac{dy}{dt}} \left( \frac{1}{2}m_d \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + d\eta y \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) \\
 &= m_d \left( \frac{dy}{dt} \right) + d\eta y \quad (3.116)
 \end{aligned}$$

---

Selanjutnya persamaan (3.116) diturunkan terhadap variabel  $t$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) &= \frac{d}{dt} \left( m_d \left( \frac{dy}{dt} \right) + d\eta y \right) \\ &= m_d \frac{d^2y}{dt^2} + d\eta \frac{dy}{dt} \quad (3.117)\end{aligned}$$

Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (3.115) dan (3.117) ke dalam persamaan (3.102), sehingga diperoleh bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) + \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ m_d \frac{d^2y}{dt^2} + d\eta \frac{dy}{dt} - \left( m_b g + d\eta \frac{dy}{dt} \right) \\ + \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y &= 0 \\ m_d \frac{d^2y}{dt^2} - m_b g + \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y &= (3.118)\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (3.118) diubah menjadi persamaan berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y + \frac{m_b g}{m_d} \quad (3.119)$$

Dari persamaan (3.113) dan (3.119) maka diperoleh suatu sistem persamaan diferensial dua variabel orde

---

dua seperti berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y + \frac{m_b g}{m_d} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right)\end{aligned}\quad (3.120)$$

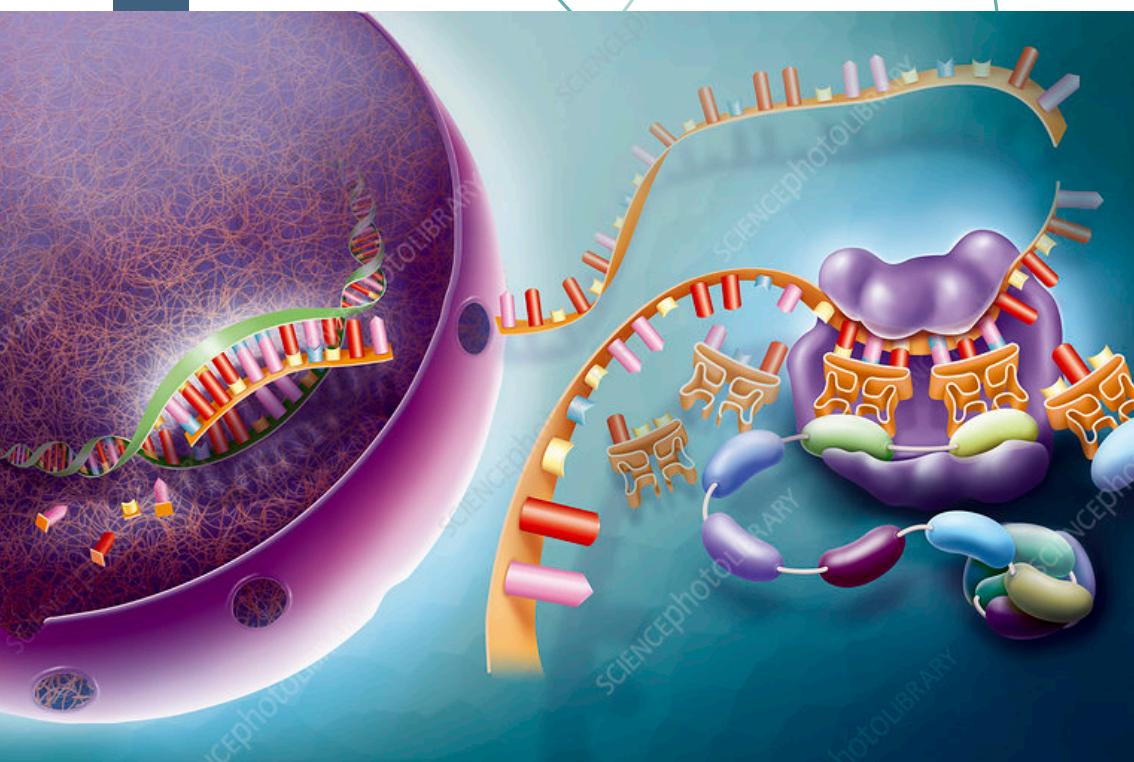
Kedua persamaan pada persamaan (3.120) masing-masing dipengaruhi oleh faktor  $\delta_1 \frac{dy}{dt}$  untuk persamaan pertama dan faktor  $\delta_2 \frac{d\theta}{dt}$  untuk persamaan kedua. Nilai  $\delta_1$  dan  $\delta_2$  masing-masing adalah frekuensi vibrasi dawai *flying fox* saat dawai berosilasi dan terjadi gerak torsional. Dengan demikian, persamaan (3.120) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y + \frac{m_b g}{m_d} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right)\end{aligned}\quad (3.121)$$

Persamaan (3.121) merupakan model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

# Bab 4

## Model Mekanisme Sintesis Protein yang Melibatkan mTORC1 dari Jalur AMPK



---

## **4.1 Pendahuluan mengenai Sintesis Protein**

Sintesis protein merupakan proses untuk menguraikan urutan asam amino sehingga terbentuk molekul protein. Sintesis protein melibatkan DNA, RNA, dan berbagai macam enzim. Proses ini merupakan proses yang umum terjadi di semua domain kehidupan. Sintensis protein terdiri dari rangkaian reaksi kimia yang rumit sampai terbentuk molekul protein yang berguna untuk zat pembangun dalam tubuh. Mekanisme sintesis melibatkan banyak molekul dan energi. Mekanisme sintesis protein yang melibatkan interaksi beberapa gen dapat bersifat katalis, yakni mempercepat reaksi kimia. Interaksi beberapa gen berpengaruh besar bagi proses sintesis protein. Reaksi antar gen dapat digambarkan menggunakan *pathway* sintesis protein yang melibatkan interaksi gen-gen yaitu AMPK, TSC, Rheb, mTORC1, dan S6K. mTORC1 ditunjuk sebagai gen regulator penting dalam sintesis protein (Cordero, 2016). Suatu gen akan memiliki berbagai respon atau reaksi terhadap gen lainnya. Dalam Web resmi KEGG *pathway* terdapat macam-macam reaksi antar gen yaitu fosforilasi (saling berikatan dengan bantuan fosfor), aktivasi (saling

---

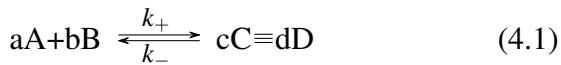
mengaktifkan), inhibisi (saling menghambat), dan *binding* (saling berikatan). Fosforilasi adalah suatu proses penambahan gugus fosfor ke protein kinase berikutnya sehingga terlibat dalam aktivasu reseptor tironin-kinase (Campbel, 2002). Katalisis adalah suatu proses yang melibatkan enzim lain ke dalam suatu reaksi, namun enzim tersebut kembali ke wujud semula dalam jumlah yang sama/tetap setelah reaksi berlangsung atau selesai. Katalisis dibagi menjadi dua yaitu katalisis positif (mempercepat) dan katalis negatif (memperlambat) atau biasa disebut *inhibition* (Muchtaridi, 2007). Pemodelan reaksi antar gen dalam *pathway KEGG signaling mTOR* dalam bentuk persamaan matematika sudah dilakukan pada penelitian Kusumastutis (2019).

## 4.2 Identifikasi Hukum yang Berlaku dalam Reaksi antar Gen dalam Mekanisme Sintesis Protein

### 4.2.1 Hukum Keseimbangan Massa

Hukum keseimbangan massa menyatakan bahwa laju input massa ke dalam suatu sistem sama dengan laju perubahan massa dalam sistem.

### 4.2.2 Hukum Aksi Massa



Persamaan (4.1) adalah contoh persamaan dari suatu reaksi kimia. *A* dan *B* berperan sebagai reaktan, *C* dan *D* sebagai produk/hasil reaksi kimia, *a,b,c,d* adalah koefisien

stoikiometrik, dan  $k_+, k_-$  adalah konstanta laju yang bernilai positif. Laju reaksi atau laju perubahan konsentrasi reaktan/produk dapat dinyatakan dalam bentuk turunan  $\frac{d[A]}{dt}, \frac{d[B]}{dt}, \frac{d[C]}{dt}, \frac{d[D]}{dt}$ .

Dengan hukum aksi massa, kinetika reaksi kimia dapat dijelaskan dan diprediksi. Laju reaksi maju ( $v_+$ ) dan laju reaksi mundur ( $v_-$ ) sebanding dengan produk dari konsentrasi molekul yang berpartisipasi, sehingga diperoleh sebagai berikut.

$$\text{Reaksi maju: } v_+ = k_+[A]^a[B]^b, \quad (4.2)$$

$$\text{Reaksi mundur: } v_- = k_-[C]^c[D]^d. \quad (4.3)$$

Dengan menggunakan hukum keseimbangan massa dan menurunkan persamaan laju reaksi, diperoleh

$$\frac{d[A]}{dt} = v_- - v_+ = -k_+[A]^a[B]^b + k_-[C]^c[D]^d \quad (4.4)$$

$$\frac{d[B]}{dt} = v_- - v_+ = -k_+[A]^a[B]^b + k_-[C]^c[D]^d \quad (4.5)$$

$$\frac{d[C]}{dt} = v_+ - v_- = k_+[A]^a[B]^b - k_-[C]^c[D]^d \quad (4.6)$$

$$\frac{d[D]}{dt} = v_+ - v_- = k_+[A]^a[B]^b - k_-[C]^c[D]^d \quad (4.7)$$

Kondisi kesetimbangan (*steady state*) adalah kondisi dimana konsentrasi suatu bahan kimia tidak berubah, dituliskan  $\frac{d[X]}{dt} = 0$ . Dengan demikian, maka kondisi kesetimbangan bahan kimia  $A, B, C$ , dan  $D$  secara berturut-turut berlaku  $\frac{d[A]}{dt} = 0$ ,  $\frac{d[B]}{dt} = 0$ ,  $\frac{d[C]}{dt} = 0$ , dan  $\frac{d[D]}{dt} = 0$ . Sehingga diketahui bahwa

$$k_+[A]^a[B]^b = k_-[C]^c[D]^d, \quad (4.8)$$

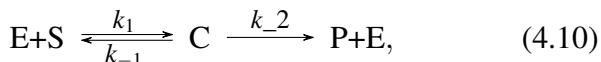
---

dan konstanta kesetimbangan reaksi ( $K_{eq}$ ) didefinisikan sebagai berikut.

$$K_{eq} = \frac{k_+}{k_-} = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b} \quad (4.9)$$

#### 4.2.3 Persamaan Michaelis-Menten

Reaksi enzimatik adalah reaksi yang menggunakan enzim sebagai katalisator sehingga proses reaksi berlangsung lebih cepat. Reaksi enzimatik berlangsung dalam dua tahapan, tahap pertama adalah reaksi dimana substrat mengikat enzim (selanjutnya gabungan substrat dan enzim ini disebut sebagai reaktan). Selanjutnya, reaktan membentuk kompleks enzim/substrat. Tahap kedua, kompleks enzim/substrat tersebut diubah menjadi kompleks enzim/produk dan produk dilepaskan dari ikatan enzim. Contoh reaksi enzimatik dan persamaan reaksi kimia adalah sebagai berikut.



$E$  merupakan enzim,  $S$  merupakan substrat,  $C$  merupakan kompleks dari  $E$  dan  $S$ ,  $P$  merupakan produk, dan  $k_1$ ,  $k_{-1}$ ,  $k_2$  merupakan konstanta laju reaksi. Berdasarkan persamaan reaksi kimia tersebut, diperoleh sistem persamaan diferensial biasa (4.11) sampai (4.14). Persamaan tersebut diperoleh dengan menerapkan hukum aksi massa dan hukum keseimbangan massa.

$$\frac{d[S]}{dt} = -k_1[E][S] + k_{-1}[C] \quad (4.11)$$

$$\frac{d[E]}{dt} = -k_1[E][S] + (k_{-1} + k_2)[C] \quad (4.12)$$

---

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1[E][S] - (k_{-1} + k_2)[C] \quad (4.13)$$

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2[C] \quad (4.14)$$

Jika persamaan (4.12) dan (4.13) dijumlah, diperoleh

$$\frac{d[E]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} = 0$$

sehingga diperoleh  $[E] + [C] = [E_0]$ , dimana  $[E_0]$  adalah konsentrasi total enzim yang tersedia. Konsentrasi kompleks pada reaksi enzimatik dipastikan mencapai kesetimbangan dalam interval waktu yang lebih cepat daripada substrat. Hal ini berdasarkan studi eksperimental yang sudah pernah dilakukan. Oleh karena itu, konsentrasi  $C$  tidak berubah, sehingga diperoleh

$$[C] = \frac{k_1[E][S]}{(k_{-1} + k_2)} \quad (4.15)$$

Asumsi *quasi-steady state* mendukung perubahan persamaan (4.15) menjadi

$$[C] = \frac{[E_0][S]}{[S] + \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}}. \quad (4.16)$$

Dengan demikian, dengan cara yang analog, maka dari persamaan (4.12) diperoleh

$$[E] = \frac{[E_0] \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}}{[S] + \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}}. \quad (4.17)$$

Persamaan (4.17) inilah yang biasa disebut sebagai persamaan Michaelis-Menten. Persamaan tersebut menyatakan laju reaksi secara matematis.

---

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (4.16) ke persamaan (4.14), diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = \frac{V_{\max}[S]}{[S] + K_m}, \quad (4.18)$$

dengan penskalaan

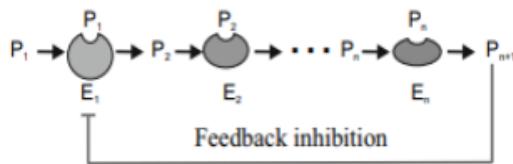
$$V_{\max} = k_2[E_0] \quad (4.19)$$

$$K_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}. \quad (4.20)$$

$V_{\max}$  adalah kecepatan maksimal reaksi dan  $K_m$  adalah konstanta Michaelis-Menten.

#### 4.2.4 inhibitor

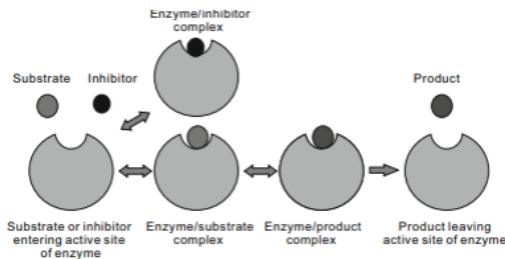
Reaksi biokimia yang berjalan di dalam sel termasuk dalam jalur metabolisme yang didalamnya terdapat urutan reaksi kimia. Setiap reaksi kimia dalam urutan tersebut dikatalisis oleh enzim tertentu. Reaksi berikutnya akan berjalan dengan produk dari reaksi sebelumnya sebagai substrat.



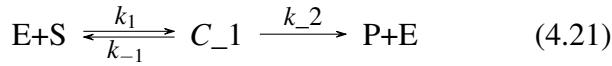
**Gambar 4.1.** Jalur Metabolisme Generik

Berdasarkan gambar 4.1, Enzim  $E_1$  mengubah substrat  $P_1$  menjadi metabolit  $P_2$ , enzim  $E_2$  mengubah  $P_2$  metabolit menjadi metabolit  $P_3$ , dan akhirnya enzim  $E_n$  mengubah

metabolit  $P_n$  menjadi produk akhir  $P_{n+1}$ . Jika jalur metabolisme menghasilkan produk akhir dengan kadar lebih banyak daripada yang dibutuhkan, maka produk akan mengikat lebih dari satu enzim. Akibatnya, pengikatan molekul substrat menjadi terganggu dan proses reaksi terhambat. Reaksi dengan penghambatan secara skematis disajikan pada gambar 4.2 dengan persamaan reaksi pada persamaan (4.26) dan (4.27) berikut.



**Gambar 4.2.** Deskripsi Skematis dari Reaksi Enzimatik dengan Penghambatan



$I$  adalah inhibitor/penghambat. Berdasarkan hukum aksi massa dan keseimbangan massa, maka dari persamaan reaksi (4.21) dan (4.22) diperoleh persamaan diferensial berikut.

$$\frac{d[C_1]}{dt} = k_1[E][S] - (k_{-1} + k_2)[C_1] \quad (4.23)$$

---


$$\frac{d[C_2]}{dt} = k_3[E][I] - k_{-3}[C_2] \quad (4.24)$$

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2[C_1] \quad (4.25)$$

Dengan menggunakan aproksimasi *quasi-steady state*, diperoleh

$$[C_1] = \frac{[E_0][S]}{[S] + K_i K_m [I] + K_m}, \quad (4.26)$$

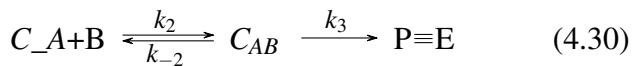
dengan

$$K_i = \frac{k_3}{k_{-3}}. \quad (4.27)$$

Maka kecepatan reaksi didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2[C_1] - \frac{V_{\max}[S]}{[S] + K_m (1 - K_i[I])} \quad (4.28)$$

Berdasarkan persamaan (4.18) dan (4.28), dapat disimpulkan bahwa efek inhibitor  $I$  dapat memperbesar nilai konstanta Michaelis-Menten sehingga reaksi menjadi lebih lambat, namun tanpa merubah kecepatan maksimum reaksi. Selanjutnya dimisalkan reaksi dengan penghambatan dimana dua substrat berikatan dengan enzim, disajikan pada persamaan reaksi pada persamaan (4.29) dan (4.30) berikut.



---

dengan cara yang analog, diperoleh sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned} k_1[E][A] + k_{-2}[C_{AB}] - k_{-1}[C_A] - k_2[C_A][B] &= 0 \\ -(k_{-2} + k_3)[C_{AB}] + k_2[C_A][B] &= 0 \\ k_4[E][I] - k_{-4}[C_1] &= 0 \\ [E] + [C_A] + [C_{AB}] + [C_1] &= [E_0] \end{aligned}$$

Dan diperoleh

$$[C_{AB}] = \frac{K_1[B][A][E_0]}{\left( K_n(K_4[I] + K_1[A] + 1) + K_4K_d[I][B] \right.} + \left. K_1[A][B] + K_d[B] \right), \quad (4.32)$$

dengan

$$K_n = \frac{k_{-2} + k_3}{k_2}, \quad (4.33)$$

$$K_1 = \frac{k_1}{k_{-1}}, \quad (4.34)$$

$$K_4 = \frac{k_4}{k_{-4}}, \quad (4.35)$$

$$K_d = \frac{k_3}{k_{-1}}, \quad (4.36)$$

dan diperoleh kecepatan reaksi

$$\frac{d[P]}{dt} = k_3[C_{AB}]. \quad (4.37)$$

#### 4.2.5 AMPK

Protein kinase teraktivasi-AMP (AMPK) adalah multiprotein kinase yang terdiri dari subunit katalitik ( $\alpha$ ) dan dua subunit pengatur ( $\beta, \gamma$ ). Isoform dari subunit ada

---

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ , dan  $\gamma_3$  dapat membentuk kombinasi yang berbeda dan menghasilkan 12 kompleks AMPK.

#### 4.2.6 TSC

Tuberous sclerosis (TSC) adalah gangguan autosom dominan yang ditandai oleh pembentukan hamartoma di berbagai jaringan manusia. Mutasi pada gen penekan tumor TSC1 atau TSC2 bertanggung jawab atas bentuk familial dan sporadis penyakit ini. Protein TSC1 dan TSC2 membentuk kompleks fisik dan fungsional in vivo. TSC1-TSC2 menghambat protein ribosom p70 S6 kinase 1 (aktivator terjemahan p70) dan mengaktifkan faktor inisiasi eukariotik 4E mengikat protein 1 (4E-BP1, inhibitor inisiasi translasi). Kompleks TSC1/2 terbukti dapat menonaktifkan mTORC1 dengan cara mentranslokasikan ke lisosom, hal ini sebagai respons terhadap dua tekanan, yakni kelaparan asam amino dan penghilangan faktor pertumbuhan.

#### 4.2.7 Rheb

RHEB adalah protein pengikat GTP yang dimiliki oleh manusia dan ada pada hampir semua mamalia. Rheb disinyalir merupakan protein aktivator mTOR. Pada penelitian Hall (2010), disimpulkan bahwa aktivasi Rheb spesifik hanya untuk mTORC1, karena tidak ada efek Rheb terhadap mTORC2.

#### 4.2.8 mTOR

mTOR (*the Mammalian Target of Rapamycin*) adalah protein kinase pada manusia yang dikodekan oleh gen MTOR. mTOR

---

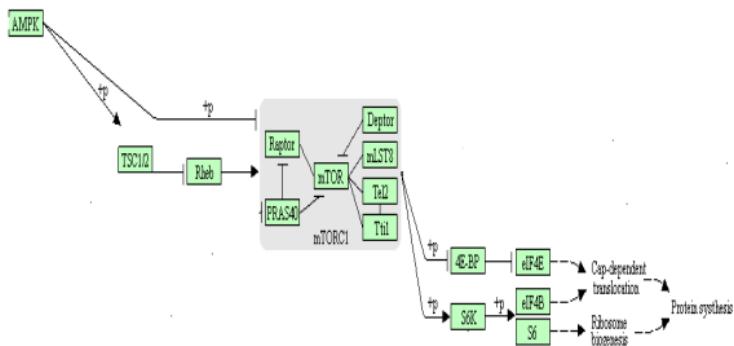
mengintegrasikan insulin, faktor pertumbuhan (seperti IGF-1 dan IGF-2), dan asam amino. mTOR juga mengatur nutrisi seluler, oksigen, dan tingkat energi. Jalur mTOR adalah pengatur pusat metabolisme dan fisiologi mamalia, yang memiliki peran penting dalam fungsi jaringan termasuk hati, otot, jaringan adiposa putih dan coklat, otak, dan disregulasi pada penyakit manusia, seperti diabetes, obesitas, depresi, dan kanker tertentu. mTOR dapat terhambat oleh Rapamycin yang berasosiasi dengan reseptor intraselulernya, yakni FKBP12.

#### **4.2.9 S6K**

Protein S6K adalah efektor jalur mTOR. Penelitian membuktikan bahwa S6K berkontribusi pada beberapa kondisi patologis, seperti diabetes, kanker, dan obesitas. Aktivasi sumbu S6K merangsang sintesis protein dan pertumbuhan sel. S6K1 memiliki dua isoform terkenal, yakni enzim (secara lebih spesifik adalah protein kinase) p70-S6K1 dan p85-S6K1. Isoform ketiga disebut p31-S6K1, telah dicirikan sebagai jenis protein yang terpotong karena penyambungan alternatif, dan laporan penelitian juga telah menunjukkan peran pentingnya dalam kanker.

### **4.3 Analisis Mekanisme Sintesis Protein yang melibatkan mTORC1 dari jalur AMPK**

*Pathway* pada Gambar 4.3 menunjukkan skema dari mekanisme sintesis protein yang melibatkan mTORC1 dari jalur AMPK. Pathway ini merupakan reduksi dari *pathway* lengkap mengenai *signaling* mTOR.



**Gambar 4.3.** Skema Sintesis Protein yang melibatkan mTORC1 dari jalur AMPK

#### 4.3.1 Identifikasi Jenis Interaksi antar Gen

Identifikasi antar gen pada skema pada Gambar 4.3 dilakukan dengan menggunakan *Software String*, juga dengan mempertimbangkan hasil penelitian mengenai interaksi antara dua gen bersangkutan. Jenis interaksi antar gen disajikan pada tabel-tabel berikut.

##### 1. Interaksi antara AMPK dan TSC2

Predictions for specific actions:		
Activation:	yes (score: 0.861)	Show
Catalysis:	yes (score: 0.930)	Show
Post-translational modification:	yes (score: 0.861)	Show

**Gambar 4.4.** Hasil Analisis *String* Interaksi AMPK dan TSC2

##### 2. Interaksi antara TSC2 dan Rheb

---

**Predictions for specific actions:**

Activation:	yes (score: 0.952)	Show
Catalysis:	yes (score: 0.932)	Show
Inhibition:	yes (score: 0.953)	Show

**Gambar 4.5.** Hasil Analisis *String* Interaksi TSC2 dan Rheb

3. Interaksi antara Rheb dan mTORC1

**Predictions for specific actions:**

Activation:	yes (score: 0.927)
Binding:	yes (score: 0.959)
Catalysis:	yes (score: 0.959)
Post-translational modification:	yes (score: 0.565)
Reaction:	yes (score: 0.959)

**Gambar 4.6.** Hasil Analisis *String* Interaksi Rheb dan mTORC1

4. Interaksi antara PRAS40 dan mTOR

**Predictions for specific actions:**

Binding:	yes (score: 0.922)
Catalysis:	yes (score: 0.922)
Inhibition:	yes (score: 0.845)
Post-translational modification:	yes (score: 0.401)
Reaction:	yes (score: 0.922)

**Gambar 4.7.** Hasil Analisis *String* Interaksi PRAS40 dan mTOR

5. Interaksi antara PRAS40 dan Raptor

---

**Predictions for specific actions:**

Binding:	yes (score: 0.904)	Show
Catalysis:	yes (score: 0.904)	Show
Inhibition:	yes (score: 0.809)	Show
Reaction:	yes (score: 0.904)	Show

**Gambar 4.8.** Hasil Analisis *String* Interaksi PRAS40 dan RaptorR

6. Interaksi antara Deptor dan mTOR

**Predictions for specific actions:**

Binding:	yes (score: 0.902)
Expression with Inhibition:	yes (score: 0.623)
Inhibition:	yes (score: 0.804)
Post-translational modification:	yes (score: 0.623)

**Gambar 4.9.** Hasil Analisis *String* Interaksi Deptor dan mTOR

7. Interaksi antara Rheb dan Raptor

**Predictions for specific actions:**

Activation:	yes (score: 0.917)
Binding:	yes (score: 0.958)
Catalysis:	yes (score: 0.958)
Post-translational modification:	yes (score: 0.459)
Reaction:	yes (score: 0.958)

**Gambar 4.10.** Hasil Analisis *String* Interaksi Rheb dan Raptor

8. Interaksi antara mTOR dan mLST8

---

**Predictions for specific actions:**

Binding:	yes (score: 0.978)	Show
Catalysis:	yes (score: 0.965)	Show
Reaction:	yes (score: 0.965)	Show

**Gambar 4.11.** Hasil Analisis *String* Interaksi mTOR dan mLST8

9. Interaksi antara Raptor dan mTOR

**Predictions for specific actions:**

Binding:	yes (score: 0.973)	Show
Catalysis:	yes (score: 0.965)	Show
Post-translational modification:	yes (score: 0.637)	Show
Reaction:	yes (score: 0.965)	Show

**Gambar 4.12.** Hasil Analisis *String* Interaksi Raptor dan mTOR

10. Interaksi antara mTORC1 dan S6K

**Predictions for specific actions:**

Activation:	yes (score: 0.964)
Binding:	yes (score: 0.905)
Catalysis:	yes (score: 0.964)
Inhibition:	yes (score: 0.964)
Post-translational modification:	yes (score: 0.960)

**Gambar 4.13.** Hasil Analisis *String* Interaksi mTORC1 dan S6K

#### 4.3.2 Menyusun Reaksi Kinetik dari Gen

Interaksi antara gen dapat digambarkan dalam bentuk persamaan reaksi kinetik dengan warna sebagai tanda. Gen yang dituliskan dengan warna biru bertindak sebagai reaktan,

---

warna biru bertindak sebagai substrat, warna merah bertindak sebagai kompleks dari reaktan dan substrat, dan warna merah muda bertindak sebagai produk.

1. Skema reaksi kinetik AMPK dan TSC2



**Gambar 4.14.** Skema Reaksi Kinetik AMPK dan TSC2

2. Skema reaksi kinetik TSC2 dan Rheb



**Gambar 4.15.** Skema Reaksi Kinetik TSC2 dan Rheb

3. Skema reaksi kinetik Rheb dan mTORC1



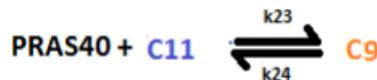
**Gambar 4.16.** Skema Reaksi Kinetik Rheb dan mTORC1

4. Skema reaksi kinetik PRAS40 dan mTOR



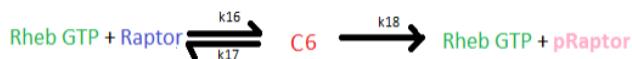
**Gambar 4.17.** Skema Reaksi Kinetik PRAS40 dan mTOR

5. Skema reaksi kinetik PRAS40 dan Raptor



**Gambar 4.18.** Skema Reaksi Kinetik PRAS40 dan Raptor

6. Skema reaksi kinetik Deptor dan mTOR



**Gambar 4.19.** Skema Reaksi Kinetik Deptor dan mTOR

7. Skema reaksi kinetik Rheb dan Raptor



**Gambar 4.20.** Skema Reaksi Kinetik Rheb dan Raptor

8. Skema reaksi kinetik mTOR dan mLST8



**Gambar 4.21.** Skema Reaksi Kinetik mTOR dan mLST8

9. Skema reaksi kinetik Raptor dan mTOR



**Gambar 4.22.** Skema Reaksi Kinetik Raptor dan mTOR

10. Skema reaksi kinetik mTORC1 dan S6K



**Gambar 4.23.** Skema Reaksi Kinetik mTORC1 dan S6K

## 4.4 Formulasi Model Matematika untuk Mekanisme Sintesis Protein yang Melibatkan mTORC1 dari Jalur AMPK

### 4.4.1 Identifikasi Variabel

Variabel yang terlibat dalam mekanisme sintesis protein yang melibatkan mTORC1 dari jalur AMPK dibedakan menjadi dua jenis, yakni

1. Variabel bebas, yaitu waktu ( $t$ ).

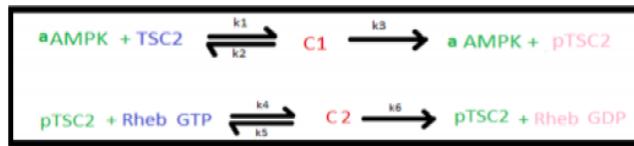
2. Variabel terikat, terdiri dari:

- a.  $[TSC2]$  : Konsentrasi TSC2
- b.  $[pAMPK]$  : Konsentrasi fosforilasi AMPK
- c.  $[pTSC2]$  : Konsentrasi fosforilasi TSC2
- d.  $[Rheb^{GTP}]$  : Konsentrasi  $Rheb^{GTP}$
- e.  $[Rheb^{GDP}]$  : Konsentrasi  $Rheb^{GDP}$
- f.  $[mTORC1]$  : Konsentrasi mTORC1
- g.  $[Raptor]$  : Konsentrasi Raptor
- h.  $[aRaptor]$  : Konsentrasi aktivasi Raptor
- i.  $[Deltor]$  : Konsentrasi Deltor
- j.  $[PRAS40]$  : Konsentrasi PRAS40
- k.  $[mTOR]$  : Konsentrasi mTOR
- l.  $[amTORC1]$  : Konsentrasi aktivasi mTORC1
- m.  $[mLST8]$  : Konsentrasi mLST8
- n.  $[S6K1]$  : Konsentrasi S6K1
- o.  $[pS6K1]$  : Konsentrasi fosforilasi S6K1

#### 4.4.2 Formulasi dalam Bentuk Persamaan Matematika

Dalam memformulasikan model matematika, skema dari setiap interaksi yang sudah terbentuk dibagi menjadi 4 bagian. Bagian yang pertama menunjukkan interaksi AMPK, TSC2, dan Rheb yang ditunjukkan pada Gambar 4.24, bagian kedua menunjukkan skema interaksi di dalam mTORC1 yang ditunjukkan pada Gambar 4.25, bagian ketiga mendeskripsikan interaksi Rheb yang mengaktifkan mTORC1 pada Gambar 4.26, dan bagian keempat menunjukkan skema interaksi dari aktivitas gen mTORC1 terhadap S6K1 untuk sintesis protein Gambar 4.27.

##### 1. Bagian 1: Interaksi AMPK, TSC2, dan Rheb



**Gambar 4.24.** Skema interaksi AMPK dan TSC2

Berdasarkan Gambar 4.24, diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{d[TSC2]}{dt} = k_2[C_1] - k_1[pAMPK][TSC2] \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[pAMPK]}{dt} &= (k_2 + k_3)[C_1] \\ &\quad - k_1[pAMPK][TSC2] \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[pTSC2]}{dt} &= k_3[C_1] + (k_5 + k_6)[C_2] \\ &\quad - k_4[pTSC2][Rheb^{GTP}] \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\frac{d[C_1]}{dt} = k_1[pAMPK][TSC2]$$

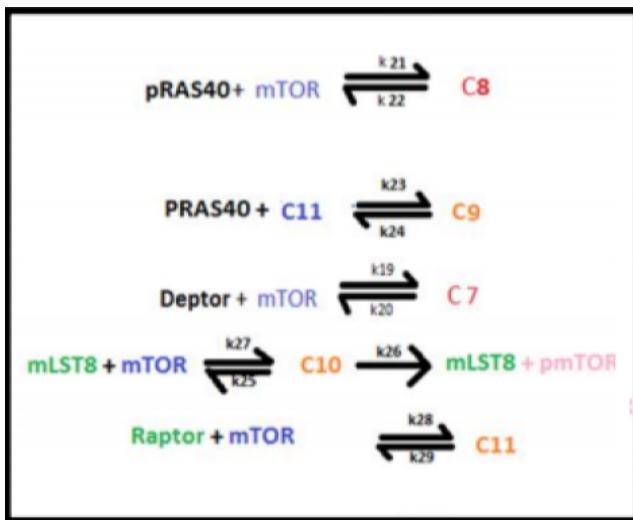
$$- (k_2 + k_3) [C_1] \quad (4.41)$$

$$\frac{d[Rheb^{GDP}]}{dt} = k_6 [C_2] \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[C_2]}{dt} &= k_4 [pTSC2] [Rheb^{GTP}] \\ &\quad - (k_5 + k_6) [C_2] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[Rheb^{GTP}]}{dt} &= (k_{11} + k_{12}) [C_4] \\ &\quad - k_{10} [Rheb^{GTP}] [mTORC1] \\ &\quad + (k_{17} + k_{18}) [C_6] \\ &\quad - k_{16} [Rheb^{GTP}] [Raptor] \end{aligned} \quad (4.44)$$

## 2. Bagian 2: Interaksi di dalam mTORC1



**Gambar 4.25.** Skema interaksi di dalam mTORC1

Berdasarkan Gambar 4.25, diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{d[Deptor]}{dt} = k_{20} [C_7] - k_{19} [Deptor] [mTOR] \quad (4.45)$$

---


$$\frac{d[C_7]}{dt} = k_{19}[Dept or][mTOR] - k_{20}[C_7] \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[PRAS40]}{dt} &= k_{22}[C_8] - k_{21}[RAS40][mTOR] \\ &\quad + k_{24}[C_9] - k_{23}[PRAS40][Raptor] \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{d[C_8]}{dt} = k_{21}[PRAS40][mTOR] - k_{22}[C_8] \quad (4.48)$$

$$\frac{d[mLST8]}{dt} = k_{25}[C_{10}] - k_{27}[mLST8][mTOR] \quad (4.49)$$

$$\frac{d[C_9]}{dt} = k_{23}[PRAS40][Raptor] - k_{24}[C_9] \quad (4.50)$$

$$\frac{d[C_{10}]}{dt} = k_{27}[mLST8][mTOR] - k_{25}[C_{10}] \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[C_{11}]}{dt} &= -k_{28}[C_{11}] + k_{29}[Raptor][mTOR] \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[Raptor]}{dt} &= k_{17}[C_6] - k_{16}[Raptor][Rheb^{GTP}] \\ &\quad + k_{24}[C_9] - k_{23}[PRAS40][Raptor] \\ &\quad + k_{28}[C_{11}] - k_{29}[Raptor][mTOR] \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[mTOR]}{dt} &= k_{20}[C_7] - k_{19}[Dept or][mTOR] \\ &\quad + k_{22}[C_8] - k_{21}[PRAS40][mTOR] \\ &\quad + k_{25}[C_{10}] - k_{27}[mTOR][mLST8] \\ &\quad + k_{28}[C_{11}] - k_{29}[Raptor][mTOR] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Meise (2016) menyebutkan bahwa mTORC1 terdiri dari *PRAS40*, *Raptor*, *mTOR*, *Dept or*, dan *mLST8*, sehingga

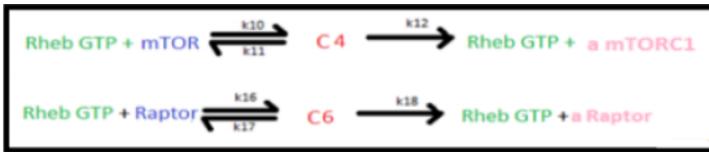
dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$[mTORC1] = [C_7] + [C_8] + [C_9] + [C_{10}] + [C_{11}]$$

sehingga diperoleh

$$\frac{d[mTORC1]}{dt} = k_{11} \frac{[mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}}+[Raptor]} \right)}{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}}+[mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}}+[Raptor]}} - k_{10}[Rheb^{GTP}][mTORC1] \quad (4.55)$$

### 3. Bagian 3: Interaksi Rheb yang mengaktifkan mTORC1



**Gambar 4.26.** Skema interaksi Rheb yang mengaktifkan mTORC1

Berdasarkan Gambar 4.26, diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{d[C_4]}{dt} = k_{10}[Rheb^{GTP}][mTORC1] - (k_{11} + k_{12})[C_4] \quad (4.56)$$

$$\frac{d[C_6]}{dt} = k_{16}[Raptor][Rheb^{GTP}] - (k_{17} + k_{18})[C_6] \quad (4.57)$$

$$\frac{pRaptor}{dt} = k_{18}[C_6] \quad (4.58)$$

$$\frac{amTORC1}{dt} = k_{12}[C_4] + (k_{14} + k_{15})[C_5] \quad (4.59)$$

$$- k_{13}[amTORC1][S6KI]$$

4. Bagian 4: Interaksi dari aktivitas gen mTORC1 terhadap S6K1



**Gambar 4.27.** Skema interaksi dari aktivitas gen mTORC1 terhadap S6K1

Berdasarkan Gambar 4.27, diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\frac{d[S6KI]}{dt} = k_{14}[C_5] - k_{13}[amTORC1][S6KI] \quad (4.60)$$

$$\frac{d[C_5]}{dt} = k_{13}[amTORC1][S6KI] - (k_{14} + k_{15})[C_5] \quad (4.61)$$

$$\frac{dpS6KI}{dt} = k_{15}[C_5] \quad (4.62)$$

#### 4.4.3 Menghitung fungsi $C_i$

Liu (2012) menyatakan bahwa laju perubahan konsentrasi kompleks terhadap waktu tidak berubah, dituliskan

$$\frac{d[C_i]}{dt} = 0$$

1. Fungsi  $C_1$

$$\frac{d[C_1]}{dt} = 0$$

---

dan dapat dinyatakan bahwa

$$\frac{d[pAMPK]}{dt} + \frac{d[C_1]}{dt} = 0, \quad (4.63)$$

dan

$$[pAMPK] + [C_1] = [pAMPK_0] \quad (4.64)$$

sehingga diperoleh

$$[C_1] = \frac{[pAMPK][TSC2]}{[TSC2] + \frac{k_1+k_3}{k_1}} \quad (4.65)$$

## 2. Fungsi $C_2$

$$\frac{d[C_2]}{dt} = 0$$

dan dapat dinyatakan bahwa

$$k_4[pTSC2][Rheb^{GTP}] - (k_5 + k_6)[C_2] = 0 \quad (4.66)$$

sehingga diperoleh

$$[C_2] = \frac{[pTSC2][Rheb]}{\frac{k_5+k_6}{k_4}} \quad (4.67)$$

## 3. Fungsi $C_4$ dan $C_6$

$$\frac{d[C_4]}{dt} = 0$$

dan dapat dinyatakan bahwa

$$\frac{d[Rheb^{GTP}]}{dt} + \frac{d[C_4]}{dt} + \frac{d[C_6]}{dt} = 0 \quad (4.68)$$

$$[Rheb^{GTP}] + [C_4] + [C_6] = [Rheb_{tot}^{GTP}] \quad (4.69)$$

sehingga diperoleh

$$[C_4] = \frac{[mTOR] ([Rheb_{tot}^{GTP}] - [C_6])}{\frac{k_{11} + k_{12}}{k_{10}} + [mTOR]}, \quad (4.70)$$

dan

$$[C_6] = \frac{[Raptor] ([Rheb_{tot}^{GTP}] - [C_4])}{\frac{k_{17} + k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \quad (4.71)$$

Diperoleh hasil akhir  $[C_4]$  dan  $[C_6]$  sebagai berikut.

$$[C_4] = \frac{[mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17} + k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \right)}{\frac{k_{11} + k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17} + k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]}}, \quad (4.72)$$

dan

$$[C_6] = \frac{[Raptor] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17} + k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \right)}{\frac{k_{11} + k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17} + k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]}} \right)}{\frac{k_{17} + k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \quad (4.73)$$

#### 4. Fungsi $C_5$

$$\frac{d[C_5]}{dt} = 0,$$

maka berlaku

$$k_{13}[pmTOR][S6KI] - (k_{14} + k_{15})[C_5] = 0$$

---

dan diperoleh

$$[C_5] = \frac{[pmTOR][S6KI]}{\frac{k_{14}+k_{15}}{k_{13}}} \quad (4.74)$$

### 5. Fungsi $C_7$

$$\frac{d[C_7]}{dt} = 0,$$

maka berlaku

$$\begin{aligned} \frac{d[Deptor]}{dt} + \frac{[C_7]}{dt} &= 0 \\ [Deptor] + [C_7] &= [Deptor_{tot}] \end{aligned}$$

dan diperoleh

$$[C_7] = \frac{[Deptor_{tot}][mTOR]}{[mTOR] + \frac{k_{20}}{k_{19}}} \quad (4.75)$$

### 6. Fungsi $C_8$ dan $C_9$

$$\frac{d[C_8]}{dt} = 0,$$

ketika  $\frac{d[PRAS40]}{dt} = \frac{d[C_9]}{dt} = \frac{d[C_8]}{dt} = 0$ , maka berlaku

$$[PRAS40] + [C_9] + [C_8] = [PRAS40_{tot}],$$

dan diperoleh

$$[C_8] = \frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} \quad (4.76)$$

$$\frac{d[C_9]}{dt} = 0,$$

---

sehingga berlaku

$$[C_9] = \frac{[PRAS40][Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}}}$$

substuisikan  $[PRAS40] = -[C_9] - [C_8] = [PRAS40_{tot}]$ ,  
diperoleh

$$[C_9] = \frac{\left( -\frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} + [PRAS40_{tot}] \right) [Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]} \quad (4.77)$$

7. Fungsi  $C_{10}$

$$\frac{d[C_{10}]}{dt} = 0,$$

sehingga berlaku

$$[mLST8] + [C_{10}] = [mLST_{tot}]$$

dan diperoleh

$$[C_{10}] = \frac{[mLST8_{tot}][mTOR]}{[mTOR] + \frac{k_{25} + k_{26}}{k_{27}}} \quad (4.78)$$

8. Fungsi  $C_{11}$

$$\frac{d[C_{11}]}{dt} = 0$$

sehingga diperoleh

$$[C_{11}] = \frac{\left( -\frac{\left( -\frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} + [PRAS40]_{tot} \right) [Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]} + [Raptor]_{tot} \right) [Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]}$$

#### 4.4.4 Substitusi fungsi $C_i$

Setelah fungsi  $[C_i]$  diperoleh, selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (4.38) sampai persamaan (4.62), sehingga diperoleh model akhir sebagai berikut.

$$\frac{d[TSC2]}{dt} = k_2 \frac{[pAMPK][TSC2]}{[TSC2] + \frac{k_1+k_3}{k_1}} - k_1 [pAMPK][TSC2] \quad (4.79)$$

$$\frac{d[pAMPK]}{dt} = (k_2 + k_3) \frac{[pAMPK][TSC2]}{[TSC2] + \frac{k_1+k_3}{k_1}} - k_1 [pAMPK][TSC2] \quad (4.80)$$

$$\frac{d[pTSC2]}{dt} = k_3 \frac{[pAMPK][TSC2]}{[TSC2] + \frac{k_1+k_3}{k_1}} + (k_5 + k_6) \frac{[pTSC2][Rheb]}{\frac{k_5+k_6}{k_4}} - k_4 [pTSC2][Rheb^{GTP}] \quad (4.81)$$

$$\frac{d[Rheb^{GDP}]}{dt} = k_6 \frac{[pTSC2][Rheb]}{\frac{k_5+k_6}{k_4}} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[Rheb^{GTP}]}{dt} &= (k_{11} + k_{12}) \frac{[mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}}+[Raptor]} \right)}{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}}+[Raptor]}} - k_{10}[Rheb^{GTP}][mTORC1] \\ &\quad [Raptor] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}}+[Raptor]} \right)}{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}}+[Raptor]}} \right) \\ &\quad + (k_{17} + k_{18}) \frac{}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$- k_{16}[Rheb^{GTP}][Raptor] \quad (4.84)$$

$$\frac{d[Deptor]}{dt} = k_{20} \frac{[Deptortot][mTOR]}{[mTOR] + \frac{k_{20}}{k_{19}}} - k_{19}[Deptor][mTOR] \quad (4.85)$$

$$\frac{d[PRAS40]}{dt} = k_{22} \frac{\frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} - k_{21}[RAS40][mTOR] + k_{24} \frac{\left( -\frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} + [PRAS40_{tot}] \right) [Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]} - k_{23}[PRAS40][Raptor]}{(4.86)}$$

$$\frac{d[mLST8]}{dt} = k_{25} \frac{\frac{[mLST8_{tot}][mTOR]}{[mTOR] + \frac{k_{25}+k_{26}}{k_{27}}} - k_{27}[mLST8][mTOR]}{(4.87)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[Raptor]}{dt} &= k_{17} \frac{[Raptor] \left( \begin{array}{l} [mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \right) \\ [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} } \end{array} \right)}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \\ &\quad - k_{16}[Raptor][Rheb^{GTP}] + k_{24} \frac{\left( -\frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} + [PRAS40_{tot}] \right) [Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - k_{23} [PRAS40] [Raptor] + k_{28} \frac{\left( - \frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} + [PRAS40]_{tot} \right) [Raptor]}{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]} + [Raptor]_{tot} \\
& - k_{29} [Raptor] [mTOR]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[mTOR]}{dt} &= k_{20} \frac{[Deptor]_{tot} [mTOR]}{[mTOR] + \frac{k_{20}}{k_{19}}} - k_{19} [Deptor] [mTOR] + k_{22} \frac{[PRAS40] [mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} - k_{21} [PRAS40] [mTOR] \\
&+ k_{25} \frac{[mLST8]_{tot} [mTOR]}{[mTOR] + \frac{k_{25} + k_{26}}{k_{27}}} - k_{27} [mTOR] [mLST8]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k_{28} \frac{\left( - \frac{[PRAS40][mTOR]}{\frac{k_{22}}{k_{21}}} + [PRAS40]_{tot} \right) [Raptor] }{\frac{k_{24}}{k_{23}} + [Raptor]} + [Raptor]_{tot} \Bigg) [Raptor] \\
& - k_{29} [Raptor][mTOR]
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[mTORC1]}{dt} &= k_{11} \frac{[mTOR] \left( [Rheb]_{tot}^{GTP} - \frac{[Raptor][Rheb]_{tot}^{GTP}}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \right)}{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb]_{tot}^{GTP}}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]}} - k_{10} [Rheb]^{GTP} [mTORC1]
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
[Raptor] & \left( [Rheb]_{tot}^{GTP} - \frac{[mTOR] \left( [Rheb]_{tot}^{GTP} - \frac{[Raptor][Rheb]_{tot}^{GTP}}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \right)}{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb]_{tot}^{GTP}}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]}} \right) \\
\frac{d[pRaptor]}{dt} & = k_{18} \frac{[Rheb]_{tot}^{GTP}}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]}
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\frac{d[amTORC1]}{dt} = k_{12} \frac{[mTOR] \left( [Rheb_{tot}^{GTP}] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]} \right)}{\frac{k_{11}+k_{12}}{k_{10}} + [mTOR] - \frac{[Raptor][Rheb_{tot}^{GTP}]}{\frac{k_{17}+k_{18}}{k_{16}} + [Raptor]}} + (k_{14} + k_{15}) \frac{[pmTOR][S6KI]}{\frac{k_{14}+k_{15}}{k_{13}}} - k_{13}[amTORC1][S6KI] \quad (4.91)$$

$$\frac{d[S6KI]}{dt} = k_{14} \frac{[pmTOR][S6KI]}{\frac{k_{14}+k_{15}}{k_{13}}} - k_{13}[amTORC1][S6KI] \quad (4.92)$$

$$\frac{d[pS6KI]}{dt} = k_{15} \frac{[pmTOR][S6KI]}{\frac{k_{14}+k_{15}}{k_{13}}} \quad (4.93)$$

# Bab 5

## Model Penyebaran ZIKV Orde Biasa



---

Virus Zika (ZIKV) pertama kali ditemukan pada rhesus monyet saat penelitian demam kuning di hutan Zika, Uganda pada tahun 1947. ZIKV merupakan virus yang masuk ke dalam famili *Flaviviridae*. Virus-virus dalam famili *Flaviviridae* terkenal sebagai virus patogen yang menyebabkan penyakit demam berdarah (*Dengue fever*), demam kuning (*Yellow fever*), radang otak Jepang (*Japanese encephalitis*), dan demam Nil barat (*West Nile fever*). Vektor utama penyebaran ZIKV adalah nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus*.

Dalam catatan sejarah, selama 60 tahun sejak pertama kali ditemukan, ZIKV hanya menyebar di beberapa negara Afrika dan Asia Tenggara. Namun setelah itu, yakni pada tahun 2007 ZIKV mulai merebak di seluruh dunia setelah kasus pertama ditemukan di Micronesia. Kasus infeksi ZIKV terus naik secara signifikan sehingga WHO mendeklarasikan infeksi ZIKV sebagai *Public Health Emergency of International Concern* (PHEIC). Artinya, infeksi ZIKV menjadi masalah yang mengancam kesehatan masyarakat dunia dan berkemungkinan mengalami penularan secara global, sehingga diperlukan kerjasama internasional untuk mengatasinya.

---

Diperkirakan terjadi sekitar 19.000 kasus individu terinfeksi ZIKV dan penyebarannya menjadi semakin tidak terbendung ketika virus mulai menyebar ke Amerika Latin pada tahun 2013. Beberapa negara yang paling terdampak pada wabah infeksi ZIKV antara lain Micronesia, Amerika, India, dan Brazil.

Infeksi ZIKV pertama kali pada manusia dapat terjadi akibat gigitan nyamuk *Aedes aegypti* atau *Aedes albopictus* yang sudah terinfeksi ZIKV. Selain itu, infeksi ZIKV pada manusia juga dapat terjadi akibat hubungan seksual dengan individu yang sudah terinfeksi, atau menerima transfusi darah dari individu terinfeksi. Sementara itu juga dapat ditularkan oleh ibu kepada bayi yang dikandungnya selama masa kehamilan. Infeksi ZIKV dapat menyebabkan gejala ringan seperti demam, mata merah, nyeri sendi yang parah, sakit kepala, dan ruam-ruam pada kulit. Gejala-gejala tersebut umumnya baru akan terasa 2 sampai 7 hari setelah inkubasi.

Beberapa penelitian juga mengaitkan infeksi ZIKV selama kehamilan dengan risiko keguguran dan beberapa kelainan bawaan serta gangguan syaraf dan autoimun seperti *microcephaly*, sindrom *Guillain-Barre*, *meningitis*, *meningoencephalitis*, dan *myelitis*. Hal ini didasari oleh laporan mengenai peningkatan anomali kelainan-kelainan tersebut di daerah ZIKV mewabah, antara lain Brazil, Colombia, Venezuela, dan Polinesia Prancis.

*Microcephaly* adalah salah satu gangguan perkembangan otak pada bayi, sehingga berdampak pada ukuran kepala yang lebih kecil dibandingkan bayi normal. Pada beberapa kasus, gangguan perkembangan otak terjadi saat bayi masih berada dalam kandungan masa kehamilan. Meski begitu,

*microcephaly* juga dapat terjadi pada bayi setelah lahir dimana perkembangan otaknya terhenti. Infeksi ZIKV memang bukan satu-satunya penyebab kelainan *microcephaly* pada bayi, namun ibu hamil dengan infeksi ZIKV memiliki kemungkinan 20% lebih tinggi untuk melahirkan bayi dengan *microcephaly*.



**Gambar 5.1.** Perbedaan Ukuran Kepala Bayi Normal dengan Bayi dengan Gangguan *Microcephaly*

Infeksi ZIKV diketahui memiliki banyak kesamaan dengan infeksi demam berdarah dan Chikungunya atau bahkan ebola, namun ketiganya memiliki perbedaan yang cukup signifikan. Meski ketiganya diketahui dapat ditularkan melalui gigitan nyamuk dari famili yang sama, namun diantara ketiga infeksi virus tersebut, hanya infeksi ZIKV yang berpeluang dapat ditularkan antar manusia melalui hubungan seksual dan transfusi darah. Penularan demam berdarah dan Chikungunya antar manusia melalui transfusi darah sangat kecil, sementara hubungan seksual tidak berpotensi menularkan keduanya. Meskipun pada akhir tahun 2019 dilaporkan sebuah kasus penularan demam berdarah di Spanyol yang diduga terjadi karena hubungan seksual, namun tidak ada pernyataan resmi dari WHO yang menyatakan

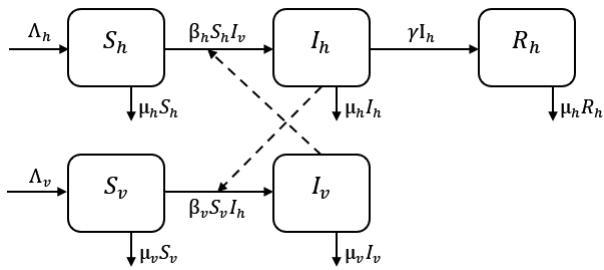
---

bahwa demam berdarah dapat ditularkan melalui hubungan seksual. Pada infeksi virus ebola, orang yang sudah sembuh, masih dapat menginfeksi manusia lain melalui cairan sperma dan air susu ibu karena virus ebola masih tertinggal di dua cairan itu selama kurang lebih dua minggu setelah sembuh.

Meski infeksi ZIKV, demam berdarah, dan Chikungunya dapat ditularkan oleh ibu hamil ke janin di dalam kandungannya selama kehamilan, namun ketiga infeksi memberikan efek yang cukup berbeda terhadap kehamilan itu sendiri. Menurut banyak sumber, infeksi ZIKV pada janin dapat berisiko tinggi yakni keguguran dan *microcephaly*, sementara infeksi demam berdarah pada janin mengakibatkan risiko kelahiran prematur dan berat badan di bawah rata-rata, dan infeksi Chikungunya dapat menyebabkan keguguran jika infeksi tersebut terjadi di awal kehamilan.

Penularan infeksi ZIKV yang berbeda dengan penularan infeksi demam berdarah dan Chikungunya merupakan alasan dasar model matematika penyebaran ZIKV tidak bisa diperumum untuk model penyebaran demam berdarah dan Chikungunya, meski vektor utama penyebaran ketiga infeksi virus ini sama. Model matematika penyebaran infeksi demam berdarah dan Chikungunya dapat dikonstruksi dengan memodifikasi model matematika penyebaran ZIKV dengan menghilangkan kontak antar manusia sebagai salah satu alasan penambahan jumlah individu terinfeksi.

Secara umum mekanisme infeksi ZIKV pada manusia dan nyamuk dapat disajikan secara ringkas oleh diagram kompartemen pada Gambar 5.2 berikut.



**Gambar 5.2.** Diagram kompartemen model penyebaran ZIKV

Pada diagram kompartemen Gambar 5.2, tiap kompartemen pada penyebaran infeksi ZIKV disimbolkan oleh persegi dengan sudut tumpul. Panah masuk menyimbolkan penambahan jumlah individu pada kompartemen tersebut, dan panah keluar menyimbolkan pengurangan jumlah individu pada kompartemen tersebut. Jika terdapat sebuah panah keluar dari sebuah kompartemen dan masuk ke kompartemen lainnya, itu berarti bahwa pengurangan pada kompartemen pertama dikonversikan menjadi penambahan pada kompartemen kedua. Diagram kompartemen pada Gambar 5.2 mewakili mekansisme penyebaran infeksi ZIKV yang juga dapat dirumuskan dalam sistem persamaan diferensial biasa berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \Lambda_h - (1 - \mu_1) \beta_h S_h (I_v + \delta I_h) - \mu_h S_h, \\
 \frac{dI_h}{dt} &= (1 - \mu_1) \beta_h S_h (I_v + \delta I_h) - (\mu_h + \gamma + \eta_h \mu_2) I_h, \\
 \frac{dR_h}{dt} &= (\gamma + \eta_h \mu_2) I_h - \mu_h R_h, \\
 \frac{dS_v}{dt} &= \Lambda_v - (1 - \mu_1) \beta_v S_v I_h - (\mu_v + \eta_v \mu_3) S_v, \\
 \frac{dI_v}{dt} &= (1 - \mu_1) \beta_v S_v I_h - (\mu_v + \eta_v \mu_3) I_v.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

---

Persamaan (5.1) merupakan model penyebaran ZIKV yang dikonstruksi oleh Bonyah dan Okosun (2016). Model ini dikonstruksi dengan menambahkan 3 parameter kontrol, yakni  $\mu_1$  sebagai kontrol pencegahan kontak individu terinfeksi dan rentan,  $\mu_2$  sebagai kontrol penyembuhan individu terinfeksi dengan perawatan, dan  $\mu_3$  sebagai kontrol pengurangan nyamuk dengan menggunakan insektisida. Parameter  $\Lambda_h$  adalah laju rekrutmen manusia rentan,  $\Lambda_v$  adalah laju rekrutmen nyamuk rentan,  $\beta_h$  adalah laju penularan dari manusia ke nyamuk,  $\beta_v$  adalah laju penularan dari nyamuk ke manusia,  $\mu_h$  dan  $\mu_v$  masing-masing adalah laju kematian alami manusia dan nyamuk,  $\eta_h$  adalah laju kesembuhan dengan perawatan,  $\eta_v$  adalah laju kematian nyamuk akibat insektisida, dan  $\frac{t}{\gamma}$  adalah periode rata-rata infeksi pada manusia.

Model penyebaran ZIKV pada persamaan (5.1) memiliki angka reproduksi dasar, diperoleh dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya, dituliskan sebagai berikut.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\sqrt{\beta_h \Lambda_h (4\gamma \mu_h \beta_v \Lambda_v + \delta^2 \beta_h \Lambda_h \mu_v^2 + 4\mu_h^2 \beta_v \Lambda_v)}}{2\mu_h \mu_v (\gamma + \mu_h)} + \frac{\delta^2 \beta_h \Lambda_h \mu_v}{2\mu_h \mu_v (\gamma + \mu_h)}$$

Model(5.1) memiliki dua titik kesetimbangan, yakni titik bebas penyakit dan titik endemik. Titik bebas penyakit menggambarkan kondisi dimana tidak ada manusia terinfeksi dan *exposed* ZIKV di lingkungan sistem, sedangkan titik endemik menggambarkan kondisi infeksi dan *exposed* di lingkungan ada dan mengalami kenaikan. Titik bebas

---

penyakit stabil asimtotik lokal dengan syarat  $\mathcal{R}_0 < 1$ , artinya satu kasus infeksi ZIKV menyebabkan kurang dari satu kasus infeksi ZIKV lainnya sebaliknya titik endemik stabil asimtotik lokal dengan syarat  $\mathcal{R}_0 > 1$ , artinya satu kasus infeksi ZIKV menyebabkan lebih dari satu kasus infeksi ZIKV lainnya. Hal ini dikonfirmasi oleh hasil simulasi numerik dimana jika menggunakan nilai-nilai parameter yang membuat  $\mathcal{R}_0 < 1$ , maka sistem akan stabil menuju titik bebas penyakit, dan sebaliknya.

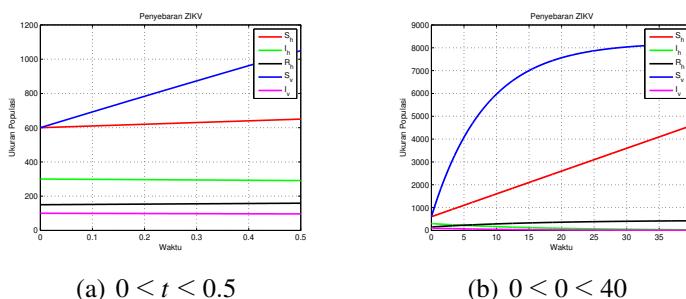
1. Kasus 1; Titik bebas penyakit stabil asimtotik lokal, menggunakan nilai parameter pada Tabel 5.1.

**Tabel 5.1.** Nilai parameter untuk kasus 1

Parameter	Nilai
$\beta_h$	$1 \times 10^{-20}$
$\beta_v$	$1 \times 10^{-20}$
$\mu_h$	$\frac{1}{365 \times 60}$
$\mu_v$	$\frac{1}{14}$
$\eta_h$	0.01
$\eta_v$	0.001
$\delta$	0.1
$\Lambda_h$	100
$\Lambda_v$	1000
$\mu_1$	0.5
$\mu_2$	0.5
$\mu_3$	0.5

Nilai-nilai parameter pada tabel 5.1 menghasilkan  $\mathcal{R} < 1$ , sehingga memenuhi syarat kestabilan asimtotik

lokal titik bebas penyakit. Titik bebas penyakit yang sudah disebutkan adalah kondisi dimana banyaknya individu pada kompartemen manusia terinfeksi dan nyamuk terinfeksi sebesar 0. Sementara banyaknya individu pada kompartemen manusia rentan, manusia sembuh, dan nyamuk rentan terus bertambah seiring berjalannya waktu dan stabil ke suatu titik. Perilaku sistem kasus 1 dapat disajikan secara visual pada Gambar 5.3(a).



**Gambar 5.3.** Visualisasi kasus 1

Namun, perilaku sistem yang disajikan tidak cukup menggambarkan kestabilan titik bebas penyakit sebab interval  $t$  yang digunakan kecil, yakni  $t \in [0, 0.5]$ . Jika interval  $t$  diperpanjang, maka akan jelas terlihat bahwa masing-masing kompartemen  $I_h$  dan  $I_v$  stabil menuju nol, dan kompartemen  $S_h, R_h$  dan  $S_v$  naik terus menuju suatu titik, yaitu  $\frac{\Lambda_h}{\mu_h}$  dan  $\frac{\Lambda_v}{\mu_v}$  seperti yang disajikan pada Gambar 5.3(b).

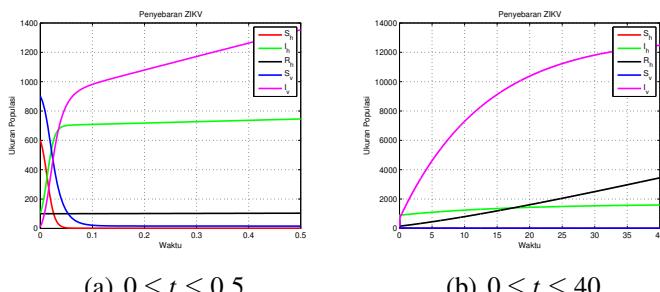
2. Kasus 2; Titik endemik stabil asimtotik lokal, menggunakan nilai parameter pada Tabel 5.2.

---

**Tabel 5.2.** Nilai parameter untuk kasus 2

Parameter	Nilai
$\beta_h$	0.2
$\beta_v$	0.09
$\mu_h$	$\frac{1}{365 \times 60}$
$\mu_v$	$\frac{1}{14}$
$\eta_h$	0.01
$\eta_v$	0.001
$\delta$	0.1
$\Lambda_h$	100
$\Lambda_v$	1000
$\mu_1$	0.05
$\mu_2$	0.05
$\mu_3$	0.05

Dengan menggunakan nilai parameter pada tabel 5.2, diperoleh  $\mathcal{R}_0 > 1$ , sehingga memenuhi syarat kestabilan asimtotik lokal titik endemik. Titik endemik merupakan titik yang mewakili kondisi dimana banyak individu pada kompartemen manusia terinfeksi dan nyamuk terinfeksi tidak nol dan cenderung naik seiring dengan berjalan waktu. Hal ini berakibat banyak individu pada kompartemen manusia rentan dan nyamuk rentan terus berkurang. Kondisi tersebut dapat disajikan secara visual pada Gambar 5.1.



**Gambar 5.4.** Visualisasi kasus 2

Jika interval  $t$  diperpanjang, maka akan semakin terlihat jelas bahwa sistem stabil menuju titik endemik, seperti yang disajikan pada Gambar 5.4(b).

# Bab 6

## Model Penyebaran ZIKV Orde Fraksional



---

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang umum digunakan untuk model kompartemen penyebaran penyakit. Namun, seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi khususnya dalam bidang Ilmu Matematika, persamaan diferensial biasa untuk pemodelan penyebaran penyakit dinilai memiliki kekurangan. Kekurangan persamaan diferensial biasa untuk pemodelan penyebaran penyakit terletak pada tidak adanya efek memori pada persamaan diferensial biasa. Efek memori merupakan proses yang melibatkan kondisi pada masa lampau secara keseluruhan untuk menentukan kondisi pada masa sekarang. Jika dikaitkan pada proses penyebaran penyakit, maka berarti bahwa penyebaran penyakit pada keseluruhan masa lampau mempengaruhi penyebarannya pada hari ini.

Salah satu model penyebaran penyakit yang menggunakan persamaan diferensial biasa adalah model penyebaran ZIKV yang disajikan pada bab sebelumnya. Karena menggunakan persamaan diferensial biasa, maka efek memori tidak memiliki pengaruh. Untuk melibatkan efek memori, sebuah model dapat dimodifikasi menjadi persamaan diferensial fraksional. Persamaan diferensial fraksional merupakan persamaan diferensial yang mengandung turunan fraksional.

---

Orde turunan fraksional berada pada interval  $0 < \alpha < 1$ . Definisi turunan fraksional adalah

$${}^C D_a^\alpha y(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(\xi) d\xi \quad (6.1)$$

Model matematika penyebaran ZIKV yang disajikan pada bab ini adalah hasil penelitian Hidayati, dkk. (2021), yang merupakan pengembangan dari model penyebaran ZIKV oleh Bonyah dan Okosun (2016). Pengembangan yang dimaksud adalah dengan melakukan modifikasi model menjadi sistem persamaan diferensial fraksional dan mengasumsikan bahwa tidak ada kontrol pencegahan penularan, kontrol insektisida, dan kontrol pengobatan. Parameter yang terdapat pada model penyebaran ZIKV sama dengan yang ada pada persamaan (5.1).

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha S_h &= \Lambda_h - \beta_h S_h (I_v + \delta I_h) - \mu_h S_h, \\ {}^C D_t^\alpha I_h &= \beta_h S_h (I_v + \delta I_h) - (\mu_h + \gamma + \eta_h) I_h, \\ {}^C D_t^\alpha R_h &= (\gamma + \eta_h) I_h - \mu_h R_h, \\ {}^C D_t^\alpha S_v &= \Lambda_v - \beta_v S_v I_h - \mu_v S_v, \\ {}^C D_t^\alpha I_v &= \beta_v S_v I_h - \mu_v I_v. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Orde turunan fraksional  $\alpha$  pada persamaan (6.2) berada pada interval  $0 < \alpha < 1$ . Turunan fraksional dapat menyajikan kondisi terkini sebagai proses yang melibatkan kondisi pada masa lampau secara keseluruhan atau disebut efek memori. Efek memori pada turunan fraksional terlihat pada definisi turunan fraksional yang dituliskan dalam bentuk integral tentu, yang berarti solusi dari turunan fraksional bergantung pada seluruh nilai fungsi dari batas bawah  $a$

---

sampai batas atas  $t$  sementara turunan klasik hanya bergantung pada tepat  $t$  sebelumnya.

Terdapat dua titik kesetimbangan yang diperoleh dari sistem (6.2), titik kesetimbangan pertama ( $E_0$ ) yang selanjutnya disebut sebagai titik bebas penyakit atau *disease free equilibrium* (DFE), dan titik kesetimbangan kedua ( $E_1$ ) yang selanjutnya disebut sebagai titik endemik atau *endemic equilibrium* (EE).

Kestabilan masing-masing titik kesetimbangan dapat diketahui dengan melakukan analisis kestabilan dari titik kesetimbangan. Analisis kestabilan titik kesetimbangan dilakukan dengan linearisasi sistem (6.2) dalam bentuk matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $\hat{E} = (\hat{S}_h, \hat{I}_h, \hat{R}_h, \hat{S}_v, \hat{I}_v)$ .

## 6.1 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan $E_0$

Matriks Jacobi yang dievaluasi di sekitar titik kesetimbangan  $E_0$  adalah sebagai berikut

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu_h & -A_2 & 0 & 0 & -A_1 \\ 0 & A_2 - A_4 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & A_5 & -\mu_h & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & 0 & -\mu_v & 0 \\ 0 & A_3 & 0 & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

dengan

$$A_1 = \beta_h \delta S_h^0,$$

$$A_2 = \beta_h S_h^0,$$

$$A_3 = \beta_v S_v^0,$$

$$A_4 = \mu_h + \gamma + \eta_h,$$

---

$$A_5 = \gamma + \eta_h.$$

Persamaan karakteristik untuk titik kesetimbangan  $E_0$  adalah

$$(-\mu_h - \lambda)^2 (-\mu_v - \lambda) (\lambda^2 + d_1 \lambda + d_2) = 0. \quad (6.4)$$

dengan

$$\begin{aligned} d_1 &= -A_2 + A_4 + \mu_v, \\ d_2 &= \mu_v(-A_2 + A_4) - A_1 A_3. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (6.4) diperoleh 3 akar persamaan karakteristik, yakni  $\lambda_{1,2} = -\mu_h$ ,  $\lambda_3 = -\mu_v$ . Jelas bahwa  $\lambda_j < 0$ , untuk  $j = 1, 2, 3$  dan  $\arg(\lambda_j) = \pi$  sehingga  $|\arg(\lambda_j)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ . Selanjutnya  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{4,5} = \frac{-d_1 \pm \sqrt{\Delta_1}}{2}, \quad (6.5)$$

dengan

$$\Delta_1 = (-A_2 + A_4 + \mu_v)^2 - 4A_4\mu_v + 4A_1A_3 + 4A_2\mu_v$$

Titik kesetimbangan  $E_0$  stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika memenuhi salah satu kriteria berikut.

1. Jika  $d_1 > 0$  dan memenuhi salah satu syarat berikut, yakni
  - (a)  $\Delta_1 = 0$ , atau
  - (b)  $\Delta_1 > 0$ , dan  $d_2 > 0$ , atau
  - (c)  $\Delta_1 < 0$ .
2. Jika  $d_1 < 0$  dan  $|\arg(\lambda_{4,5})| > \frac{\alpha\pi}{2}$ .

## 6.2 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan $E_1$

Untuk mengetahui sifat kestabilan titik  $E_1$ , substitusi titik  $E_1$  ke matriks Jacobi di sekitar titik  $\hat{E}$ .

$$J_1 = \begin{bmatrix} -B_{11} - \mu_h & -B_{12} & 0 & 0 & -B_{15} \\ B_{11} & B_{12} - A_4 & 0 & 0 & B_{15} \\ 0 & A_5 & -\mu_h & 0 & 0 \\ 0 & -B_{42} & 0 & -B_{44} - \mu_v & 0 \\ 0 & B_{42} & 0 & B_{44} & -\mu_v \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

dengan

$$\begin{aligned} B_{11} &= \beta_h (I_v^* + \delta I_h^*), \\ B_{12} &= \beta_h \delta S_h^*, \\ B_{15} &= \beta_h S_h^*, \\ B_{21} &= \beta_h I_h^*, \\ B_{42} &= \beta_v S_v^*, \\ B_{44} &= \beta_v I_h^*. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Demikian diperoleh persamaan karakteristik yang dinyatakan sebagai

$$(\lambda + \mu_v)(\lambda + \mu_h)(\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3) = 0, \quad (6.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= B_{11} - B_{12} + B_{44} + \mu_h + \mu_v + A_4, \\ k_2 &= B_{11}B_{44} + B_{11}\mu_v + B_{11}A_4 - B_{12}B_{44} - B_{12}\mu_h - B_{12}\mu_v \\ &\quad - 2B_{15}B_{42} + B_{44}\mu_h + B_{44}A_4 + \mu_h\mu_v + \mu_hA_4 + \mu_vA_4, \\ k_3 &= B_{11}B_{15}B_{42} + B_{11}B_{44}A_4 + B_{11}\mu_vA_4 - B_{12}B_{44}\mu_h \\ &\quad - B_{12}\mu_h\mu_v - B_{15}B_{42}B_{44} - 2B_{15}B_{42}\mu_h + B_{44}\mu_hA_4 \end{aligned}$$

$$+ \mu_h \mu_v A_4. \quad (6.9)$$

Demikian diperoleh  $\lambda_1 = -\mu_h$  dan  $\lambda_2 = -\mu_v$ . Jelas bahwa  $\lambda_J < 0$ , untuk  $J = 1, 2$  dan  $\arg(\lambda_J) = \pi$  sehingga memenuhi syarat kestabilan  $|\arg(\lambda_J)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ . Selanjutnya akan ditunjukkan syarat kestabilan titik  $E_1$  berdasarkan  $\lambda_{3,4,5}$  yang merupakan akar lainnya dari persamaan karakteristik bagian yang berupa persamaan polinomial berderajat 3 yang memiliki diskriminan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= - \begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 3 & 2k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \\ &= 18k_1k_2k_3 + (k_1k_2)^2 - 4k_3k_1^3 - 4k_2^3 - 27k_3^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika memenuhi salah satu kriteria berikut.

1. Jika  $\Delta_2 > 0$  dan memenuhi syarat berikut, yakni
  - (a)  $k_1 > 0$ ,
  - (b)  $k_3 > 0$ , dan
  - (c)  $k_1k_2 > k_3$ .
2. Jika  $\Delta_2 < 0$ ,  $\alpha < \frac{2}{3}$ , dan memenuhi syarat berikut.
  - (a)  $k_1 \geq 0$ ,
  - (b)  $k_2 \geq 0$ , dan
  - (c)  $k_3 > 0$ .
3. Jika  $\Delta_2 < 0$ ,  $\alpha > \frac{2}{3}$ , dan memenuhi syarat berikut.

---

(a)  $k_1 < 0$ , dan

(b)  $k_2 < 0$ .

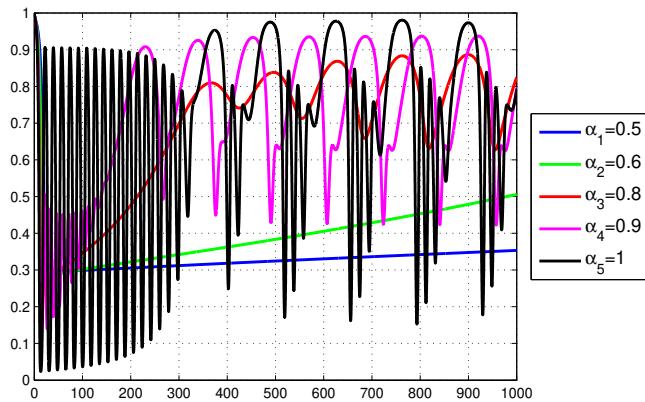
4.  $\Delta_2 < 0$  dan memenuhi syarat berikut.

(a)  $k_1 < 0$ ,

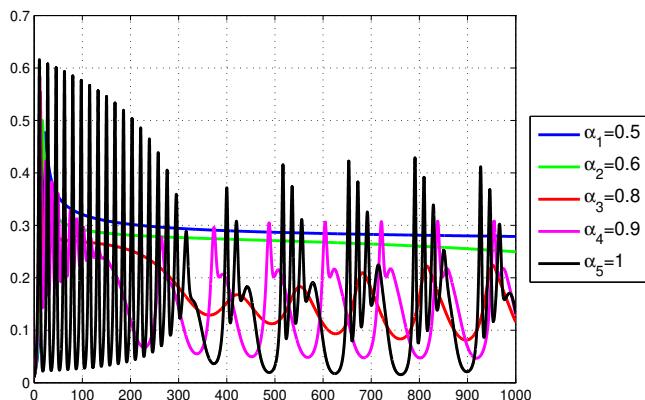
(b)  $k_2 < 0$ , dan

(c)  $k_1 k_2 = k_3$ .

Keunggulan orde fraksional untuk memodelkan penyebaran penyakit dibandingkan dengan persamaan diferensial klasik adalah adanya efek memori, yang diidentifikasi sebagai faktor penting dalam penyebaran penyakit yang disebabkan oleh virus. Efek memori pada persamaan diferensial fraksional tidak dapat disaksikan secara visual melalui hasil simulasi model, namun dapat diinterpretasikan sebagai efek yang menyebabkan perbedaan hasil masing-masing simulasi dengan menggunakan orde  $\alpha$  yang berbeda. Selain itu, perbedaan mendasar orde fraksional dengan orde biasa untuk pemodelan penyebaran ZIKV dapat ditunjukkan pada Grafik hasil simulasi kompartemen  $I_h$  dan  $I_v$  dari model (6.2), berturut-turut pada Gambar 6.1 dan Gambar 6.2 berikut. Titik kesetimbangan  $E_1$  tidak stabil pada orde biasa ( $\alpha_5$ ) dan stabil pada orde fraksional ( $\alpha_1 = 0.5$  dan  $\alpha_2 = 0.6$ ).



**Gambar 6.1.** Visualisasi pertumbuhan populasi manusia terinfeksi pada  $t \in [0, 1000]$



**Gambar 6.2.** Visualisasi pertumbuhan populasi nyamuk terinfeksi pada  $t \in [0, 1000]$

# Daftar Pustaka



- 
- Agusto, F.B., Bewick, S., dan Fagan, W.F. 2017. Mathematical Model of Zika Virus with Vertical Transmission. *Infectious Disease Modelling*. 2: 244-267.
- Ahmed, E., El-Sayed, A.M.A., dan El-Saka, H.A.A. 2006. On Some Routh-Hurwitz Conditions for Fractional Order Differential Equations and Their Applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen Systems. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. 358: 1-4.
- Ahmed, E., El-Sayed, A.M.A., dan El-Saka, H.A.A. 2007. Equilibrium Points, Stability and Numerical Solutions of Fractional-Order Predator-Prey and Rabies Models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 325: 542-553.
- Ahmed, E, El-Sayed, A.M.A., dan Elsaka, H.A.A. 2016. A Fractional Order Network Model for ZIKA. *bioRxiv*. 2016: 1-10.
- Alkahtani, B.S.T., Atangana, A., dan Koca, I. 2017. Novel Analysis of the Fractional Zika Model Using the Adams Type Predictor-Corrector Rule for Non-Singular and Non-Local Fractional Operators. *The Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. 10: 3191-3200.

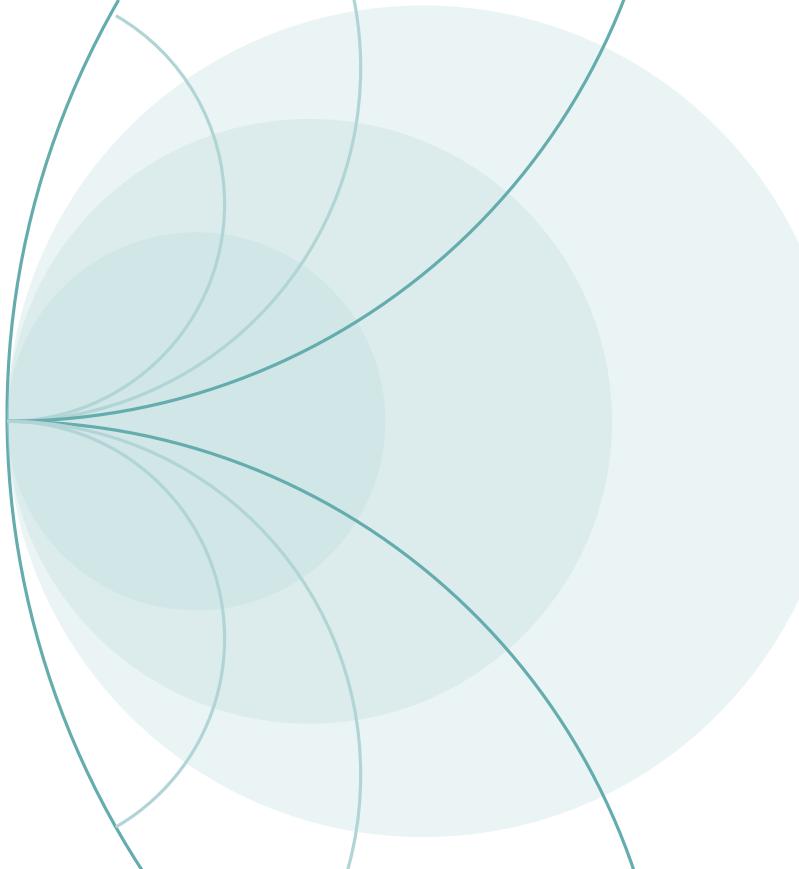
- 
- Alligood, K.T., Sauer, T.D., dan Yorke, J.A. 1996. *An Introduction to Dynamical Systems*. Springer. New York.
- Almeida, R., Brito da Cruz, A.M.C., Martins, N., dan Monteiro, M.T.T. 2019. An Epidemiological MSEIR Model Described by the Caputo Fractional Derivative. *International Journal of Dynamics and Control*. 7: 776-784.
- Bonyah, E., Khan, M.A., Okosun, K.O., dan Islam, S. 2017. A Theoretical Model for Zika Virus Transmission. *PLoS ONE*. 12(10): e0185540.
- Bonyah, E. dan Okosun, K.O. 2016. Mathematical modeling of Zika virus. *Asian Pacific Journal of Tropical Disease*. 6: 673-679.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. 2012. *Elementary Differential Equation*. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Brauer, F. 2008. Compartmental Models in Epidemiology. *Lecture Notes in Mathematics*. 1945: 19-79.
- Cao-Lormeau, V.M., Roche, C., Teissier, A., Robin, E., Berry, A.L., Mallet, H.P., Sall, A.A., dan Musso, D. 2014. Zika Virus, French Polynesia, South Pacific, 2013. *Emerging Infectious Diseases*. 20: 1084-1086.
- Diethelm, K. 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

- 
- Diethelm, K. dan Freed, A.D. 1999. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Lecture Notes: Forschung un. Wissenschaftliches Rechnen 1998*, eds. S. Heinzel, and T. Plessner, *Gessellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen*. 1999: 57-71.
- Ding, C., Tao, N., dan Zhu, Y. 2016. A Mathematical Model of Zika Virus and Its Optimal Control. *35th Chinese Control Conference (CCC)*. 2016: 2642-2645.
- Duffy, M.R., Chen, T., Hancock, W.T., Powers, A.M., Kool, J.L., Lanciotti, R.S., Pretrick, M., Marfel, M., Holzbauer, S., Dubray, C., Guillaumot, L., Griggs, A., Bel, M., Lambert, A.J., Laven, J., Kosoy, O., Panella, A., Biggerstaff, B.J., Fischer, M., dan Hayes, E.B. 2009. Zika Virus Outbreak on Yap Island, Federated States of Micronesia. *New England Journal of Medicine*. 360: 2536-2543.
- El-Sayed, A.M.A. 1996. Fractional-Order Diffusion-Wave Equation. *International Journal of Theoretical Physics*. 35: 311322.
- Gorenflo, R. dan Mainardi, F. 2008. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. Springer. Vienna.
- Goswami, N.K., Srivastav, A.K., Ghosh, M., dan Shanmukha, B. 2018. Mathematical Modeling of Zika Virus Disease with Nonlinear Incidence and Optimal Control. *Journal of Physics: Conf. Series 1000*. 2018: 1-16

- 
- Haubold, H. dan Mathai, A. 2017. *An Introduction to Fractional Calculus*. Nova Science Publishers. New York.
- Hidayati, N. A., Suryanto, A., dan Kusumawinahyu, W. M. 2021. Dynamical Analysis of Fractional Order Zikv Model. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*. 10(5): 24692481.
- Huo, J., Zhao, H., dan Zhu, L. 2015. The Effect of Vaccines on Backward Bifurcation in a Fractional Order HIV Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 26: 289-305.
- Ibe, O.C. 2013. *Basic Concepts in Stochastic Processes*. Elsevier. London.
- Khalil, M., Arafa, A.A.M., dan Sayed, A. 2018. A Variable Fractional Order Network Model of Zika Virus. *Journal of Fractional Calculus and Applications*. 9: 204-221.
- Khan, M.A., Ullah, S., dan Farhan, M. 2019. The Dynamics of Zika Virus with Caputo Fractional Ferivative. *AIMS Mathematics*. 4(1): 134-146.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., dan Trujillo, J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B.V.. Netherlands.
- Kusumastuti, A., Jamhuri, M., dan Hidayati, N. A. 2019. Analytical solution of the string vibration model on Sasando musical instrument. *Journal of Physics: Conference Series*. 1321(2):1-9.
- Kusumastuti, A., Brylliant, D. N., dan Hidayati, N. A. 2020. Construction analysis of the string motion model on Sasando

- 
- musical instrument. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 456(1):1-8.
- Li, C dan Zhang, F. 2011. A Survey on the Stability of Fractional Differential Equations. *The European Physical Journal Special Topics*. 193: 27-47.
- Mathai, A.M dan Haubold, H.J. 2017. *an Introduction to Fractional Calculus*. Nova Science Publishers. New York.
- Matignon, D. 1996. Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing. *Proceedings of the IMACS-SMC*. 2: 963-968
- Panigoro, H.S., Suryanto, A., Kusumawinahyu, W.M., dan Darti, I. 2019. Dynamics of a Fractional-Order Predator-Prey Model with Infectious Diseases in Prey. *Communication in Biomathematical Sciences*. 2: 105.
- Petras, I. 2011. *Fractional Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Higher Education Press. Beijing.
- Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. United States.
- Rezapour, S., Hakimeh M.H., dan Jajarmi, A. 2020. A Mathematical Analysis and Simulation for Zika Virus Model with Time Fractional Derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020: 589.
- Suparit, P., Wiratsudakul, A., dan Modchang. 2018. A Mathematical Model for Zika Virus Transmission Dynamics with a Time-Dependent Mosquito Biting Rate. *Theoretical Biology and Medical Modelling*. 15: 11.

- 
- Terefe, Y.A., Gaff, H., Kamga, M., dan van der Mescht, L. 2018. Mathematics of a Model for Zika Transmission Dynamics. *Theory in Biosciences*. 137: 209-218.
- Zill, D.G. dan Cullen, M.R. 2009. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Brooks/Cole, Cengage Learning. Canada.



Pemodelan matematika dalam perspektif praktik berisi tentang  
apalah apalah apalah apalah apalah