# Metode Theta

Lecture Note 2025

Metode theta merupakan metode yang digunakan untuk menghampiri solusi persamaan difusi 1 dimensi, dengan menerapkan beda maju untuk menghampiri turunan pertama terhadap waktu dan metode beda hingga pusat untuk mendekati turunan kedua terhadap spasial $(x)$ pada dua *time level*, yakni $n$ dan $n+1$ dengan pembobot sebesar $\theta$.

# Metode Theta

Skema numerik dari metode theta disajikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k} &= D\left((1-\theta)\left(\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}\right)+\right.\\
&\left.\theta\left(\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}\right)\right)\\
u_j^{n+1}-u_j^n &= \frac{Dk}{h^2}\left((1-\theta)\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)+\right.\\
&\left.\theta\left(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}\right)\right)\\
u_j^{n+1} &= \mu\left((1-\theta)\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)+\right.\\
&\left.\theta\left(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}\right)\right)+u_j^n \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

# Analisis Kestabilan

**Pandang Model Diskrit Persamaan Difusi:**

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \mu\left(\left(1-\theta\right)\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + \right. \\
&\quad \left. \theta\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right)\right) + u_j^n
\end{aligned}
$$

**Diasumsikan bentuk Fourier untuk** $u_j^n = \lambda e^{ikjh}$

$$
\begin{aligned}
\lambda^{n+1} e^{ikjh} &= \mu\Big(\left(1-\theta\right)\left(\lambda^n e^{ik(j+1)h} - 2\lambda^n e^{ikjh}\right. \\
&\quad \left. + \lambda^n e^{ik(j-1)h}\right) + \theta\left(\lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h}\right. \\
&\quad \left. - 2\lambda^{n+1} e^{ikjh} + \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h}\right)\Big) + \lambda^{n+1} e^{ikjh}
\end{aligned}
$$

dengan membagi semua ruas dengan $\lambda e^{ikjh}$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \mu\Big(\left(1-\theta\right)\left(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}\right) \\
&\quad + \theta\left(\lambda e^{ikh} - 2\lambda + \lambda e^{-ikh}\right)\Big) + 1 \\
&= \mu\left(\left(1-\theta\right)\left(-2 + 2\cos kh\right)\right. \\
&\quad \left. + \theta\left(\lambda\left(-2 + 2\cos kh\right)\right)\right) + 1 \\
&= 2\mu\left(-1 + \cos kh\right)\left(\left(1-\theta\right) + \theta\lambda\right) + 1 \\
&= 2\mu\left(-1 + \left(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}kh\right)\right) \\
&\quad \left(1 - \theta + \theta\lambda\right) + 1 \\
&= \mu\left(-4\sin^2\frac{1}{2}kh\right)\left(1 - \theta + \theta\lambda\right) + 1
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda = \frac{1 - 4\mu\left(\sin^2 \frac{1}{2}kh\right)(1-\theta)}{1 + 4\mu\theta\sin^2 \frac{1}{2}kh} \tag{6.3}$$

Skema numerik stabil jika $|\lambda| \leq 1$, artinya $-1 \leq \lambda \leq 1$, sehingga skema tidak stabil jika $\lambda > 1$ atau $\lambda < -1$

- Karena $\theta \in [0,1]$, $\mu > 0$ dan $\sin^2 \frac{1}{2}kh \in [0,1]$, maka $\lambda > 1$ tidak mungkin terjadi.

$\lambda < -1$, dengan mensubstitusikan persamaan (6.3) maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\frac{1-4\mu\left(\sin^2\frac{1}{2}kh\right)(1-\theta)}{1+4\mu\theta\sin^2\frac{1}{2}kh} &< -1 \\
1-4\mu\left(\sin^2\frac{1}{2}kh\right)(1-\theta) &< -1-4\mu\theta\sin^2\frac{1}{2}kh \\
8\mu\theta\sin^2\frac{1}{2}kh &< -2+4\mu\sin^2\frac{1}{2}kh \\
4\mu\theta\sin^2\frac{1}{2}kh-2\mu\sin^2\frac{1}{2}kh &< -1 \\
2\mu\sin^2\frac{1}{2}kh(2\theta-1) &< -1 \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

karena $\sin^2 \frac{1}{2}kh \in [0,1]$, maka dari persamaan (6.4) diketahui bahwa

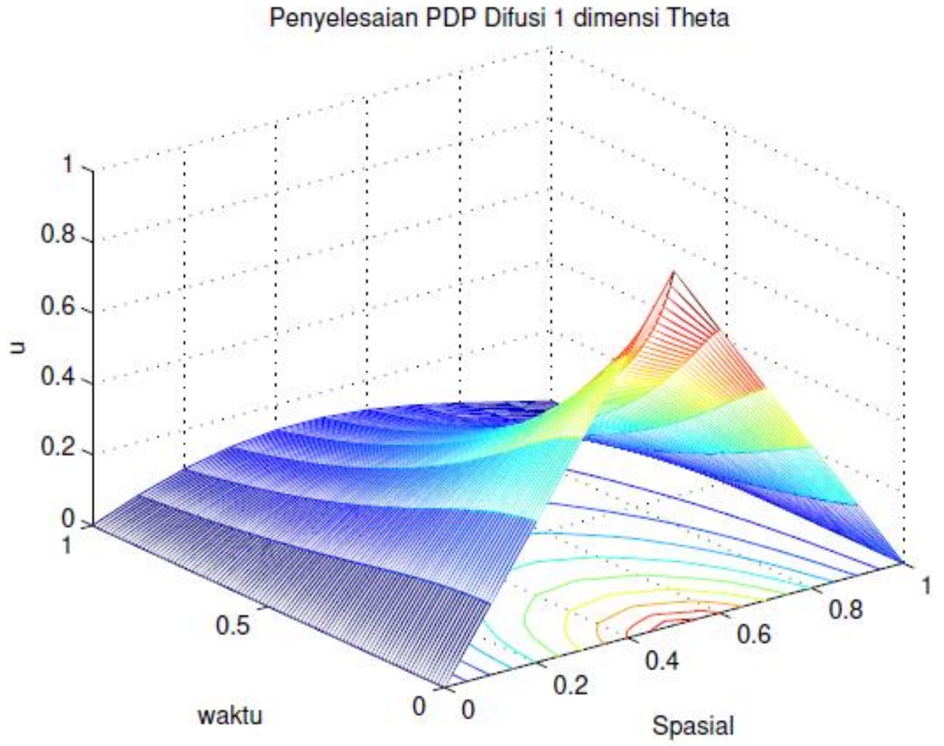
$$\begin{aligned} 2\mu(2\theta-1) &< -1 \\ 2\mu &< \frac{-1}{2\theta-1} \\ \mu &> \frac{1}{2(1-2\theta)} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Berdasarkan persamaan (6.5), maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

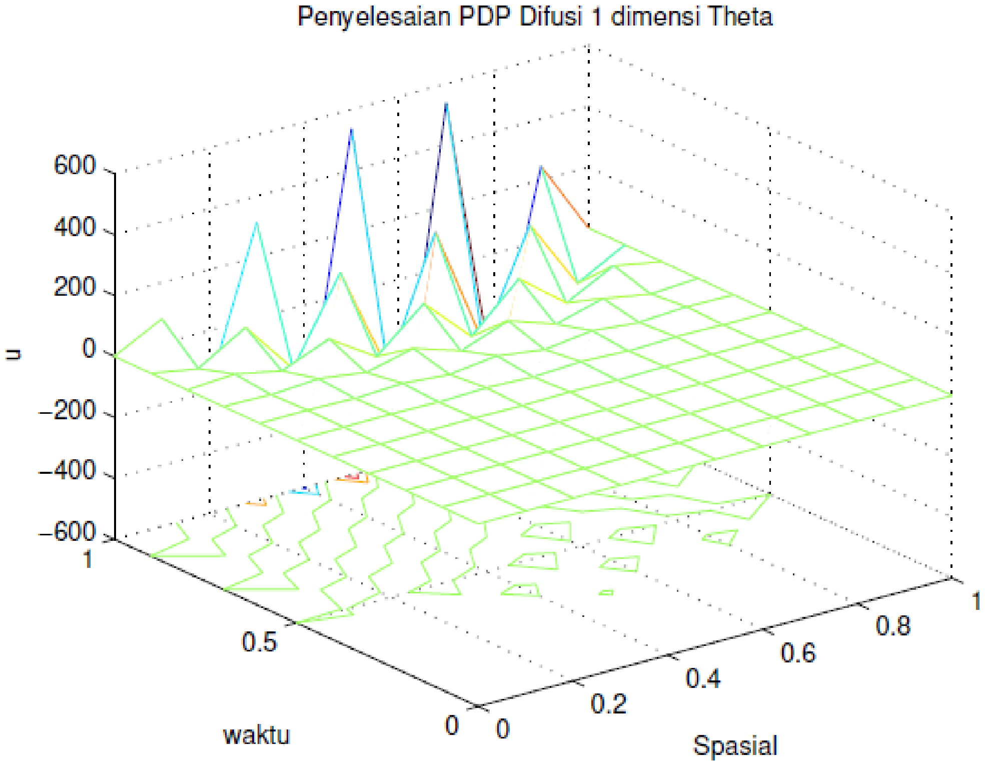
1. Jika $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$
   Syarat kestabilannya $\mu > \frac{1}{2(1-2\theta)}$, dan

2. jika $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$
   Stabil tanpa syarat.

Akurasi dari metode theta adalah $O(k, h^2)$




**Gambar 6.1.** Visualisasi skema numerik Theta pada persamaan difusi 1 dimensi pada $t \in [0, 1]$ (stabil)




**Gambar 6.2.** Visualisasi skema numerik Theta pada persamaan difusi 1 dimensi pada $t \in [0, 1]$ (tidak stabil)

# Simulasi Metode Theta untuk Difusi 1 Dimensi:

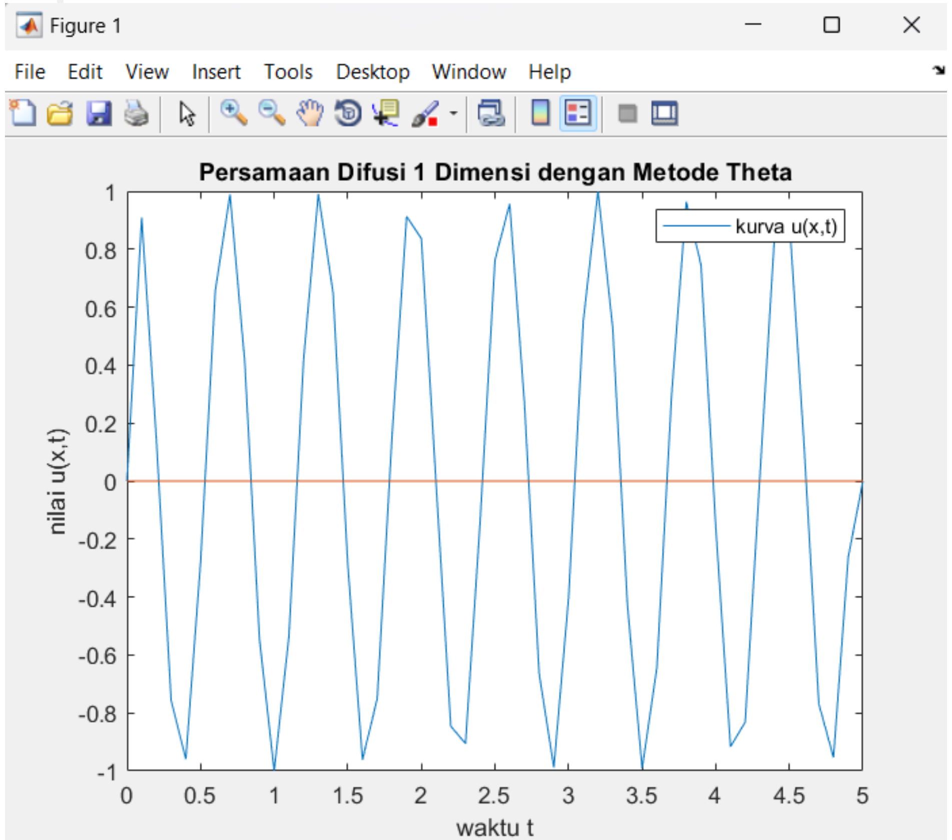
# Script Metode Theta untuk Difusi 1 Dimensi:

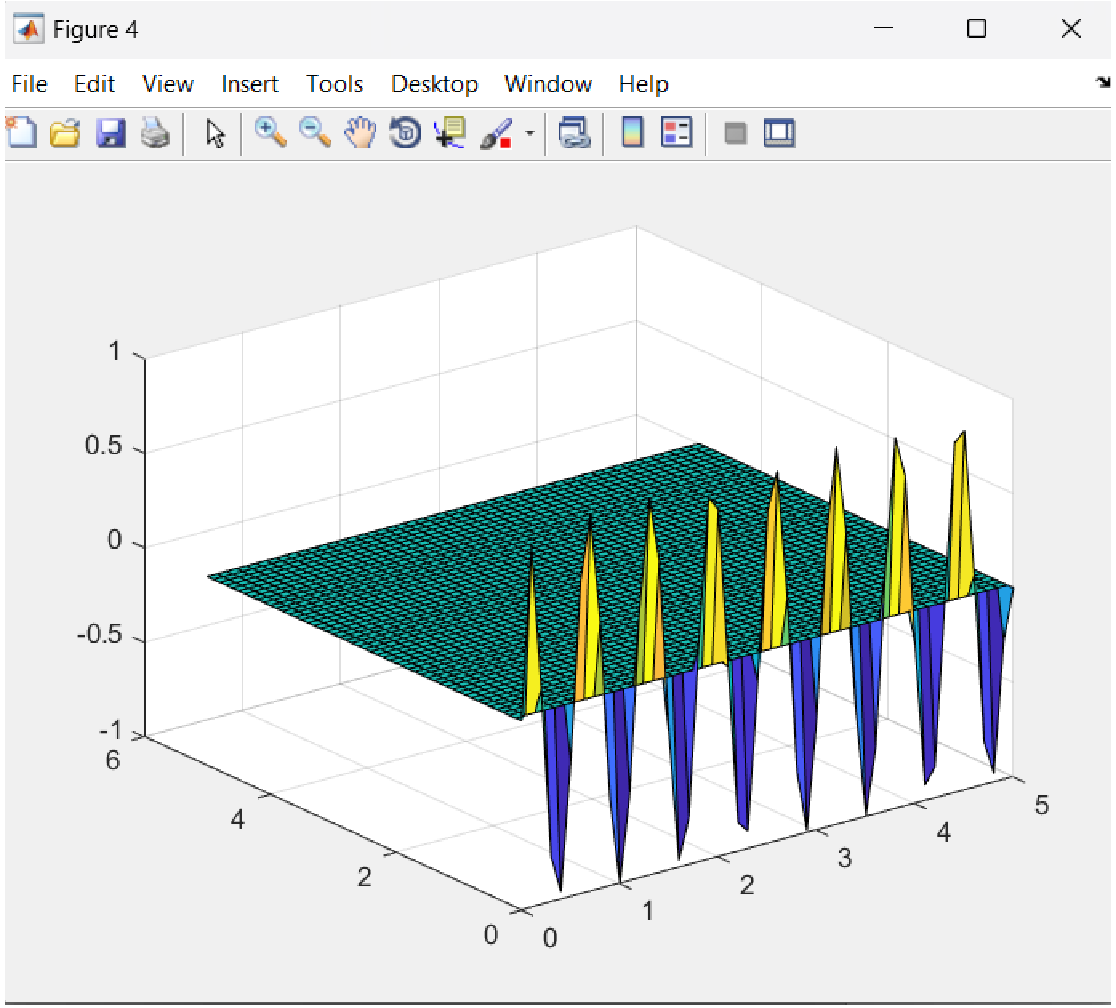
```
clc; clear all; close all;
disp('metode Theta pada Persamaan Difusi 1 Dimensi');
D=input('nilai konstanta difusi D = ');
k=input('delta t = ');
h=input('delta x = ');
m=input('batas x = ');
n=input('batas t =');
theta1=input('nilai theta = ');
mu=D*k/h^2
x=0:h:m
t=0:k:n
px=length(x);
pt=length(t);
A=zeros(px,pt);
B=zeros(px,1);
X=zeros(px,1);

%nilai batas
for i=1:pt
    u(1,i)=0
    u(px,i)=0
end

%nilai awal
for j=2:px-1
    u(j,1)=sin(j);
end
```

```
%matriks A
A
for m=2:px-1
    A(m,m-1)=mu*theta1
    A(m,m)=-mu*theta1-1
    A(m,m+1)=mu*theta1
end

%matriks B
for i=1:pt
    for j=2:px-1
        B=(-mu+mu*theta1)*u(j+1,i)+(2*mu-2*mu*theta1-1)*u(j,i)-(mu-mu*theta1)*u(j-1,i);
    end
end
X=inv(A)*B

for i=1:pt
    figure(1)
    plot(x,u(:,i))
    xlabel('waktu t')
    ylabel('nilai u(x,t)');
    title('Persamaan Difusi 1 Dimensi dengan Metode Theta')
    legend('kurva u(x,t)')
    pause(0.000000005)
    hold on;
end

figure(2)
mesh(x,t,u');
figure(3)
meshgrid(x,t,u')
figure(4)
surf(x,t,u')
```

# SIMULASI 1:

```
metode Theta pada Persamaan Difusi 1 Dimensi
nilai konstanta difusi D = 1.5
delta t = 0.1
delta x = 0.1
batas x = 5
batas t =5
nilai theta = 0.2
```



# UTS PROJECT:

**Direction**: UTS Project dikumpulkan **17 Mei 2025**. **Ditulis tangan rapi**. Hasil screenshot script program, plot grafik, dan inputan program ditempel rapi pada lembar terpisah.

1. CO1: Dengan metode eksplisit klasik, metode Duffort Frankle, metode implisit dan metode theta ubah persamaan difusi berikut ke bentuk diskritnya:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
jika diberikan kondisi awal $u(0,x) = 2x^2 + 1$ dan kondisi batas $u(t,0) = 0$ dan $u(t,10) = 0$
2. CO4: Kerjakan (a) analisis kestabilan dan (b) analisis orde error

3. CO2: Tampilkan script program, inputan dari program, profil grafik

4. CO3: Lakukan analisis dari profil grafik anda berkaitan dengan analisis kestabilan dan orde error dari soal nomor 1.