

# **מבני נתונים**

# **אוסף מבחנים**

ນציג החוג: יעלאי הנדי

054-4448698

[ilai@netvision.net.il](mailto:ilai@netvision.net.il)

לחומרים נוספים גלשו לאתר הסטודנטים:

[cs.haifa.ac.il/students](http://cs.haifa.ac.il/students)



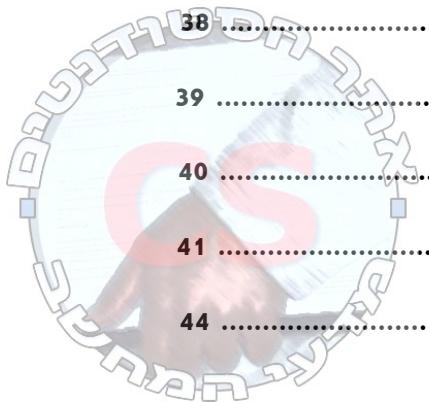
# **מבנה נתונים – אוסף מבחנים**

איסוף ועריכה: נעליAi הנדרין.

תודה לכל הסטודנטים שהשתתפו בפרויקט פתרון המבחנים במבנה נתונים לאורך השנים.  
פתרונות אינס פתרונות רשיומים ויתכנו טעויות.

## **תוכן עניינים**

מועד א', סמסטר א' תשס"ה + פתרון	3
מועד ב', סמסטר א' תשס"ה + פתרון	8
מועד ג', סמסטר א' תשס"ה + פתרון	12
מועד א', סמסטר ב' תשס"ד + פתרון	15
מועד ב', סמסטר ב' תשס"ד + פתרון	18
מועד א', סמסטר א' תשס"ד + פתרון	20
מועד ב', סמסטר א' תשס"ד + פתרון	23
מועד ג', סמסטר א' תשס"ד + פתרון	26
מועד א', סמסטר ב' תשס"ג + פתרון	29
מועד ב', סמסטר ב' תשס"ג	31
מועד ג', סמסטר ב' תשס"ג	32
מועד א', סמסטר א' תשס"ג + פתרון	33
מועד ב', סמסטר א' תשס"ג + פתרון	35
מועד ג', סמסטר א' תשס"ג	37
מועד א', סמסטר ב' תשס"ב	38
מועד ב', סמסטר ב' תשס"ב	39
מועד ג', סמסטר ב' תשס"ב	40
מועד א', סמסטר א' תשס"ב + פתרון	41
מועד ב', סמסטר א' תשס"ב	44



46	מועד ג', סמסטר א' תשס"ב
47	מועד א', סמסטר ב' תשס"א
49	מועד ב', סמסטר ב' תשס"א
51	מועד א', סמסטר א' תשס"א + פתרון
53	מועד ב', סמסטר א' תשס"א
55	מועד ג', סמסטר א' תשס"א
57	מועד א', סמסטר א' תשס"ט
59	מועד ב', סמסטר א' תשס"ט
60	מועד א', סמסטר א' תשנ"ט + פתרון
63	מועד ב', סמסטר א' תשנ"ט + פתרון חלקי
66	מועד ג', סמסטר א' תשנ"ט
68	מועד ב', סמסטר א' תשנו'ו + פתרון
70	מועד ג', סמסטר א' תשנו'ו + פתרון
73	מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ה
74	מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ה
75	מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ד
76	מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ד
77	מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ג + פתרון
79	מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ג + פתרון
81	מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"ב
82	מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ב + פתרון חלקי
85	מבחן אמצע, סמסטר ב' תשס"א
86	מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"א
87	מבחן אמצע, סמסטר א' תשס"ט
89	אוסף תרגילים ופתרונות

203.2310.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', מועד א',  
17/1/05 פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (33 נק')**

תכnen אלגוריתם שמקבל כקלט עץ אדום שחור ובו  $n$  רשומות. האלגוריתם מחלק את העץ ל- $\sqrt{n}$  עצים אדומים נפרדים. בכל עץ  $\sqrt{n}$  איברים. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכננת.

הנח שעץ האדום שחור הוא בידך והתחילה בעץ ריק. הראה דרך שבה תוספת פעולה הרגילותות של העץ תאפשר אלגוריתם יעיל יותר לביעית חלוקת העץ ל- $\sqrt{n}$  עצים שבכל אחד מהם  $\sqrt{n}$  רשומות.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם החדש שתכננת ואת סיבוכיות הזמן של כל פעולה חדשה בעץ האדום-שחור.

**שאלה 2 : (34 נק')**

תכnen אלגוריתם שמקבל כקלט מערך ובו  $n$  רשומות.

כל רשומה:

קוד – מספר ממשי

ציוון – מספר שלם

האלגוריתם יענה על מספר רב של שאלות במבנה הבא:

קלט : שני מספרים ממשיים  $a$  ו-  $b$

פלט : הציון המינימלי בין הרשומות שהקוד שלהם גדול מ  $a$  וקטן מ-  $b$

נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת המבנה הנתוניים ואת סיבוכיות הזמן של מתן תשובה לכל שאלתא.



**שאלה 3 : (33 נק')**

תכnen אלגוריתם שמטפל ב-  $n$  רשומות של תלמידים.

בכל רשומה :

- א. שם – אותיות
- ב. ת.ז. – מספר ממשי
- ג. כיתה – מספר שלם
- ד. בית-ספר – מספר שלם
- ה. ציון באנגלית – מספר ממשי

בנה מבנה נתונים שמאפשר תשובה לשאלות הבאות :

- א. הוספת תלמיד לפי ת.ז.
- ב. הוצאה תלמיד לפי ת.ז.
- ג. בהנתן מספר כיתה – שם התלמיד המצטיין באנגלית בכיתה
- ד. בהנתן מספר בית-ספר – שם התלמיד המצטיין באנגלית בבית-ספר
- ה. איחוד שתי כיתות (הקלט לפעולה – מספרי שתי ה坚持以, ומספר בית-הספר)

הנח שמספר התלמידים הכללי זה ומספר התלמידים בכיתה לא גדול מ- $m$ .  
מספר ה坚持以 בית-ספר הוא לא גדול מ- $c$ , ומספר בת-הספר הוא לא גדול מ- $s$ .

נתח את סיבוכיות הזמן הנקנת מהמבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של התשובה לכל  
שאילתא כפונקציה של  $s, c, m, n$ .



1c 1c "ice

$O(\sqrt{n})$  in order  $\lambda \geq 0$   $\Rightarrow \sqrt{n} \geq \lambda \sqrt{n}$   $\Rightarrow \lambda \leq 1$   $O(\log n)$  für split

$\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} / \log n = O(n \log n) \leftarrow$   $n^2 / n \log n = n / \log n$

... בְּנֵי יִשְׂרָאֵל

... pñ3y & NISIA NISI VñA TñCA ~~EST~~ CñA TñCA NISIA

$O(n)$  in order to find all of the nodes.

0(1)  $\text{sum} = \text{sum} + \text{array}[i]$

$O(\sqrt{n})$

РІВНОВАГА ВІДНОСИТЬСЯ ДО ПОДІЙ

$\Delta^2(N^2) = \sqrt{N} - 16 \in \mathcal{O}(N)$

$$O(\sqrt{n}\sqrt{n}) = O(n)$$

( $\exists N \in \mathbb{N}$  such that  $\forall n \geq N$ ,  $a_n = 0$ )  $\iff$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$O(\log n) = \sqrt{n} \lambda \mu \beta N$  : For  $\lambda \beta N$  very large it has been

מִתְבָּרֵךְ יְהוָה כִּי־בְּרָכָה יְהוָה וְאֶת־בְּרָכוֹת־יְהוָה תַּשְׁלִיכָה בְּעֵינֵינוּ

... מִנְיָן תַּחֲנוּן אֶת־בְּנֵי־יִשְׂרָאֵל וְעַל־כָּל־עַמּוֹתָיו כִּי־בְּנֵי־יִשְׂרָאֵל

$$O(\log n) = (\sqrt{n} \times n) \text{ steps} \rightarrow : \text{split } \overset{\circ}{\rightarrow} \text{ vs } \overset{\bullet}{\rightarrow}$$

$O(\log n)$   $\propto \frac{1}{\sqrt{n}}$   $\propto \sqrt{n}$   $\propto \frac{1}{n^{1/2}}$   $\propto \frac{1}{n^{3/2}}$

$O(\log h)$  split is prob over  $3^{100}$

(What are the top 5 ways to make your job easier?)

$\sqrt{y} \approx \eta(x)$

$O(n \log n)$

Nitron in Nitro & nitril

Figure 6. *Scanning electron micrograph* showing the surface morphology of the polymeric film.

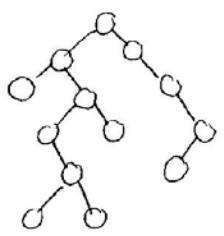
~~2036th Regt of Inf 1st Div~~

• תרנגולת נאכלת אוניות וטילים מים.

на землю заліз, що є - пасажир.

3. Last night I was 100%.





$O(n)$  לאריך + נס. טר: תעלוקה פלאס



$O(1)$  נויר בירזון לאריך - "

~~תעלוקה פלאס~~

$O(n)$  מינימום ומקסימום נס. טר: תעלוקה פלאס

לעומת פלאס מינימום ומקסימום נס. טר: ~~תעלוקה פלאס~~ נס. טר: תעלוקה פלאס

מאלקן

$O(n)$

לCAR נס. טר.



$O(1)$  נויר

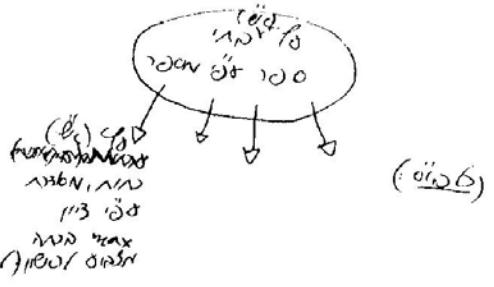
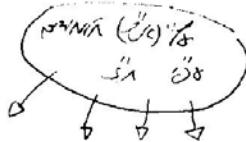
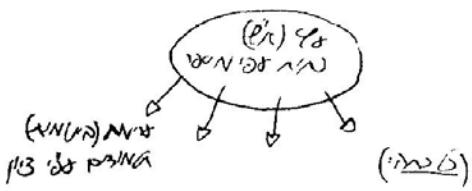
$O(n)$  נס. טר

(3) לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך: תעלוקה פלאס  
לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך  $\leftarrow$  תעלוקה פלאס.

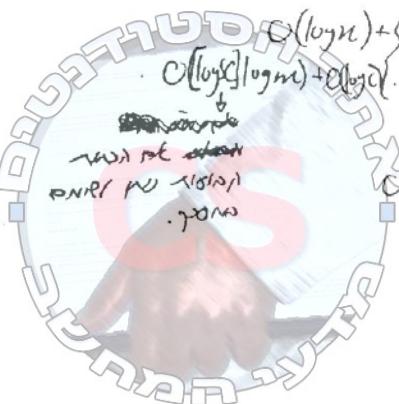
לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך  $\leftarrow$  תעלוקה פלאס.  
לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך  $\leftarrow$  תעלוקה פלאס.



לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך



לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך - תעלוקה פלאס  $\leftarrow$  תעלוקה פלאס.



לעומת פלאס נס. טר נס. טר באלקן לאריך  $\leftarrow$  תעלוקה פלאס.

$O(\log n) + \{ O(\log \log n) + O(\log \log \log n) + O(\log \log \log \log n) \}$   $\leftarrow$  תעלוקה פלאס.

$O(\log n) + \{ O(\log \log n) + O(\log \log \log n) \} \leftarrow$  תעלוקה פלאס.

$O(\log s)$  } • מושך וריאנט אחד גמור. (3)  
 $O(n)$  } • מושך וריאנט אחד גמור.

$O(\log s)$  • נזקן וריאנט אחד גמור.  
 $O(\log c)$  • נזקן וריאנט אחד גמור.  
 $O(\log \epsilon)$  • נזקן וריאנט אחד גמור.  
 $O(\log \delta)$  • נזקן וריאנט אחד גמור.

לכל  $\epsilon$  קיימת  $c$  ו- $\delta$  כך ש  $\log \epsilon < \log c < \log \delta$ .  
 $\log \epsilon$  מוגדר כפונקציית גבול של  $\log c$ .

כל  $\epsilon$  קיימת  $c$  ו- $\delta$  כך ש  $\log \epsilon < \log c < \log \delta$ .



## מְבָנִי נֶתוֹנוּנִים

203.2310.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', מועד ב',  
17/2/05  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

### שאלה 1: (33 נק')

הוסף לפעולות שנלמדו בכיתה לטיפול בעץ אדום-שחור את השאלה הבאה:  
קלט: מצביע על צומת A בעץ ובו מפתח PA.

פלט: צומת B בעץ ובו מפתח PB כך שבעצם קיימים בדיקות  $\log$  מפתחות@gadolim מ-PA  
וקטנים מ-PB.

הראה דרך לענות על השאלה ב-(1) O זמן.  
נתח את סיבוכיות הזמן של השינויים שביצעת על שאר הפעולות בעץ האדום-שחור. הנה  
שהשאילות ניתנות מספר רב של פעמים.

### שאלה 2: (34 נק')

נתונה ערמה ובה  $n$  איברים.

הראה דרך לחלק את הערמה לשתי ערמות: באחת  $\frac{n}{3}$  איברים ובשנייה  $\frac{2n}{3}$

התיחס בנפרד לערמה ביןארית ולערמה ביןומית.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתכננת.

### שאלה 3: (33 נק')

נתון עץ ובו  $n$  צמתים. בכל צומת מספר שלם חיובי.

תכןן אלגוריתם שהינו מביאים במצבים לשני צמתים a ו- b בעץ מחשב את סכום המספרים  
בצמתים על המסלול בעץ בין a ל- b.

נתח את זמן ה妍ת מבני הנתונים ואת זמן התשובה לכל שאלה.

בצלחה!



ב' נס סדרה

1)

ר' נס סדרה  
ב' נס סדרה  
(ב' נס סדרה) פסיבי סדרה.



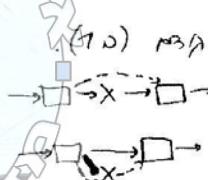
א(1) נס סדרה: טיפוס

טיפוס ①: טיפוס - ר' נס סדרה  
טיפוס ②

ט' נס סדרה (ט' נס סדרה) - ר' נס סדרה  
(ט' נס סדרה) (ט' נס סדרה) (ט' נס סדרה)  
ט' נס סדרה (ט' נס סדרה) (ט' נס סדרה)

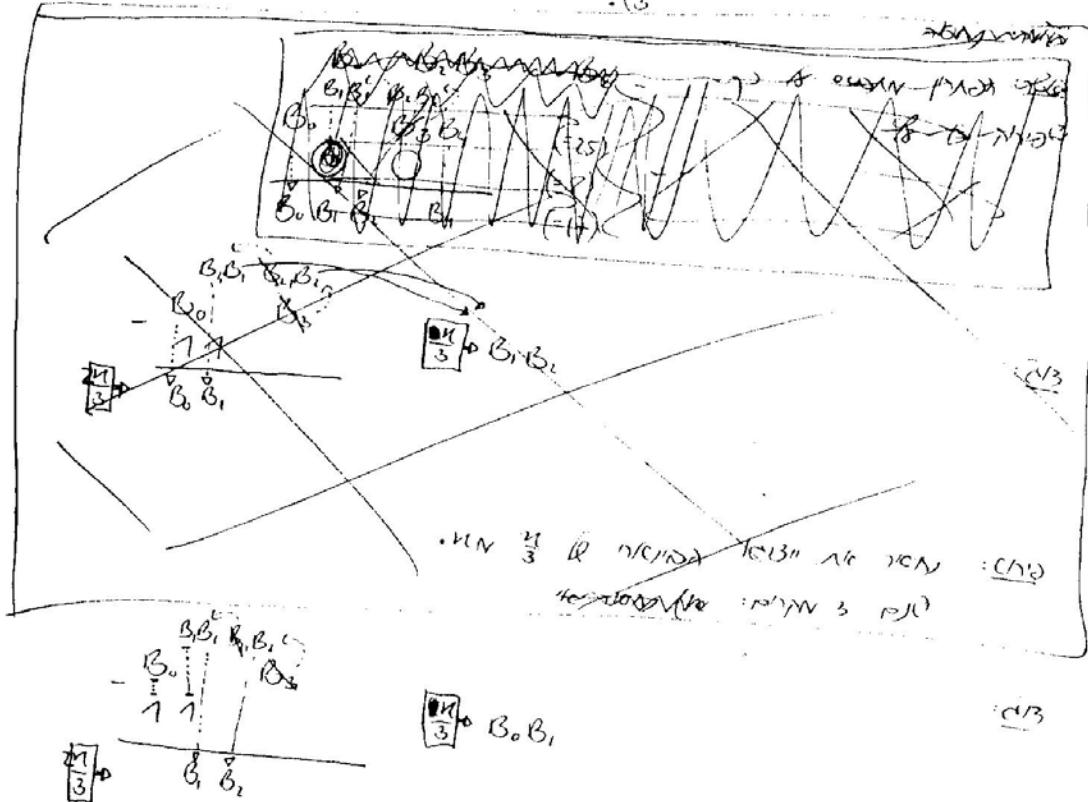
ט' נס סדרה (ט' נס סדרה) (ט' נס סדרה)  
(ט' נס סדרה) (ט' נס סדרה) (ט' נס סדרה)

ט' נס סדרה



ו' נס סדרה (ו' נס סדרה) (ו' נס סדרה) (ו' נס סדרה)

per year per pair  $\sim O(\log n) \approx 10^3$  minutes required to find  $\frac{1}{n}$  pairs  
 $\cdot O(\log n)^2$  best pairs / pairs

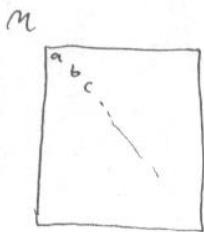


בנוסף ל- $B_k$ , נקבע  $\frac{4}{3}$  ב- $N$  (ב- $N$  מוגדרת  $k+1$ ), וכך  $\frac{1}{N}$  (ב- $N$ )  $= \frac{1}{B_k}$ .  
 $(\forall k) B_k \in \text{הטבות ה-} N$   $\iff -B_k \in (\text{הטבות ה-} N)$   
 $\frac{4}{3} \in \text{הטבות ה-} N \iff \frac{1}{B_k} \in \text{הטבות ה-} N$

$$\text{If } B_{11} \neq 0, \text{ then } B_1 = -B_2 \text{ and } B_2 = -B_1.$$

1.  $M_{\text{farb}} \approx 10^{37} \text{ g}$  або  $10^{38} \text{ g}$  це  $\approx 10^{10} \text{ M}_{\odot}$ , тобто маса  $M_{\text{farb}}$  відповідає масі  $M_{\odot}$

$$M_{[ab]} = M_{[bc]a} \quad \text{and}, \quad M_{[ca]} = M_{[ab]c} \quad \text{and} \quad M_{[a,b]} = \frac{1}{2}(M_{[ab]} + M_{[ba]})$$



የዚህ አገልግሎት የሚከተሉት ስምዎች በፊርማ የለው  
የዚህ አገልግሎት የሚከተሉት ስምዎች በፊርማ የለው

survived, and LCA is known to do a bivariate analysis of survival data.

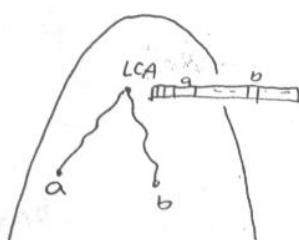


PRINCE CITY BANK AND TRUST COMPANY

~~RECORDED~~. LCA Q 7024 8321 1110A

~~ПАНАР ПОД ТЕМНІ РОДИНИ ТА НІ БІЛІ ПОНІ ВОЛІАНІСІ~~

• O 1SN i km 15/0 ← u g 1363 11'K i n/c



$LCA \approx \lambda k \log n$ ,  $PYNN^3$  has  $\sqrt{n}$  steps alternating:  $\lambda k \log n$

$$\text{. } v(LCA) = LCA[a] + LCA[b] \quad \text{for } PYNN^3 \quad \text{. } PQR$$

O(n) ~~mean takes O(n log n)~~ - O(n log n) ~~mean~~

$$S^{(n)} = \{x_{ij} \mid (i,j) \in G_n\}$$

$O(n) = \Theta(n)$  ( $n \geq 1$ ) ( $c_1 : \underline{2}, c_2 : 1$ )

- Postorder ְַּשָׁבֵן יְהוָה יְהוָה יְהוָה יְהוָה יְהוָה (ז)

$$v[i] = \begin{cases} i & \text{if } i \neq n \\ 0 & \text{if } i = n \end{cases}$$

$$U[i] = \begin{cases} i=L & U(L) \\ i=R & V(R) \\ B[i] \neq 0 & B[i] + V(B) \\ L[i] \neq 0 & L[i] + V(L) \\ \lambda > \lambda_L & 0 \end{cases}$$

$n$  person for  $n^2$  -  $O(n^2)$  ?

(1) **הנִזְמָן** (הנִזְמָן) - (...) נזמן מלהר בימי מלך סוסיאן מלך ממלכת ארץ ישראל: נזמן

203.2310.א  
שנה"ל תשס"ה, סמס' א', מועד ג',  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (33 נק')**

פעולת "מצא חביב" בערמה הבינומית שנלמדה בכיתה עלותה ( $\log n$ ). O הראה כיצד ניתן לשנותה לפעולה שזמנה (1) O, ומה משמעות השינויים שביצעת על שאר הפעולות בערמה הבינומית (סיבוכיות הזמן של שאר הפעולות). **אין להוסיף** מבני נתונים ומשתנים נוספים מעבר לבני הרגיל של הערמה הבינומית.

**שאלה 2 : (33 נק')**

בנה מבני נתונים שמתפל ברשומות (לכל רשומה מפתח) ומבצע את הפעולות הבאות:

א. הוסף רשומה.

ב. הוצאת רשומה לפי מפתח.

ג. מוציא רשומה לפי מפתח.

**1.2** הנח שמספר המפתחות השונים בכל רגע נתון הוא  $^{1/5} \text{ת}$ . תאר את מבני הנתונים ונתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה.

**2.2** הנח שמספר המפתחות השונים בכל רגע נתון הוא  $(\log n)^6$ . תאר את מבני הנתונים ונתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה.

**שאלה 3 : (34 נק')**

נתונים  $n$  מספרים  $a_1, \dots, a_n$ . תכנן אלגוריתם שעונה לשאלות שמקבלות כקלט אינדקס  $i$  ומחשבת את מספר האיברים בין האיבר  $a_i$  והאיבר  $a_j$  כך ש :

$$(1) \quad i < j$$

$$(2) \quad a_j < a_i$$

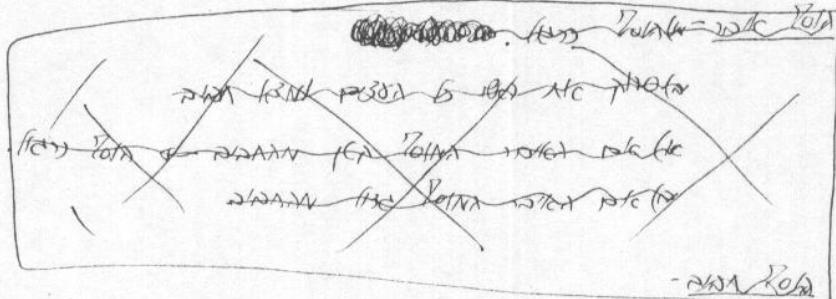
$$(3) \quad \text{וגם } j \text{ מקסימלי.}$$

נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבני הנתונים, ואת סיבוכיות הזמן של מתן התשובה לכל שאלתא.

**בצלחה!**

C k aer

•  $O(1)$  - անընդունակ բարեկարգ - պահանջման

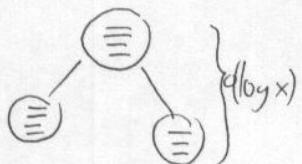


$O(kyn)$   $\{$  .  $\ddot{\omega} \approx \theta \approx \pi$   $\}$



• pillow down to Q m/s results early > 53, 83rd BE 1/18/21 35  
• (WHD+) PMS 4 m/s com B  $\frac{①}{\Delta}$  MHSU ac  
•  $\Delta$  ②  
•  $\Delta$  MSA - PMS  
• 6 NO 20N AND 6, PMS ~~13~~ V X m/s est 98  
• x MSA W/S MHSU ~~transient~~

$O(\log n)$  -  $\log(n)$  ( $c = (\log n) \cdot 1$ ) ①  $\log n$  1/10000 1/1000 ①  
 $O(\log n)$  -  $\log(n)$   
 $O(\log n)$  -  $\log(n)$



$$\begin{aligned} O(\log x) &= P_{\text{PA}}(1c : \text{PUBLISH } x) \quad \text{②} \quad \text{1c은 } \text{PUBLISH } \text{입니다.} \\ O(\log x) &= \text{1c } \in \text{Naturals} \quad (\rightarrow) \\ O(\log x) &= 1c^N \quad (c \end{aligned}$$

-MS(01) 2 minute for each file used

Mc Leannan, ACT 1970 10A - ① Australian early to logins =  $\frac{1}{5} \log n$  e new  
BKA 730P BNA

• 31d 730P 130-1

$$x = (10y_1)^6 \quad (2.2)$$

$O(\log(\log n^c)) = O(\log \log n)$  for all  $c > 1$  is the  $\Theta$  notation case.



mini ISCA of ROM/ASIM & NPS

• פונקציית כוח - odd

Dear Mr. Gurney

~~records~~ *Scutellaria* *haynei*

, preorder  $\{S_1 S_2 D_1\}$ .

join NC ANB

On 1<sup>st</sup> March 1911.

66

$\text{O}(n) = \underline{\underline{n}}$

$$(i-j=) \quad O(1) \quad \text{?}$$

203.2310.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' ב', מועד א',  
21.6.2004  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

ברצוננו להוסיף פעולה הטיפול בעץ אדום שחור (בעל  $\Theta$  צמתים) שנלמדו בכיתה את הפעולה `split`. פעולה זו מחלקת את העץ לשני עצים בעלי גודל זהה ( $\pm 1$ ). בעץ הראשון האיברים הקטנים ובעץ השני האיברים הגדולים. נתח את סיבוכיות הזמן של פעולה `split`. האם השינויים שביצעת בעץ האדום שחור השפיעו על סיבוכיות הזמן של הפעולות הרגילים? (רמז: ניתן לבצע את פעולה `split` ב  $O(n \log n)$  זמן).

**שאלה 2: (33 נק')**

נתון עץ קרטזי ובו  $n$  איברים (מינימום בראש).  
א. תכון אלגוריתם שモazaar את  $k$  האיברים הקטנים מתוך  $n$  האיברים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.  
ב. הדפס את  $m$  האיברים הראשונים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכננת.  
הוכח שלא ניתן לשפר את האלגוריתם שהצעת.

**שאלה 3: (34 נק')**

נתונות  $n$  רשומות. בכל רשומה:

- א. שם הסטודנט
- ב. מספר סיורו (מספר ממשי)
- ג. ציון במערכות הפעלה (מספר שלם 00-100)
- ד. ציון ממוצע בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי)

בנה מבני נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

- א. הוסף סטודנט לפי מספר סיורו.
- ב. בטל סטודנט לפי מספר סיורו.
- ג. מצא את הסטודנט בעל המספר הסיורי הקטן ביותר בין כל הסטודנטים בעלי הציון הממוצע הגבוה ביותר בחוג.
- ד. מצא את הסטודנט שהציוון שלו במערכות הפעלה הוא החציוון של שאר הציוונים.

נתח את סיבוכיות הזמן של היכנת מבני הנתונים. הנה שהתרחשות מבני נתונים ריקים. נתח את סיבוכיות הזמן של כל שאלתא, הנה שבזמן השאלתא מבני הנתונים מכילים  $n$  רשומות.

ב הצלחה!

Kooper

.113AA is split from ei

1

(~~300~~ रुपये का - प्रधानमंत्री द्वारा वितरण किया) : प्रधानमंत्री

מג'ן רגד : מדור ג'זע ז מרכז עיר: ירושלים

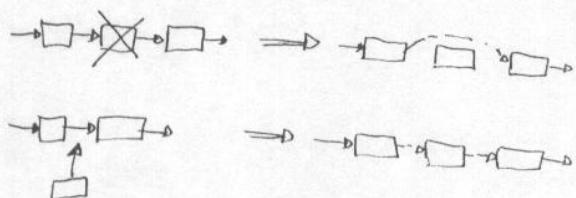
$$\text{MnO}_2 + \text{PbA} \rightarrow \text{MnA} + \text{PbO}$$

~~Open path to the next segment~~

WE WERE ALREADY WORKING ON THE MELT: WE HAD TO GET THE MELT DOWN AND WORK ON IT. THEY WERE GOING TO TRY AND GET THE MELT DOWN AND WORK ON IT. THEY WERE GOING TO TRY AND GET THE MELT DOWN AND WORK ON IT.

\* P/C : Motors not

...when I'm older, as - probably probably we never ever will



(K)now ~~the~~ (no) know is split now : split

After 1000 steps the state is  $O(x_0)$  after (1c) (2)

• 019 Bk 2  
Kymata → Dorsal (D) ventral (V) midline (M) R3+4 (R4) P1-5 (P1-5) AN1-5 (AN1-5)

стан юнде не мозгови (объект), инициатора (акт) или коммуниканта (речь)

~~Q~~ -  $\Theta(n^2 \log n)$   $\Omega(n^2 \log n)$   $\Theta(n^2 \log n)$   $\Omega(n^2 \log n)$   $\Theta(n^2 \log n)$   $\Omega(n^2 \log n)$

- 1% p/c and the ~~other~~

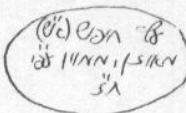
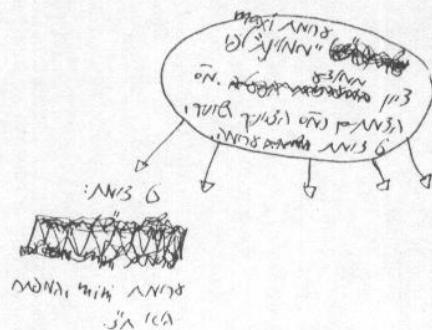
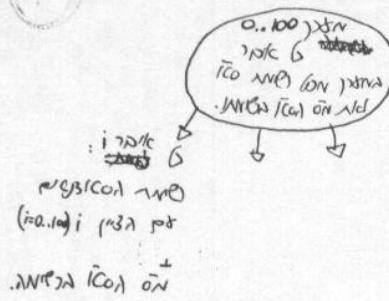
$$O(k) = \text{rank } B \leftarrow \text{rank } k$$

- UNN 1321 140 10<sup>5</sup> pA O(n log n) 16A 1"VR 10000 ~~10000~~ 100000 (n)

(Learner's name) Name: John Doe : 123 ABC-123  
Date of birth: : 12/01/1990



3:  $O(n^2)$  or  $\Theta(n^2)$   $\Theta(n^2)$   $\Theta(n^2)$   $\Theta(n^2)$   $\Theta(n^2)$



$O(\log n)$  -  $\in \Theta$  Big. :  $n^{\frac{1}{2}}$  or  $n^{0.1}$  (1c)

$O(\log n + \log n)$  .  $\in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$  Big.

$O(1)$  Big.  $\in \Theta(1)$ .

$O(\log n)$  .  $\in \Theta$  Big. :  $\Theta(n)$  (2c)

$O(\log n)$  .  $\in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$  Big.

$O(1)$  .  $\in \Theta(1)$ .

$O(1)$  {  $\in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$  Big.  $\in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$  Big. :  $\max(n^{\frac{1}{2}}, m^{\frac{1}{2}})$  (2c)

•  $\max(n^{\frac{1}{2}}, m^{\frac{1}{2}})$

•  $\min(n^{\frac{1}{2}}, m^{\frac{1}{2}})$

$O(100) = O(1)$  {  $\in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$  Big.  $\in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$  Big. :  $n^{\frac{1}{2}}$  or  $n^{\frac{1}{2}}$  (3c)

•  $n^{\frac{1}{2}}$  or  $n^{\frac{1}{2}}$

•  $n^{\frac{1}{2}}$  or  $n^{\frac{1}{2}}$



אנו: או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  ↓  
או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$  או  $n^{\frac{1}{2}}$

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' ב', מועד ב', 11/7/04  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

ברצוננו להוסיף לפעולות הטיפול בעץ אדום שחור (בעל ח צמותים) שנלמדו בכיתה את שתי הפעולות הבאות:

- א. בהינתן מצביע למפתח  $\mathbb{C}$  מצא ב- (1)O זמן האם המפתח  $2^*\mathbb{C}$  נמצא בעץ.  
ב. בהינתן מצביע למפתח  $\mathbb{C}$  מצא ב- (1)O זמן את המפתח העוקב בעץ.  
האם השינויים שביצעת בעץ האדום שחור השפיעו על סיבוכיות הזמן של הפעולות הרגילות? הנה שהתחלה בעץ ריק, ובזמן מתן השאלה בעץ ת רשותות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה סדרת מספרים שלמים שונים  $a_1 \dots a_n$  ...  
תכנן אלגוריתם שמקבל אינדקס  $q$  ומוצא את האינדקס  $q < j < 0$  הגדל ביותר כך ש:  $a_j > a_q$   
נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של המענה לכל שאלתא.

**שאלה 3: (34 נק')**

נתונות ת רשותות. בכל רשותה:

- א. שם הסטודנט בעברית עד 20 אותיות  
ב. ציון במערכות הפעלה (מספר שלם 0-100)  
ג. ציון ממוצע בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי)

בנה מבני נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

- א. הוסיף סטודנט לפי שם הסטודנט.  
ב. בטל סטודנט לפי שם הסטודנט.  
ג. הדפס את כל השמות של התלמידים בעלי ממוצע הציונים בחוג למדעי המחשב מעל 90.  
ד. הדפס את ממוצע הציונים במערכות הפעלה של כל התלמידים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבני הנתונים. הנה שהתחלה מבני נתונים ריקים. נתח את סיבוכיות הזמן של כל שאלתא, הנה שבזמן השאלה מבני הנתונים מכילים ת רשותות.

ב הצלחה!

1.  $\text{P}^{\text{found}} / \text{P}^{\text{not found}} = \frac{\text{P}(\text{found})}{\text{P}(\text{not found})} = \frac{\text{P}(\text{found})}{1 - \text{P}(\text{found})}$

Found / Not Found {  $\text{P}(\text{found})$   
Not Found

1

הנימוקים: רשות

. נתקל בפונקציית  $f(x)$  ופונקציית  $g(x)$  בפונקציית  $h(x) = f(g(x))$  - ①

~~אנו~~  $\text{f}(x) = \text{P}(\text{found})$   $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found})$   $\text{h}(x) = \text{P}(\text{found}) \cdot \text{P}(\text{not found})$  - ②

. Found  $\Rightarrow \text{f}(x) = 1$   $\Rightarrow \text{P}(\text{found}) = 1$

~~אנו~~  $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found}) = 1 - \text{P}(\text{found})$

③. Found  $\Rightarrow \text{f}(x) = 1$   $\Rightarrow \text{P}(\text{found}) = 1$

או  $\text{f}(x) = \text{P}(\text{found})$ ,  $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found})$  ~~אנו~~  $\text{h}(x) = \text{P}(\text{found}) \cdot \text{P}(\text{not found})$

~~אנו~~  $\text{f}(x) = \text{P}(\text{found})$   $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found})$   $\text{h}(x) = \text{P}(\text{found}) \cdot \text{P}(\text{not found})$   $\Rightarrow \text{h}(x) = \text{P}(\text{not found}) \cdot \text{P}(\text{found})$

.  $\text{f}(x) = \text{P}(\text{found})$   $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found})$   $\text{h}(x) = \text{P}(\text{found}) \cdot \text{P}(\text{not found})$  - ④

.  $\text{f}(x) = \text{P}(\text{found})$   $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found})$   $\text{h}(x) = \text{P}(\text{not found}) \cdot \text{P}(\text{found})$  - ⑤

.  $\text{f}(x) = \text{P}(\text{found})$   $\text{g}(x) = \text{P}(\text{not found})$   $\text{h}(x) = \text{P}(\text{not found}) \cdot \text{P}(\text{found})$  - ⑥

10

2

. מיפוי  $\text{f}(x) = \text{max}(\text{f}(x), \text{f}(x+1), \dots, \text{f}(x+n-1))$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$

.  $\text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$

3

.  $\text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$

.  $\text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$

.  $\text{f}(x) = \text{f}(x)$   $\Rightarrow \text{f}(x) = \text{f}(x)$

$(n+1) \text{f}(x) + \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) = \text{f}(x) + \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n)$

$\text{f}(x) + \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1)$

.  $(n+1) \text{f}(x) + \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1)$

.  $\text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1)$

.  $\text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1)$

.  $\text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1)$

.  $\text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1) = \text{f}(x+1) + \dots + \text{f}(x+n) + \text{f}(x+1)$

203.2310.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', מועד א',  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

שאלה 1: (34 נק')

נתונות  $n$  רשומות. בכל רשומה:

א. שם הסטודנט

ב. תעודה זהות

ג. ציון במבנה נתוניים (מספר שלם 000-0)

ד. ציון במערכות הפעלה (מספר ממשי)

בנה מבני נתוניים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

א. הוסף סטודנט לפי תעודה זהות.

ב. בטל סטודנט לפי תעודה זהות.

ג. מצא את הסטודנט בעל הפרש הציונים הקטן ביותר בין מבנה נתוניים למערכות הפעלה.

ד. מצא את הציון השכיח ביותר במבנה נתוניים.

שאלה 2: (33 נק')

ברצוננו להוסיף לפעולות הטיפול בעץ אדום שחור (בעל  $n$  צמתים) שנלמדו בכיתה את הפעולה הבאה (השאילתא תינתן מספר רב של פעמים):

בhinaten מפתח  $n$ . בטל את  $i$  המפתחות העוקבים ל- $n$  בעץ.

נתח את סיבוכיות הזמן של ביצוע הפעלה.  
אם השינויים שביצעת בעץ האדום שחור השפיעו על סיבוכיות הזמן של הפעולות הרגילות?

שאלה 3: (33 נק')

נתונות  $n$  מחרוזות DNA ( $s_1 \dots s_n$ ). בכל מחרוזת  $i$  אותיות ( $m > n$ ).  
בנה מבנה נתוניים שמאפשר לענות על השאלה הבאה (השאילתא תינתן מספר רב של פעמים).

קלט: 2 אינדקסים  $i$  ו- $j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

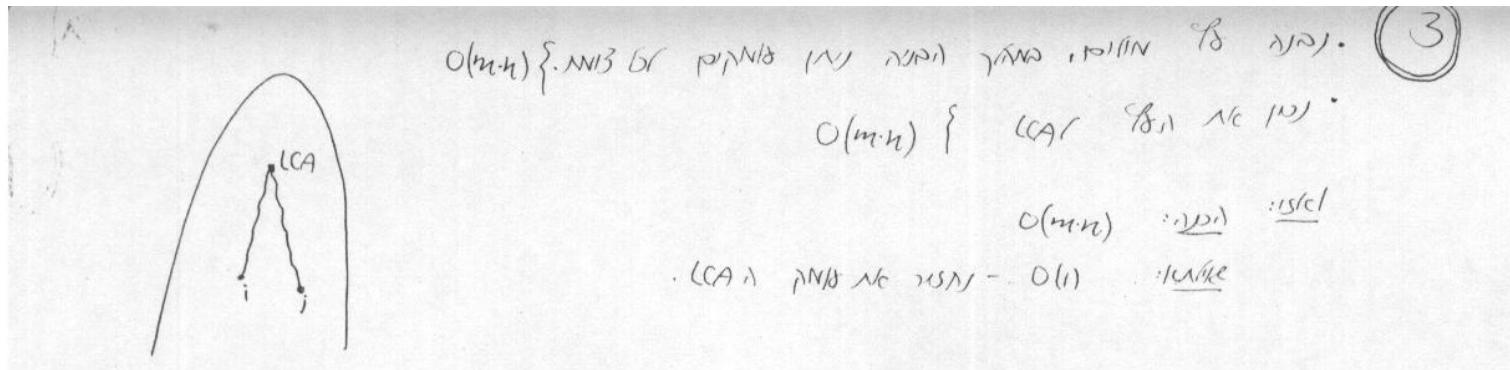
פלט: אורך הרישא זהה של 2 המחרוזות  $s_i$  ו-  $s_j$

(לדוגמא: האורך של הרישא זהה של המחרוזות  $abcd$  ו- $abxy$  הוא 2).

נתח את סיבוכיות הזמן של בניית המבנה הנתוניים ואת סיבוכיות הזמן של התשובה לכל שאלה.

בהצלחה!





**203.2310.1**

**שנה"ל תשס"ד, סמס' א', מועד ב',  
פרופ' מנחים גד לנDAO**

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונות  $\pi$  רשומות. בכל רשומה:

- א. שם הסטודנט
- ב. קוד אישי (מספר ממשי)
- ג. ציון במבנה נתונים (מספר שלם 100-0)
- ד. ציון במערכות הפעלה (מספר ממשי)

בנה מבנה נתונים שמאפשרים לבצע את הפעולות הבאות:

- א. הוסף סטודנט לפי קוד אישי.
  - ב. בטל סטודנט לפי קוד אישי.
  - ג. מצא מבין התלמידים הטובים במערכות הפעלה את הסטודנט בעל הציון הגבוה במבנה נתונים. (התלמידים הטובים הם אלו שנמצאים בחצי העליון של הציונים במערכות הפעלה).
  - ד. מצא מבין התלמידים הגורעים במערכות הפעלה את בעל הציון הנמוך במערכות הפעלה.
- הפעולות מתבצעות מספר רב של פעמים. הנח שהתחלה במבנה נתונים ריק. נתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בהנחה שביצוע ביצוע הפעולה נתונות  $\pi$  רשומות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות  $\pi$  רשומות של נישומים. בכל רשומה:

- א. שם
- ב. קוד אישי - מספר שלם  $k \leq n \leq 1$  ייחודי לכל נישום.
- ג. הכנסה - מספר שלם  $(m-0) < n < m$ . הרשותות נתונות ממיניות לפי הקוד האישית.

כתב אלגוריתם שמחساب את המערך:  $[A..1..] = [k-p]$

ההכנסה הגבואה ביותר של נישום שהקוד האישית שלו בין  $i$  ל-  $i+k-p$

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שמצוות.

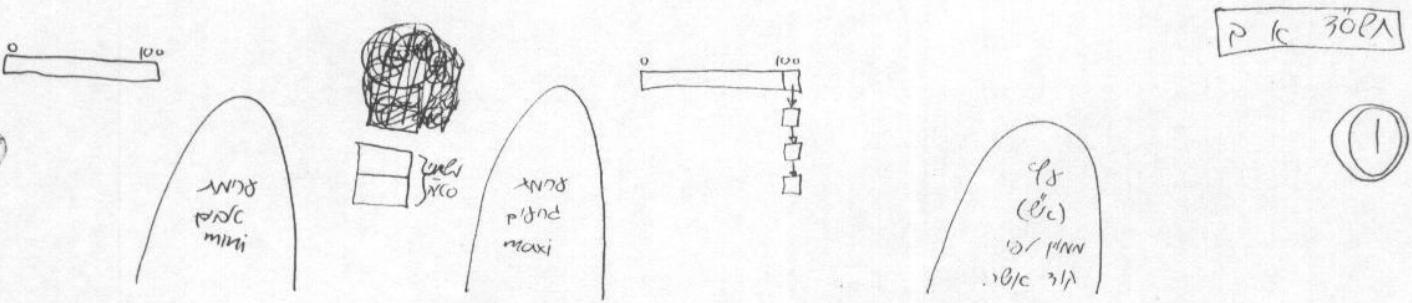
**שאלה 3: (33 נק')**

נתונות שתי סדרות של אותיות  $A=a_1 \dots a_n$   $B=b_1 \dots b_m$  מצא את תת הסדרה הזיהה **הרציפה** הארוכה ביותר. (בניגוד ל-LCS, יכול יש למצוא את

תת הסדרה הרציפה הארוכה ביותר, ככלומר לדוגמא  $a_i \dots a_{i+k} = b_j \dots b_{j+k}$  בדוגמה תת סדרה רציפה זהה באורך  $k$ ).

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שמצוות.





Black Rock Desert (E.C.) State Park

— 2 —

• Etc 317 or 111111 (0<sub>c</sub>) To ① : which is seen in 13100 200, plus 111111 3 111111

$$\text{over } N^2/C_3 \quad \rho_{\text{eff}}^{\text{FC}}, \rho_{\text{eff}}^{\text{FC}} - 1/N^2 \delta^2 \quad (2)$$

ANION ANION AND A NEUTRAL NEUTRAL

• 7231 1882 2740 1110

$$Vc \text{ of } 10\text{V} \text{ per } .2 \times 0.100 \text{ JHN } ③$$

for John - really you can possibly ever icon

• תְּמִימָה וְתַּחֲזִיקָה בְּעֵבֶד

•  $\text{PAPC}_1$   $\gamma_{\text{PAPC}}$   $\gamma_{\text{PAPC}_1}$  /  $\text{PAPC}_1$

• תְּנַשֵּׁא מִתְּבָרֶן יְהוָה וְאֶת־

$O(\log n)$

$\mathcal{O}(\log n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} m/10/N \\ 1/N \end{array} \right.$$

~~O(logn)~~ - ~~sum~~ ~~for~~ ~~poly~~ - poly (f)

~~O(logn)~~ ~~for~~ ~~each~~ ~~element~~ ~~in~~ ~~array~~ ~~poly~~.

O(logn) ~~for~~ ~~each~~ ~~element~~ ~~in~~ ~~array~~ ~~poly~~.

O(1) ~~return~~ 0.00 ~~poly~~ poly.

O(logn) ~~sum~~ ~~for~~ ~~each~~ ~~element~~ ~~in~~ ~~array~~ - poly (f)

(!sum ~~for~~ ~~each~~ ~~element~~ ~~in~~ ~~array~~ ~~poly~~) ~~sum~~ ~~for~~ ~~each~~ ~~element~~ ~~in~~ ~~array~~ ~~poly~~.

O(logn) ~~for~~ ~~each~~ ~~element~~ ~~in~~ ~~array~~ 0.00 ~~poly~~ poly.

100% (0.60) 100% 70% 10% 10% ~~10%~~ (3,10)  
0% 100% 70% 10% 10% 10%  
0.310

PPP: מיליזנס ורנברג סולו אוניברסיטת תל אביב ורנברג מיליזנס

3

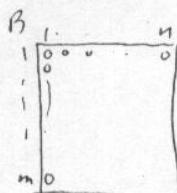
10.6 מינימום ומקסימום של אוסף איברים במרחב א-ב  $\mathbb{R}^n$ : 15.1.1 נס ציון

$$A = \{1, \dots, n\}$$

$$B = \{1, \dots, m\}$$

$$\text{פונקציית } \beta(n, m) = \begin{cases} n+m & 0 \\ \beta(n-1, m-1) + 1 & n=m \end{cases}$$

$$\beta(0, m) = \beta(n, 0) = \beta(0, 0) = 0$$



למבחן פה

נובמבר 1/1/2013

•  $\beta(i, j)$  הוא גודל של אוסף איברים ~~הנורמליזציה~~ שקיים מ- $i$  ועד  $j$ .

•  $\beta(n, m)$  הוא גודל של אוסף איברים ~~הנורמליזציה~~ שקיים מ-1 ועד  $n+m$ .

•  $\beta(n, m) = \beta(m, n)$   $\beta(n, m) = \beta(n-1, m-1) + 1$   $\beta(n, m) = \beta(n-1, m) + 1$   $\beta(n, m) = \beta(n, m-1) + 1$

•  $\beta(n, 0) = \beta(0, n) = 0$   $\beta(0, 0) = 0$

השאלה



203.2310.א.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', מועד ג',  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונה סדרה A של n ביטים.  
תכון אלגוריתם שמקבל שאלתה ובה סדרה של n log ביטים וקבע האם סדרה  
רציפה זהה נמצאת ב-A.  
נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת המבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של כל  
שאליטה (שתיות פעמים רבות).

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות שתי מחרוזות

$$A = a_1 \dots a_n$$
$$B = b_1 \dots b_n$$

של מספרים ממשיים.  
מצא את כל המספרים שמופיעים בדיק K פעמיים בכל אחת מהמחרוזות.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעת.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונה ערמת מינימום ביומית ובה m איברים. בספר הלימוד מוצגות הפעולות  
הקלאסיות המבוצעות על ערמה ביומית. בהינתן מצביע לאיבר K כלשהו בערמה,  
ברצוננו להוסיף את הפעולות הבאות:  
א. הכפל את מפתח האיבר בשניים.  
ב. בטל את תת העץ שאיבר זה הוא שורשו.  
ג. בטל מהערמה הבינומית את כל המפתחות הקטנים מהמפתח באיבר K.

בצלחה !!

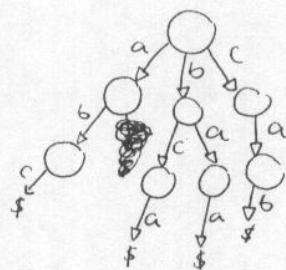


ctk 30€

~~maximum~~ by  $\mu$  min  $O(n)$  of TIE min  $\% \mu$

### abnormalities

$h = abcaba$   
 $l_{H_2} = 3$



: c13 *mmv*

1

~~Not for review~~ Proposed Policy

$O(n \log n)$  : 遞增  $n^{1/2}$

$O(\log n)$  : For insertion we can use binary search

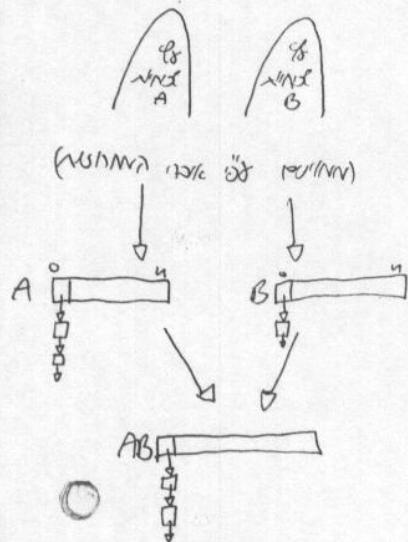
• MAN IS - ONLY PC WHICH IS THE PRACTICAL

TRANSFORMS DE LA PELLE POURVUE D'UN SEUL SENS DE ROTATION POUR LA MÉTALLURGIE



2

.6 BASHAN ROCK NO. 1



Please see me to the

רשות ר' (בג' א) מינה מון יג' נט כשם (כ'  
ר' פ' [א] ג' מינה מונה יג' נט AB יט' ו' i  
• BG] נ

$O(n \log n)$	{	$O(n \log n)$	(C)	<u>A10</u>
$O(n)$		$O(n)$	(S)	
$O(n)$		$O(n)$	(C)	

$O(n \log n)$  : Sort Quick

~~post-project review~~ - Q(1) : Take

AB(k) is a  $\mathbb{N}(\infty)$ -Bran and has no vertex

$$\text{MC MC 100311} \quad O\left(\frac{\tilde{N}}{AB\log AB}\right)$$



$B_{k-1}$  is ver in  $\lambda$  en ke  $B_k$  ~~van~~ nu niet  $\lambda$  (n)

ei: BUP MA ke Bi SY YAW 38 ABDA & YEN

cont (cont'd after 10 sec) B 88° 16' 00" 12N 22E

100 200 300

the following is a brief sketch of the state of things in 1850.

20

3

## מִבְנֵי נָטוּנִים

**203.231.0.1**

**שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', מועד א',  
15.6.2003  
פרופ' מנחם גד לנדאנו**

זמן הבחינה: שעתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (33 נק')**

מאגר נתוניים מכיל רשומות של סטודנטים. כל רשומה מכילה את השדות הבאים:

- (א) שם.
- (ב) תעוזת זהות.
- (ג) ציון באסמלר (מספר ממשי בין 0 ל- 100).
- (ד) ציון בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי בין 0 ל- 100).

בנה מבנה נתוניים המאפשר :

(א) הוספת סטודנט לפי תעוזת זהות.

(ב) הוצאת סטודנט לפי תעוזת זהות.

(ג) תשובה לשאלת האה: בהינתן מספר שלם K מצא את הסטודנט בעל הציון הגבוה

bijouter במדעי המחשב מבין כל הסטודנטים שהציוון שלהם באסמלר הוא גדול שווה מ- K

וקטן מ- K+1.

הנח שהנק מתחילה מבנה נתונים ריק. נתח את סיבוכיות הזמן של הטיפול בכל אחת מהפעולות

המפורט לעיל, בהנחה שבזמן הפעולה מ- רשומות במאגר.

**שאלה 2 : (34 נק')**

נתוניים שני עצים (A ו- B) אדומיים- שחורים. הראה דרכם למזג אותם לעץ אדום- שחור אחד בנסיבות הבאים:

(א) לא ידוע דבר על מפתחות העצים.

(ב) ידוע שקבוצת המפתחות החדשה מורכבת משלוש קבוצות: המפתחות הגבוהים הם מהעץ

A, המפתחות הנמוכים הם מהעץ A ובאמצע המפתחות מהעץ B. לדוגמה: כל המפתחות

מהעץ B הם בין 100 ל- 200 והמפתחות בעץ A הם או גדולים מ- 200 או קטנים מ- 100.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתכנת בכל אחד משני המקרים.

**שאלה 3 : (33 נק')**

נתונה רשף של כבישים חד- כיווניים המחברת ערים באורה"ב. בנה מבנה נתונים המאפשר

ב- (1) O זמן לענות על השאלה הבאה:

בהינתן שתי ערים A ו- B ענה ברוחב על אחד מהאפשרויות הבאות:

(א) ניתן להגעה מהעיר A לעיר B וגם מהעיר B לעיר A.

(ב) לא ניתן להגעה מהעיר B לעיר A, אבל ניתן ונitin להגעה מהעיר A לעיר B.

(ג) לא ניתן להגעה מהעיר A לעיר B, אבל ניתן ונitin להגעה מהעיר B לעיר A.

נתח את סיבוכיות הזמן של הכנת מבנה הנתוניים.

## מועד א'

1. בונים עץ אדום שחור לפי ת.ז. ובנוסף מערך של 101 ערכות כך שכל ערמה באינדקס  $k$  יש את כל הסטודנטים שקיבלו בין  $k$  ל- $k+1$  בסנסבלר מסודרים בערמה לפי ציוןם במדעי המחשב כך שיש מצביע מהרשומה בעץ אל הרשימה המתאימה במערך הערימות.

- סיבוכיות השאלות:
- ( $\log(n)$ )-הוספה לעץ ופניה למערך
  - ( $\log(n)$ -מחקה מהמעץ ופניה למערך
  - ( $1$ )-פניה לראש הערימה לפי המערך.

2. א. הכנסת כל איברי הקטן לעץ הגדול ע"י הוספה של איבר אחר איבר: ( $m\log(n)$ ).

ב. פתרון עפ"י יוסי קרייזלר:  
נוזיק בעץ B מצביעים לצומת המקסימלי ולצומת המינימלי.  
האלגוריתם עצמו: נפצל את A ל-2 עצים ב-( $\log(n)$ ) כך שבעץ A1 יהיה כל המפתחות הקטנים מ- $\min(B)$  ובעץ A2 המפתחות הגדולים מ- $\max(B)$ . סה"כ ( $\log(n)$ ).

הפייזל יילך ככה:

נוזיק שתי רישימות:  
כל עוד פוניט שמאליה שמיים את הצומת ממנו יצאו בראשימה 1 עם מצביע לבנה הימני.  
כל עוד פוניט ימינה שמיים את הצומת ממנו יצאו בראשימה 2 עם מצביע לבנה השמאלי.  
כך ממשיכים עד שנגיעים לצומת גודלה מ- $\min(B)$ .

לקחhim את תחת העץ המוצבע ע"י האיבר האחרון בראשימה 2 ומאתדים אותו מימין עם האיבר האחרון ומוחקם את האיבר מהרשימה (האיבר האחרון בראשימה).  
לקחhim את תחת העץ שייצרנו ומאתדים אותו מימין עם תחת-העץ המוצבע ע"י האיבר האחרון העכשווי בעוררת האיבר האחרון בראשים בראשה 2 ומתקבל עץ חדש שתור מאון (A1) כך להלאה עד שנגמרה האיברים בראשימה 2 ומתקבל עץ חדש שתור מאון (A1).  
באופן דומה נבנה את A2 מרשימה 1 כך שכאן האיחודים יתבצעו משמאלי.

$=<(\log(n))$

קבלנו 2 תתי עצים של A: A1, A2.  
נأخذ את A1 משמאל עם B ואת A2 מימין עם B בפעמיים ( $\log(n)$ ).  
האיחוד יבוצע באופן כזה שמוסרים בעץ הנמוך הגבה יותר נקודה בה  $Bh = Bh$  שמאליה.  
מוסיפים צומת אדומה וריקה ומוחרים אותה לאב של הצומת בעלת ה- $Bh$  הנתן.  
מיין נחבר לה את תחת העץ עם הערכים האבוליטים ביותר ומשמאלו את העץ עם הערכים הקטנים יותר ונאנו ב-( $\log(n)$ ).

נמצא קודם Predecessor לבן הימני של הצומת האדומה ונשים אותו בצדמת האדומה וזה למעשה מהיקה ותיקון העץ במקרה הגרוע ( $\log(n)$ ).

$=<\text{סה"כ } (\log(n))$ .

3. נrz SCC כדי למצוא רכיבים קשורים היטב. לכל רכיב קשורות נקרא בשם ונסמן את כל צמתיו בשם זה. ah"c נrz מין טופולוגי על גרף רכיבי הקשורות (החסיר מעגלים) וושמר אותו כמערך.  
הס"כ ( $V+E$ ).

עבור שאלתא לבדוק ב-(1) את שני הצמתים ונראה אם יש להם את אותו שם של רכיב קשורות.  
אם כן או ונעה על א' בחוב. אחרת נבדוק את מיקום A ו-B במין הטופולוגי. אם B מקדמים את A אז אולי אפשר להגיע ממנה ל-A אבל בטוח לא ניתן להגיע מ-B ל-A, אם A מקדמים את B. ההיפך.



## מִבְנֵי נַתּוֹנִים

**203.231.0.1**

**שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', מועד ב',  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבחינה: שעתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (33 נק')**

מאגר נתוניים מכיל רשומות של סטודנטים. כל רשומה מכילה את השדות הבאים:

א) שם.

ב) תעודה זהות.

ג) ציון בחוג למדעי המחשב (מספר ממשי בין 0 ל- 100).

בנה מבנה נתוניים המאפשר:

א) הוספה סטודנט.

ב) בהינתן אות X מצא את הסטודנט שצינו בחוג למדעי המחשב הוא החציון של ציוני כל הסטודנטים בחוג שמשפתם מתחילה באות X.

הנח שהנק מתחילה מבנה נתונים ריק, מספר הפעולות הוא רב מאוד והשמות של הסטודנטים הם בעברית. נתח את סיבוכיות הזמן של הטיפול בכל אחת מהפעולות המוזכרות לעיל, בהנחה שבזמן הפעולה מרשומות במאגר.

**שאלה 2 : (34 נק')**

נתון עץ אדום- שחור ובו  $T$  רשומות של סטודנטים. מבנה הרשימה זהה לו שבסעלה מס' 1. תעודה זהה משמשת כמפתח הרשימה. הראה דרך לענות על השאלה הבאה (שתיינן פעמים רבות):

בהינתן שני צמתים בעץ: באחד סטודנט בעל תעודה זהות A ובשני סטודנט בעל תעודה זהות B ( $A \leq B$ ). מצא ב- (1) O זמן את הסטודנט בעל הציון הגבוה ביותר במדעי המחשב, שתעודה זהות שלו גדולה מ- A וקטנה מ- B.

הנח שהעץ האדום- שחור קיבלת איינו משתנה.  
נתח את סיבוכיות הזמן של הטיפול הראשון בעץ.

**שאלה 3 : (33 נק')**

א) נתון גраф מכוכן (E,V). נתון שבען כל הקשתות קיימת קשת מהצומת X לצומת U וקשת נוספת מהצומת W לצומת X. האם יתכן (קיים גראף מכוכן (E,V) G כלשהו בעל הקשתות הנ"ל) לבנות עיר DFS שבו X הוא עץ בעל צומת אחת בלבד. הוכיח את תשובתך.

ב) נתון גראף לא מכוכן וקשריר (E,V). לאחר שמצאת את העץ הפורש המינימלי של הגראף התקבל תיקון במשקל אחד הקשתות בגרף. הראה דרך לתקן העץ הפורש המינימלי שבניתה.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתיארת.

בהצלחה !

## מִבְנֵי נֶתוֹנוֹנִים

**203.231.0.1**

**שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', מועד ג',  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבחינה: שעתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נקודות)**

במאי הציג מבקש לארגן זוגות (של בניים ובנות) למופע ריקוד. ח ( $a_1 \dots a_n$ ) הבנים מסודרים בשורה ו- ח ( $b_1 \dots b_n$ ) הבנות מסודרות בשורה נפרדת. גובהו של כל בן וגובהה של כל בת ידועים. זוג חוקי הוא זוג שני בני הזוג הם בדיק עליו אותו גובה. מטרת הבמאי למצוא את מספר הזוגות המקייםiali (יתכן וחלק מה משתתפים לא יופיעו בריקוד).

א. הראה אלגוריתם למקורה הכללי.

ב. הראה אלגוריתם בו אין לשנות את סדר הרקדים בשורות, כלומר אם קיים זוג  $a_i$

$b_j$  אז לא קיימים הזוגות  $b_p$  ( $k < i, p < j$ ) או ( $j > p, k > i$ ).

נתח את סיבוכיות הזמן של הפתרונות שנותת לכל אחד מהפתרונות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה ערמות מינימום ביןומית ובה  $n$  איברים. בספר הלימוד מוצגות הפעולות הקלאסיות המבוצעות על ערמה ביןומית. בהינתן מצביע לאיבר  $k$  כלשהו בערמה, ברצוננו להוציא את הפעולות הבאות:

- בטל את האיבר.
- הכפל את מפתח האיבר בשניים.
- חלק את ערכו של האיבר בשניים.
- הוסף לערמה איבר נוסף בעל אותו ערך.
- בטל את העץ שאיבר זה הוא שורשו.

לאחר כל פעולה יש להחזיר למבנה הנתונים את תכונות הערמה ביןומית.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בנפרד.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתונה סדרת מספרים שלמים  $(k_1 \dots k_n, p_1 \dots p_n)$  ופונקציה  $f(i) = (a_1 \dots a_n)$  כאשר  $A = a_1 \dots a_n$  וגם  $b_i = \min(a_k \dots a_p)$ . ברצוננו לחשב סדרה חדשה  $B = b_1 \dots b_n$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכננת.

בצלחה!

203.2310.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', מועד א',  
30.1.2003  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונות  $k$  סדרות של שלמים, בכל סדרה  $n$  מספרים. המספרים לא ממוינים. בנה מבנה נתונים שמאפשר את הפעולות הבאות:

- מצא את המספר המקסימלי בסדרה מסוימת.
- בהתאם לשתי סדרות  $a$  ו- $b$  ואינדקס  $i$  בנה 2 סדרות חדשות, במקום  $a$  ו- $b$ : הריאונה מכילה את  $i$  האיברים הראשונים, בסדר ולא בערך, של  $a$  ו-  $i - n$  האיברים האחרונים של  $b$ .

הפעולות השנייה תכילה את שאר האיברים של  $a$  ו- $b$ .

- חשב את סיבוכיות הזמן של:
- הכנת מבני הנתונים.
  - כל אחת מהפעולות.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה עירימה ובה  $n$  (מספר זוגי של איברים). عليك לבנות ממנה שתי עירימות בנות  $\frac{n}{2}$  איברים כל אחת.

כתוב אלגוריתם אחד לעירימה בינומית ואלגוריתם אחר לעירימה בינהרית.  
נתח את סיבוכיות הזמן של שני האלגוריתמים.

**שאלה 3: (33 נק')**

נתון גраф (E, V) מכוען ללא מעגלים.

תאר אלגוריתם שמוצא את המסלול הארוך ביותר בגרף.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.



בצלחה !!



1) נתונים  $a$  מחרוזות באורך  $m$  כל אחת. תכון מבנה נתוניים שיתמוך ביעילות בשאלות הבאות:

- (א) מציאת האיבר המקסימלי בחרוזות
- (ב) בהינתן אינדקס  $i$ , ונתוי מחרוזות  $a$  ו- $b$ , יוצרת שתי מחרוזות חדשות כך שאחת בנוייה מ- $n$  האיברים הראשונים של  $a$  ו- $i-n$  האיברים האחרונים של  $b$ , והשנייה בנוייה מ- $n$  האיברים הראשונים של  $a$  ו- $(i-n)$  האיברים האחרונים של  $b$ . מחרוזות אלו מחלקות את  $a$  ו- $b$  במבנה הנתוניים.

2) נתונים ערים מקסימום עם מספר זוגי של איברים. בנה אלגוריתם המפצל אותה לשתי ערים מקסימום שווות בגודלן, עברו:

- (א) עירמה בינומית
- (ב) עירמה בינארית

\*שאלה 3 הייתה מנוסחת כזורה מעט יותר מתחכמת, אך לב השאלה מוכא כאן. השכילו לקרוא תחת מעטה ה"סיפור" של השאלה ולהזות מה גוי רזה...

3) נתון גרעף מכובן ללא מעגלים ולא משקלות על הקשתות.

- (א) סדר את הצמתים לפי סדר חוקי כדי של הקשתות בכיוון אחד.
- (ב) מצא את המסלול הארוך ביותר בגרף.

פתרונות

1) מבנה הנתוניים לפתרון (המתוחכם למדוי תבריה... שני טזונטים בלבד פטרו, אך ניקוד חלקי ניתן לתשובות שהיו לעצין...) מכיל  $k$  עצים, עץ בינארי לכל מחרוזות. העץ הוא וריאציה של עירמה, כד שמתוקים המתוגדים הבאים: א. העלים של העץ הם איברי המחרוזות, לפי סדר ממשאל לימיין של האינדקסים שלהם. כלומר לכל עץ יש  $2n$  אמות, נכון גובהו ( $n \log(n)$ ). ב. כל צומת בעץ מכילה עתק של המקסימים מבין שני ביה. לפיקר המקסימים מאיברי המחרוזות מטפס ועולה אל השורש, כמו בעירמה. ביצוע השאלה הראשונה, אם כן, מובן מלאו, מתבצע ב-(1)O. ביצוע השאלה השנייה מtabסס על מציאת אב קדמון מסווק של האיבר ה- $n$ -י בחרוזות (העליה ה- $n$ -י במספר) בין האיבר האחרון (ה- $n$ -י במספר), וחיתוך שני העצים מצריך מעבר לאורך המסלול הזה. מכיוון שככל העצים באוטו גודל (ולכן, אותו מבנה פיסי ברזוק), תיקו שני העצים מצריך מעבר לאורך המסלול הזה ותיקון הפונקטרים בכל צומת שבדרך (מוסיב חור מ שאלה 2.3. בעמ' 39 בחוברת). הסיבוכיות כגובה העץ, כלומר  $(n \log(n))O$ . לפתרון מלא, פנו אליו אישית.

(2)

(א) עירמה בינומית: תוכורת: כל עץ בינומי,  $A_k$ , עברו  $< k$ , מרכיב שני תתי-עצים ביןומים ( $A_{k-1}$ ): הבן של השורש בעל הדרגה הבוגרת ביותר, והשורש לאו הבן הבנ"ל. יש לעבר על רישימת השורשים ( $n \log(n)$ ), עברו כל עץ, לפצל אותו לשניים בזורה זו. כך נקבל שני רשימות שורשים נפרדות. הפתרון עורך מכיוון שמשם האיברים זוגי, לכן לא קיים עירמה המקורית עץ  $B_0$ . סיבוכיות כוללת:  $(n \log(n))O$ .

(ב) עירמה בינארית: אין מנוס, חייבים לבנות את שתי העירמות מאפס, תוך שימוש בפונקציית ביתית ערימה (הכנה לבחן: שכבעו את עצמכם שזה נכון). סיבוכיות כוללת:  $(n)O$ .

(3)

(א) הרץ מיוון טופולוגי על הגראף. סיבוכיות:  $(E-V)O$ .

(ב) כפלט של המין הטופולוגי קיבלנו מערך של כל הצמתים בו כל הקשתות בכיוון אחד. נשמר מערך עור שיחזיק את המסלול הארוך ביותר ביותר היוצא מכל צומת. נමלא את המערך זהה בתבונן דינמי מהסוף (הצומת שלא יוצאת ממבנה קשותות) להתחלה. עברו כל צומת, עברו על רישימת השבבים שלו ובחר את השם, שהמסלול היוצא ממנו הוא מקסימלי. נרשום בזיכרון שלנו את ערך הדיעוד אחד. אורכו של המסלול הארוך ביותר הוא המספר המקסימלי הרשום במערך (לאו דווקא האיבר הראשון במערך – תחשבו על זה...). כדי לשוחזר את המסלול הארוך ביותר, ולא רק למצוור את אורכו, נשמר במערך טסף לכל צומת את השם שנבחר עבורה.

**203.2310.1**

**שנה"ל תשס"ג, סמס' א', מועד ב', 7.3.2003  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

נתונות  $\chi$  רשותות. מפתחות הרשותות הם שלמים בתחום  $m-1$  עד  $k$ . מותר לך להשתמש במקום אחסון שוגולו (O) zusätzlich למערך הקלט. הראה אלגוריתמים למיין את הרשותות עבור  $k$  שונים. בכל המקרים מספר הרשותות הוא  $\chi$  וرك תחום המפתחות משתנה. (הערה: عليك למצוא את המקרים העיקריים. ניתן ליציג את  $k$  כפונקציה של  $\chi$ ).  
נתח את סיבוכיות הזמן של כל אלגוריתם שאתה.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונות  $\chi$  רשותות.  
בכל רשומה השדות:

- א. ציון במבנה נתונים – 100-0 שקלים.
  - ב. ציון בחוג למזעי המחשב –  $n \log 0$  שקלים.
  - ג. שם באנגלית, עד 5 אותיות.
- המפתח של כל רשומה הוא

שם	ציון בחוג	ציון במבנה נתונים
----	-----------	-------------------

למשל: 80,5, dafi  
בנה מבנה נתוניים ואלגוריתם שמבצע את הפעולות:  
מצא רשומה, הוסף רשומה, בטל רשומה.  
נתח את סיבוכיות הזמן של בניית המבנה הנתוניים ושל כל אחת מהפעולות.  
(הנח שהפעולות מתבצעות מספר רב של פעמים).

**שאלה 3: (34 נק')**

נתון גרף  $G$  לא מכוון. משקלות על הקשתות.

- א. תכנן אלגוריתם שבודק האם הגרף קשור.

ב. בהנחה שהגרף קשור תכנן אלגוריתם שיבטל את כל הקשתות ה"יקירות"  
ועדיין ישמר על קשריות הגרף.

- ג. עבור הגרף שקבלת בסעיף ב' תכנן אלגוריתם שモציא עבור כל צומת  $a$  בגרף  
את הצומת  $b$  כך שהמסלול  $a-b$  הוא בעל המשקל היברוני.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתכתבת.

**הגהה!!**



ג) בתבונת ברשותות ו-(1) O זיכרנו בסוף. מין כאשר יש k מפתחות שונים. התיחס לגדלי k שונים.

(2) תכנן מבנה נתונים אשר תומך בשאלות של חיפוש, הוספה ומחיקה עבור מפתח הבניי החדשוט הבאים: שם פרטי (עד 5 תווים), ציון ממוצע (עד  $n \log(n)$  מתחוזות), וציון בקורס מבני נתונים (מ-0 עד 100). הרשומה מתקבלת במלואה בשלושת השאלות.

3) נתון גרפ' לא מבוון עם משקלות על הקשתות.

א) בזוק את קשריהם גנרט

ב) השאר גורף קשרים עם ערבים מינימליים של כף גחשנות

**2) עברו כל צומת יש למזוא מהו המפלול ההפוך ביחס מזוינה זו**

פתרונות

נחיין שבי

הערך המינימלי במקומות שהתפנה מהעירמה) וניתן להשתמש בו.

(3)

DFS (x)

MST (2)

(2) הרעיון הכללי: מסלול ארוך ביותר מזוימת הוא תמיד מתחום לעלה – או דרך השורש או גבעע סריקת העץ *postorder* ונשמר לכל צומת את המשקל המקסימלי מן העלים מתחתו שלו. וכך עוזר לירוקה *preorder* ונשמר לכל צומת את משקל מסלול מהשורש.icut בוצע השוואת אם המרחק מן העלה קטן מן המרחק הכלול, (מרחקי מהשורש+מרחק השורש לעלה דרך המסלול הבודד בוחר), האלגוריתם נקי ואמינה וכאן וכאן.

וְהַגָּדוֹת, כִּי-כֵן, עַל-עֲדֵיכֶם נִתְבָּרְאָה



203.2310.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', מועד מיוחד,  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעתיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

נתון עץ אדום שחור ובו  $T$  רשומות. תכון אלגוריתם שמקבל כקלט מפתח  $A$ , פעולה חשבונית \* ו-  $C$  קבוע, ומשנה את כל המפתחות הגדולים מ-  $K$ .  
השינוי בפתחות יהיה: מפתח ישן \*  $C =$  מפתח חדש. (לדוגמא אם הפעולה היא  
חלוקת אז כל המפתחות הגדולים מ-  $K$  יחולקו ב-  $C$ ).  
לאחר מכן יש לעדכן את עץ האדום השחור לפי המפתחות החדשים.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנית.

**שאלה 2: (34 נק')**

נתונה רשימה מקוישת חד ציוונית המתחילה ברשומה  $a$  ונגמרה ברשומה  $b$ . המצביעים  
הם בכיוון  $m-a-l-b$ .

הראה אלגוריתם שմבקר ברשומות  $m-l-a-l$  אחת אחת (בסדר הפוך לכיוון  
הראשימה). יש לשמר על הסדר בבדיקה. יש להשתמש רק ב- 3 מצביעים כאשר אחד  
מהם מצביע לתחילת הרשימה (אין להשתמש במסתנים נוספים). ניתן לסייע ברשומה  
ברשימה באמצעות ביקורת בה. אין לשנות את המצביעים ברשימה. ניתן לעבור ברשומה  
ולא לבקר בה.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנית.

**שאלה 3: (33 נק')**

הצבא האמריקאי החליט לבנות יחידות מיוחדות לצורך המלחמה בעיראק. בצבא זה  
חיילים. לכל חייל מספר אישי.  
בנה מבנה נתונים שמאפשר:

א. לבדוק האם שני חיילים נמצאים באותה יחידה (בהינתן שני מספרים  
אישיים).

ב. לאחד יחידות קיימות ליחידות חדשות. כל יחידה מיוצגת על ידי אחד  
החיילים בה.

הקלט הראשוני הוא החיילים והמספרים האישיים שלהם. הנח שבתחילת כל חייל  
מהווה יחידה בסיסית. הנח שהפעולות מתבצעות מספר רב של פעמים.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחת מהפעולות.

הגפנה!!

**203.2310.1**

**שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', מועד א', 23.6.2002**

**פרופ' מנחם גד לנדאו**

זמן הבחינה: שעתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (34 נק')**

נתונות ת"מ רשותות של עובדים בתעשייה. כל רשומה מכילה:

- שם
- מס' עובד (מספר בין 0 ל- $n$ )
- שכר

בנה מבנה נתונים שמאפשר את הפעולות הבאות:

- עדכון שכרו של עובד.
- פקודת עדכן (מספר עובד, שכר חדש).
- בהתן 2 מספרי עובד (a, b) מצא את ממוצע השכר של העובדים שמספר העובד שלהם גדול מ- $a$  וקטן מ- $b$ .
- מצא את בעל המשכורת הגבוהה ביותר.

הנח שהפעולות מתבצעות פעמים רבות.  
נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת המבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של כל אחת מ-2 הפעולות.

**שאלה 2 : (33 נק')**

נתונה פונקציה  $f(i)$

הראה דרך לחשב את הפונקציה:

$$P[i, j] = \max(P[i, k] + P[k+1, j])$$

$$1 \leq i, j \leq n \quad i \leq k < j$$

כאשר:

**שאלה 3 : (33 נק')**

נתונות  $T$  ערים ורשת כבישי אגרה חד-כיווניים שמחברת ביניהם. כל כביש מחבר 2 ערים.  
בנה מבנה נתונים שמאפשר את השאלות הבאות:

- בהתן  $S$  מנות 2 ערים  $A$  ו- $B$  בדוק האם ניתן להגיע מעיר  $A$  לעיר  $B$  ועיר  $B$  לעיר  $A$ .
- בהתן  $S$  של עיר  $A$  את מספר הערים שלא ניתן להגיע מהעיר  $A$  אליהם.  
חשב את סיבוכיות הזמן של הקמת המבנה הנתונים.  
חשב את סיבוכיות הזמן של התשובה לכל שאלתא (זוכר: שאילותות יכולות להנתן מספר רב של פעמים).



בצלחה !!

203.2310.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', מועד ב', 14.7.2002

פרופ' מנחם גד לנדאנו

זמן הבדיקה: שעתיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

נתונים 2 מערכיים בגודל  $A$  כל אחד.

באחד ו-  $m$  רשומות ממיניות של סטודנטים מאיזור חיפה (המפתח תעודות זהות).

בשני ו-  $n$  רשומות ממיניות של סטודנטים מצטיינים מכל הארץ (המפתח תעודות זהות).

א. הראה דרך למצוא את כל הסטודנטים המצטיינים מאיזור חיפה. התיחס לשנים שונים

בין  $m$  ל- $n$ .

ב. כיצד תבנה את האלגוריתם בסעיף א' bekannt אם ידוע שהמערכות גדולים מוגדל זכרון המחשב בו אתה משתמש.

ג. במקרה ו-  $m = n$  אינו ידוע. הראה דרך שימוש האם סטודנט מסויים גור באיזור חיפה ב-  $O(\log m)$  זמן.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתכתבת.

**שאלה 2: (33 נק')**

נתונה עירימה ביןארית ובה  $m$  רשומות.

א. הראה דרך לבנות עץ אדום שחזור ל- $m$  הרשומות.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנית.

באים הזמן שהגעת אליו גודל  $m$  ( $O(n)$ ) הסבר למה.

ב. הראה דרך להוסיף לעץ האדום שחזור את היכולת למצוא את העוקב בצורה מהירה.

חשב את סיבוכיות הזמן של מציאת העוקב ואת תוספת הזמן לשאר הפעולות בעץ האדום שחזור שנגרמו עקב השינויים שערכת.

**שאלה 3: (33 נק')**

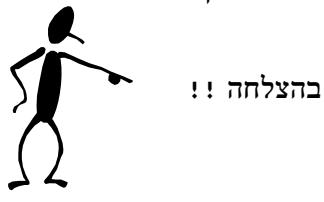
נתונות  $m$  ערים ורשת כבישי אגרה דו-כיווניים שמחברת ביניהם. כל כביש לחבר 2 ערים. לכל כביש מחיר נסיעה (אגרה). תכוונה א': ידוע שנייה להגעה מכל עיר לעיר אחרת.

הראה:

א. אלגוריתם שמצמצם את מספר הכבושים למספר המינימלי שעדיין שומר על תוכנה אי. באלגוריתם זה שומר על כיסו של הנגה.

ב. אלגוריתם שמקבל כקלט את הגראף שיוצרת בסעיף א', ומוצא את שתי הערים שהנסיעה ביניהן היא היקורה ביותר במחירה בהשוואה לנסיעה בין כל שתי ערים אחרות.

(הערה: בנסיעה בין שתי ערים ניתן להשתמש בכל כביש רק פעם אחת לכל היותר).



203.2310.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', מועד ג',  
10.9.2002  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעותיים.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (34 נק')**

הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

"ניתן לתכנן מבנה נתוניים ואלגוריתם שיחליפו את הערימה הבינארית ויביצעו את הפעולות: הוסף איבר, מצא מקסימום, הוצאת מקסימום, ב- (1) פעולות כל אחת".

**שאלה 2: (33 נק')**

נתון עץ אדום שחור ובו  $T$  רשומות.  
בכל רשותה:

- א. שם
- ב. ת.ז.
- ג. שכר
- ד. גיל

מפתח הרשומות בעץ הוא תעוזות הזיהות.

בנה אלגוריתם שעונה לשאלות הבאות:

- א. מי הם בעלי השכר הגבוה ביותר.
  - ב. בהינתן מספר תעוזות זיהות מצא את סכום הגילאים של כל בעלי תעוזות זיהות הקטנים מהנתון.
  - הנח שהשאלות ניתנו מספר פעמים רב.
- נתח את סיבוכיות הזמן הנדרש לטיפול הראשוני במבנה הנתוניים ואת סיבוכיות הזמן הנדרש לענות על כל שאלתא בנפרד.

**שאלה 3 (33 נק')**

יהי  $G = (V, E)$  גראף בלתי-מכoon קשור. נקודת הפרדה (articulation point) של  $G$  היא קדקוד אשר סילוקו הופך את  $G$  לבלתי קשור.  
בעץ חיפוש לעומק על הגרף  $G$ . בסיום החיפוש החלט האם השורש של עץ החיפוש הוא נקודת הפרדה. הוכח את טענתך.



בהצלחה !!

**203.2310.1  
שנה"ל תשס"ב, סמס' א', מועד א',  
5.2.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאנו**

זמן הבדיקה : שעתיים.  
חומר עזר : דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (33 נק')**

כתוב אלגוריתם שמקבל כקלט עץ חיפוש בינארי מאוזן, אדום שחור, ופתח k.  
(הנח שמספר האיברים לא עולה על m).  
 האלגוריתם יבנה 2 עצים אדומיים. אחד ובו כל המפתחות הקטנים מ- k בעץ  
 הקלט. העץ השני יכיל את שאר המפתחות בעץ המקורי (המפתחות הגדולים או שווים  
 ל-k).

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שlk.

**שאלה 2 : (34 נק')**

- לחברת היטק רשות תקשורת.  
 הרשות ובה ע קווי תקשורת מחברת א X מחשי החברה הפרושים בכל העולם.  
 החברה נקלעה לקשיים כלכליים ובכוונה צמצם את ההוצאות.  
**א.** תאர אלגוריתם שמצמצם את מספר קווי התקשרות למינימום ההכרחי על-מנת  
 לשמר על הקשר בין מחשי החברה.  
**ב.** החברה מתכוונת לסגור את אחד מהמחשבים. מצא מחשב שסיגורתו לא תנתק את  
 המחשבים האחרים.

חלק ב' יבוצע לאחר חלק א'.

حسب את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים.



**שאלה 3 : (33 נק')**

נתונות 2 סדרות של מספרים  
 $a_1 \dots a_n$   
 $b_1 \dots b_n$

הראה דרך לחשב את המערך  $B[1 \dots n; 1 \dots n]$

שבו

$$B[i, j] = \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j f(a_x, b_y)$$

הfonקציה

$f(a_x, b_y)$  ניתנת לחישוב ב  $O(1)$  זמן.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שפיתחת.



22

הצעות לפתרון:

1. העברת האיברים המופיעים למערך נodal ת ע"י סירקת העץ האודם שחור in order. מזיאת המקום של השך  $k$  ע"י הפשט ביטاري ( $k$  עצמו לא חייב להיות במערך).  $O(n \log(n))$ . ביבית עץ אודם שחור מכל אחד מן המרכיבים המוחולקים ע"י  $k$  באופן הבא: בניית שגדל אחד המרכיבים זהו  $k$ , נשים את  $k/2$  לא להיות שורש העץ האודם שחור, בינו יהיו  $3k/4$  ו-  $k/4$ , וכך הלאה, בינו של כל צומת המתאים של אמצעי המערך שהצומת מחלוקת. כך בונים את העץ האודם שחור ושמוררים על כל תכונתו: פטוי, ובטבה  $O(n)$ . סיבוכיות כל אחד משני המרכיבים, לכל היותר  $O(n)$ . סיבוכיות כולה:  $(n) = O(n) + O(n \log(n)) + O(n)$ . קיימ פרויק מסוקר גם ב-  $O(n^2)$ .
2. a. עושים DFS בכדי לקבל עץ מהגראף. נקבל רכיב קשירות אחד בעל 1-אקי תקשורת במקום  $y$ . סיבוכיות  $(y + x)$ . b. מתקים את אוד העלים של העץ. אם עושים זאת תוך כדי שלב א, סיבוכיות  $(1)$ . אם עושים זאת בפden, סיבוכיות  $(x)$ .

3. תכנון דינמי: עבור כל איבר  $B(i,j)$  נפשה את החישוב הבא:

$$B(i,j) = B(i,j-1) + B(i-1,j) - B(i-1,j-1) + f(a_i, b_j) \quad O(1).$$

זה בבן כי

$$\sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j f(ax, by) = \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^{j-1} f(ax, by) + \sum_{x=1}^{i-1} \sum_{y=1}^j f(ax, by) - \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^{j-1} f(ax, by) + f(ax, by)$$

נמלא את המערך באופן הבא: בתחילת  $B(1,1)$  שווה ל  $f(a_1, b_1)$ .  
 נמלא את  $B$  כאשר לולאה פונקית ויזמת רצوت מ-1 עד  $n$ .  
 סיבוכיות כולה  $(2n)$ .



203.2310.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' א', מועד ב', 28.2.2002  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבחינה: שעותיים.

חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (33 נק')**

נתונות תרשים של סטודנטים. כל רשותה מכילה:

א. שם.

ב. ת.ז.

ג.מין הסטודנט (בן/בת)

ד. ציון במבני נתוניים.

הchgog למדעי המחשב התבקש לשלוות ק סטודנטים לאלה"ב.  
המחלחת תיבחר לפי 2 קריטריונים:

א. יחס הבנים/בנות לא יהיה גדול מ-60% 40%, כלומר: לא יהיו יותר מ-60% בניים  
או יותר מ-60% בנות.

ב. הצטיינות במבני נתונים.

תכנן אלגוריתם שבוחר את חברי המחלחת.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.

**שאלה 2: (34 נק')**

תאר אלגוריתם המטפל במסדי נתונים ובו רשותה.  
כל רשותה מכילה:

א. שם.

ב. ת.ז.

ג. מס' טלפון.

ד. חשבון בנק.

ה. יתרה בחשבון הבנק.

האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות:

א. מצא איבר לפי ת.ז.

ב. מצא איבר לפי חשבון הבנק.

ג. הוסף איבר לפי ת.ז.

ד. הוסף איבר לפי חשבון בנק.

ה. בטל איבר לפי ת.ז.

ו. בטל איבר לפי חשבון בנק.

ז. מצא את מספר הרשומות במס' הטלפון שלו הוא 04.

ח. בהינתן 2 תעודות זהות a ו-b (a>b), מצא את בעל חשבון הבנק ובו יתרת זכות  
הגבוהה ביותר מבין כל בעלי תעוזות הזזהות הגדולות מ- a וקטנות מ- b.

### **שאלה 3: (33 נק')**

נתונה רשות קווי תעופה. כל קו מצוין על-ידי שם עיר המוצא, שם עיר היעד, מחיר הטיסה. כתוב אלגוריתם שモציא את כל הערים בעולם אותן ניתן לבקר תחת התנאים הבאים:

- א. תחילת המסע ישראל (בן-גוריון).
- ב. סוף המסע ישראל (בן-גוריון).
- ג. מחיר כל טיסה לא יעלה על \$500.

הערות:

- א. אין גבלה על מחיר הטויל שלו.
- ב. ניתן לחזור הביתה להפסקת מנוחה במהלך הטויל.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכננת.



בצלחה !!



## מְבָנִי נַתּוֹנִים

**203.2310.1**

**שנה"ל תשס"ב, סמס' א', מועד ג',  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבדיקה : שעותיים.  
חומר עזר : דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

### **שאלה 1 : (34 נק')**

מבנה הנתונים של עץ אדום שחור מאפשר לענות על השאלות הבאות :  
מצא איבר, הוסף איבר, הוריד איבר.

ברצוננו להוסיף את הפעולה עוקב איבר. פעולה זו מוצאת עבר איבר מסוים (הנה שהגישה לאיבר מתבצעת ב- (1) O זמן) את האיבר העוקב בעץ. בהינתן איבר בעל מפתח  $k_1$  התשובה תקבע אל האיבר בעץ בעל המפתח המינימלי  $k_2$  כך ש  $k_2 > k_1$ .

א. תאר דרך לחשב את העוקב ללא שינוי במבנה ובפעולות הידועות עבר עץ אדום שחור.

ב. כיצד תנסה את מבנה הנתונים של עץ האדום שחור כך שפעולות העוקב תהיה מהירה יותר מהתשובה לסעיף א'?

חשב את סיבוכיות הזמן של מציאת העוקב בסעיף א', ואת זו של מציאת העוקב בסעיף ב', כמו כן חשב את העלות של השינוי בסעיף ב' על שאר הפעולות בעץ האדום שחור.

### **שאלה 2 : (33 נק')**

נתונים  $n$  מספרים שלמים  $a_1, \dots, a_n$  לא ממוינים. הנה ש :

$$n = 2^i .1$$

לא ניתן לשנות את סדר האיברים. .2

תאר מבנה נתונים שיאפשר לענות על השאלות הבאות :  
בහינתן ק ו- q מצא את המספר הקטן ביותר מבין האיברים  $a_p$  עד  $a_q$ .  
(כלומר, המספר הקטן מבין כל האיברים שהאינדקס שלהם גדול שווה ל- $k$ , קטן שווה ל- $q$ ).  
חשב את סיבוכיות הזמן של בניית הנתונים ואת סיבוכיות הזמן לחישוב התשובה לכל שאלתא.

### **שאלה 3 (33 נק')**

יהי  $G = (V, E)$  גראף בלתי-מכוכו קשיר. נקודת הפרדה (articulation point) של  $G$  היא קדקוד אשר סילוקו הופך את  $G$  לבלייני קשיר.  
בעץ חיפוש לעומק על הגרף  $G$ . בסיום החיפוש החלט האם השורש של עץ החיפוש הוא נקודת הפרדה. הוכיח את טענתך.

בצלחה!

203.2310.א.1

שנה"ל תשס"א, סמס' ב', מועד א',  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבדיקה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (25 נק')**

בנה אדום שחור לנוטונים הבאים (התחל מעץ ריק) :

1. הכנס	200
2. הכנס	100
3. הכנס	150
4. הכנס	125
5. הכנס	110
6. הכנס	120
7. בטל	100
8. בטל	110

עליך להראות 8 עצים שונים, אך לכל שלב.

**שאלה 2 : (25 נק')**

נתונה רשת כבישי אגרה בין 9 ערים באורה'ב. לכל קטע כביש ישיר בין שתי ערים יש מחיר אגרה (all). טבלת הכבישים והאגרות נתונה. הנח שהכבישים הם חד כיווניים.

חברת משאיות אוסרת על נהגיה לנסוע בכבישים שהנסיעה עליהם יקרה מ- \$100.

כתוב אלגוריתם שעונה על השאלות הבאות :

בהינתן שתי ערים (A ו- B). מצא האם ניתן לנסוע מ- A ל- B ומן- B ל- A תחת הנחיות החברה (מספר השאלות אינו ידוע). שים לב שהה'כ האגרות לנסעה בין שתי ערים רשאי להיות גבוהה מ- \$100, וזאת מאחר והנסיעה יכולה להשתרע על יותר מקטע כביש אחד.

נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבני הנתונים שיאפשר את התשובות לשאלות, ואת סיבוכיות הזמן של תשובה לכל שאלתא.

**שאלה 3 : (25 נק')**

הסביר מדוע בהינתן זו מפתחות לא ניתן בשום אופן לבנות עץ אדום שחור של מפתחות אלו בפחות מ  $O(n \log n)$  פעולות.

#### שאלה 4 : (25 נק')

נתונים  $n$  מספרים שלמים  $a_1, \dots, a_n$  לא ממוינים. הנח ש :

1.  $n = 2^i$ .

2. לא ניתן לשנות את סדר האיברים.

תאר מבנה נתונים שיאפשר :

א. לענות על השאלות הבאות :

בהתנוט  $k$  ו- $p$  מצא את סכום האיברים מ- $a_p$  עד  $a_q$ .

ב. לעדכן איברים, בהתנוט אינדקס  $k$  וערך  $t$

חשב את סיבוכיות הזמן של בניית הנתונים, ואת סיבוכיות הזמן לחישוב התשובה לכל שאלתא, וכל ערך.



203.2310.1

שנה"ל תשס"א, סמס' ב', מועד ב',  
19/7/2001  
**פרופ' מנחם גד לנדאנו**

זמן הבדיקה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (25 נק')**

הסביר בקצרה באיזה מין תשתמש בכל אחד מהמקרים הבאים. נתך את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.

1. 1,000,000 מספרים ממשיים.
2. 100,000 תעודות זהות.
3. 1,000,000 סטודנטים לבנים לחוד ובנות לחוד.
4. 1,000,000 מספרים שלמים חיוביים.
5. 500 מספרים ממשיים.
6. 1,000,000,000,000 מספרים טבעיות.

**שאלה 2 : (25 נק')**

מדינת ישראל מבקשת לרכוש נפט. בידי משרד האנרגיה רשיימה ובה זו מדיניות, בכל מדינה מספר החביוות שניתן לרכוש ממנה, ומהיר כל חבית (רשימת המדינות לא משתנה).  
בנה מבנה נתונים שמאפשר :

- א. לקבל עדכוניים לגבי כמות החביוות העומדות למכירה במדינה מסוימת.
- ב. לקבל עדכוניים לגבי מחיר החבית במדינה מסוימת.
- מספר העדכוניים רב מאוד.
- ג. כאשר האוצר מבקש לרכוש X חבויות, התכנית תמצא את המדינות בהן העסקה תהיה הזולה ביותר. יתכן ועל-מנת לרכוש X חבויות יש לרכוש אותן מיותר מדינה אחת.
- הרכישות יתבצעו מספר רב מאוד של פעמים.

נתך את סיבוכיות הזמן של בניית הנתונים ואת זמן העדכוניים והשאליות.



### **שאלה 3 : (25 נק')**

הראה את טבלת התכונות הדינמי שמחשבת את תנת הסדרה המשותפת הארוכה ביותר של המחרוזת XBYDAB ו- ABCDAB.

### **שאלה 4 : (25 נק')**

אורח מארה"ב מבקר את משפחתו בארץ. הוא מבקש לתקן את סדר הביקורים. במשפחהו ו לקרוביים.

נמצאת ברשותו רשימה של בני המשפחה שליד כל אחד מצוינים גילו ושמות הוריו שעדיין חיים. במשפחה התקיימו נישואין קרובים.

האורח מבקש לפגוש כל אחד מבני המשפחה בנפרד. התנאי היחיד שהוא מבקש לפגוש הוריהם לפני ילדים. כמובן, הוא יפגש עם בן משפחה רק בתנאי שפגש כבר את הוריו והוריהם.

א. תכנן אלגוריתם שיבנה את רשימת המפגשים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שלך.

ב. באחד הביקורים לארץ הטרפה אל אורחינו אשתו שגם לה משפחה ענפה (אין קשר בין המשפחות), וגם היא מבקשת לפגוש אותם לפי התנאים של בעלה. במשפחהו ו קרוביים. הפעם האורחים רוצחים לרכת למפגשים ייחודי. בהנחה שישית את סעיף א', הראה אלגוריתם שմשלב את המפגשים עם משפחת האישה במפגשים עם משפחת הבעל.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



**203.2310.1**

**שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד א',  
29.1.2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו**

זמן הבדיקה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (25 נק')**

נתון עץ חיפוש בינארי מאוזן (אדום שחור).  
כתב אלגוריתם שמשנה את העץ כך שעבור כל צומת המפתח שלה יהיה קטן מהמפתחות  
בתת העץ השמאלי שלה; וגדל מהמפתחות בתת העץ ימני שלה.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

**שאלה 2 : (25 נק')**

נתון גרף  $G(V, E)$  לא מכונן וקשרי.  
נקודות הפרדה היא צומת אשר סילוקו הופך את  $G$  לבלתי קשור.  
כתב אלגוריתם שモצא צומת אחד אשר אינה נקודת הפרדה.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

**שאלה 3 : (25 נק')**

נתון מערך דו מימדי,  $A(n \times m)$  של מספרים שלמים.  
כתב אלגוריתם שבהתאם למספר שלם  $c$  מחשב מערך, דו מימדי חדש,  $M$  ובו עבור כל  
 $i, j, c+1, \dots, n$

$$M[i, j] = \max[A(k, b)] \quad \text{מתתקיים } j - c \leq k \leq i ; \quad j - c \leq b \leq j$$

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

**שאלה 4 : (25 נק')**

בהתאם לחצים ניתן לבנות ערימה ביןראית ב- $O(n)$  זמן.  
כתב אלגוריתם שמקבל לחץ שלמים ובודהה ערימה ביןומית (מיינימים בראש).  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

בצלחה !!



## פתרונות מועד א', סמסטר א' 2001

1. לצורך הפתרון נכתב פונקציה רקורסיבית על צומת בודד שפעולתה כך: א. קרא לפונקציה עם בני השמאלי. ב. קרא לפונקציה עם בני הימני. ג. הפוך את הפיזיטרים כך שבנוי הימני והשמאלית יתחלפו. **תבאי zusätzlich:** קראנו לפונקציה עם צומת NULL. פתרון: נקרא לפונקציה זו עם השורש, ובסיומה העז יקיים את הטענה.
2. נרץ DFS. בסיום ההרצה, כל עלה שבעץ ה-DFS אינו נקודת הפרזה. סיבוכיות:  $O(V+E)$ .
3. האלגוריתם יבצע בבמה שלבים. א. גבנה מערך עוז  $B$ , ש- $c$  השורות הראשונות בו ריקות. ב- $B$  כל תא יהזק את המקסימים מבין  $c$  האיברים שמעליו ב- $A$ , מלימר חישוב כל תא עליה  $c$ . סיבוכיות:  $O(c^2n)$ . ב. נמלא את  $M$ , עם  $c$  שורות ועמודות ראשונות ריקות, כך שכל תא יהזק את המקסימים שבין  $c$  האיברים משמאלו ב- $B$ . סיבוכיות:  $(c^2n)O$ . סיבוכיות סוללה:  $(c^2n)O$ .
4. נתייחס לכל האיברים בקלט כאל עצי  $B_0$ . נאחד זוגות-זוגות של עצים לעצמי  $B_1, B_2$ , כאשר אם עלולים להישאר עם עץ  $B_0$  בזוז שכיבס לערימה. את עצי  $B_1$  נאחד לעצמי  $B_2$  בלבד השארית, שתבסס ( $m$  קיימת) לערימה. נמשיך כך עד  $n$  איבר. כל איחוד עליה  $O(1)$  ומתבצעים  $n/2$  איחודים בשלב הראשון,  $4/n$  בשלב השני,  $8/n$  בשליש וכך הלאה. סיבוכיות סוללה:  $(n)O$ . פתרון חלופי: למרות שהוספה איבר לערימה בינומית עולה במרקחה הנרווע  $a \log n$ , ניתן להוכיח שהוספה האיברים אחד-אחד לערימה לא עולה  $a \log n$ . למעשה "טפטוף" של האיברים אחד-אחד תורמת איחוד של עצים  $B_0$  במחצית הפעמים, של עצים  $B_1$  ברבע הפעמים, של  $B_2$  בשמנית הפעמים וכך הלאה. סיבוכיות סוללה:  $(n)O$ .



**203.2310.א**

**שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד ב',  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבדיקה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (25 נק')**

מבנה הנתונים של עץ אדום שגור מאפשר לענות על השאלות הבאות:  
מצא איבר, הוסף איבר, הוריד איבר.

ברצוננו להוסיף את הפעולה עוקב איבר. פעולה זו מוצאת עבור איבר מסוים (הנה שהגישה לאיבר מתבצעת ב-) (זמן) את האיבר העוקב בעץ. בהינתן איבר בעל מפתח  $k_1$  התשובה תקבע אל האיבר בעץ בעל המפתח המינימלי  $k_2$  כך ש  $k_2 > k_1$ .

א. תאריך דרך לחשב את העוקב ללא שינוי במבנה ובפעולות הידועות עבור עץ אדום שגור.

ב. כיצד תנסה את מבנה הנתונים של עץ אדום שגור כך שפעולות העוקב תהיה מהירה יותר מהתשובה לסעיף א'?

חשב את סיבוכיות הזמן של מציאת העוקב בסעיף א', ואת זו של מציאת העוקב בסעיף ב', כמו כן חשב את העלות של השינוי בסעיף ב' על שאר הפעולות בעץ אדום שגור.

**שאלה 2: (25 נק')**

נתונים  $n$  מספרים שלמים  $a_1, \dots, a_n$  לא ממוינים. הנה ש:

$$n = 2^i .$$

2. לא ניתן לשנות את סדר האיברים.

תאר מבנה נתונים שיאפשר לענות על השאלות הבאות:

בהינתן  $k$  ו-  $q$  מצא את המספר הקטן ביותר מבין האיברים  $a_p$  עד  $a_q$ .

(כלומר, המספר הקטן מבין כל האיברים שהאינדקס שלהם גדול שווה ל- $k$ , קטן שווה ל- $q$ ).

חשב את סיבוכיות הזמן של בניית המבנה והSTRUCTIONS ואת סיבוכיות הזמן לחישוב התשובה לכל שאלה.

**שאלה 3: (25 נק')**

נתון גרף (V,E) קשור ולא מכוון, וצומת  $v$  בגרף זה.

תאר אלגוריתם שמחש卜 לכל הצמתים האחרות בגרף את מרחקן מ-  $v$ . מרחק בין הצומת  $u$  לצומת  $w$  כלשהו הוא מספר הקשתות במסלול הקצר ביותר מ-  $u$  ל-  $w$ .

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבה.



#### שאלה 4: (25 נק')

חברה A מייצרת סדרת מוצרים  $a_1, \dots, a_n$

חברה B מייצרת סדרת מוצרים  $b_1, \dots, b_n$

נתונה פונקציה  $(a_i, b_j) \rightarrow \text{Grade}(i, j)$  שמחשבת ב-( $O(1)$ ) זמן עבור צמד של מוצרים (אחד מכל חברה) את התאימות. הציון הוא מספר שלם.

תאר אלגוריתם שמחשב עבור כל הצמדים  $i, j, 1 \leq i, j \leq n$  את:

$$a_k, b_p) = \max [\text{Grade}(i, j) \text{ MAX}(\quad , \quad (1 \leq k \leq i), 1 \leq p \leq j)$$

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.



203.2310.א

שנה"ל תשס"א, סמס' א', מועד ג',  
22/3/2001  
פרופ' מנחם גד לנדאו

זמן הבדיקה: שעתיים  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (25 נק')**

בנה אדום שחור לנוטונים הבאים (התחל מעץ ריק) :

1	. הכנס
10	. הכנס
20	. הכנס
15	. הכנס
16	. הכנס
25	. הכנס
1	. בטל
10	. בטל
20	. בטל

עליך להראות 9 עצים שונים, אך לכל שלב.

**שאלה 2 : (25 נק')**

נתוניים  $\chi$  איברים. הראה כיצד למצוא את האיבר ה-  $k$  (  $1 \leq k \leq n$  איברים גדולים ממנו )  
ב-  $O(k \log n)$  פעולות. הנה ש-  $k$  קטן בסדר גודל מ-  $n$ .

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

**שאלה 3 : (25 נק')**

א. נתון עץ חיפוש אדום שחור ובו  $m$  רשומות. המפתח לרשומות הוא מספר שלם. הראה  
כיצד ניתן בצורה ייעילה לבנות מרשותות אלו עירימה שבראשה המפתח המיניימי.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

ב. נתונה עירימה ובה  $m$  רשומות. המפתח לרשומות הוא מספר שלם. בראש העירימה  
המפתח המיניימי. הראה כיצד ניתן בצורה ייעילה לבנות מרשותות אלו עץ אדום שחור.  
(השתמש באותם מפתחות).  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכתב.

ג. האם ניתן לבצע את חלק א' בזמן  $O(n \log m)$ ? הסבר את תשובתך.  
האם ניתן לבצע את חלק ב' בזמן  $O(m \log n)$ ? הסבר את תשובתך.

#### שאלה 4: (25 נק')

נתנו גרף  $G(V,E)$  לא מכובן וקיים.

הגדעה: גרף דו-צדדי הוא גרף בו הצלמים מחולקים לפחות ל-2 קבוצות  $V_1$  ו- $V_2$  וקשרות

Makshrotot Rek

צמתים שאינם באותו קבוצה.

הראה כיצד בעזרת האלגוריתם DFS ניתן לבדוק האם הגרף  $G$  הוא גרף דו-צדדי.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבת.



## מִבְנֵי נֶתוֹנוֹנִים

203.2310.א.1

203.2310.א.2

שנה"ל תש"ס, סמס' א', מועד א',  
30.1.2000  
פרופ' מנחם גד לנדוֹר

זמן הבחינה: שעתיים  
חומר עזר: שני דפי A4 בלבד ובהם תוכן ללא הגבלה.

### שאלה 1 : (25 נק')

נתונות 2 רשימות ממוניות A,B של סטודנטים. בראשימה A n סטודנטים, וברשימה B m סטודנטים. הרישימות ניתנות במערכות (הרשימות ממוניות לפי מספרים אישיים).

רשימת סטודנט מכילה:

- א. שם.
- ב. מספר אישי בצבא (סטודנט שלא שירות בצבא קיבל את המספר 1 – )

כתוב אלגוריתם שמדפיסים לכל סטודנט בראשימה A את מספר הסטודנטים בראשימה B "שהיו איתו בקבע"ם".

נדיר סטודנט ("שהיה איתו בקבע"ם") כסטודנט שמספרו האישי גדול או קטן לפחות ב-  $n - \log m$  מספרים ממשרו האישי של הסטודנט בראשימה A . כמובן, עבור מספר אישי X את מספר הסטודנטים בעלי מספר אישי Y כך ש :  
$$X - \log n - 1 < Y < X + \log n + 1$$

סטודנט בראשימה A שלא שירות בצבא קיבל את הערך 0.

אלגוריתם אחד יטפל במקרה ש  $n=O(m)$   
אלגוריתם שני יטפל במקרה ש  $n=O(\log m)$

חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים.

### שאלה 2 : (25 נק')

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו מספרים שלמים. האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות בקלט (מסד הנתונים מאותחל כrik) :

- א. הוסף איבר למסד הנתונים.
  - ב. בטל איבר במסד הנתונים.
  - ג. הדפס את K האיברים הגדולים במסד הנתונים. K משתנה בין שאלתה לשאלתה.
  - ד. מצא את ממוצע המספרים הזוגיים.
- ה. מצא איבר Q והדפס את K האיברים הקטנים ביותר שאינם גדולים ממנו, ואת K האיברים הגדולים ביותר קטנים ממנו. K ו Q משתנים בין שאלתה לשאלתה

חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהפעולות בהנחה שמספר האיברים הוא n.

### שאלה 3 : (25 נק')

נתונה 2 סדרות מספרים שלמים  $A = a(1) \dots a(n)$      $B = b(1) \dots b(n)$

בנה אלגוריתם שמסוגל לענות על השאלות הבאות:

קלט 2 אינדקסים  $i$  ו-  $j$   
פלט

$$p(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \max [a(i) + b(j); p(i-1, j-1)] & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

### שאלה 4 : (25 נק')

נתונה רשת של  $m$  כבישים חד-כיווניים בין  $n$  ערים באורה"ב.

- א. כתוב אלגוריתם שМОציא את קבוצת הערים הגדולה ביותר בה ניתן להגיע מעיר לעיר.  
 ב. כתוב אלגוריתם שעונה על השאלות הבאות: בהינתן 2 ערים  $A$  ו-  $B$  האם ניתן להגיע מ-  $A$  ל-  $B$  ומן  $B$  ל-  $A$ . ישאלו שאלות רבות.

(רמז - האלגוריתם השני יבוצע לאחר הראשון.)

חשב את סיבוכיות הזמן של שני האלגוריתמים. באלגוריתם השני חשב את סיבוכיות הזמן של השלב המקדים ושל חישוב התשובה לכל שאלה.



## מִבְנֵי נֶתוֹנוֹנִים

203.2310.א.1

203.2310.א.2

שנה"ל תש"ס, סמס' א', מועד ב', 30.1.2000  
פרופ' מנחם גד לנדרו

זמן הבחינה: שעתיים  
חומר עזר: שני דפי A4 בלבד וביהם תוכן ללא הגבלה.

### שאלה 1 : (33 נק')

- תאר אלגוריתם "המשפר" את עץ האדום שחור. בנוסף לפעולות הרגילות של מציה, הוספה, וביטול, תבצענה הפעולות הבאות (העץ מתחול כריק):  
א. מצא את גובה העץ.  
ב. בהינתן צומת (בצומת ראשונה ובה מפתח K) מצא את הצומת העוקבת (הצומת ובה המפתח הקטן ביותר שגדול מ K ב O(1)).

תאר גם את השינויים שתבוצע במבנה עץ האדום שחור.  
חשב את סיבוכיות הזמן של כל פעולה, ושל השינויים בעץ האדום שחור, בהנחה שבזמן הביצוע היו בעץ ח' איברים.

### שאלה 2 : (33 נק')

נתונות 2  
שלמים מספרים סדרות 2  
 $A = a(1) \dots a(n)$  ;  $B = b(1) \dots b(m)$

בנה מבנה נתונים שמסוגל עברור כל  $i$  ו  $j$  זמן את:

$$\max [a(x) + b(y)], \quad 0 < x < i + 1 ; \quad 0 < y < j + 1$$

תאר את מבנה הנתונים שבחורת ואת האלגוריתם שבונה אותו.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

### שאלה 3 : (34 נק')

נתונה תוכנית ללימודים ובה ח' קורסים. לכל קורס רשות קורסים (מתוך ח' הקורסים) שהוא מהווה דרישת קדם בעברם.

סטודנט רשאי למדוד בכל סמסטר במספר קורסים גדול כרצונו בתנאי שעמד בדרישות הקדם.

תאר אלגוריתם שМОציא את מספר הסמסטרים הקטן ביותר בהם ניתן לסיים את הלימודים (כל ח' הקורסים).  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



בצלחה !!

## מִבְנֵי נֶתוֹנוּם

**210.2760.א.1**

**210.2760.א.2**

**שנה"ל תשנ"ט, סמס' א', מועד א',  
1.3.99  
פרופ' מנחם גד לנדו**

זמן הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

### **שאלה 1 : (25 נק')**

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ערימה ובה  $a$  איברים המאוכסנים במערך  $A$ . האלגוריתם מטפל בפעולות הבאות:

**א. פעולה שינוי.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $k$ ,  $n < k$  וערך  $b$ . האלגוריתם משנה ערכו של האיבר במקום  $k$  ב -  $A[k] = b$ . ולאחר מכן מוחזר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב -  $O(\log n)$  זמן.

**ב. פעולה ביטול.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $k$ ,  $n < k$  ומ לבטל בערימה את הערך במקום  $k$  ב -  $A[k]$  במערך  $A$ . ולאחר מכן מוחזר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב -  $O(\log n)$  זמן.

**ג. פעולה החלפת סדר.**

האלגוריתם מחליף את הסדר בערימה. כלומר אם בראש היה המינימום הופך את הערימה לערימה ובה בראש המקסימום ולהפך. כל זאת ב -  $O(n)$  זמן.

### **שאלה 2 : (25 נק')**

בחברת היי-טק  $n$  עובדים.

רשומה עובד מכילה:

1. שם ושם משפחה.

2. ת.ז.

3. שכר.

4. רשומה מקושרת של המנהלים היישרים שלו. (עובד יתכוño יותר ממנהל אחד).

בחברה מונה נשיא חדש המבקש לפגוש את כל העובדים. הוא בקש ממזכירתו לקבוע לו את הפגישות תחת שני תנאים:

- הוא יפגוש כל עובד בנפרד.
- הוא יפגוש עובד רק לאחר שפגש את כל המנהלים שלו.

א. כתוב אלגוריתם שבודק שאין שני עובדים המנהלים אחד את השני ולו גם בדרך עקיפה (מעגל ניהול). נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ב. כתוב אלגוריתם היוצר סדר פגישות חוקי. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ג. כתוב אלגוריתם שמקבל כקלט שם של עובד ומוצא את השכר הכלול של העובד והכפופים לו. כלומר העובד הכפופים היישרים שלו, הcpfופים להם וכו'.



### שאלה 3 : (25 נק')

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו מספרים שלמים. האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות בקלט.

- א. הוסיף איבר למסד נתונים.
- ב. מצא איבר במסד נתונים.
- ג. בטל איבר במסד נתונים.
- ד. בהינתן 2 מספרים a ו- b, מצא את סכום כל האיברים במסד הנתונים הקטנים מ - a וגם גדולים מ - b.
- ה. מצא את האיבר המקסימלי במסד נתונים.
- ו. מצא את ממוצע האיברים במסד נתונים.

חשב את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בהנחה שבזמן הביצוע יהיו במסד הנתונים n איברים.

### שאלה 4 א' : (12 נק')

בנה עץ-3-2 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק) :

100	.1
200	.2
150	.3
125	.4
110	.5
60	.6
200	.7
110	.8

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

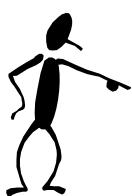
### שאלה 4 ב' : (13 נק')

בנה עץ אדום - שחזור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק) :

100	.1
200	.2
150	.3
125	.4
110	.5
60	.6
200	.7
110	.8

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

בצלחה !!



1. התשובה במחזה היא עירימת מקסימום. א. יש לבדוק האם האיבר גדול מאביו, אם כן יש לבבב אותו מעלה. אם הוא לא גדול מאביו, יש לבדוק האם הוא קטן מבניו, ואם כן יש לבבב אותו מטה. הבדיקה באמצעות סדרה של פעולות בסיסיות על עירימה. ב. יש לשים את הערך "אגסוף" באיבר שרוצים למחוק, ע"י קריאה לפונקציית השינית (סעיף א'). אחר-כך יש לקרוא לפונקציה "הווצה מקסימום". ג. העירימה מיצגת במערך: יש לבנות את העירימה מחדש ע"י פעולה *Build heap* (Build heap *post-order*).
2. א. בירץ DFS ומחפש קשתות אחוריה: אם קיימת אפלו-אחת, יש מעגל ניהיל. סיבוכיות ( $O(V+E)$ ). ב. בירץ מין טופולוגי על הגרף. סיבוכיות ( $O(V+E)$ ). ג. מבנה את  $G'$  כדי להציג את היחסים "העובדים הבופים לי", סיבוכיות ( $O(V+E)$ ) (ברישימת שכניות). מעתה בכל פעם שתתבצע השאלתא נירץ BFS על צומת העובד הראשי, וננסן את המשכורות בכל צומת שעברנו ב-BFS (כלומר העובדים הkopfim לו), בסיבוכיות ( $O(V+E)$ ). (הערה: לא ניתן לבצע תכנון דינמי של סכימה מכיוון שכל עובד מנוהל ע"י כמה מנתלים, וסכום מהו מספור את העובדים האלה פעמיים).
3. א, ב, ג. עץ חיפוש מאון בין עץ אדום-שחור, שומר בכל צומת את סכום כל האיברים בתחום-העץ שלו (איחול בשיטת *post-order*). נשמר גם מצביע לאיבר המקסימלי, ומשתנה *count* הסופר את מספר האיברים. יש לשנות את פעולה הרופיצה בהתחילה כדי שלא הפנים בMITTED על הסכומים (הערה: בפתרון מלא יש להסביר כיצד תשתנה הרופיצה). לבסוף, בכל הכהנה נבדוק האם המפתח לצומת המבוקש, יורידו או יוסיפו אחד ממשקנו ממקסימום; אם כן, יש למזויא את הקודם לו (ב-(n), לא מוסף סיבוכיות). סיבוכיות מזיאה, הוסף, ביטול:  $n \log n$ .
   
ד. מציאת סכום האיברים בין  $a$  ל- $b$  מתחבאת בכמה שלבים, בדקה  $-a < a \leq b < -z$ . מצא אב קדמון משותף,  $z$ , של  $a$  והולך ו- $b$ , ע"י חיפוש שניהם במקביל מהשורש: בפעם הראשונה שהחיפוש מתפרק, כלומר  $a$  והולך ימינה, זהה האב הקדמון המשוחף הנמור ביותר - $z$ . עבור על המסלול מ- $-z$  ל- $-a$ . עבור כל צומת  $v$  במסלול, אם ירדת ממנה שמאלה [כלומר: (תת-עץ ימני של  $v$ )  $< z$  ו- $v < a$  ולבן  $v$  ותת-העץ ימני שלו צורכים להיכלל], הוסיף את עצמה ואת סכום האיברים בתת-העץ ימני שלה לסכום המctruber. אם ירדת ממנה ימינה [כלומר: (תת-עץ שמאל של  $v$ )  $> z$  ו- $v < a$  ותת-העץ השמאלי שלו לא צורכים להיכלל], אל חוסיף כלום. תם. באונה צורה עבור על המסלול מ- $-b$  ל- $-a$ . עבור כל צומת במסלול, אם ירדת ממנה ימינה, הוסיף את עצמה ואת סכום האיברים בתת-העץ השמאלי שלה לשוכם המctruber. אם ירדת ממנה שמאלה, אל תוסיף כלום. (הערות: הפתרון מיניח  $-a$  ו- $-b$  איברים בעץ, ו- $-z$  שונה מ- $-a$  או  $-b$ . פתרון מלא ידאג לטפל במערכות אלו. ציר שווה אלף מילים וחייב לצייר את הפתרון בבחינה). סיבוכיות השאלתא:  $n \log n$ .
   
ה. מכיוון ששמרנו מצביע, הסיבוכיות ( $O(1)$ ).
   
ג. נחלק את הסכם תחת-העץ של השורש (שהוא סכום כל האיברים בעץ) במס' האיברים בעץ. סיבוכיות: ( $O(1)$ ).



## מִבְנֵי נֶתוֹנוּם

**210.2760.א.1**

**210.2760.א.2**

**שנה"ל תשנ"ט, סמס' א', מועד ב', 24.3.99  
פרופ' מנחם גד לנדו**

זמן הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

### **שאלה 1 : (25 נק')**

כתווב אלגוריתם המקבל כקלט ערמה ובה  $n$  איברים המואכנסים במערך A, ומספר שלם  $K, N < K$ . בראש הערימה נמצא המקסימום. כתווב אלגוריתם המוצא ומדפיס את  $K$  האיברים הנדולים בערימה, בזמן  $O(K \log K)$ .

### **שאלה 2 : (25 נק')**

נתונה כבישי אגרה בין  $n$  ערים באלה"ב. לכל כביש בין שתי ערים יש מחיר אגרה (Toll). טבלת הכבישים והאגירות נתונה. הנח שהכבישים הם חד ציווניים. (לא בין כל שתי ערים יש כביש).

חברת משאיות אוסרת על נהגיה לנסוע בכבישים הנסעה עליהם יקרה מ- \$100.

כתווב אלגוריתם שעונה על השאלות הבאות:

בהתנחת שני ערים (A ו- B). מצא האם ניתן לנטווע מ- A ל- B ומן B ל- A תחת הנחיות החברה (מספר השאלות אינו ידוע).

נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבני הנתונים שיאפשר את החשובה לשאלות, ואת סיבוכיות הזמן של תשובה לכל שאלה.



שאלה 3 : ( 25 נק' )

**נתונות או רשומות של סטודנטים, בכלל רשומה:**

- א. שם הסטודנט.
  - ב. ת.ג.
  - ג. ציון במבני נתונים, מספר שלם בין 0 ל- 100.
  - ד. מומצע ציונים (מספר ממשי).

הסביר כיצד תבצע את כל אחת מהפעולות הבאות, אין קשר בין הפעולות, הנה שכל פעולה היא חד-פעמית:

- A. מין הסטודנטים לפי הציון במבנה נתונים.

B. מין הסטודנטים לפי ת.ז.

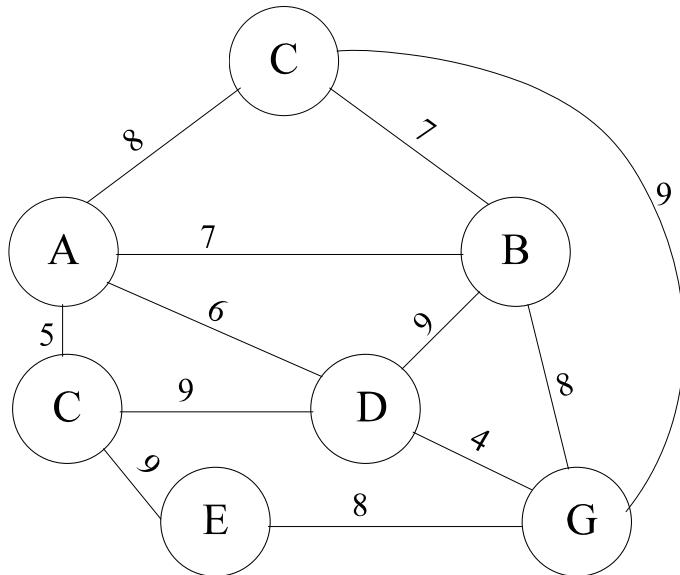
C. מין הסטודנטים לפי ממוצע הציונים.

D. לאחר ביצוע C נוסף תלמיד חדש, כיצד תוסיף אותו לנתונים תוך שמרות הסדר של הסטודנטים לפי ממוצע הציונים.

E. לאחר ביצוע C נוסף  $m$  סטודנטים חדשים. הראה כיצד תיצור מצב בו  $a+m$  הסטודנטים ממונים לפי ממוצע הציונים.

  - הראה כיצד תפעל כאשר  $n < \log m$ .
  - הראה כיצד תפעל כאשר  $n < m < \log n$ .
  - הראה כיצד תפעל כאשר  $n > m^2$ .

**שאלה 4 : (25 נק')**



**בבינה תן הגורף:** מצא את העץ הפורש המינימלי, בעזרת האלגוריתם של פרום. החל בツומת A. הראה את סדר הוספת הקשתות לעץ הפורש המינימלי.



## 23rd - 3rd floor

02192 113 08 01613160 14 A

.50 " " " 11. B

“W.C”

On 3rd Jan 8:00 C 03-21 1960. D

שְׁמַע אֶל־בְּרִית־יְהוָה קָדוֹשׁ כִּי־זֶה־יְהוָה.

13. 83487 15 01/11/2017 KTH 12 23N 131° 33' 21" E

$$k < \lg n$$

$$1 \leq k \leq n \quad (3)$$

$$k > n^2$$

جۇن

**A** פְּנֵי תְּלִמְזָדָה כְּפִיר אֶת־בְּנֵי־עַמּוֹ וְאֶת־בְּנֵי־עֲמָקָם



המחלנת ציונים ממוצעת ולכון פתרון *bucket-sort* אינו מתאים לשע'  $c$ , אלא פתרון השוואת רגיל כונן בסיבוכיות  $O(n \log n)$ , שהוא הפתרון הנכון.

5

## מִבְנֵי נַתּוֹנִים

**210.2760.א.1**

**210.2760.א.2**

**שנה"ל תשנ"ט, סמס' א', מועד ג', 6.6.99  
פרופ' מנחם גד לנדרו**

זמן הבחינה: 3 שעות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

### **שאלה 1 : (25 נק')**

נתונות  $\chi$  רשומות,  $(n=2)$  - $1^i$  לכל רשותה:

- א. שם.
- ב. מס' זהות.
- ג. ציון באנגלית.
- ד. ציון במחשבים.

בנה מבנה נתונים החוסך בזכרון שמאפשר את הפעולות הבאות:

- א. בהינתן מס' זהות מחליף את הציון באנגלית בציון חדש.
- ב. מוצא את ממוצע ציוני המוחשבים של הסטודנטים.
- ג. מוצא את התלמיד בעל ההפרש הגבוה ביותר בין ציוני.

חשב סיבוכיות הזמן של שלב ההכנה ואת סיבוכיות הזמן ל答复ה לכל אחת מהשאלות.

### **שאלה 2 : (25 נק')**

כתוֹב אלגוריתם המקבל כקלט ערמה ובה  $N$  איברים המואסנים במערך A, ומספר שלם K,  $K < N$ . בראש הערימה נמצא המקסימום.

- א. כתוב אלגוריתם המוצא ומדפיס את K האיברים הגדולים בערימה, בזמן  $O(K \log K)$ .
- ב. כתוב אלגוריתם המוצא את האיבר המינימלי בערימה. חשב סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

### **שאלה 3 : (25 נק')**

נתונה רשף כבישים חד כיווניים ( $m$  כבישים) המחברת  $n$  ערים.

א. כתוב אלגוריתם הבודק שניתן לעבור בין כל הערים.

ב. הנח שתיקון כל כביש יש מחיר ידוע. חברה מע"צ רוצה לבצע תיקונים בסוף השבוע על פי שלושה עקרונות:

1. הערים עדין יהיו מחוברות.
2. אין תנועה בכביש בתיקון.
3. עלות תיקון של הכבישים היא מקסימלית.



#### שאלה 4 א': (12 נק')

בנה עץ 3-4 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

15	. הכנס
25	. הכנס
20	. הכנס
19	. הכנס
17	. הכנס
12	. הכנס
25	. בטל
17	. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

#### שאלה 4 ב': (13 נק')

בנה עץ אדום - שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

15	. הכנס
25	. הכנס
20	. הכנס
19	. הכנס
17	. הכנס
12	. הכנס
25	. בטל
17	. בטל

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

בהצלחה !!



32 30

מבוא למבנה נתונים - מתמטיקה ומדעי המחשב, אביב 1996, מועד ב  
פרופ' גדי לנדאנו

6 שנות

עה על כל השאלות

חומר פונת

ש הוחzieי על תUTOR עם זההו מהזען!

שאלה 1 (20 נקודות)

תבן אלגוריתם שמקבל בקלט עץ חיטוף דו-אריה וטח אבאים שונים, ומוצא את החזין של טח האבאים.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

שאלה 2 (20 נקודות)

בנתן 2 מערכות פמייניט -  $[h] \dots A[A[1]] \dots B[B[1]] \dots B[m]$  ו-  $A=A[1]$ .  
ה奇特ך של  $A$  ו-  $B$  כלומר את כל האבאים המופיעים בשני המערכות.  
1. אלגוריתם א למקורה וטח קטנה מאד יחסית ל-  $T$ . ולמשל  $(h) \log < m$   
2. אלגוריתם ב למקרה וטח  $T$  ו-  $m$  בעלי אותו סדר גודל

חשב את התוצאות של  $T$ , כטונקזה של  $T$ , זו כדי לחתוש אלגוריתם A ולא אלגוריתם B.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון גרען  $G(V, E)$  לא מכובן, לא קשור, ולא משקלות על הקשתות.  
א. הראה כיצד כאשר הגרף משתמש במתודיצת שבעיות נידון למשר אוטו בשיטת שכניות  
ב. הראה כיצד כאשר הגרף משתמש בשיטת שכניות נידון למשר אוטו במתודיצת שכניות.  
חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



## פתרונות מועד ב', אביב 1996

1. נפרק את העץ *inorder* ובכיבים אותו למערך. האיבר במקום  $\lceil n/2 \rceil$  יהיה החזין. סיבוכיות:  $O(n)$ .
2. במקרה ש-  $m < n$  נערכו  $m$  חיפושים ביבarious, עברו כל איבר ב-*B*-*B* בחפש האם הוא קיים ב-*A*. במקרה ש-  $n = m$ . במקרה ש-  $n > m$ , נרין את הפונקציה *merge* בגרסתה משופרת, הסיבוכיות  $O(\log m)$ . שטשמור איברים שהופיעו בשני המערךיים (ולכן שייכים לאיחוד). סיבוכיות  $O(n+m) = O(n+m \cdot \log(1 - n/m))$ , התהום בו כדי להשתמש באלגוריתם א':  $(n \cdot \log(m^* + m) - m \cdot \log(1 - n/m))$ .
3. שעיה על כל שורה וטור במטריצה, אם כתוב בתא  $(j,i)$  '1' אז ניצור רשימה עבר  $j$  ונשרשד אותה לרשימה השכנים של תא  $i$ . סיבוכיות:  $O(V^2)$ . ב. שעיה על כל צומת,  $j$ , שעיה על רשימה שחבי  $j$ , ונכתבו '1' בתא  $(j,i)$ . סיבוכיות:  $O(V+E)$ . אם יש לאפס את המטריצה, הדבר יזרוש  $O(V^2)$ .



31  
37

מבוא למבנה נתונים - מתמטיקה ומדעי המחשב, אביב 1996, מועד ג'

פרופ' גדי לנדרו

3 שעות

ענה על כל השאלות

תוצר בודוק

1. פולינום  $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 5x + 1$

שאלה 1 20 נקודות

נתונים  $n$  מספרים שלמים, נסטור המספריים השונים הוא  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ , כלומר ישן כפליתות רשות. תכנן אלגוריתם שיעזב את המספריים.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

שאלה 2 20 נקודות

תבן פלט בדיל ח.ב. זה (זה אינו דיו!) המקומת הדואות בדיל נמצאים מספריים שלמים המיוחדים. בדיל  $n$  ...  $n+1$  סטנה הדאות  $X$  שמתכנסות מקוד דיק. תכנן אלגוריתם שבודק מספר  $k$  מוצא האם אחד מ- $n$  האברים הדואות בדיל  $n$  שווה לא. (זבד העץ של זה איט יחס)

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם. הוכח ש זו קטען מגד יהיזיג ל- $n$ .

שאלה 3 20 נקודות

נתנו ברף  $G(V,E)$  לא בדוק, שיר. הקשיות עלות ממן רב תכני אלגוריתם שמצווץ את נסטור הקשיות בין מתק כדי שמרת הקשיות של הנגר.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.



32

שאלה 4 א (10 נקודות)

בנה עץ-3-2 לנתונים הבאים (הנחל מעץ ויק)

ג. הערך 60	5 הערך 40	1. הערך 10
9. הערך 10.	6 הערך 80	2. הערך 50
3. הערך 35	7 הערך 30	3. הערך 70
	100. הערך 3.	20. הערך 4.

עליך לסדר את 11 ערכים שווים, עץ בלבד שלב

שאלה 4 ב (10 נקודות)

בנה עץ-אוזט-שחור לנתונים הבאים (הנחל מעץ ויק)

ג. הערך 60	5 הערך 40	1. הערך 10
9. הערך 10.	6 הערך 80	2. הערך 50
3. הערך 35	7 הערך 30	3. הערך 70
	100. הערך 3.	20. הערך 4.

עליך לסדר את 11 ערכים שווים, עץ בלבד שלב ✓



## פתרונות מעמ' 1: מועד ג', אביב 1996

1. האלגוריתם יתבצע בבמה שלבים. א. נבנה עץ חיפוש מאוזן (כגון עץ אוזם-שחור), כאשר לכל צומת נשמר את הרשומות בעלות מפתח זהה. גובה העץ יהיה  $O(\log n)$ , ואילו גביש ח רשותה: כלומר ההכנסה תעליה  $O(\log n)$ . ב. עבור על העץ בשיטת inorder, ונוטץ בפלט את כל האיברים בסיבוכיות  $O(n)$ . ניתן ליעיל ע"י שמשרת מצבע לסי הרשימה בכל צומת, ואז הפלט יהיה רשימה מקורה, בסיבוכיות  $(n \log n)O$ . סיבוכיות סלולת:  $(n \log n)O$ .
2. האלגוריתם יתבצע בבמה שלבים. א. נתחיל לבדוק בלולאה מתחילה המערך, בתאים 1, 2, 4, וכו' הלאה בתחום  $[2^k, 2^{k+1})$ . אם בתחום  $x$  (המסמן תא ייק) או איבר הגדל מהרשה שאנו מחפשים, נצא מהלולאה. סיבוכיות: לכל היותר הגענו בתחום  $[2^k, 2^{k+1})$ , כלומר  $O(\log m)$ . ב. אם נעצרנו בתחום  $[2^k, 2^{k+1})$ , בצע חיפוש ביבاري בין  $2^k$  ל- $2^{k+1}$ . סיבוכיות  $O(\log m)$ . סיבוכיות כולה:  $O(\log m)$ .
3. נריז BFS או DFS. מכיוון שהגרף קשיר ולא מכונן, נקבל רכיב קשור יחיד שהוא עץ, כלומר זהו עץ פורש. סיבוכיות:  $O(V+E)$  בرشימת שכבות,  $O(V^2)$  במשריצת סמייניות. (הערה: אם הגרף לא קשיר, מחלקים לדרכי קשרות, ולכל רכיב מפעילים את האלגוריתם הנ"ל.)



203.2310.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' ב', בחינות אמצע,  
11/4/05  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (50 נק')**

נתונה ערמה ביןומית ובה  $n$  איברים. הראה דרך לפרק אותה לשלווש ערמות ביןומיות בעלות מספר איברים שווה  $\frac{n}{3}$  [ רמז : ניתן לבצע את הפעולה ב-  $O(\log n)$  ].

**שאלה 2 : (50 נק')**

בכיתה נלמדו שלוש פעולות בעת חיפוש ביןארי (מצא, הוסף, בטל). ברצוננו להוסיף את פעולה העוקב שתבוצע ב-  $O(1)$ .

קלט : מצביע לצומת בעץ (גניך צומת V ופתח P).

פלט : צומת W בעץ שהפתח שנמצא ב- Q מקיים :

א)  $Q > P$

ב) לא נמצא מפתח בעץ שערכו A ומקיימים  $P > A > Q$

תאר את השינויים שתבוצע בעץ ואת עלות השינויים על שאר הפעולות.



203.2310.1

שנה"ל תשס"ה, סמס' א', בחינת אמצע,  
6/12/04  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $T$  ורשומות. תחום המפתחות של הרשומות הוא בגודל  $\Theta \log \log T$ .  
בנה מבנה נתוניים שמאפשר:

1. מציאת ה"חביב"
2. הוצאת ה"חביב"
3. הוספת איבר
4. בניית מבנה הנתוניים עבור  $M$  רשומות

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחת מהפעולות שביצעת בהנחה שזמן ביצוע יש במבנה  $M$  רשומות.

השווה את ביצועי בניית הנתוניים שהצעת לאלו שנלמדו בכיתה.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונות 2 סדרות של מפתחות ממשוניים.  
בסדרה A קיימים  $m$  איברים ובסדרה B קיימים  $n$  איברים.

תכנן אלגוריתמים שモצאים את המפתחות שנמצאים ב-2 הסדרות גם יחד. קלומר,  
איברים שנמצאים גם בסדרה A וגם בסדרה B.  
התיחס ליחסים שונים בין  $m$  ל- $n$ .

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אלגוריתם שתכנת.



203.2310.1

**שנה"ל תשס"ד, סמס' ב', בחינת אמצע, 03.05.2004  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (50 נק')**

נתונה ערמת מינימום ביומית ובה  $m$  איברים. בספר הלימוד מוצגות הפעולות הקלאסיות המבוצעות על ערמה ביומית. בהינתן מצביע לאיבר K כלשהו בערמה, בראצנוו להוסיף את הפעולות הבאות:

א. הכפל את מפתח האיבר בשניים.

ב. בטל את תת העץ שאיבר זה הוא שורשו.

ג. בטל מהערמה הביומית את כל המפתחות הקטנים מהמפתח באיבר K.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל פעולה (הפעולות תינטנה מספר רב של פעמים).

**שאלה 2 : (50 נק')**

נתון עץ 4-2-3 בעל גובה  $h$ .

תכן אלגוריתם שיבנה עץ 4-2-3 בעל גובה מינמלי  $h_1$  ( $h_1$  ומינמלי) ובו אותן הרשומות כבעץ המקורי. האם יתכן ותכשל? (הסביר).

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכנית.



203.2310.1

שנה"ל תשס"ד, סמס' א', בחינת אמצע,  
17.12.2003  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות זו רשותות של סטודנטים.

בכל רשומה:

1. שם הסטודנט
2. ממוצע הציונים במדעי המחשב – מספר ממשי
3. ציון במבוא למדעי המחשב – מספר שלם (0-100)

א. הראה דרך למיין את הרשותות, כאשר המפתח הוא ממוצע הציונים במדעי המחשב.

ב. כיצד תבצע את המיוון בסעיף א', אם ידוע לך שמספר הציונים השונים הוא קטן מ- logon.

ג. הראה דרך למיין את הרשותות כאשר המפתח הוא הציון במדעי המחשב.

ד. כיצד תבצע את סעיפים א' ו-ג' אם ידוע לך שזכרו המחשב לא יכול להכיל את כל הרשותות.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתם שהצעת.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונה ערמה ביןומית ובה זו רשותות.

הראה דרך לפצל את הערמה ל- $k$  ערמות בגודל  $i^2$ ,  $n/i^2 = k$ .  
ולערמה נוספת שיתכנן ותהיה קטנה מ- $i^2$  (הערה:  $m, k, i$  נתוניות).

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.



**203.2310.1**

**שנה"ל תשס"ג, סמס' ב', בחינת אמצע, 9.4.2003  
פרופ' מנחם גד לנDAO**

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $\alpha$  ו-  $\beta$  רשותות של סטודנטים.  
בכל רשומה: שם  
ת.ז.  
ציוון במבנה נתונים – 0-100 (שלם)  
ציוון בחוג למדעי המחשב – מספר ממשי

בנה מבנה נתונים שמבצע את הפעולות הבאות:

- מצא את הסטודנט בעל הציוון הגבוה ביותר במדעי המחשב במבנה הנתונים, והווצה אותו מבנה הנתונים.
- הוסף סטודנט למבנה נתונים.
- בהתן שלם  $k$ , חלק את מבנה הנתונים לשני מבנים: באחד  $k$  רשותות ובשני  $k$ -ת רשותות. לאחר החלוקה ניתן לבצע על כל אחד מבני הנתונים את כל הפעולות.
- קבל 2 "קבוצות של רשותות" במבנה הנתונים שבחרת (בכל אחת מהן איברים) ואחד אותן למבנה נתונים חדש ובו ניתן לבצע שוב את כל הפעולות.

נתח את סיבוכיות הזמן של הקמת מבנה הנתונים ואת סיבוכיות הזמן של כל אחת מהפעולות.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונים 2 עצי 2-3-4 . בכל אחד מהעצים  $\alpha$  ו-  $\beta$  רשותה מפתחה.

הראה דרך בתנתן מספר שלם  $k$  ( $0 < k < n$ ) להחליף את  $k$  האיברים הקטנים בכל עץ. כמובן, להעביר את  $k$  האיברים הקטנים בעץ הראשון לעץ השני ואת  $k$  האיברים הקטנים בעץ השני לעץ הראשון. בסוף התהליך יוצעו 2 עצי 2-3-4.

הראה דרכים שונות ל-  $k$  שונים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של כל דרך שבחרת.



בצלחה !!

### מבחן אמצע

1. מבנה הנתונים: ערמה בינוי מקסימלית. סיבוכיות:

- א.  $O(n)$ -הווצה
- ב.  $O(n \log n)$ -הוספה רשומה
- ג.  $O(n^2)$ -כמו חיסור בבסיס בינארי
- ד.  $O(n \log n)$ -איחוד עצים בינויים

2. עבור  $O(k \log n)$ :

נפרק את העצים למערך בגודל  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  סיוור  $\text{order-in}$  בכל אחד מהם  $(n/k)$ .  
ניקח  $k$  איברים ממערך אחד ונחליף עם  $k$  איברים מהערך השני  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  מיזוג  $(n/k)$ .  
نبנה שוב את העצים מהמרכיבים  $(n/k)$ .

עבור  $O(k \log n)$ : ע"י הכנסה והווצה טריוויאליים מעץ 2-3-4. סיבוכיות:  $O(n \log^2 n)$



203.2310.1

שנה"ל תשס"ג, סמס' א', בחינת אמצע,  
4.12.2002 פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

נתונות  $n$  רשותות, לכל רשותה מפתח.

תחום המפתחות הוא  $m$ .

מספר המפתחות השונים בפועל הוא  $k$ .  
(יתכנו מפתחות כפולים).

1.1. כיצד תמיין את הרשותות כאשר ידוע  $n = m^k$  (מספרים שלמים). התיחס  
לק-  $k$  שונים. ( $k$  לא ידוע).

1.2. כיצד תמיין את הרשותות כאשר ידוע מראש  $n \log p$ , ו-  $m$  מרכיב  
המספרים המשיים.

1.3. כיצד תמיין את הרשותות כאשר ידוע מראש  $n = k$  ו-  $m$  מרכיב המספרים  
המשיים.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת בכל סעיף.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונים 2 עצי 2-3-4  
בכל אחד (n) מפתחות.

הראה אלגוריתם שבונה עצים 2-3-4 חדש ובו כל המפתחות מ-2 העצים.

נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.



בצלחה !!

**מבחן אמצע**

1) מין זה רשומות כאשר בתחום המספרים המומוגים הוא  $m$  ומכ' המפתחות השונות ידוע כ- $k$ .

א)  $O(n^k) = m$ ,  $k$  לא ידוע. התייחס לגבול  $k$  שונים.

ב)  $n = O(\log m)$ ,  $m$  כל המספרים המשמשים.

ג)  $O(n^k) = m$ ,  $m$  כל המספרים המשמשים.

2) סתוב אלגוריתם שמאחד שני עצי 2-3-4 (בגודל  $m$  ו- $n$ ) לעץ 2-3-4 יחיד, כאשר  $(n)O = m$ .

פתרונות:

(1)

א) הפתרון: עבור  $(n)O = k$  (כלומר שווה או ק鞠ן  $m - n \log k$ ), נשתמש במון בסיס שירוץ בסיבוכיות  $(n^k)O$ . עבור  $(n)O > k$ , נשתמש במון השוואה רגיל כנון merge-sort שירץ ב- $(n)O \log k$ .

ב) ראה עלי' 32, שאלה 1.

ג) נשתמש במון השוואה רגיל כנון merge-sort שירץ ב- $(n)O \log k$ .

2) האלגוריתם יבוצע כמה שלבים. א. נסורך כל אחד מהעיצים inorder בתחום שני מערכים. סיבוכיות:  $(n)O$ .

ב. נריץ את הפונקציה merge ובאחד את שניהם למערך יחיד. סיבוכיות:  $(n)O$ . ג. נעביר את המערך חוזרת לעץ 2-3-4 בדומה לפתרון של עלי' 10, שאלה 1, חלק ג'. כל איבר ישב בזומת משל עצמו עם שני בנים, כאשר את השאריות (ביגור לפתרון גנ"ל) נבנויות לצמתים מעליים צמתים של 2 איברים. כך בטיחות שכל העלים באותו גובה.



203.2310.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' ב', בחינת אמצע,  
20.5.2002  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (50 נק')**

משרד החינוך בחיפה ביקש לשולח משלחת לחו"ל של תלמידים מבתי-הספר התיכוניים בעיר.

בחיפה  $m$  תלמידים ו- $n$  בתים-ספר. בכל בית-ספר  $k$  תלמידים.  
רשומות תלמידים מכילה:

- שם.
- ת.ז.
- ממוצע ציונים (מספר ממשי).

במשלחת  $k$  תלמידים שייבחרו לפי 2 קriterיוונים:

א. התלמידים המציגים בחיפה.

ב. מכל בית-ספר לפחות  $L$  תלמידים (או מניינים ש-  $m > L > n - 1$ )

כתב אלגוריתם שבוחר את חברי המשלחת.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

**שאלה 2: (50 נק')**

נתונות  $m$  רשומות של סטודנטים.  
רשומה מכילה:

- א. שם.
- ב. ת.ז.
- ג. קוד אישי של הסטודנט (מספר שלם בין  $0^2 - n^2$ )

הראה אלגוריתם שבונה עץ-3-4 של רשומות סטודנטים כאשר המפתח הוא הקוד האישי של הסטודנטים.

חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שבחרת.

בהצלחה !!



203.2310.1

שנה"ל תשס"ב, סמס' א', בחינת אמצע, 9.1.2002  
פרופ' מנחם גד לנDAO

זמן הבחינה: שעה ועשרים דקות.  
חומר עזר: דף A4 בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1: (30 נק')**

בנה עץ 3-2 לננתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

18	. הכנס
25	2. הכנס
45	3. הכנס
30	4. הכנס
50	5. הכנס
35	6. הכנס
18	7. בטל
25	8. בטל
45	9. בטל
30	10. בטל

עליך להראות 10 עצים שונים, עץ לכל שלב.

**שאלה 2: (40 נק')**

נתונה עירימה ובה  $m$  איברים.

תאר אלגוריתם שמקבל  $k$  איברים חדשים ויוצר עירימה ובה האיברים הקיימים והחדשים גם יחד. סה"כ  $k+m$  איברים.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתכננת.

הנחיות: א. عليك לבחור בין עירימה בינומית ועירימה בינארית.  
ב. התיחס לגודלים שונים של  $k$ .



### **שאלה 3 : (30 נק')**

נתונות  $\pi$  רשותות ממוניות של סטודנטים במערך. בכל רשותה :

- א. שם הסטודנט.
- ב. מסטר זהות.
- ג. ציון בקורס מבני נתונים (00-100).
- ד. ממוצע כל הציונים של הסטודנט (מספר ממשי).

### **סעיף 1 (10 נק')**

א. הנח שהסטודנטים ממוניות לפי ממוצע הציונים.

ב. כתוב אלגוריתם שמקבל  $\pi$  סטודנטים נוספים ומיצר מערך חדש ובו הסטודנטים הישנים והחדים ממוניות לפי ממוצע הציונים.

### **סעיף 2 (10 נק')**

א. הנח שהסטודנטים ממוניות לפי ציון בקורס מבני נתונים.

ב. כתוב אלגוריתם שמקבל  $\pi$  סטודנטים נוספים ומיצר מערך חדש ובו הסטודנטים הישנים והחדים ממוניות לפי הציון בקורס מבני נתונים.

### **סעיף 3 (10 נק')**

הנחה שהסטודנטים ממוניות לפי תעודות הזהות.

כתבו אלגוריתם שמדפיס את כל הסטודנטים שהציוון שלהם בקורס מבני נתונים גבוה ב-10-נקודות מהציון הממוצע שלהם.

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהסעיפים בנפרד, כפונקציה של  $n$  ו- $k$ .



## פתרונות מבון אמצע, סמסטר א' 2001

2. נבחר עירימה ביבומית. אם  $n < k$  נביס את האיברים אחד אחד, סיבוכיות  $O(n \log n)$ . ואם  $n \geq k$  בונה עירימה בגודל  $k$  ומזג אותה שתי הירימות, סיבוכיות  $O(k + \log(n+k))$ .
3. א. נמיין את  $k$  האיברים ב- $\log k$  ומזג את המרכיבים ב- $\text{merge}$ , סיבוכיות:  $O((n+k) + k \log k) = O(n + k \log k)$ . ב. נמיין במיון לינארי (מיון מנהה) ואנו מבצע  $\text{merge}$ , סיבוכיות:  $O(n)$ . ג. מעבר על כל הרשומות ובדיקה עבור כל אחת בנפרד.



**מִבְנֵי  
נָטוּנִים  
בְּחִינַת אֲמֶצָע**

**203.2310.1.ב.א**

**שנה"ל תשס"א, סמס' ב', מועד אמצע, 15.5.01  
פרופ' מנחם גד לנדרו**

זמן הבדיקה: שעה ועשרים דקות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (35 נק')**

ברצוננו לבצע פעולות נוספות (בנוסף למצא, הוסף, בטל) בעץ 2-3-4. פעולות אלו יתבצעו פעמים רבות.

א. בהינתן 2 מפתחות  $k$  ו- $q$  ( $q < p$ ) הדפס את כל הרשומות בעץ שהמפתח שלهن גדול מ- $k$  וקטן מ- $q$ .

ב. מצא את מספר הרשומות בעץ.

ג. תאר אלגוריתמים שמבצעים את הפעולות הנ"ל ו諾ח את סיבוכיות הזמן שלהם.

**שאלה 2 : (35 נק')**

נתוננו  $n$  רשומות של סטודנטים בחוג למדעי המחשב. בכל רשומה:

א. מספר סטודנט.

ב. ציון בקורס "מבנה נתונים" (00-100).

ג. ציון פסיכומטרי (0-800).

ד. ציון ממוצע בחוג (מספר ממשי).

ברצוננו לבדוק האם המציגנים ב מבחן הפסיכומטרי מצלחים בקורס "מבנה נתונים".  
נגידר את קבוצת "המציגנים ב מבחן הפסיכומטרי" כ-  $k$  התלמידים בעלי הציון הפסיכומטרי הגבוה בחוג ( $k < n$ ).

הdeps את קבוצת המציגנים פעם אחת לפי ציוניהם בקורס "מבנה נתונים" ופעם שנייה לפי ממוצע ציונים בחוג, שני המקרים בסדר יורד.  
נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתמים שתיארת.

**שאלה 3 : (30 נק')**

נתוננו 2 ערים: A ובה  $m$  איברים ו- B ובה  $n$  איברים.

בנה עירמה חדשה C המזוגת את הערים A ו-B.

א. תאר אלגוריתם שבונה את C כאשר  $m=n$ .

ב. תאר אלגוריתם שבונה את C כאשר  $O(\log m) = O(n)$ .

הנק רשיי להניח שהמערכות A ו-B הם בגודל  $m+n$  כל אחד  
(למרות שמספר האיברים ב- A הוא  $m$  וב- B הוא  $n$ ).

נתח את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים שתכננת.



**בצלחה !!**



**מִבְנֵי  
נָטוּנִים  
בְּחִינַת אֲמֹצָע**

203.2310.1

**שנה"ל חסס"א, סמס' א', מועד א',  
25.12.99  
פרופ' מנחם גד לנדרו**

זמן הבדיקה: שעה ועשרים דקות  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (30 נק')**

בנה עץ 2 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק):

1. הכנס	1
2. הכנס	10
3. הכנס	20
4. הכנס	15
5. הכנס	25
6. הכנס	16
7. בטל	1
8. בטל	10
9. בטל	20
10. בטל	15

עליך להראות 10 עצים שונים, עץ לכל שלב.

**שאלה 2 : (40 נק')**

נתונות  $n > 10,000$  (n) רשותות של סטודנטים (הרשומות נתונות כרשימה מקוורת). בכל רשותה:  
א. מספר סטודנט.

ב. ציון בקורס מבני נתונים (0-100).

ג. ממוצע ציונים בחוג למדעי המחשב (מספר ממש).

**סעיף 1 (12 נקודות):**  
כתווב אלגוריתם שבහנתן k (מספר שלם) מוצא את k הסטודנטים המציגים בקורס מבני נתונים.

**סעיף 2 (12 נקודות):**  
כתווב אלגוריתם שבහנתן k (מספר שלם) מוצא את k הסטודנטים המציגים בחוג למדעי המחשב.

**סעיף 3 (16 נקודות):**  
כתווב אלגוריתם שמדפיס את כל הסטודנטים שמדובר ציוניהם גדול מ-70 וקטן מ-90.

חשב את סיבוכיות הזמן של כל אחד מהאלגוריתמים.

**שאלה 3 : (30 נק')**

נתונה ערמה מאופסנת במערך וביה n איברים. הראה כיצד אתה מטפל בפעולות הבאות:

א. הוסף 2 איברים.

ב. הוסף m ( $m > n$ ) איברים.

ג. בהנתן מצביע לאיבר, שנה את ערכו ושמור על תכונות הערמה.

ד. הפוך את הערמה מ민ימום למקסימום ולהפוך.



**מִבְנֵי  
נָטוּנִים  
בְּחִינַת אֲמַצָּע**

**203.2310.א.1**

**203.2310.א.2**

**שנה"ל תש"ס, סמס' א', מועד א',  
17.12.99  
פרופ' מנחם גד לנדרו**

זמן הבדיקה: שעה וחצי  
חומר עזר: דף A4 אחד בלבד ובו תוכן ללא הגבלה.

**שאלה 1 : (25 נק')**

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ערימה ובה  $a$  איברים המאוכסנים במערך A. האלגוריתם מטפל בפעולות הבאות:

**א. פועלות שינוי.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $k$ ,  $n < k$  וערך  $b$ . האלגוריתם משנה ערכו של האיבר במקום  $k$  ב - A [k] - b ולאחר מכן מחזיר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב -  $O(\log n)$  זמן.

**ב. פועלות ביטול.**

האלגוריתם מקבל אינדקס  $k$ ,  $n < k$  ומ לבטל בערימה את הערך במקום  $k$  ב - k במערך A. ולאחר מכן מחזיר למערך את תכונות הערימה. כל זאת ב -  $O(\log n)$  זמן.

**ג. פועלות החלפת סדר.**

האלגוריתם מחליף את הסדר בערימה. כלומר אם בראש היה המינימום הופך את הערימה לערימה ובה בראש המקסימום ולהפך. כל זאת ב -  $O(n \log n)$  זמן.

**שאלה 2 : (25 נק')**

בחברת היי-טק  $n$  עובדים.

רשומה עובד מכילה:

1. שם ושם משפחה.

2. ת.ז.

3. שכר.

4. רשומה מקושרת של המנהלים היישרים שלו. (עובד יתכוño יותר ממנה אחד).

בחברה מונה נשיא חדש המבקש לפגוש את כל העובדים. הוא בקש ממזכירתו לקבוע לו את הפגישות תחת שני תנאים:

- הוא יפגוש כל עובד בנפרד.
- הוא יפגוש עובד רק לאחר שפגש את כל המנהלים שלו.

א. כתוב אלגוריתם שבודק שאין שני עובדים המנהלים אחד את השני ולו גם בדרך עקיפה (מעגל ניהול). נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ב. כתוב אלגוריתם היוצר סדר פגישות חוקי. חשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

ג. כתוב אלגוריתם שמקבל כקלט שם של עובד ומוצא את השכר הכלול של העובד והכפופים לו. כלומר העובד הכפופים היישרים שלו, הcpfופים להם וכו'.

### שאלה 3 : (25 נק')

תאר אלגוריתם המטפל במסד נתונים ובו מספרים שלמים. האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות בקלט.

- א. הוסף איבר למסד נתונים.
- ב. מצא איבר במסד נתונים.
- ג. בטל איבר במסד נתונים.
- ד. בהינתן 2 מספרים a ו- b, מצא את סכום כל האיברים במסד הנתונים הקטנים מ - a וגם גדולים מ - b.
- ה. מצא את האיבר המקסימלי במסד נתונים.
- ו. מצא את ממוצע האיברים במסד נתונים.

חשב את סיבוכיות הזמן של כל פעולה בהנחה שבזמן הביצוע יהיו במסד הנתונים n איברים.

### שאלה 4 א' : (12 נק')

בנה עץ-3-2 לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק) :

100	.1
200	.2
150	.3
125	.4
110	.5
60	.6
200	.7
110	.8

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

### שאלה 4 ב' : (13 נק')

בנה עץ אדום - שחור לנתונים הבאים (התחל מעץ ריק) :

100	.1
200	.2
150	.3
125	.4
110	.5
60	.6
200	.7
110	.8

עליך להראות 8 עצים שונים, עץ לכל שלב.

בצלחה !!



### מבנה נתונים – תרגיל בית מס' 3: עצי חיפוש (בינהרדיים ו- B-Tree)

#### שאלה 1

עטן מעץ מופיע בסדר עולה בגודלו זה. כתוב אלגוריתם שמארכן את איברי המערך בעץ חיפוש ביטויי מאותן במימוש דסמי (בכל צומת מצביע לבן שמאל ולבן ימין).

#### שאלה 2

נקודות ח נקודות במישור. הצע מבנה נתונים לאחסון הנקודות, שיתמוך בפעולות הבאות:

Insert( $x, y$ ) – בזמן –  $O(ign)$ .

Delete( $x, y$ ) – בזמן –  $O(ign)$ .

Print Line ( $m$ ) – הדפס את כל הנקודות  $(y_i, x_i)$ , המיקומות:  $m = xi + yi$ .

(הערה: כל הנקודות הניל נמצאות על הישר  $m = x + y$ ).

סיבוכיות הזמן:  $O(k + ign)$ , כאשר  $k$  הוא מספר נקודות הפלט.

סבירו כיצד תבוצע כל פעולה.

#### שאלה 3

נתנים ח איברים. עליך למצוא מהו האיבר ה- $i$ , כאשר ניתן לבצע שאילתא זו הרבה פעמים, על-זים שונים.

האיבר ה- $i$  הוא האיבר שהיה במקומות ה- $i$  ברשימה ממוקמת של האיברים.

השתמש בעץ חיפוש בינהרי. מותר להוציא שזה לכל צומת.

\* תאר את העץ שתכנת.

\* תאר כיצד תבצע הוספה וביטול.

\* הסבר כיצד תמצא את האיבר ה- $i$ , ומוחב פסיאוז-קוד.

פתרונות סימוכית.

#### שאלה 4

ממש עצ חיפוש בינהרי.



הנה כי קיימם קובץ בתיקיות הקוד שלך, שעל פיו נבנה העץ. כל שורה בקובץ מכילה קוד-פקודה וערך (x) (אם צריך).  
המרת הקוד לפקודה היא עפ"י הטבלה הבאה:

1. Find (x)
2. Insert (x)
3. Successor (x)
4. Predecessor (x)
5. Delete (x)
6. min ()
7. max ()
8. print\_tree ()
9. backwards ()

הדפסת כל המפתחות בעץ בסדר יורד – backwards ()

עליך להזפיס הודעות מתאימות למסקן.

הערה: פקודה 8 תדפיס את העץ לפי תרומות, כלומר כל רמה בעץ תהיה בשורה חדשה, ובין הצלמות יהיו פסיקים.

#### שאלה 5

נתך סימוכיות.

חסביר כיצד ביצעת (או התכוונת לבצע...) את הדפסת העץ

להגish פתרונות, דיסקט עם קובץ C/C++, והדפסה של התוכנית, עד יום ב' 21.1.15.00 שעה 00.

בצלחת, מירית.



### מבני נתונים - תרגיל בית מס' 3: פתרונות

#### שאלה 1

שורש העץ יהיה האיבר האמצעי במערך. קוראים וקורסיבית לבנייה תות העץ השמאלי מתוך חצי הראשון של המערך, ובבנייה תות העץ הימני מתוך חצי השני של המערך. במהלך האלגוריתם מחלקים את המערך שוב ושוב עד שagetters לחלקים בגודל 1. הסיבוכיות – (n)O.

#### שאלה 2

נזכיר את תנקודות בעץ חיפוש בינארי מאוזן – עץ אדום שחור. העץ יהיה מאורגן לפי מ. בכל צומת יש לאחסן את כל הנகודות בעלות אותו מ. ולמן כל צומת יהיה עץ חיפוש המאורגן לפי א. בחוספה וביבטול: ראשית נחפש את הצומת המבוקש עפ"י מ= $\text{root}$ . אם אין נחפש בתוך העץ הפנימי לפי א. מכיוון שמדובר בשני מיטלים בשני עצים מאוזנים, הסיבוכיות היא עדין ( $\text{Ign} \cdot O$ ). הפעלת הקו מ: מוחפש את הצומת עם ה- מ=המצביע, ואחריו כן מדפיסים את כל העץ הפנימי שסטאנו צומת, עי' סריקת InOrder. הסיבוכיות היא  $k \cdot (\text{Ign} + O)$ .

#### שאלה 3

(לידיעתכם: אם עוד לא גילתם, אז הפטון המלא נמצא בפרק 15 בספר. כדי לזכור, יש שם ערך זרים שימושיים.) נזכיר את האיברים בעץ אדום שחור (= <עץ חיפוש ביןארי מאוזן>), וכל צומת נסיף את השדה `size`. נזכיר בשדה את גודל תות העץ המושרש בצומת זה (מספר הצאים כולל עצמו). ברור כי מ = `size->root`. החבתה הערך בשדה `size` של כל הצמותים בעץ קיימת עי' סריקת PostOrder.

tospat ايידר :  
טסיף 1 לשדה `size` של כל צומת במסלול מהשורש ועד למקום בו מוסיפים את האיבר. לאיבר החדש ניתן ערך 1 בשדה זה. לאחר מכן, כשותקנים את העץ, בכל חוטציה יש להתחיל את השדות `Size` של הצמותים שזו. כל השינויים המיל לא ייקחו יותר מ- ( $\text{ign} \cdot O$ ) וכאן סיבוכיות והחספה נשארת ( $\text{ign} \cdot O$ ).

#### מטל איידר :

אם מחליפים את א בעקב שט ע, מחליפים את הרשומות, אך משאירים את השדה `size` המקורי של א. עברים על המסלול מהשורש ועד הצומת שמחקנו פיזית (א - אם הוא עלה, ע - אם החלפנו בעקב) ומוחזקים 1 מהשדה `size` של כל צומת במסלול לאחר מכן, בזאת תיקון העץ - משנים את `size` של צמתים שעלו וutschיה. כל השינויים הניתן לא ייקחו יותר מ- ( $\text{ign} \cdot O$ ) וכאן סיבוכיות הביטול נשארת ( $\text{ign} \cdot O$ ).

#### מציאת האיבר ה- $i$ :

מזהמים מהשורש. מיקומו של השורש שווה לגודל תות העץ השמאלי שלו ועוד 1. אם זה בדיקת ה- מ=המצביע, סימנו.

אחרת, אם  $i >$  מיקומו של השורש, סימן שהאייר המבוקש נמצא בתת העץ השמאלי של השורש, אך עברים לו נחשמי ומבצעים את אותה בדיקה.  
 אם  $i <$  מיקומו של השורש, סימן שהאייר המבוקש נמצא בתת העץ הימני של השורש, אך עברים לו נחשמי, אבל מחייבים  $i - n$  את מיקומו של השורש. (כיוון שהוא מיקום האייר המבוקש בתת העץ הימני בלבד.)  
 מספר הצמתים שנעבור דרכם ונבדק את מיקומם הוא מכסיומים כגובה העץ, וכך הסיטוכית היא ( $n^2$ ).  
 0.

להלן הקוד, שימו לב שזה פונקציה רקורסיבית.

```
find_i (node, i)
{
    node_pos = node->left->size + 1
    if i == node_pos
        return node
    if i < node_pos
        find_i (node->left, i)
    if i > node_pos
        find_i (node->right, i - node_pos)
}
```

#### שאלה 5

הערה: חישbst העץ נעשית בשיטה דומה ל-BFS על גרפ.  
 משתמשים בהר. מכניסים את השורש לתור. מכניסים אחריו סימן מיוחד לסוף רמה (למשל סולמיין).  
 מבצעים את הפעולות הניל בלאה כל עוד החטור אינו ריק:  
 שולפים אייר מהחדר.  
 אם זו סולמיין: מדפיסים שורה חדשה. אם החטור אינו ריק – מכניסים לשלוף סולמיין (כי סיימנו להכניס לתור את כל  
 הרמה הבאה בעז). אם התור ריק – העץ יכול מודפס. הלאה תסתיימים.  
 אם זה אייר: מדפיסים אותו, המכניסים לתור את הבנים שלו.

הלאה תעבור על כל הצמתים בעץ. כל צומת ייכנס לתור רק פעם אחת. וכך הסיטוכית היא כמספר הצמתים –  $(n)$ .  
 0.



## בביני נתונים

### תרגיל

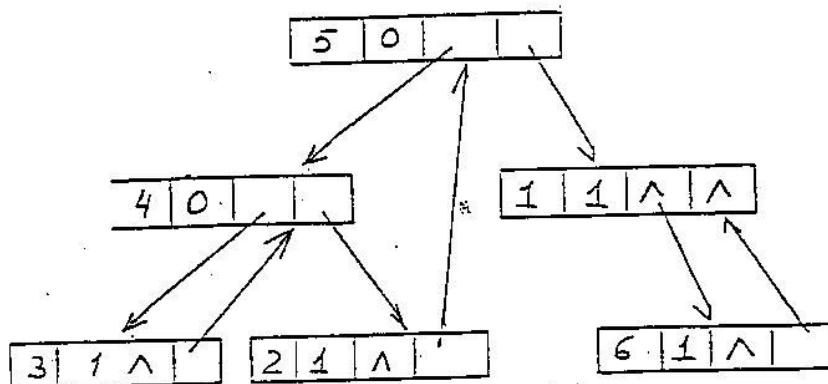
שכנתoot (Threaded binary tree) הוא שבייטר שבסכיבע Right של קדקוד שמי' לן ימי מראה על  
אייבר האא בסדר Inorder .  
בכל קדקוד קיים שדה Thread המגדיר :

אם לקדקוד יש נו ימי Thread = 0

אם לקדקוד אין נו ימי Thread = 1

כלבר אם 0 = Thread אז בסכיבע Right מראה על נו ימי ואחרות הוא מראה על אייבר האא בסדר Inorder

דוחא:



אייבר אחרון בסדר Inorder מציבע Right שווה ל-NULL (בדוגמה זה קידוד עם ערך 0)  
בתוב טונקציה ב C++ המכבלת כפרמטר בסכיבע על שוט של שט בנות ובודיפידת גת איברי העץ בסדר  
הטונקציה צרכה להשתמש בתווים . אין להשתמש ברקורסיה או מהסנית או בסכיבע אב . זמן ריצה של  
אלגוריתם הוא  $O(n)$  (אשר ח בספר קדקודים בערך)

נונה רשות מקוותה הד-בונייה באורך  $\alpha$  שבוניה לפי מטריה K הצע במנה נתונים יישתמש ב-  $O(n)$  מקום  
טלי' פרט לרשותה ( $\alpha \leq n$ ) הכספייר נישה לאייבר עם כפחת K ברשותה מקושרת בזט ( $\alpha \log n + O(n)$ ).  
הארה  $\alpha$  הנה שטנה כבר באותחל (זמן הבונייה של לא נכס לזמן החישוב) ונטע מבעלות ההפיש לא מתבצעות פעולות  
אלגוריתם על רשותה בקושחה.

גולוצ'ט לתוכה קטוט-בונרים right על הימר . כל קטע מיזע עיי קצובו [c,b] שם סטטיך בסגן float . על הרצף  
הנתונים מונדרות שטי' משטה :

(a.b) insert - כביסה את הקטע [c,b] כבוניה .

(y) left - בתיירה נקודה הבינימלית x של קטע ש- y נמצאו מ. אם y לא נמצוא באך קטע מתחזרת NULL .  
לאר כבנה נתונים לבייש הפעולות הכליל כד שבל פטלת התחיה ב-  $O(\log n)$  אשר ח הוא כפלי קטוטים כבוניה . ( ואר  
נס ק את הפישלה )

הנשה : בוננות עד ל- 12.12.96



## מבנה נתונים

### פתקן

.1

```

inorder( node *T)
{
    while( T!= NULL)
    {
        while(T->Left != NULL )
            T = T-> Left;

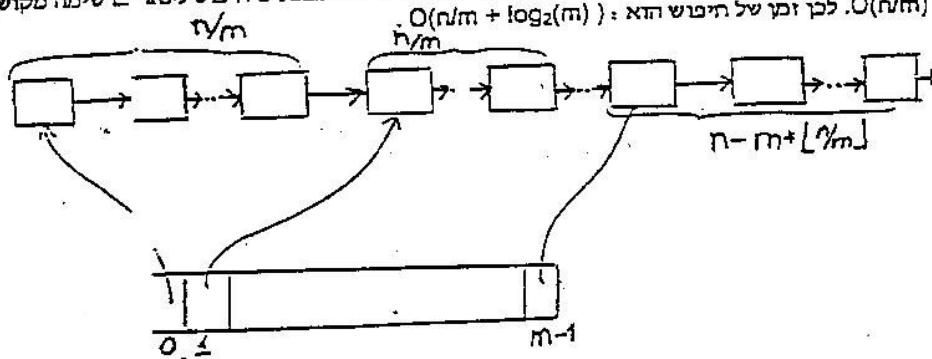
        cout << T->Val;

        while( T->Thread == 0 ) //>>()
        { T = T-> Right; cout << T->Val ; }

        T = T-> Right;
    }
}

```

2. מחלקים רשימה מקויה ל-  $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  חלקים כך שכל אחד מכיל  $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  איברים (חוץ מהאחרון) - זה אומר  $\lceil \frac{n}{m} \rceil \cdot m = n$  - ח). מבדרים מערך בבדול ושמכילים מצביעים על תחילת כל חלק של רשימה מקיזה כדי לבצע חיטוט קודם מהפשים עיי חיטוט ביטרי במערך - זמן החיטוט הוא  $(m \log_2 m)$ . אם לא מוצאים את הערך בין אבר המערך או מוצאים את החלק של רשימה מקויה שערך נמצא בו ואנו מבצעים חיטוט לסטר ברשימה מקויה שווה לוקה ( $m/n$ ). לכן זמן של חיטוט הוא:  $(m \log_2 m + m/n)$



3. מבנה הנתונים הוא עץ-2 כך שבעלים נשמר זוגות של מקטרים וערך הראשון בזוג (העד - מינימלי) הוא המפתח (ז.א. הוא יופיע בתור מפתח בקודדים הפנימיים).

insert(x,v)

- עושים חיטוט כמו בעץ-3 :

- אם  $x > k_1$  אז ממשיכים חיטוט בתת עץ הראשון.

- אם  $-y < k_1 < x$  אז קטוע [y,x] לא יהיה ולקטעים אחרים בתבנה - ממשיכים חיטוט.

- אם  $y < k_1 < x$  (כasherish שמי בים) או  $k_2 < y < x$  אז ממשיכים בתת עץ השני.

- אם  $y < k_2 < x$  אז קטוע [y,x] לא יהיה ולקטעים אחרים בתבנה - ממשיכים חיטוט.

- אם  $y < k_2$  ממשיכים בתת עץ השלישי.

- אם נגירים לפה והוא מכיל קטוע [p,q], שור ל-[y,x] אז ביצרים קדוק חדש עם [yx] ובכך אונט לאט אל של [p,q].

- אם מביעים לעלה שמכיל קטוע [p,q] שאית ווד קטוע [y,x] או לא עשוים כהם.

Left(y) :  
מביעים וחיטוט של ערך בעץ-2. באשר נגאים לעלה בדיקים האם עמצא תוך קטע שהיינו בנה. אם כן מוחלים נבל שטאל של הקטוע. אחרות מוחרים NULL.

1. נתון גראף קשיר לא מכונן. נתונות הצמתים  $s$ ,  $t$  ו- $z$ . מצא האם הקשת נמצאת על-אייזהו מסלול קוצר ביותר  $s \rightarrow t$ .
2. נתון גראף קשיר ולא מכונן. בבה מבנה נתונים שיתמוך בשאלתה הבאה: האם צומת  $v$  היה נקודת הפרדה? חשב את סיבוכיות האתחול.
3. נתון גראף מכונן כ-"חד-קישר" אם לכל זוג צמתים  $u, v$  קיים מסלול  $m-u \rightarrow v \rightarrow m$ . כתוב אלגוריתם שבודק האם  $G$  הוא חד-קישר.
4. תכנו מבנה נתונים שתומך בשאלות הכנסה, חיפוש, הוצאה ובובוסף תומך בשאלתה: מהו העוקב  $k$ -של צומת  $x$ ? (כלומר, אם גלך  $m-x$ ,  $k$  אעדית קידמה, לאיזו צומת נגעה).
5. בגרף כלשהו, רוצים למצוא את המסלול הועוני הקצר ביותר מזומת  $S$  לכל צומת אחרת.
6. נתון עץ ביטאי עם משקלות על הקשיות. מהו המסלול הכביד ביותר בעץ?
7. תכנו מבנה נתונים המאפשר חיפוש, הכנסה, הוצאה, ובובוסף: מציאת עוקב וקודם-ב-(1)ו.

## פתרונות

1. ע"י הרצת  $(s)$  נברר את המרחק בין  $s$  ל- $t$  (האורך הרצוי) ובין  $s$  ל- $u$ . הרצת  $(t)$  ו- $(u)$  BFS( $t$ ) ו- $(u)$  BFS( $u$ ) תיתן את המרחקים  $m-t$  ו- $m-u$ . אז נברוך האם  $(t) d(s,t) + d(t,u) + d(u)$  שווה  $m$ . אם כן, אז אחד מהם מתקיים, הקשת נמצאת על מסלול קוצר ביותר; אחרת לא.
2. סיבוכיות:  $O(V+E)$ . הסבר: אחרי הרצת DFS, מתקיים: א. אם  $v$  השורש ויש לה יותר מבן אחד, היא גלק' הפרדה. אם  $v$  לא השורש, היא איבנה נלק' הפרדה אם לכל בניית קשת אחרת אחת שיוצאה מתת-העץ שלהם אל מעל  $v$ . אתחול: א. נריצ' DFS על הגראף, לכל קודקוד שומר שדה שהזיק את הקשת אחרתה הביי בובה ( $d$  הכל קטן) שיצא ממנה. ב. נריצ' postorder ותזקיק לכל צומת את המינימום שבין  $h-low$  של בניה. סיבוכיות:  $O(V+E)$ . ביצוע השאלה: בדיקה האם  $(u)=d(u)<=low(sons)$  לכל בניה; אם כן,  $d$  אינה נלק' הפרדה. אם קיים בן שלא מקיים תבאי זה,  $d$  היא נלק' הפרדה. סיבוכיות במספר הבנים של  $v$ .
3. אם  $G$  מכיל מעגלים, בבה את  $G_{scc}$  ונקבל גראף ללא מעגלים. [בוצע על  $G$  או על  $G_{scc}$  מיון טופולוגי. נעבור על שימת הצמתים ונבדוק האם קיימת צומת בין כל שני צמתים עוקבים. אם כן, הגראף חד-קישר. אם חסירה קשת אחת,  $G$  אינו חד-קישר. סיבוכיות:  $O(V+E)$ .
4. נשבה עץ א"ש כך שיתמוך במציאת האינדקס של איבר. השאלה הרשותית יתבצע כרגע; מציאת העוקב תבוצע כך: א. נמצא את  $x$  (וגם את האינדקס  $i$  שלו). ב. בחפש בעץ את האיבר  $h_{i+1}$ . סיבוכיות:  $O(\log n)$ .
5. נזכיר גראף  $G'$  שבו לכל צומת  $v$  קיים עותק ' $v'$ , ובכל מסלול  $m-u \rightarrow v$  יתקבל שבי ביטויים, מקור להעתיק ומהעתיק למקור. עתה נריצ' BFS כנארך המסלולים הוגניים יישו לצומת מקור.
6. סכימה postorder שתשמור לכל צומת  $v$  את המסלול המקסימלי  $m-u$  לעלה כלשהו בתת-העץ, וכן  $(b)$  את המסלול המקסימלי בין שני עליים שבחתה העץ (ambilי לעברו  $b-u$ ). עבור  $(b)$  נבחר את המקסימום בין השלושה:  $(b)$  של בן שמאל,  $(c)$  של בן ימין, או סכום  $(a)$  של שני הבנים. בשורש נמצא את המסלול הכביד ביותר.
7. עץ א"ש, בו נסיף לכל צומת מצביעים לעוקב וקודם (על עץ קיים,  $(O)$  ע"י ריצה  $(inorder)$ ). מעתה בהכנסה, נחויק שני מצביעים ומণים שמצויעים למיניהם ולמקדים, ככלומר טווח החיפוש. בכל פעם שנדר בעץ הם יתעדכו בהתאם (אם פניט' מיניה, תחילת הטווח הופר לצומת שירדנו ממנה; אם שמאליה, סוף הטווח). זהו למעשה שcool להיפוש ביטאי על רישימה מקוורת ממונעת (רשימת העוקבים). כשהמנגן את המיקום הרצוי, נישאר עם העוקב והקודם של הצומת החדש. במחיקה, נזדקן את של הצומת שמנחלה להציג עוקב, ולהפוך.

