álgebra lineal: Matrices y vectores

María Guzmán Martínez

noviembre, 2025

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1 Álgebra de vectores y matrices

1.1. Vectores

Definición 1.1 Vector

Un vector $\boldsymbol{v}$ en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan elementos o componentes del vector $\boldsymbol{v}$. El vector cero es el vector $(0, 0)$.

Definición 1.2

Un conjunto x de n números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llama un vector, y se escribe como:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{a}^\top = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Definición 1.3

Un vector fila de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

.

Definición 1.4

Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran las propiedades de los vectores:

1. Suma de vectores: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
2. Multiplicación por un escalar: $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$
3. Distributiva de la suma de escalares: $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
4. Producto punto: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
5. Producto cruz: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$
6. Norma o módulo de un vector: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$
7. Vectores ortogonales: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$

1.1.1. Resolución de problemas

Ejemplo 1.1

La suma de dos vectores en un espacio euclidiano se realiza sumando componente por componente. Si tienes dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dados por:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

entonces la suma de estos vectores, denotada como $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, se calcula sumando sus componentes correspondientes:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2

Consideremos dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La suma de estos vectores es:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) \\ (-1)+2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.3

Consideremos dos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. La resta de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ es:

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ -1-4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.1

Dado el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcula $\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

Ejercicio 1.2

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Calcula $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

1.1.2. Practica con R

%%

```
  # Definir dos vectores
v1 <- c(1, 2, 3)
v2 <- c(4, 5, 6)

# Sumar los vectores
suma <- v1 + v2
```

%%%

```
 # Definir los vectores columna
U <- c(1, 2, 3)
V <- c(4, 5, 6)

# Calcular la resta de los vectores
resultado <- U - V
```

%%

```
# Definir un vector de lógicos y un vector de enteros
v_logico <- c(TRUE, FALSE, TRUE)
v_entero <- c(1, 0, 1)

# Sumar los vectores
suma <- v_logico + v_entero
```

%%

Definición 1.5

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ y k un escalar. La multiplicación de $\mathbf{v}$ por k se calcula como:

$$k\mathbf{v} = k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.4

Sea el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el escalar $k = 3$. La multiplicación de $\mathbf{v}$ por k es:

$$k\mathbf{v} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.5

Consideremos el vector fila $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ y el escalar $k = 2$. La multiplicación de $\mathbf{v}$ por k es:

$$k\mathbf{v} = 2(1, 2, 3) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (2, 4, 6)$$

Ejercicio 1.3

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

Solución

Solución $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1.4

Dado el vector $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, encuentra $\frac{1}{2}\mathbf{w}$.

Ejercicio 1.5

Sean $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Calcula el producto escalar $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$.

1.1.3. Práctica con R

Los vectores de datos x y y, se pueden concatenar por columnas con la función *cbind()*; y por renglones con la función *rbind()*.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Los vectores de datos x y y, Por renglones (filas)
      A<-rbind(x, y)
      A
# La función matrix() genera una matriz; el número de columnas y
renglones (filas) de la matriz se indican con los argumentos ncol
y nrow, respectivamente.
      x <- c(2, 7, 3, 6, 1)
      y <- c(3, 7, 3, 5, 9)

      # Creando la matriz
      A<-matrix(c(x,y), nrow = 5, ncol = 2)
      A

# Para determinar de qué clase es el objeto que se definió se usa la función
\textit{class()}:
      class(A)
```

```
Dimensión de la matriz A:
      dim(A)

      x <- c(2, 7, 3, 6, 1)
      y <- c(3, 7, 3, 5, 9)

      # Por columnas
      A<-cbind(x, y)
      A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Definir la matriz original
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6), nrow = 2, byrow = TRUE)


# Definir el escalar
escalar <- 3

# Multiplicar la matriz por el escalar
resultado <- escalar * A



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Definir los vectores A y B
A <- c(1, 2, 3)
B <- c(4, 5, 6)

# Definir el escalar fraccionado y el escalar entero
escalar_fraccionado <- 3/2
escalar_entero <- 2

# Calcular la operación
resultado <- escalar_fraccionado * A - escalar_entero * B

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Definición 1.6

El producto punto (pruducto interno o producto escalar) de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se denota como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Dado el vector fila $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ y el vector columna $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = [u_1, u_2, u_3] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Ejemplo 1.6

Sea el vector fila $\mathbf{u} = [1, 2, 3]$ y el vector columna $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. El producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = [1, 2, 3] \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Ejemplo 1.7

Supongamos el vector fila $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$ y el vector columna $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se obtiene como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [2, -1, 3] \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = -2 - 2 + 12 = 8$$

Teorema 1.1

Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tres vectores de dimensión n y sea α un escalar. Entonces:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ *(ley conmutativa del producto escalar)*
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ *(ley distributiva del producto escalar)*
4. $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

☞ **Observación**

Observe que no existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido.

Ejercicio 1.6

Dado el vector fila $\mathbf{a} = [\mathbf{1}, \mathbf{-2}, \mathbf{3}]$ y el vector columna $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$, calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Ejercicio 1.7

Sean $\mathbf{u} = [\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{-3}]$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ dos vectores. Encuentra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Ejercicio 1.8

Dado el vector fila $\mathbf{x} = [\mathbf{1}, \mathbf{2}]$ y el vector columna $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$, calcular $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

1.1.4. Práctica con R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 # Definir los vectores
v1 <- c(1, 2, 3)
v2 <- c(4, 5, 6)

# Calcular el producto punto
producto_punto <- sum(v1 * v2)

producto_punto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


# Definir un vector columna y un vector fila
vector_columna <- matrix(c(1, 2, 3), ncol = 1)
vector_fila <- c(4, 5, 6)

# Calcular el producto punto
producto_punto <- sum(vector_columna * vector_fila)

 producto_punto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Definir dos vectores
u <- c(1, 2, 3)
v <- c(4, 5, 6)

# Definir un escalar
c <- 2

# Calcular el producto escalar del lado izquierdo de la ecuación
izquierda <- c * (u + v)

# Calcular el producto escalar del lado derecho de la ecuación
derecha <- c * u + c * v



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    # Definir tres vectores
A <- c(1, 2, 3)
B <- c(4, 5, 6)
C <- c(7, 8, 9)

# Calcular el lado izquierdo de la ecuación
lado_izquierdo <- sum(A * (B + C))

# Calcular el lado derecho de la ecuación
lado_derecho <- sum(A * B) + sum(A * C)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Definición 1.7

Dados los vectores $\mathbf{u} = (a, b, c)$ y $\mathbf{v} = (a_1, b_1, c_1)$, se define el producto cruz o producto vectorial de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como $\mathbf{u} \times \mathbf{v} := (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b)$.

Algunas propiedades del producto cruz se muestran a continuación.

- **Anticonmutatividad**: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.
- **Distributividad con respecto a la suma**: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.
- **No es asociativo**: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
- **El producto cruz de dos vectores paralelos es cero**: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos o antiparalelos, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1.8

Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$, demostraremos la propiedad de anticonmutatividad del producto cruz.

Calculamos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1(-2) - 3(4) \\ 3(1) - 2(-2) \\ 2(4) - (-1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$:

$$\begin{pmatrix} (4 \times 3) - (-2 \times (-1)) \\ (-2 \times 2) - (1 \times 3) \\ (1 \times (-1)) - (4 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$ son opuestos, se cumple la propiedad de anticonmutatividad.

Ejemplo 1.9

Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, demostraremos la propiedad de distributividad con respecto a la suma del producto cruz.

Calculamos $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \begin{pmatrix} -1+3 \\ 0+4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \times \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) - (-3)(4) \\ (-3)(2) - (2)(1) \\ (2)(4) - (1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} (1)(0) - (-3)(2) \\ (-3)(-1) - (2)(3) \\ (2)(4) - (1)(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1)(4) - (-3)(-1) \\ (-3)(3) - (2)(-3) \\ (2)(-1) - (1)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.9

Demostrar que : $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Ejercicio 1.10

Demostrar que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos o antiparalelos, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

1.1.5. Práctica con R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
   # Definir los vectores tridimensionales U y V
U <- c(2, -1, 3)
V <- c(1, 4, -2)

# Calcular el producto cruz UV
producto_cruz <- c(U[2] * V[3] - U[3] * V[2],
                   U[3] * V[1] - U[1] * V[3],
                   U[1] * V[2] - U[2] * V[1])

# Mostrar el resultado
print(producto_cruz)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

 # Definir los vectores tridimensionales U y V
U <- c(2, -1, 3)
V <- c(1, 4, -2)

# Calcular el producto cruz VU
producto_cruz_VU <- c(V[2] * U[3] - V[3] * U[2],
                      V[3] * U[1] - V[1] * U[3],
                      V[1] * U[2] - V[2] * U[1])
```

Definición 1.8

La norma de un vector es una medida de su longitud o magnitud en un espacio vectorial. En términos generales, la norma de un vector $\mathbf{v}$ se define como una función que asigna a cada vector un número no negativo. Formalmente, para un vector $\mathbf{v}$ en un espacio vectorial V sobre un campo escalar F, la norma de $\mathbf{v}$, denotada como $\|\mathbf{v}\|$, cumple con las siguientes propiedades:

1. **No negatividad**: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector cero.
2. **Homogeneidad positiva**: Para todo escalar α en F, $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$.
3. **Desigualdad triangular**: Para cualquier par de vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V, $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Estas propiedades aseguran que la norma de un vector cumple con las propiedades básicas de una medida de distancia o magnitud en un espacio vectorial. La norma también se puede generalizar a espacios vectoriales de cualquier dimensión. En el caso de vectores tridimensionales en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^n$, la norma de un vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ se calcula como:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Ejemplo 1.10

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^3$. Calculemos la norma de $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la norma de $\mathbf{v}$ es $5\sqrt{2}$.

Ejemplo 1.11

Consideremos el vector $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^4$. Vamos a calcular su norma:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 4 + 1} = \sqrt{10}$$

Por lo tanto, la norma de $\mathbf{w}$ es $\sqrt{10}$.

Ejercicio 1.11

Dado el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^5$. Calcula la norma de $\mathbf{u}$.

Ejercicio 1.12

Demostrar la **desigualdad triangular**: Para cualquier par de vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V, $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

1.1.6. Práctica con R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 # Definir el vector
v <- c(3, -4, 5)

# Calcular la norma del vector
norma_v <- sqrt(sum(v^2))

# Mostrar el resultado
print(norma_v)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir el vector y el escalar
v <- c(3, -4, 5)
alpha <- 2

# Calcular la norma de alpha * v
norma_alpha_v <- sqrt(sum((alpha * v)^2))

# Calcular |alpha| * norma_v
norma_alpha <- abs(alpha) * sqrt(sum(v^2))
```

```
# Verificar si son iguales
if (norma_alpha_v == norma_alpha) {
  print("La propiedad de homogeneidad positiva se cumple para el vector v
  y el escalar alpha.")
} else {
  print("La propiedad de homogeneidad positiva NO se cumple para el vector
  v y el escalar alpha.")
}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Función para calcular la norma de un vector
norma_vector <- function(v) {
  norma <- sqrt(sum(v^2))
  return(norma)
}

# Definir un vector v
v <- c(2, -3, 1)

# Calcular la norma de v
norma_v <- norma_vector(v)

# Verificar que la norma de v es siempre mayor o igual a cero
if (norma_v >= 0) {
  print("La norma de v es siempre mayor o igual a cero.")
} else {
  print("La norma de v no cumple la propiedad.")
}

# Verificar que la norma de v es cero si y solo si v es el vector cero
if (norma_v == 0 && all(v == 0)) {
  print("La norma de v es cero si y solo si v es el vector cero.")
} else {
  print("La norma de v no cumple la propiedad.")
}

# Definir el vector
v <- c(0, 0, 0)

# Calcular la norma del vector
norma_v <- sqrt(sum(v^2))

# Verificar si la norma es cero si y solo si el vector es el vector cero
if (norma_v == 0 && all(v == 0)) {
  print("La norma de v es cero si y solo si v es el vector cero.")
} else {
  print("La norma de v no cumple la propiedad.")
}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Definición 1.9

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Definición 1.10

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Entonces, el ángulo φ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está definido como el ángulo no negativo más pequeño entre las representaciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ para algún escalar α, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

☞ **Observación**

Cuando calculamos el producto punto $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, obtenemos la proyección de un vector sobre el otro, multiplicado por la magnitud del segundo vector. Dividiendo esto por el producto de las normas de los vectores nos da la definición de coseno del ángulo entre ellos.

Definición 1.11

Dos vectores diferentes de cero $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

Teorema 1.2

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Demostración:

La ley de los cosenos establece que en el triángulo de lados a, b y c el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de los otros dos lados y el coseno del ángulo incluido.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

Sea el triángulo con lados $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, y $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$ con puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$. Entonces, de la ley de los cosenos,

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi.$$

no obstante

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2$$

$$= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2$$

Así, después de restar $\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi$, y el teorema queda demostrado.

Ejemplo 1.12

Supongamos que tenemos dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dados por:

$$\boldsymbol{u} = (3, 4) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = (5, 2)$$

Para encontrar el ángulo entre estos dos vectores, primero calculamos el producto punto $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ y

las normas $\|\boldsymbol{u}\|$ y $\|\boldsymbol{v}\|$.
El producto punto $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (3)(5) + (4)(2) = 15 + 8 = 23$$

Las normas $\|\boldsymbol{u}\|$ y $\|\boldsymbol{v}\|$ se calculan como:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Ahora, utilizamos la fórmula del coseno para encontrar el ángulo φ entre los dos vectores:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{23}{5\cdot\sqrt{29}}$$

Finalmente, podemos usar la función inversa del coseno (arcocoseno) para encontrar el valor del ángulo φ:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{23}{5\cdot\sqrt{29}}\right)$$

Este ángulo φ es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

Ejercicio 1.13
Demuestre que los vectores $\boldsymbol{u} = (2, -3)$ y $\boldsymbol{v} = (-4, 6)$ son paralelos.

Ejercicio 1.14
Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 24\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

Ejercicio 1.15
Sea G la matriz que define el producto escalar en la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de un espacio euclídeo:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular las normas de los vectores de la base B:
b) Calcular los cosenos de los ángulos que forman entre sí los vectores de la base B:

1.1.7. Practica con r

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Calcular el ángulo entre los vectores en grados y radianes
v1 <- c(3, -2, 5)
v2 <- c(1, 4, -1)

# Función para calcular el ángulo entre dos vectores en radianes
angulo_radianes <- function(v1, v2) {
  dot_product <- sum(v1 * v2)
  norma_v1 <- sqrt(sum(v1^2))
  norma_v2 <- sqrt(sum(v2^2))
  cos_theta <- dot_product / (norma_v1 * norma_v2)
```

```
  theta_rad <- acos(cos_theta)
  return(theta_rad)
}

# Función para calcular el ángulo entre dos vectores en grados
angulo_grados <- function(v1, v2) {
  theta_rad <- angulo_radianes(v1, v2)
  theta_grados <- theta_rad * (180 / pi)
  return(theta_grados)
}

# Calcular el ángulo entre los vectores en radianes
angulo_rad <- angulo_radianes(v1, v2)
print(paste("El ángulo entre los vectores en radianes es:", angulo_rad))

# Calcular el ángulo entre los vectores en grados
angulo_deg <- angulo_grados(v1, v2)
print(paste("El ángulo entre los vectores en grados es:", angulo_deg))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

#¿Los siguientes vectores son paralelos ?
# Vectores dados
v1 <- c(3, -2, 5)
v2 <- c(6, -4, 10)

# Función para calcular el ángulo entre dos vectores en radianes
angulo_radianes <- function(v1, v2) {
  # Verificar si los vectores son nulos
  if (sum(v1^2) == 0 || sum(v2^2) == 0) {
    return(0)  # Ángulo entre un vector nulo y cualquier otro vector es 0
  }

  dot_product <- sum(v1 * v2)
  norma_v1 <- sqrt(sum(v1^2))
  norma_v2 <- sqrt(sum(v2^2))
  cos_theta <- dot_product / (norma_v1 * norma_v2)

  # Verificar si el coseno está fuera del rango [-1, 1]
  if (abs(cos_theta) > 1) {
    return(pi)  # Si es así, el ángulo es pi (180 grados)
  }

  theta_rad <- acos(cos_theta)
  return(theta_rad)
}

# Calcular el ángulo entre los vectores en radianes
angulo_rad <- angulo_radianes(v1, v2)

# Verificar si los vectores son paralelos (ángulo 0 o )
if (abs(angulo_rad - 0) < 1e-10 || abs(angulo_rad - pi) < 1e-10) {
  print("Los vectores son paralelos.")
} else {
```

```
  print("Los vectores no son paralelos.")
}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.2. Matrices

Definición 1.12 Matriz

Si m y n son enteros positivos, una matriz $\boldsymbol{A}$ de dimensión $m \times n$ es un arreglo de dimensión dos, con elementos a_{ij}, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

La matriz $\boldsymbol{A}$ tiene m renglones (líneas horizontales) y n columnas (líneas verticales):

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En forma compacta la matriz $\boldsymbol{A}$ se puede escribir como $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$.

☞ **Observación**
Note que el elemento a_{ij} está ubicado en el i-ésimo renglón y en la j—ésima columna de $\boldsymbol{A}$.

1.2.1. Práctica en R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# En R se puede definir de esta forma una matriz de nxn
n <- 3  # Cambia el valor de n según el tamaño deseado de la matriz

# Definir los elementos de la matriz como un vector de longitud n^2
elementos <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
# Cambia estos valores según la necesidad

# Crear la matriz cuadrada de tamaño n x n
matriz <- matrix(elementos, nrow = n, ncol = n, byrow = TRUE)
# Cambia byrow a FALSE si prefieres llenar la matriz por columnas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.2.2. Traspuesta de una matriz

Definición 1.13

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la transpuesta de $\boldsymbol{A}$, que se escribe $\boldsymbol{A}^\top$, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de $\boldsymbol{A}$. De manera breve, se puede escribir $\boldsymbol{A}^\top = (a_{ji})$. En otras palabras

$$\text{Si } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } \boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Simplemente se coloca el renglón i de $\boldsymbol{A}$ como la columna i de $\boldsymbol{A}^\top$ y la columna j de $\boldsymbol{A}$ como el renglón j de $\boldsymbol{A}^\top$.

Definición 1.14

Una matriz cuadrada se dice que es simétrica si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ o si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i y j.

Observación

Para que una matriz $\boldsymbol{A}$ sea simétrica o antisimétrica es necesario que sea cuadrada. Si $\boldsymbol{A}$ es antisimétrica, entonces los elementos de la diagonal a_{ii} son cero. Si $\boldsymbol{A}$ es cualquier matriz cuadrada, entonces las matrices $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{A}$ son simétrica y antisimétrica respectivamente. ¿Se puede expresar $\boldsymbol{A}$ en términos de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$?

Ejemplo 1.13

$$\text{Si } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \text{ entonces } \boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.14

Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, la transpuesta de $\boldsymbol{A}$ se denota como $\boldsymbol{A}^T$ y se obtiene intercambiando filas por columnas:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 1.16

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices tales que el producto $\boldsymbol{AB}$ está definido. Demuestre que $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^t$.

Solución

Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, el producto $\boldsymbol{AB}$ es:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(5)+(2)(7) & (1)(6)+(2)(8) \\ (3)(5)+(4)(7) & (3)(6)+(4)(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de $\boldsymbol{AB}$ es:

$$(\boldsymbol{AB})^T = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de $\boldsymbol{A}$ es:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de $\boldsymbol{B}$ es:

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5)(1)+(7)(2) & (5)(3)+(7)(4) \\ (6)(1)+(8)(2) & (6)(3)+(8)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}.$

Por lo tanto, $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

Definición 1.15

La traza de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ de $k \times k$, escrita como $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$, es la suma de los elementos diagonales; es decir, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$.

Sea $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices $k \times k$ y c un escalar.

1. $\operatorname{tr}(c\boldsymbol{A}) = c\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$
2. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$
3. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$
4. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AA}^{\top}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$

Ejercicio 1.17

Para una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ se define su traza, denotada $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. ¿Cuándo es cero la traza de $\boldsymbol{AA}^{\top}$?

Ejercicio 1.18

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas, calcule $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})$ y $\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$. ¿ Hay alguna relación entre estos números?

Ejercicio 1.19

¿Es correcta la ecuación $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$?

Ejercicio 1.20

¿Existen matrices $n \times n$, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tales que $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$?

1.2.3. Práctica en R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir una matriz
matriz <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6), nrow = 2)

# Transponer la matriz
matriz_transpuesta <- t(matriz)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Definir una matriz de 3x3
matriz <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), nrow = 3)

# Transponer la matriz
matriz_transpuesta <- t(matriz)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
# Demostració de $(A B)^{\top}$ $=B^{\top} A^t$.
# Definir dos matrices A y B
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6), nrow = 2, byrow = TRUE)
B <- matrix(c(7, 8, 9, 10, 11, 12), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Calcular el producto AB
AB <- A * B

# Transponer el producto AB
transpose_AB <- t(AB)

# Transponer las matrices A y B
transpose_B <- t(B)
transpose_A <- t(A)

# Calcular el producto transpuesto de B y A
transpose_BA <- transpose_B * transpose_A

# Comprobar si (AB)^T = B^T A^T
identical(transpose_AB, transpose_BA)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

#Traza de una matriz

# Definir una matriz
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular la traza de la matriz
traza <- trace(A)
traza
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.2.4. Inversa de una matriz

Definición 1.16

La matriz identidad $\boldsymbol{I}_n$ de $n \times n$ es una matriz cuyos elementos en la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás son 0. Es decir,

$$\boldsymbol{I}_n = (b_{ij})$$

donde $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Definición 1.17

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices de $n \times n$. Suponga que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$. Entonces $\boldsymbol{B}$ se llama la inversa de $\boldsymbol{A}$ y se denota por $\boldsymbol{A}^{-1}$. Entonces se tiene $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, entonces se dice que $\boldsymbol{A}$ es invertible.

Una matriz cuadrada que no es invertible se le denomina singular y una matriz invertible se llama no singular.
Sean $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. La matriz inversa de A, denotada como $\boldsymbol{A}^{-1}$, se calcula utilizando la fórmula:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

donde $\det(\mathbf{A})$ es el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ y $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ es la matriz adjunta de $\mathbf{A}$.

Para calcular la matriz inversa de una matriz específica, primero debes encontrar su determinante y luego la matriz adjunta. Una vez que tengas estos valores, puedes usar la fórmula anterior para encontrar la matriz inversa.

Para calcular el determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$, existen varios métodos según su dimensión, a continuación se muestran algunos:

- Dimensión 1: El determinante de la matriz $\mathbf{A} = (a)$ es $\det(\mathbf{A}) = a$.
- Dimensión 2: El determinante de la matriz $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ donde $a_{i,j}$ es el elemento de la fila i y columna j es $\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$.
- Dimensión 3: Usaremos la regla de Sarrus.
- Dimensión 4 o mayor: Usaremos el teorema de Laplace.

a continuación se muestran ejemplo del determinante de una matriz de 2×2

Ejemplo 1.15

$$\text{Sea } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz $\mathbf{A}$ se calcula como:

$$\det(\mathbf{A}) = (2 \times 1) - (4 \times 3) = 2 - 12 = -10$$

Ejemplo 1.16

$$\text{Sea } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz $\mathbf{B}$ se calcula como:

$$\det(\mathbf{B}) = (5 \times 3) - (-1 \times -2) = 15 - 2 = 13$$

La regla de Sarrus para encontrar el determinante de una matriz A de 3×3 es:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \tag{1.1}$$

Veamos un ejemplo específico:

Ejemplo 1.17

Calcular el determinante de la siguiente matriz utilizando el método de Sarrus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Aplicaremos la regla de Sarrus (1.1) para calcular el determinante de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\det(A) = (2)(2)(4) + (-1)(-1)(-2) + (3)(0)(0) - (3)(2)(-2) - (-1)(0)(4) - (2)(-1)(0)$$

Realizando las operaciones, obtenemos:

$$\det(\boldsymbol{A}) = 16 - 2 + 0 - (-12) - 0 - 0 = 16 - 2 + 12 = 26$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ es $\det(\boldsymbol{A}) = 26$.

Ejercicio 1.21

Aplicar la regla de Sarrus para calcular el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$

$$\text{Sea } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Dada la expresión 1.1 el $\det(\boldsymbol{A})$ queda dado de la siguiente manera:

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1{\cdot}2{\cdot}2+(-2)1{\cdot}3+1{\cdot}4{\cdot}(-1)-1{\cdot}2{\cdot}3-2{\cdot}4(2)-(1){\cdot}1{\cdot}(-1) = 4-6-4-6+16+1 = 5$$

El determinante de una matriz de dimensión mayor que 3 suele calcularse mediante la fórmula de Laplace, esta regla de Laplace se puede aplicar para matrices cuadradas de cualquier dimensión, pero normalmente se hace para dimensiones mayores que 3.

Hay dos versiones de la regla: desarrollo por una fila y desarrollo por una columna. El resultado es el mismo, pero escogeremos uno u otro según nos convenga.

El método consiste en elegir una fila i de la matriz (o una columna j). El determinante de la matriz es la suma de cada elemento a_{ij} de dicha fila multiplicado por $(-1)^{i+j}$ (es $+1$ o -1 según la posición del elemento) y por el determinante de la submatriz $\boldsymbol{A}_{ij}$. Recordar que la submatriz $\boldsymbol{A}_{ij}$ es la matriz que resulta al eliminar la fila i y columna j de la matriz $\boldsymbol{A}$.

☞ **Observación**

Es mejor desarrollar por la fila o la columna que tenga más ceros, ya que no tendremos que calcular el determinante cuando $a_{ij} = 0$.

Fórmula: Desarrollo por la fila i de la matriz $\boldsymbol{A}$ de dimensión n :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\boldsymbol{A})_{ij}$$

siendo $\boldsymbol{A}_{ij}$ la matriz de dimensión $n-1$ resultante al eliminar la fila i y la columna j de $\boldsymbol{A}$. Por tanto, si la matriz es dimensión n, tendremos que calcular n determinantes de matrices de dimensión $n-1$. Esta es la razón por la que solo usamos esta regla cuando no hay otra opción (dimensión mayor que 3).

Ejemplo 1.18

Para que sea más sencillo, vamos a calcular el determinante de una matriz de dimensión 2×2 desarrollando por la fila 1 :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}) &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 \\ &= 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19

Calcularemos el determinante de la siguiente matriz de dimensión 3 :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como tenemos un 0 en la segunda fila, desarrollamos por la fila 2 :

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot & \begin{pmatrix} \times & 2 & 3 \\ \times & \times & \times \\ \times & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
+ 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot & \begin{pmatrix} 1 & \times & 3 \\ \times & \times & \times \\ 2 & \times & 1 \end{pmatrix} \\
+ 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \times \\ \times & \times & \times \\ 2 & 2 & \times \end{pmatrix} = \\
& = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \\
& + 0 \\
& + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = \\
& = 4 + 2 = \\
& = 6
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.20

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la fila 1 porque tiene un 0 , aunque también podríamos escoger la fila 4 , la columna 2 o la columna 4 :

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) &= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}\\
&+0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}\\
&+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\\
&-3\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}\\
&=1\cdot 46+3\cdot(-50)+3\cdot 8\\
&=-80
\end{aligned}$$

Definición 1.18

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de $n\times n$ y sea $\boldsymbol{B}$, la matriz de sus cofactores. Entonces, la adjunta de $\boldsymbol{A}$, escrito adj ($\boldsymbol{A}$), es la transpuesta de la matriz $\boldsymbol{B}$ de $n\times n$; es decir,

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}^{\top}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de tamaño $n\times n$, denotada como $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$, se calcula tomando la matriz de cofactores transpuesta de $\boldsymbol{A}$. Es decir, cada elemento de la matriz de cofactores se coloca en la posición correspondiente en la matriz adjunta, pero se intercambian filas y columnas. Por lo tanto, si C_{ij} es el cofactor asociado al elemento a_{ij} de $\boldsymbol{A}$, entonces el elemento (i,j) de la matriz adjunta es C_{ji}.

Ejemplo 1.21

Encuentre la adjunta de la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Cofactor de $3=A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2$

Cofactor de $1=A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2$

Cofactor de $-1=A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6$

Cofactor de $2=A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1$

Cofactor de $-2 = A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

Cofactor de $0 = A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

Cofactor de $1 = A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

Cofactor de 2 $= A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

Cofactor de -1 = $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$

La matriz cofactor de $\boldsymbol{A}$ es

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Ahora encuentre la traspuesta $\boldsymbol{A}_{ij}$

$$adj(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}_{ij})^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.3

Si una matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible, entonces su inversa es única.
Demostración: *Supongamos que $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son dos inversas de $\boldsymbol{A}$. Se puede demostrar que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$. Por definición, se tiene $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$. Por la ley asociativa de la multiplicación de matrices, se tiene que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}$. Entonces,*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{IC} = \boldsymbol{C}$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 1.4

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces $\boldsymbol{AB}$ es invertible y $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
Demostración:
Para probar este resultado es necesaria la definición 1.15. Es decir, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1}$ si y sólo si $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = I$. Se trata, únicamente, de una consecuencia ya que

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{IB} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

y

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AIA}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{AB}$ es invertible y $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

Ejercicio 1.22

Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada que tiene inversa, ¿tiene inversa $\boldsymbol{A}^T$?

Ejercicio 1.23

¿Puede tener traza cero una matriz que tiene inversa?

Ejercicio 1.24

Dada la matriz $\boldsymbol{A}$ de 3×3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentra su inversa, si existe.

Ejercicio 1.25

Calcula la inversa de la matriz $\boldsymbol{B}$ de 3×3:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si es posible.

1.2.5. Práctica con R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir la matriz A
A <- matrix(c(1, 2, 3,
              1, 0, 1,
              2, 2, 1), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular el determinante
determinante_A <- det(A)

# Imprimir el determinante
print(determinante_A)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir la matriz A
A <- matrix(c(1, 0, 3, -3, 2, -3, -2, 3, -1, 2, 1, 2, 3, 2, 5, 0),
nrow = 4, byrow = TRUE)

# Calcular el determinante
determinante_A <- det(A)

# Imprimir el determinante
print(determinante_A)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Calcular  la adjunta de una matriz de 3x3

# Definir la matriz A
A <- matrix(c(3, 1, -1, 2, -2, 0, 1, 2, -1), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular los cofactores
```

```
cofactors <- matrix(nrow = nrow(A), ncol = ncol(A))
for (i in 1:nrow(A)) {
  for (j in 1:ncol(A)) {
    M <- A[-i, -j]  # Submatriz eliminando la fila i y la columna j
    cofactors[i, j] <- (-1)^(i + j) * det(M)
  }
}

# Transponer la matriz de cofactores para obtener la adjunta
adj_A <- t(cofactors)

# Mostrar la adjunta
print(adj_A)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

 # Definir la matriz A
A <- matrix(c(1, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 1), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular la inversa de A
A_inv <- solve(A)

# Mostrar la inversa
print(A_inv)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.2.6. Diagonización de una matriz

Definición 1.19

Una matriz cuadrada se denomina triangular superior si todas sus componentes por debajo de la diagonal son cero. Es una matriz triangular inferior si todas sus componentes por encima de la diagonal son cero. Una matriz se denomina diagonal si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

Definición 1.20

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de $n \times n$, y K un campo decimos que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable en K si existen dos matrices cuadradas, $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$, de la misma dimensión que $\boldsymbol{A}$ y sobre K tales que:

- $\boldsymbol{P}$ es regular,
- $\boldsymbol{D}$ es diagonal
- $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ (o, equivalentemente, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$).

Propiedades inmediatas de la definición.

- $\boldsymbol{A}$ es semejante a $\boldsymbol{D}$.
- Si $\boldsymbol{A}$ es real y diagonalizable en los reales, lo es en los complejos (los reales son subespacio de los complejos).
- La matriz $\boldsymbol{P}$ no es única (existen infinitas posibilidades para la factorización). Por ejemplo, podemos multiplicar $\boldsymbol{P}$ por un escalar no nulo y $\boldsymbol{P}^{-1}$ por su inverso.

✿ Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$ es una diagonalización de $\boldsymbol{A}$, la matriz diagonal $\boldsymbol{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ está formada por autovalores de $\boldsymbol{A}$, y el vector de la columna i de la matriz $\boldsymbol{P}$ es un vector propio asociado al autovalor d_i.

Definición 1.21

Sea V un K-espacio vectorial, y sea C un subconjunto de V. Decimos que C es linealmente dependiente (o simplemente dependiente) sobre el campo K si existen vectores distintos $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ (con n un entero positivo) en C y escalares $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que no todos los a_i son cero, pero $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nvn$ es igual al vector cero de V. Si C no es linealmente dependiente sobre K, decimos que C es linealmente independiente sobre K. Una sucesión finita $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ de vectores en V es una sucesión linealmente independiente si todos los vectores son diferentes y el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ es linealmente independiente. Si la sucesión no es linealmente independiente, se dice que es una sucesión linealmente dependiente.

Ejemplo 1.22

Sea $V = \mathbb{R}^2$. El conjunto $\{(1,0),(0,1),(2,-3)\}$ es linealmente dependiente sobre $\mathbb{R}$, pues tenemos la siguiente combinación lineal con escalares reales no todos nulos que da el vector cero:

$$-2(1,0) + 3(0,1) + 1(2,-3) = (0,0)$$

Ejemplo 1.23

Sea $V = \mathbb{R}^2$. El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$, pues dados cualesquiera escalares reales a y b, si $(0,0) = a(1,0) + b(0,1) = (a,b)$, se seguiría que $a = 0$ y $b = 0$, es decir, los escalares son todos nulos.

1.2.7. Práctica con R

```
 # Definir los vectores
v1 <- c(1, 0, 0)
v2 <- c(0, 1, 0)
v3 <- c(2, -3, 0)

# Crear la matriz con los vectores como columnas
M <- cbind(v1, v2, v3)

# Calcular la combinación lineal que produce el vector cero
comb_lineal <- -2*v1 + 3*v2 + 1*v3

# Verificar si la combinación lineal es el vector cero
is_zero <- all(comb_lineal == 0)

# Mostrar el resultado
if (is_zero) {
  print("El conjunto de vectores es linealmente dependiente.")
} else {
  print("El conjunto de vectores es linealmente independiente.")
}
```

Definición 1.22

Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica cuadrada $k \times k$. Entonces $\mathbf{A}$ tiene k pares de valores propios y vectores propios, es decir,

$$\lambda_1, \mathbf{e}_1 \quad \lambda_2, \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \lambda_k, \mathbf{e}_k$$

Los vectores propios se pueden elegir para satisfacer $1 = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_1 = \cdots = \mathbf{e}_k^\top \mathbf{e}_k$ y ser mutuamente perpendiculares. Los vectores propios son únicos a menos que dos o más valores propios sean iguales.

Si $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable en los reales, para obtener las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$ procedemos del siguiente modo:

1. Obtener los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$.
2. Buscar una base de los subespacios asociados a los valores propios (la unión de todas ellas es una base de $\mathbb{R}^n$).
3. Construir $\boldsymbol{P}$ cuyas columnas sean la base obtenida.
4. Construir $\boldsymbol{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ donde d_i es el valor propio asociado al vector propio de la columna i de $\boldsymbol{P}$.

Sea $\boldsymbol{A}_{n\times n} \in \mathbb{R}$ es diagonalizable si y solo si $\boldsymbol{A}$ tiene n autovectores linealmente independientes. Sean $v_1, v_2, \dots, v_n$ autovectores LI de la matriz $\boldsymbol{A}_{n\times n} \in \mathbb{R}$. Podemos construir una matriz $\boldsymbol{P}$ cuyas columnas sean dichos autovectores:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$ es inversible porque sus columnas son LI y, por lo tanto, tiene rango n ($\det(\boldsymbol{P}) \neq 0$). Puede demostrarse que: $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ donde $\boldsymbol{D}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los respectivos autovalores.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.24

```
# Definir una matriz diagonalizable
A <- matrix(c(2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular los valores y vectores propios
eigen_A <- eigen(A)

# Verificar si A es diagonalizable
if (all(round(eigen_A$values) == eigen_A$values)) {
  cat("La matriz A es diagonalizable.\n\n")

  # Matriz diagonal D
  D <- diag(eigen_A$values)

  # Matriz de vectores propios P
  P <- eigen_A$vectors

  # Matriz inversa de P (P^-1)
  P_inv <- solve(P)

  L<-round(P%*%D%*%P_inv);L
  #L=A
```

```
  # Verificar si P * D * P^-1 = A
  if (all(round(P %*% D %*% P_inv) == A)) {
    cat("La verificación de la diagonalización es exitosa.\n\n")

    # Mostrar resultados
    cat("Matriz P:\n")
    print(P)


    cat("\nMatriz D:\n")
    print(D)

    cat("\nMatriz P^-1:\n")
    print(P_inv)
  } else {
    cat("Error: La verificación de la diagonalización ha fallado.\n")
  }
} else {
  cat("La matriz A no es diagonalizable.\n")
}
```

Teorema 1.5

Una matriz $\boldsymbol{A}$ real de dimensión $n \times n$ es diagonalizable en los reales (y, por tanto, en los complejos) si y solo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de $\boldsymbol{A}$.
La demostración queda al lector.

Ejercicio 1.26

Demostrar que la siguiente matriz real $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable en los reales

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.27

Sea:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de a y b de modo que $\lambda = 3$ sea autovalor doble, y $\boldsymbol{M}$ sea diagonalizable.

Ejercicio 1.28

Encuentra una matriz inversible $\boldsymbol{P}$ y una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ tal que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ para la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.29

Diagonaliza la matriz $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.30

Sea $\boldsymbol{A}_{3\times 3} \in \mathbb{R}$ tal que su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)$, y $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es un autoespacio de $\boldsymbol{A}$. Analizar si $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

1.2.8. Práctica con R

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
#Con la función diag también puedes crear una matriz diagonal, pasando
como entrada un vector a la función.

diag(c(7, 9, 2))

#Además la función diag también permite crear matrices identidad,
especificando la dimensión de la matriz deseada.

diag(4)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir la matriz
A <- matrix(c(1, 2, 3, 2, 1, -4, 0, 0, 3), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular los autovalores y autovectores
eigen_result <- eigen(A)

# Obtener la matriz de autovectores
P <- eigen_result$vectors

# Obtener la matriz diagonal de autovalores
D <- diag(eigen_result$values)

# Verificar si la matriz es diagonalizable
is_diagonalizable <- all(round(P %*% solve(P) %*% A, 8) == round(D, 8))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 # Definir la matriz A
A <- matrix(c(1, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular los autovalores y autovectores
eigen_result <- eigen(A)
autovalores <- eigen_result$values
autovectores <- eigen_result$vectors



# Verificar si la matriz es diagonalizable
is_diagonalizable <- all(round(autovalores) == autovalores)
```

```
# Construir la matriz P con los autovectores
P <- autovectores


# Calcular la inversa de P
P_inv <- solve(P)


# Comprobar si P^-1 * A * P = D
D <- diag(autovalores)
resultado <- round(P_inv %*% A %*% P, 8) == round(D, 8)
```

1.3. Suma de matrices

Definición 1.23 Suma de matrices

Si $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$ son matrices de dimensiones $m \times n$, entonces la suma es la matriz de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, está dada por $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Es decir,

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

☞ **Observación**

Note que si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices con entradas en un mismo campo, su suma está bien definida si y solo si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tienen las mismas dimensiones.

Propiedades de la suma de matrices:

1. **Conmutativa:** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ para cualquier matriz $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del mismo tamaño.
2. **Asociativa:** $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ para matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ del mismo tamaño.
3. **Elemento neutro:** Existe una matriz $\boldsymbol{O}$ llamada matriz nula tal que $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$ para cualquier matriz $\boldsymbol{A}$.
4. **Elemento opuesto:** Para cada matriz $\boldsymbol{A}$, existe una matriz $-\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, donde $\boldsymbol{O}$ es la matriz nula.

1.3.1. Resolución de ejemplos

Ejemplo 1.25

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.26

Sean $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$. La suma de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.31

Si dos sistemas de ecuaciones tienen la misma matriz asociada, entonces los dos sistemas son iguales.

Ejercicio 1.32

Demuestre que la suma de matrices es asociativa, es decir, que si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son matrices con las mismas dimensiones, entonces se pueden definir $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]+\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{A}+[\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}]$, y además $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+[\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}]$. Debido a esto, dicha suma usualmente se escribe simplemente como $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

Ejercicio 1.33

Demuestre que si dos sistemas homogéneos de ecuaciones tienen la misma matriz asociada, entonces los dos sistemas son iguales.

1.3.2. Práctica con r

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Crear las matrices
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6), nrow = 2, byrow = TRUE)
B <- matrix(c(7, 8, 9, 10, 11, 12), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Realizar la suma de matrices
C <- A + B

# Mostrar el resultado
print(C)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Crear la primera matriz con enteros
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Crear la segunda matriz con fracciones
B <- matrix(c(1/2, 3/4, 5/6, 7/8), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Realizar la suma de matrices
C <- A + B

# Mostrar el resultado
```

```
print(C)
```

1.4. Resta de matrices

Definición 1.24 Resta de matrices

Si $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$ son matrices de dimensiones $m \times n$, entonces la resta de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ está dada por $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \{a_{ij}\} - \{b_{ij}\}$.

Así la resta de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, está dado por

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} & \dots & a_{3n}-b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & a_{m3}-b_{m3} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

☞ **Observación**
La resta de dos matrices de dimensión diferente no está definida.

1.4.1. Resolución de ejemplos

Ejemplo 1.27

Sean $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. La resta de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 2-1 \\ 3-2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.28

Sean $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La resta de $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ es:

$$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 0-1 & 2-2 \\ 4-0 & 1-(-2) & 3-1 \\ 2-(-1) & 2-0 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1.4.2. Práctica con r

%%

```
# Definir las matrices A y B
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4),
            nrow = 2,
            byrow = TRUE)
B <- matrix(c(5, 6, 7, 8),
            nrow = 2,
            byrow = TRUE)

C<-A+B  # Suma de matrices
C
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      x<-c(1,2,3,4)

      A <- matrix(x, nrow = 2, byrow = TRUE)

      B <- matrix(c(5, 6, 7, 8),
                  nrow = 2,
                  byrow = TRUE)

      C <-  A-B
```

1.5. Multiplicación de matrices

Definición 1.25 Producto de matrices

Sean K un campo, $\boldsymbol{A}$ una matriz de $m \times n$, y $\boldsymbol{B}$ una matriz de $n \times t$. El producto de las matrices denotado $\boldsymbol{AB}$, es la matriz de $m \times t$ cuyas entradas están dadas por

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, p$.

Esta definición significa que el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del producto $\boldsymbol{AB}$ se obtiene al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de $\boldsymbol{A}$ por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de $\boldsymbol{B}$ y luego sumar los elementos de esta multiplicación, es decir, si A y B son dos matrices de dimensión $m \times n$ y $n \times t$ respectivamente como se muestran a continuación:

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \underset{n\times t}{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} \quad \underset{m\times t}{\boldsymbol{AB}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices:

1. **Asociativa:** $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ para matrices adecuadamente dimensionadas.
2. **Distributiva respecto a la suma:** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$ y $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$ para matrices adecuadamente dimensionadas.
3. **Producto por el elemento identidad:** $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$ donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad.
4. **No conmutativa:** En general, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ para matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ de diferentes dimensiones.
5. **Propiedad escalable:** $(c\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ para una constante escalar c y matrices adecuadamente dimensionadas.

Ejemplo 1.29

Sean las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

entonces el producto $\boldsymbol{AB}$ está dado por:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.30

Sean

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

dos matrices de 2×2, el producto $\boldsymbol{BA}$ está dado por:

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.31

Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ matrices de 3×2 y 2×4 respectivamente

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

el producto $\boldsymbol{CD}$ está dado por:

$$\boldsymbol{CD} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.34

Multiplica las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.35

Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula el producto $\boldsymbol{CD}$

Ejercicio 1.36

Sean las matrices:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

determina $\boldsymbol{EF}$.

1.5.1. Práctica con R

Para una matriz A de 2×3 y una matriz B de 3×2, se tiene una matriz C de 2×2.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definición de matrices
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6), nrow = 3, byrow = TRUE)
B <- matrix(c(7, 8, 9, 10, 11, 12), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Multiplicación de matrices
C <- A %*% B

# Resultado
print(C)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definición de matrices
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4), nrow = 2, byrow = TRUE)
B <- matrix(c(5, 6, 7, 8), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Multiplicación de matrices
C <- A %*% B

# Resultado
print(C)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Crea las matrices con fracciones
A <- matrix(c(1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 9/10), nrow = 3,
byrow = TRUE)
B <- matrix(c(1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, 6/13, 7/15, 8/17, 9/19),nrow = 3,
byrow = TRUE)

# Multiplica las matrices
C <- A %*% B

# Muestra el resultado
print(C)
```

1.5.2. Multiplicación de matrices por un escalar.

Definición 1.26

Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, $\alpha\boldsymbol{A}$, está dada por:

$$\alpha\boldsymbol{A} = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto es $\alpha\boldsymbol{A} = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de $\boldsymbol{A}$ por α. Si $\alpha A =$

$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 1.32

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.33

$$-\frac{1}{3}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.37

Multiplica la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ por el escalar $\frac{1}{2}$

Ejercicio 1.38

Dada la matriz $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $\frac{3}{4}\boldsymbol{B}$

Ejercicio 1.39

Multiplica la matriz $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ por el escalar $\frac{2}{5}$

1.5.3. Práctica con R

La multiplicación de una matriz $\boldsymbol{A}$ por el escalar c:

$$c\boldsymbol{A}$$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 A <- matrix(c(3, 1, 3, 2, 2, 0, 1, 4, 1),
                  nrow = 3,
                  byrow = TRUE)
# Definir el escalar c
c <- 3
cA <- c*A
cA

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Cálculo de $$cA-B$$
A <- matrix(c(3, 9, 6, 6, 0, 3, 12, 3, 6),
```

```
                    nrow = 3,
                    byrow = TRUE)
                    A
# Definir la matriz B con las mismas dimensiones que A
       B <- matrix(c(2, 1, 1, 0, 4, 3, 0, 3, 2),
        nrow = 3,
        byrow = TRUE)
       B
Resultados:
      c<-3
      cA <- c*A
      # Calcular la diferencia 3A - B
      D <- cA - B
      D

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

 # Crea la matriz con elementos en fracción
A <- matrix(c(1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 9/10),
nrow = 3, byrow = TRUE)

# Define el escalar fraccionario
escalar <- 3/4

# Realiza la multiplicación del escalar por la matriz
resultado <- escalar * A

# Muestra el resultado
print(resultado)
```

1.6. Descomposición espectral

Definición 1.27 Descomposición espectral

Dado $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica de $k \times k$. Entonces $\boldsymbol{A}$ puede ser expresada en términos de sus k parejas de eigenvalores-eigenvectores $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)$:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$$

Obsérvese que las λ_i son constantes y los $\mathbf{e}_i$ son vectores de longitud k.

1.6.1. Resolución de problemas

Ejemplo 1.34

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2.2 & 0.4 \\ 0.4 & 2.8 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \lambda^2 - 5\lambda + 6.16 - 0.16 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

por lo que $\boldsymbol{A}$ tiene eigenvalores $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$. Los correspondientes eigenvectores son

$\mathbf{e}_1^\top = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ y $\mathbf{e}_2^\top = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$, respectivamente. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 2.2 & 0.4 \\ 0.4 & 2.8 \end{bmatrix} \\
&= 3\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.6 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Las ideas que conducen a la descomposición espectral pueden extenderse para proporcionar una descomposición para una matriz rectangular, en lugar de una cuadrada. Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz rectangular, entonces los vectores en la expansión de $\boldsymbol{A}$ son los eigenvalores de las matrices cuadradas $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$ y $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$.

Ejemplo 1.35

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica dada por:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Primero, encontramos los eigenvalores y eigenvectores de $\boldsymbol{A}$. Supongamos que los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, y $\lambda_3 = 3$, con los eigenvectores correspondientes:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz $\boldsymbol{Q}$ formada por los eigenvalores de $\boldsymbol{A}$ es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal $\boldsymbol{\Lambda}$ está formada por los eigenvalores de $\boldsymbol{A}$ en la diagonal:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición espectral de A es:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Ejercicio 1.40
Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justificar que $\boldsymbol{A}$ es ortogonalmente diagonalizable.
2. Calcular los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y sus multiplicidades algebraicas.
3. Hallar los correspondientes espacios propios. Determinar la multiplicidad geométrica de estos valores propios.
4. Hallar la descomposición espectral de $\boldsymbol{A}$, es decir, escribir $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i$, con $A_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top$, siendo λ_i los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y $\mathbf{e}_i$ los vectores propios apropiados.
5. Hallar una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ semejante a $\boldsymbol{A}$ y una matriz $\boldsymbol{P}$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^\top$.

1.6.2. Práctica con r

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir la matriz A
A <- matrix(c(2.2, 0.4, 0.4, 2.8), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Calcular la descomposición espectral
espectral_A <- eigen(A)

# Obtener los valores propios y vectores propios
valores_propios_A <- espectral_A$values
vectores_propios_A <- espectral_A$vectors

# Mostrar los resultados
print("Valores propios:")
print(valores_propios_A)

print("Vectores propios:")
print(vectores_propios_A)

# Reconstruir la matriz original
A_reconstruida <- vectores_propios_A %*%
diag(valores_propios_A) %*%
t(vectores_propios_A);A_reconstruida
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Definir la matriz A
A <- matrix(c(2, -1, 0, -1, 2, -1, 0, -1, 2), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Calcular la descomposición espectral
espectral_A <- eigen(A)

# Obtener los valores propios y vectores propios
valores_propios_A <- espectral_A$values
vectores_propios_A <- espectral_A$vectors

# Reconstruir la matriz original
```

```
A_reconstruida <- vectores_propios_A %*%
diag(valores_propios_A)
%*% t(vectores_propios_A)

# Mostrar la matriz original y la matriz reconstruida
print("Matriz Original:")
print(A)

print("Matriz Reconstruida:")
print(A_reconstruida)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.7. Descomposición en valores singulares

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de $m \times k$ de números reales. Entonces existen una matriz ortogonal $\boldsymbol{U}$ de $m \times m$ y una matriz ortogonal $\boldsymbol{V}$ de $k \times k$ tales que

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Lambda V}^\top$$

donde la matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ de tamaño $m \times k$ tiene una entrada (i,i) $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, \text{mín}(m,k)$ y las demás entradas son cero. Las constantes positivas λ_i se llaman los valores singulares de $\boldsymbol{A}$.
Además, la descomposición en valores singulares también se puede expresar como una expansión de matrices que depende del rango r de $\boldsymbol{A}$. Específicamente, existen r constantes positivas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, r vectores unitarios ortogonales de tamaño $m \times 1$ $u_1, u_2, \ldots, u_r$ y r vectores unitarios ortogonales de tamaño $k \times 1$ $v_1, v_2, \ldots, v_r$, tales que

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i v_i^\top = U_r \boldsymbol{\Lambda}_r V_r^\top$$

donde $u_r = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_r]$, $\boldsymbol{V}_r = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_r]$, y Λ_r es una matriz diagonal de tamaño $r \times r$ con entradas diagonales λ_i.

Aquí, $\boldsymbol{AA}^\top$ tiene pares de valores propios y vectores propios (λ_i, u_i), por lo que

$$\boldsymbol{AA}^\top u_i = \lambda_i^2 u_i$$

con $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_r^2 > 0 = \lambda_{r+1}^2, \lambda_{r+2}^2, \ldots, \lambda_m^2$ (para $m > k$). Luego, $v_i = \lambda_i^{-1} A^\intercal u_i$. Alternativamente, los v_i son los vectores propios de $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ con los mismos valores propios no nulos λ_i^2.

La expansión de matriz para la descomposición en valores singulares escrita en términos de las matrices de dimensiones completas $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ es

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Lambda V}^\top$$

donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de tamaño $m \times k$, U es una matriz ortogonal de tamaño $m \times m$, V es una matriz ortogonal de tamaño $k \times k$, y $\boldsymbol{\Lambda}$ es una matriz diagonal de tamaño $m \times k$. Además $\boldsymbol{U}$ tiene m eigenvectores ortogonales de $\boldsymbol{AA}^\top$ como sus columnas, $\boldsymbol{V}$ tiene k eigenvectores ortogonales de $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ como sus columnas, y Λ se especificó anteriormente.

Teorema 1.6

Sea $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Lambda V}^T$ una descomposición de valores singulares de una matriz $\boldsymbol{A}$ de $m \times K$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leq n$, todos los valores singulares no nulos de $\boldsymbol{A}$. Entonces:

1. *El rango de $\boldsymbol{A}$ es r.*
2. $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ *es una base ortonormal de* $R(\boldsymbol{A})$.
3. $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n, \ldots, u_m\}$ *es una base ortonormal de* $N(\boldsymbol{A}^T)$.
4. $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *es una base ortonormal de* $R(\boldsymbol{A}^T)$.
5. *Si* $r < n$, $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$ *es una base ortonormal de* $N(\boldsymbol{A})$.

Demostración. **1.** El rango de $\boldsymbol{A}$ coincide con el rango de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, y este depende del número de autovalores no nulos.

2. Como $\boldsymbol{A}v_i$, con $i = 1, \ldots, r$ son linealmente independientes (ortogonales), y como $u_i = (1/\lambda_i)Av_i$, $i = 1, \ldots, r$, entonces $\{u_1, \ldots, u_r\}$ forman una base ortonormal del rango(A).

3. Como $\{u_1, \ldots, u_r, \ldots, u_m\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$, luego por 2, y considerando que $\{u_{r+1}, \ldots, u_m\}$ es una base del espacio complementario a $R(\boldsymbol{A})$, se obtiene que ese conjunto es una base ortonormal del subespacio $N(\boldsymbol{A}^T)$ o del $R(\boldsymbol{A})^{\perp}$.

4. Esta propiedad se desprende de considerar (v) y que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un conjunto ortonormal complementario del de (v), por lo que es una base de $R(\boldsymbol{A}^T)$.

5. Si $r < n$, como $\boldsymbol{A}v_{r+1} = \boldsymbol{A}v_{r+2} = \ldots \boldsymbol{A}v_n = 0$, se tiene que $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal de vectores contenido en el anulador de $\boldsymbol{A}$, de dimensión $n - r$, por lo que es una base ortonormal de $N(\boldsymbol{A})$.

■

1.7.1. Resolución de problemas

Ejemplo 1.36

Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Puedes verificar que los vectores propios $\gamma = \lambda^2$ de $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ satisfacen la ecuación $\gamma^2 - 22\gamma + 120 = (\gamma - 12)(\gamma - 10)$, y consecuentemente, los valores propios son $\gamma_1 = \lambda_1^2 = 12$ y $\gamma_2 = \lambda_2^2 = 10$. Los correspondientes vectores propios son $\mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, respectivamente. Además,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces $\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \gamma\mathbf{I}\right| = -\gamma^3 - 22\gamma^2 - 120\gamma = -\gamma(\gamma - 12)(\gamma - 10)$, y los valores propios son $\gamma_1 = \lambda_1^2 = 12, \gamma_2 = \lambda_2^2 = 10$, y $\gamma_3 = \lambda_3^2 = 0$. Los valores propios no nulos son los mismos que los de $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Un cálculo computacional proporciona los vectores propios $\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{v}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$. Los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ pueden ser verificados mediante el siguiente cálculo:

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 12 \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1^2 \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2^2 \mathbf{v}_2$$

Tomando $\lambda_1 = \sqrt{12}$ y $\lambda_2 = \sqrt{10}$, encontramos que la descomposición en valores singulares de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + \sqrt{10} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

La igualdad puede ser verificada realizando las operaciones del lado derecho. La descomposición en valores singulares está estrechamente relacionada con un resultado sobre la aproximación de una matriz rectangular por una matriz de menor dimensión. Si una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $m \times k$ es aproximada por $\mathbf{B}$, teniendo la misma dimensión pero menor rango, la suma de los cuadrados de las diferencias es

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(a_{ij} - b_{ij})^2 = \operatorname{tr}\left[(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^\top\right]$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de tamaño $m \times k$ de números reales con $m \geq k$ y descomposición en valores singulares $\mathbf{U\Lambda V}^\top$. Sea $s < k = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$. Entonces

$$\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{i} \lambda_i \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_i^\top$$

es la aproximación de mínimos cuadrados de rango-s para $\mathbf{A}$. Minimiza

$$\operatorname{tr}\left[(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^\top\right]$$

sobre todas las matrices $\mathbf{B}$ de tamaño $m \times k$ con rango no mayor que s. El valor mínimo, o error de aproximación, es $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2$.

Para establecer este resultado, usamos $\mathbf{UU}^\top = \mathbf{I}_{m,}$ y $\mathbf{VV}^\top = \mathbf{I}_k$ para escribir la suma de los cuadrados como

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left[(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})^\top\right] &= \operatorname{tr}\left[\mathbf{UU}^\top(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{VV}^\top(\mathbf{A} - \mathbf{B})^\top\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[\mathbf{U}^\top(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{VV}^\top(\mathbf{A} - \mathbf{B})^\top\mathbf{U}\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[(\mathbf{A} - \mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{C})^\top\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{ij} - c_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - c_{ii})^2 + \sum_{i=i} c_{ij}^2 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{U}^\top\mathbf{B}\mathbf{V}$. Claramente, el mínimo ocurre cuando $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $c_{ii} = \lambda_i$ para los s valores singulares más grandes. Los otros $c_{ii} = 0$. Es decir, $\mathbf{UBV} = \mathbf{\Lambda}_s$ o $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$.

Ejercicio 1.41

Encontrar la descomposicion en valores singulares de las Matrices:

1. Para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. Para la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. Para la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
4. Para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1.42

Si $\boldsymbol{A}$ es no singular, verificar que si la descomposicion en valores singulares es $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Lambda V}^T$, entonces $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{V\Lambda}^{-1}\boldsymbol{U}^T$.

Ejercicio 1.43

Demuestre que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^T$ tienen los mismos valores singulares.

Ejercicio 1.44

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica. Demuestre que en este caso los valores singulares coinciden con los valores absolutos de los autovalores de $\boldsymbol{A}$. Si $\boldsymbol{A}$ es definida positiva entonces coinciden con los autovalores de la matriz.

1.7.2. Práctica con r

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Solucion del ejemplo 1.36

# Definir la matriz A
A <- matrix(c(3, 1, 1, -1, 3, 1), nrow = 2, byrow = TRUE)

# Realizar la descomposición en valores singulares (SVD) de A
svd_A <- svd(A)

# Mostrar los resultados
print("Matriz U:")
print(svd_A$u)
print("Matriz Sigma:")
print(diag(svd_A$d))
print("Matriz V:")
print(svd_A$v)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir la matriz B
B <- matrix(c(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5), nrow = 3, byrow = TRUE)

# Realizar la descomposición en valores singulares (SVD) de B
svd_B <- svd(B)
```

```
# Mostrar los resultados
print("Matriz U:")
print(svd_B$u)
print("Matriz Lambda:")
print(diag(svd_B$d))
print("Matriz V:")
print(svd_B$v)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# El siguiente código  realiza la descomposición en valores singulares
(SVD) de la matriz $\boldsymbol{X}$ y comparar los resultados con la
descomposición espectral de $X^{\top}X$

# Definir la matriz X
X <- matrix(c(5, -1, -2, 4, 4, -1, -2, 5, -3,-7, -8, 6),
            byrow = TRUE, nrow = 4, ncol = 3,
            dimnames = list(c("P1", "P2", "P3", "P4"), c("V1", "V2", "V3")))

# Paso 1: Calcular X^T * X
S <- t(X) %*% X

# Paso 2: Calcular los autovalores y autovectores de X^T * X
eigen_S <- eigen(S)

# Paso 3: Calcular la descomposición en valores singulares (SVD) de X
svd_X <- svd(X)



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.8. Descomposición QR

Teorema 1.7

Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base del espacio E. Entonces,

1. *Si los vectores son ortogonales entre sí y $\mathbf{v} \in E$, se tiene*

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle}{\|\mathbf{u}_k\|^2} \mathbf{u}_k \tag{1.2}$$

2. *Si esta base es ortonormal,*

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k \tag{1.3}$$

para todo $\mathbf{v} \in E$.

Para obtener la factorización QR se puede hacer uso de:

- Las transformaciones de Householder,
- Las rotaciones de Givens,

✿ El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Supongamos que A es una matriz $n \times m$ cuyas columnas son vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ la base ortonormal que se obtiene por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ del espacio columna de A. Por la ecuación del teorema, se tiene, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$\mathbf{v}_j = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \ldots + \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_m \rangle \mathbf{u}_m.$$

Sea Q la matriz que tiene como columnas a los vectores $\mathbf{u}_j$; (ver el siguiente ejemplo):

Ejemplo 1.37

Supongamos que $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in M_{m\times n}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ciertamente:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\mathbf{c}.$$

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_m \rangle \end{pmatrix}$$

Entonces si $\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_m \rangle \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_1} \cdots \boldsymbol{v_m}) \\ &= (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}_2 \cdots \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}_m) \end{aligned}$$

Corolario 1.8.1. *Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores linealmente independientes del espacio vectorial E, y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ los vectores ortonormales que se obtienen de los vectores $\mathbf{v}_i$ por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Entonces, $\mathbf{u}_{k+1}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, para cada $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Esto es:*

$$\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \quad \textit{si } i > j$$

Además,

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \rangle \neq 0 \quad \textit{para todo } i$$

Así, si R es la matriz que tiene como columnas a los vectores $\mathbf{c}_j$, por la ecuación $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_p\right)$.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_m \end{pmatrix} = QR.$$

Ahora bien, por la ecuación del corolario 1.8.1, $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i \rangle = 0$ para todo $i > j$; luego, las componentes de la matriz $R = [\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i \rangle]$ son nulas para $j < i$; es decir, todas las componentes por debajo de la diagonal. Así, la matriz $R = [\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i \rangle]$ es triangular superior e invertible, pues, por la ecuación, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \rangle \neq 0$ para todo i. La matriz A se puede factorizar entonces como el producto de una matriz cuyas columnas son vectores ortonormales y una matriz triangular superior no singular. Hacemos patente esta conclusión en el siguiente teorema.

Teorema 1.8

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$; A la matriz $n \times m$ cuyas columnas son estos vectores y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ la base ortonormal que se obtiene del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ del espacio columna de A. Entonces A se puede factorizar como el producto de una matriz Q y una matriz triangular superior invertible R. Específicamente,

$$A = QR,$$

donde el primer factor es la matriz Q cuyas columnas son los vectores $\mathbf{u}_i$ y el segundo factor es la matriz triangular superior no singular $R = [\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i \rangle]$; esto es,

$$R = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_m \rangle \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.38

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Mostrar que las columnas de A son linealmente independientes.
2. Encontrar una base ortonormal para el espacio columna de la matriz A.
3. Factorizar A como el producto de una matriz Q cuyas columnas sean vectores ortonormales y una matriz R triangular superior.

Solución

1. Llevemos A a la forma escalonada mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que toda columna tiene pivote, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ solo tiene la solución trivial y, por tanto, los vectores son linealmente independientes.

2. Dado que las columnas forman una base (ya que son vectores linealmente independientes) del espacio columna, podemos aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener

una base ortonormal:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\mathbf{w}_2 = (1,1,1,0) - ((1,1,1,0)\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = (0,1,0,0) \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = (0,1,0,0),$$

$$\mathbf{w}_3 = (1,-1,0,1) - ((1,-1,0,1)\cdot\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - ((1,-1,0,1)\cdot\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2$$

$$= (1,-1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) - (-1)(0,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right) \therefore$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_3\|}\mathbf{w}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

3. Por el teorema 1.8,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

y si $\mathbf{v}_i$ son los vectores columna de A,

$$R = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1\rangle \\ 0 & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2\rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_3\rangle \end{pmatrix}.$$

Como

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1\rangle = (1,0,1,0)\cdot\mathbf{u}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\rangle = (1,1,1,0)\cdot\mathbf{u}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1\rangle = (1,-1,0,1)\cdot\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2\rangle = (1,1,1,0)\cdot(0,1,0,0) = 1,$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2\rangle = (1,-1,0,1)\cdot(0,1,0,0) = -1,$$

y

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_3\rangle = (1,-1,0,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3}{\sqrt{6}},$$

entonces,

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

El lector puede verificar que efectivamente

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$$

realizando el producto.

1.8.1. Resolución de problemas

Ejercicio 1.45

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz real $n \times n$. Demuestre que todos los valores característicos de $\boldsymbol{A}$ son reales si y solo si existen $\boldsymbol{Q}$ una matriz ortogonal y $\boldsymbol{R}$ una matriz triangular superior tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}^T$.

Ejercicio 1.46

sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$.
2. Las columnas de $\boldsymbol{Q}$ son ortonormales.
3. $\boldsymbol{Q}$ es del mismo tamaño que $\boldsymbol{A}$.
4. $\boldsymbol{R}$ es triangular superior invertible.

La forma de hacerlo es aplicar el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de $\boldsymbol{A}$.

1.8.2. Práctica con r

qr(A): Descomposición QR de A

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Definir la matriz A
A <- matrix(c(1, 1, 1, 0, 1, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 1), nrow = 4, byrow = TRUE)

# Calcular la descomposición QR
qr_A <- qr(A)

# Matriz Q
Q <- qr.Q(qr_A);Q

# Matriz R
R <- qr.R(qr_A)

# Imprimir resultados
print("Matriz Q:")
print(Q)
cat("\n")

print("Matriz R:")
print(R)

l<-Q%*%R
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Función para resolver un sistema de ecuaciones lineales Ax = b utilizando la
solve_qr <- function(A, b) {
  # Calcula la descomposición QR de A
  qr_A <- qr(A)
```

```
  Q <- qr.Q(qr_A)
  R <- qr.R(qr_A)

  # Resuelve el sistema Rx = Q^Tb utilizando sustitución hacia atrás
  Qt_b <- t(Q) %*% b
  x <- backsolve(R, Qt_b)

  return(x)
}

# Ejemplo de uso
A <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10), nrow = 3, byrow = TRUE)
b <- c(10, 20, 30)

x <- solve_qr(A, b)
print("Solución del sistema de ecuaciones:")
print(x)

round(x)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.9. Solución de sistemas de ecuaciones

Definición 1.28

Sean K un campo y n un entero positivo. Una ecuación lineal en el campo K con n incógnitas (o n indeterminadas, o variables) es una igualdad de la forma:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c$$

donde tanto c como $a_1, \ldots, a_n$ son elementos fijos en K.

Un sistema de ecuaciones lineales sobre el campo K es un conjunto de m ecuaciones lineales en K (con m un entero positivo). Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe usualmente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2+ & \cdots+ & a_{1,n}x_n = & c_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2+ & \cdots+ & a_{2,n}x_n = & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2+ & \cdots+ & a_{m,n}x_n = & c_m \end{array}$$

A los $a_{i,j}$ se les llama los coeficientes del sistema, a los c_i se les llama los términos constantes del sistema, y a los x_i se les llama las incógnitas (o indeterminadas) del sistema. Una solución del sistema anterior es una sucesión $s_1, \ldots, s_n$ de elementos en K que satisface todas las ecuaciones del sistema, es decir, que cumple

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}s_1 & +a_{1,2}s_2+ & \cdots+ & a_{1,n}s_n = & c_1 \\ a_{2,1}s_1 & +a_{2,2}s_2+ & \cdots+ & a_{2,n}s_n = & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1}s_1 & +a_{m,2}s_2+ & \cdots+ & a_{m,n}s_n = & c_m \end{array}$$

El conjunto solución del sistema es el conjunto de todas las soluciones del sistema. El sistema se llama consistente si tiene al menos una solución, y se llama inconsistente si no tiene ninguna solución. El sistema se llama homogéneo si $c_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Ejemplo 1.39

El sistema sobre el campo $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

se puede resolver por sustitución, es decir, despejando a x_2 de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda. Así llegamos a que $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ es la única solución del sistema, que por lo tanto es consistente. El conjunto solución es $\{(3,1)\}$.

Ejemplo 1.40

El conjunto solución del sistema (sobre el campo $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

es el conjunto $\{(7-3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Nótese que este conjunto es infinito, pues para cada valor del parámetro t hay una solución distinta.

Ejemplo 1.41

El sistema sobre el campo $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

es inconsistente, puesto que el valor de $x_1 + x_2$ no puede ser igual a 4 y a 2 al mismo tiempo.

Ejercicio 1.47

Calcule el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales usando números reales (es decir, el campo es $K = \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 1.48

Sea $a_1, \ldots, a_n$ una sucesión arbitraria de números reales. Encuentre un sistema sobre $\mathbb{R}$ de n ecuaciones con n incógnitas cuyo conjunto solución sea el conjunto $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Ejercicio 1.49

Encuentre un sistema sobre $\mathbb{R}$ cuyo conjunto solución sea el conjunto $\{(5 - 2t_1, 4 + t_1 + t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$. Note que este conjunto tiene dos parámetros.

Ejercicio 1.50

Demuestre que todo sistema homogéneo es consistente.

Ejercicio 1.51

Demuestre que todo sistema con una única ecuación y al menos una variable es consistente.

1.9.1. Práctica con r

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\begin{aligned}
```

```
2x + 3y + 3z &= 20 \\
x + 4y + 3z &= 15 \\
5x + 3y + 4z &= 30
\end{aligned}

library(MASS)
a <- rbind(c(2, 3, 3),
           c(1, 4, 3),
           c(5, 3, 4))
b <- c(20, 15, 30)
solve(a, b)


fractions(solve(a, b))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\textit{solve(A,b)}: Solución del sistema de ecuaciones $Ax=b$.
Dada la matriz
$$
A=\left(
\begin{matrix}
2 & 3 & 5\\
0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1
\end{matrix}
\right)
$$

 A<-matrix(c(2,0,1,3,0,0,5,1,1),3,3) # capturar la matriz por columnas

      t(A) # traspuesta de A

      diag(A) # diagonal de A

      solve(A) # inversa de A

      eigen(A) # eigenvalores y eigenvectores
Resolver el sistema:
$$ x+y=7 $$ $$ x-2y=1 $$
A<-matrix(c(1,1,1,-2),2,2)
      b<-c(7,1)
      solve(A,b)
luego, se tiene que $x=5$ y $y=2$


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Encontrar la solucion del siguiente sistema de ecuaciones.
\begin{align}
4x + 6y + 9z &= 4 \\
9x + 9y + 0z &= 9 \\
7x + 3y + 6z &= 7
\end{align}
```

```
x_var<- c(4,9,7) # aqui van las columans de los valores de x
y_var<- c(6,9,3) # aqui van las columans de los valores de y
z_var<- c(9,0,6) # aqui van las columans de los valores de y

matriz<-matrix(c(x_var,y_var,z_var),ncol=3,nrow=3)
matriz

indep<-matrix(c(4,16,20),ncol=1,nrow=3)
indep

soluicion<- solve(matriz,indep)
colnames(soluicion)<- c("valores")
rownames(soluicion)<- c("x","y","z")
soluicion
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Bibliografía