



19 de noviembre de 2025



Fundamentos de Probabilidad



Fundamentos de Probabilidad

Contenido

- 1. Introducción**
- 2. Conjuntos**
- 3. Espacio Muestral y Espacio de Eventos**
- 4. Probabilidad de un Evento**
- 5. Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad**
- 6. La Probabilidad en la Ciencia de Datos**
- 7. Práctica**



1 Introducción

Probabilidad



¿Qué tan posible es que ocurra un evento?



UAGro
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE GUERRERO

CyTI
Ciencias y Tecnologías
de la Información

MCDySI
— UAGro —

Grado de certeza que se tiene de que algo ocurra.

Es la **medida de la posibilidad** de que un evento tenga lugar.

Se expresa como un **valor entre 0 y 1**

0 (imposibilidad absoluta de ocurrencia)

1 (posibilidad total de ocurrencia)

Se calcula como la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.



Probabilidad Conceptos Básicos



Experimento

Proceso o acción que se realiza con un resultado incierto.

Conjunto

Colección de elementos que comparten una propiedad en común.

Espacio Muestral

Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico.

Se representa con el símbolo Ω

Evento

Subconjunto de un espacio muestral.



Conjuntos

Conjunto

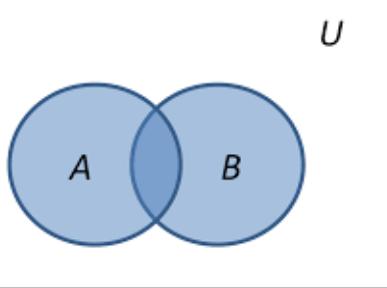
Colección de elementos u observaciones bien definidos que comparten una característica común.

Los elementos de un conjunto pueden ser números, pares ordenados, palabras, o cualquier objeto de interés

Notación – Conjunto A

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Los conjuntos **permiten describir los resultados posibles de un experimento aleatorio.**



Tipos de Conjuntos

Conjunto Finito

Se puede determinar su cardinalidad.
Número contable de elementos. $A = \{\text{Cara, Cruz}\}$

Conjunto Infinito

No se puede determinar su cardinalidad.
Número ilimitado de elementos.
 $Z = \{\text{Números enteros positivos}\}$

Conjunto Vacío

No contiene ningún elemento. $\emptyset = \{\}$

Conjunto Universal

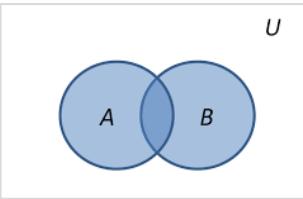
Contiene todos los elementos de referencia.
Es el espacio muestral $U = \{\Omega\}$

Conjunto Unitario

Contiene solo un elemento. $A = \{3\}$



Conjuntos



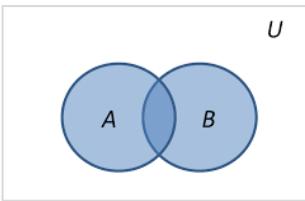
Teoría de Conjuntos

Estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos

Unión de Conjuntos $A \cup B$	La unión de dos conjuntos A y B , es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B , o a ambos.	
Intersección de Conjuntos $A \cap B$	La intersección de dos conjuntos A y B , es el conjunto que contiene todos los elementos que son comunes a A y a B .	
Complemento de un Conjunto A^c o A'	El complemento de un conjunto A respecto de Ω es el subconjunto de todos los elementos de Ω que no están en A .	
Conjuntos Disjuntos $A \cap B = \emptyset$	Dos conjuntos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \emptyset$; es decir, si A y B no tienen elementos en común.	
Diferencia de Conjuntos $A - B$	Es el conjunto que consiste en todos los elementos de A que no están contenidos en B .	



Conjuntos



Álgebra de Conjuntos

$A \subset B$	Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$
$A \cap B$	Si $A, B \in \Omega$, entonces $A \cap B = B \cap A$
Si A y B son dos conjuntos de Ω, entonces	$A \cup A^c = \Omega$ $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$
$A - B$	$A - B = A \cap B^c$
Ley conmutativa de las uniones	$A \cup B = B \cup A$
Ley asociativa de las uniones	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ = A \cup B \cup C$
Ley conmutativa de las intersecciones	$A \cap B = B \cap A$
Ley asociativa de las intersecciones	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ = A \cap B \cap C$

Primera Ley distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Segunda Ley distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Primera Ley de Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Segunda Ley de Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Para cualquier conjunto A y B	$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

3 Espacio Muestral

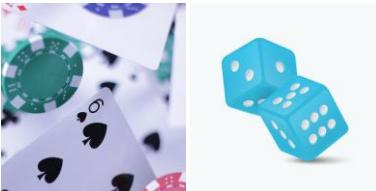


Experimento Aleatorio

Proceso o procedimiento cuyos resultados son inciertos y no predecibles, aunque todos los posibles resultados se conocen.

- Puede repetirse bajo las mismas condiciones
- Tiene varios resultados posibles
- No se puede predecir con certeza que ocurrirá antes de realizarlo.

Se sabe qué podría pasar, pero no se sabe qué pasará exactamente



Espacio Muestral Ω

Conjunto que contiene todos los resultados posibles de un experimento.

Cada uno de los resultados, se llama **elemento o punto muestral**.

Cardinalidad: es el número de elementos muestrales. Tamaño del espacio muestral.

Ω - Lanzamiento de un dado



Evento

Subconjunto del espacio muestral.

Este subconjunto representa la totalidad de los elementos para los que el evento es cierto.

Un evento **es un conjunto de resultados** que cumplen cierta condición.

Obtener múltiplos de 2



3 Espacio de Eventos



Espacio de Eventos

Conjunto formado por **todos los eventos posibles de un experimento aleatorio.**

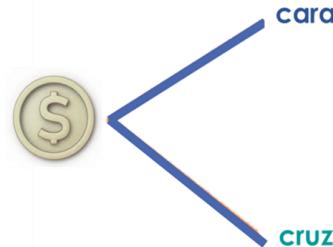
Incluye siempre a \emptyset y a Ω

Colección de todos los eventos

El **total de eventos de Ω** se determina con la potencia $P(\Omega) = 2^{(\text{Num elementos de } \Omega)}$

Resumen

Experimento:
Lanzamiento de una moneda



Resultados posibles	Cara, Cruz
Espacio Muestral Todos los resultados posibles	$\Omega = \{\text{cara, cruz}\}$
Evento Subconjunto de Ω	Ningún resultado ocurre: \emptyset Evento "sale cara" : {cara} Evento "sale cruz" : {cruz} Evento seguro "sale algo": {cara, cruz} = Ω
Total de eventos de Ω	$P(\Omega) = 2^{(\text{Num elementos de } \Omega)} = 2^{(2)} = 4$
Espacio de Eventos Todos los eventos posibles	$\{\emptyset, \{\text{cara}\}, \{\text{cruz}\}, \{\text{cara, cruz}\}\}$

4 Probabilidad de un Evento



Eventos aleatorios



Incertidumbre



Ocurre/No ocurre

La **probabilidad de un evento** es un número que nos dice **qué tan probable es** que ese evento ocurra cuando realizamos un experimento aleatorio.

La probabilidad oscila entre **0** y **1**

La probabilidad de un evento A es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en A. Por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad P(\Omega) = 1$$

Además, si A_1, A_2, A_3, \dots es una serie de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Probabilidad de un punto muestral en A.

Dado un espacio muestral: $\Omega = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ con "n" resultados posibles, con las mismas probabilidades de ocurrir

Si se asigna una **probabilidad ω** a cada punto muestral de Ω , entonces

$$n\omega = 1 \quad \text{o} \quad \omega = \frac{1}{n}$$



4 Probabilidad de un Evento

Cálculo de Probabilidades

Reglas aditivas de probabilidad

Sean A y B dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sean A, B y C tres eventos, entonces

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Propiedad del complemento

Si A y A^c son eventos complementarios, entonces

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Propiedad para un subconjunto

Sean A y B dos eventos tales que $A \subseteq B$ entonces

$$P(A) \leq P(B)$$

Probabilidad Condicional

La probabilidad de que ocurra un evento B dado que ocurrió un evento A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

Independencia de Eventos

Dos eventos son independiente, sí:

$$P(A|B) = P(A) \quad ó$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

La ocurrencia de un evento no influye en las probabilidades de ocurrencia del otro.



Ejercicio

Al realizar el lanzamiento de un dado, encontrar la probabilidad de obtener un número menor que 4, acorde a lo siguiente:

- a) Hacer un solo lanzamiento y no hay información adicional
- b) Al hacer el lanzamiento se obtuvo un número impar

Definir los Eventos

$$A = \{ \text{Número menor que } 4 \} = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{ \text{Número impar} \} = \{ 1, 3, 5 \}$$

Situación a)

Obtener un número menor que 4

$$P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2 = 0.5$$

Probabilidades de los Eventos

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$

$$P(B) = 3/6 = 1/2$$

Situación b)

Obtener un número menor que 4, dado que el lanzamiento resultó en un número impar

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = 0.66$$

5 Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad



Variable Aleatoria

Definición

Es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.

Función que **asigna un valor numérico a cada resultado del experimento aleatorio**.

Se denota por una mayúscula **X, Y, Z**

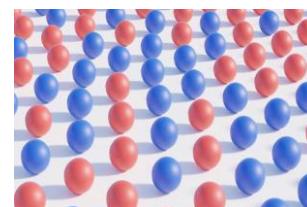
Las letras minúsculas x, y, z se emplean para cada uno de los valores que toma la variable aleatoria

Se tiene un contenedor con **4 bolas azules** y **3 bolas rojas** y se sacan 2 bolas sucesivamente y sin reemplazo.

Se define:

Variable Aleatoria X = número de bolas rojas seleccionadas

Posibles resultados x:



Espacio muestral	x
AA	0
AR	1
RA	1
RR	2



5 Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad

Variable Aleatoria

Tipos de VA

Variable Aleatoria Discreta

Toma **valores finitos o contables**.

- número de errores en una página
- número de llegadas por hora
- número de caras al lanzar una moneda

Función de densidad de probabilidad (fdp)

$$f(x) = P(X=x)$$

Función de distribución acumulada (FDA o CDF)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \text{ para } -\alpha < x < \alpha$$

Variable Aleatoria Continua

Toma un **número infinito de valores o no contables**.

- tiempo de servicio en una fila
- temperatura
- peso, altura

Función de densidad de probabilidad (fdp)

$$f(x) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Función de distribución acumulada (FDA o CDF)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{para } -\alpha < x < \alpha$$



5 Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad



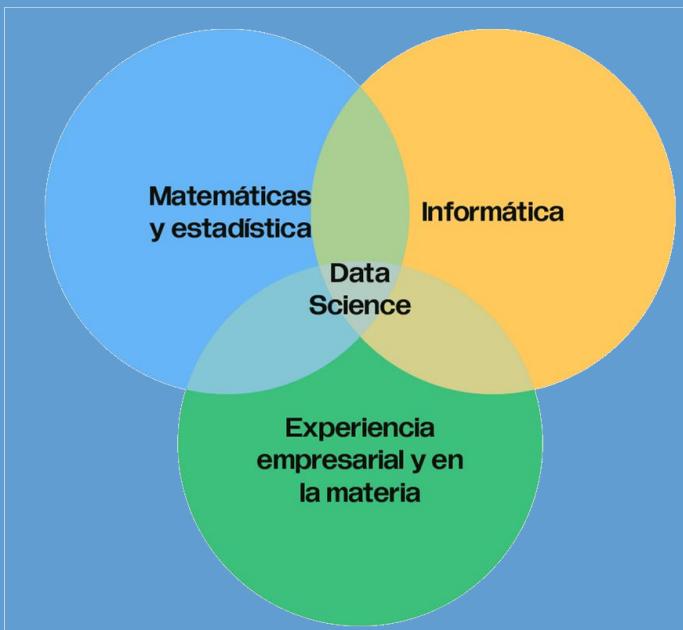
Distribución de Probabilidad

Indican como se asignan las probabilidades a los valores posibles de una **variable aleatoria**.

Variable	Distribución de Probabilidad	Aplicación
Discreta	Bernoulli	Experimento con solo dos resultados posibles: “éxito” (1) y “fracaso” (0)
	Binomial	Nº de éxitos en n ensayos. Es una generalización de Bernoulli a n experimentos repetidos.
	Poisson	Conteo de eventos raros. Ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas, o sucesos “raros”.
	Geométrica	Ensayos hasta el primer éxito. Intentos necesarios realizar hasta que ocurra algo por primera vez.
Continua	Exponencial	Tiempos entre eventos, hasta que ocurre el primer evento.
	Normal	Fenómenos que se agrupan en torno a un valor central (la media)
	Gamma	Tiempos entre eventos Medir variables continuas con distribuciones positivas y asimétricas

6

La Probabilidad en la Ciencia de Datos



Aprendizaje Automático

- Modelos de machine learning son probabilísticos

Regresión logística → estima probabilidades de clase
Naive Bayes → usa probabilidad condicional
Bosques aleatorios → predicciones probabilísticas
Modelos generativos → distribuciones de probabilidad



Ayuda a tomar decisiones basadas en datos

- Estimar la probabilidad de eventos futuros
- Identificar patrones y relaciones en los datos.
- Predicciones sobre tendencias o comportamientos futuros.



Modelar datos e incertidumbre.

- Aplicación de Distribuciones de Probabilidad: Normal, Binomial, Poisson, Gamma, etc



Inferencia Estadística

- Permite extraer conclusiones sobre una población a partir de una muestra.
- Cuantificar la incertidumbre



La Probabilidad en la Ciencia de Datos

Machine Learning

Modelo	Aplicación de la Probabilidad	Ejemplo
Regresión logística	Predice probabilidad de una clase	Probabilidad de compra
Naive Bayes	Usa probabilidad condicional Clasifica según la clase que tenga mayor probabilidad de generar los datos observados	Detección de spam
GMM Modelo de Mezcla de Gaussianas	Clustering Cada punto tiene una probabilidad de pertenecer a un grupo	Segmentación de clientes
Redes bayesianas	Relaciones causa–efecto con probabilidades condicionales	Diagnóstico médico
VAEs (Variational Autoencoder) / Diffusion	Generación basada en distribuciones probabilísticas	IA que genera imágenes



7 Práctica R Studio

