Calculo aplicado: Derivadas y gradiente

Derivadas.

Muchos fenomenos del mundo real incluyen cantidades que varian:

- La velocidad de un cohete
- El número de bacterias en un cultivo.
- La inflación en la economía
- La intensidad de la sacudida de un terremoto.

Uno de los conceptos centrales que trata el cálculo diferencial es la razón de cambio de una cantidad respecto a otra.

El estudio de las razones de cambio tiene relación con el concepto geométrico de recta tangente o una curva, otro concepto de velocidad o rapidez instantanea.

Definición: (Derivada)

La función f es derivable en un punto "a" si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de deriva de f en a. (Decimos también que f es derivable si "a" para todo punto x del dominio de f).

Lo cual se denota por cualquiera de los símbolos

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a) \quad \text{o} \quad Df(a)$$

Observación

De hecho, existen funciones para las cuales hay puntos donde no existe el límite, es decir, hay funciones que no son derivables en al menos un punto de su dominio.

También hay ejemplos de funciones que son derivables sólo en un punto de su dominio.

Ejemplos:

a) Encuentra el valor de la derivada de $f(x)$ en $x=2$ si $f(x)=x^2$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-(2)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}4+h=4$$

$$f'(2)=4.$$

b) Encontremos la derivada de $f(x)=x^2$ para todo $x\in \text{Dom } f$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

c) Encuentra la derivada para $x\in[0,\infty)$ de la función $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot 1=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) ¿Existe la derivada de $f(x) = |x|$ si $x=0$?

Sabemos que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Apliquemos

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

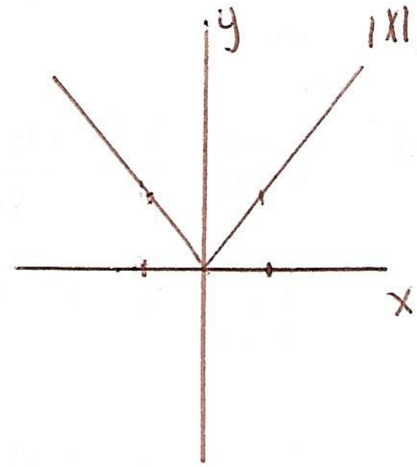
Como $h>0$ o $h<0$, tenemo dos casos.

i) $h>0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{h}{h} = 1$$

ii) $h<0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$



Por lo cual no existe la derivado.

Tiene un pico en $x=0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{(h)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$$

f no es derivable

e) Sea $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, veamos que no tiene derivada en $x=0$

Tenemos que

- Sen x en el intervalo $(0, \pi)$ es positivo

- Sen x en el intervalo $(-\pi, 0)$ se tiene que es negativo.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(0+h)| - |\operatorname{sen}(0)|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(h)| - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(h)|}{h}$$

- Si $\operatorname{sen}(h) > 0$ con $h \in (0, \pi)$

$|\operatorname{sen}(h)| = \operatorname{sen} h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

- $\operatorname{Sen}(h) < 0$ con $h \in (-\pi, 0)$

$|\operatorname{Sen}(h)| = -\operatorname{Sen} h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{Sen} h}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Sen} h}{h} = -1$$

Por lo que $f(x) = |\operatorname{Sen} x|$ no es derivable.

Observación

1. La derivada de una función f en un punto a es por definición una razón de cambio instantane y no una razón de cambio promedio en un intervalo.

2. La razón de cambio instantaneo se refiere a un punto, por está razón diremos que la derivada es un concepto puntual y lo derivabilidad es una propiedad puntual, pues se refiere a una propiedad de la función $f(x)$ en un punto a.

Ejemplos

a) Derivada de una función constante

Sea $f(x)=c$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

b) Función identidad

Sea la función $f(x)=x$ y x_0 un punto real fijo.
Entonces

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\underline{1}$$

c) Función lineal $f(x)=ax+b$

Sea $f(x)=ax+b$ con a, b constante
Sea x_0 un punto real fijo

Tenemos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=a$$

d) Sea $f(x)=x^2$ y x_0 cualquier número real fijo

e) Sea $f(x)=x^n$, donde n es natural y x_0 es cualquier número real.

Solución d)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Solución e)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (x_0+h)^n - x_0^n$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}h + n(n-1)x_0^{n-2}n^2 + \dots + h^n - x_0^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(nx_0^{n-1} + n(n-1)x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} n(x_0^{n-1} + n(n-1)x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) = nx_0^{n-1}$$

Definiciones alternas de derivadas

Nosotros vimos que la definición de la derivada en un punto $x = a$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si escribimos $x = a+h$ entonces $h = x - a$ y si $h \to 0$ tenemos $x - a \to 0$ ō $x \to a$. Tenemos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Esta definición es una manera equivalente de expresar de la derivada para encontrar rectas tangentes.

Definición:

Sea f una función definida en un conjunto D y si $a \in D$ tal que existe una vecindad abierta de a contenida en D si existe.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

diremos que f es derivable en a y este límite se llama la derivada de f en el punto a el cual denotaremos por cualquiera de los símbolos

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad Df(a).$$

Si existe el limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ podemos escribir como $F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$F(x) \cdot (x - a) = f(x) - f(a).$

Definición

Sea f una función definida en un conjunto D y $a \in D$ tal que existe una vecindad abierta de a contenida en D. Si existe una recta con ecuación de la forma $y = m(x - a) + f(a)$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [m(x - a) + f(a)]}{x - a} = 0$$

diremos que f es derivable en a y a la pendiente m se le llama la derivada de f en el punto a el cual denotaremos por cualquiera de los simbolos

$f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$ o $Df(a)$

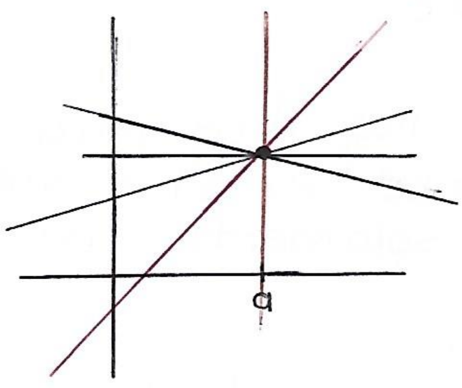
Esta definición anterior está relacionada con una interpretación geométrica de la derivada.
La derivada $f'(a)$ de una función f en el punto a es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

La definición nos dice en qué se distingue la recta tangente del resto de las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$. Nos dice cual es la propiedad que hace que la recta sea tangente a la curva.
Consideremos todas las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$.
Es una familia de rectas que se describe con la familia de ecuaciones

$$y = m(x-a) + f(a) \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{R}$$



Para cualquier ecuación

$$y = m(x-a) + f(a)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - (m(x-a) + f(a))) = 0$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - m(x-a) - f(a)) = 0$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a) - m(x-a)) = 0$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) - \lim_{x \to a} (m(x-a)) = 0$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} m(x-a)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)-f(a)) = m \lim_{x\to a} (x\to a)$$

$$\frac{\lim_{x\to a} (f(x)-f(a))}{\lim_{x\to a} x-a} = m$$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))}{x-a} = m$$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))}{x-a} = f'(a)$$

$$\therefore f'(a) = m$$

Sin embargo, la tangente se caracteriza porque su ecuación no solamente cumple esta propiedad sino que cumple una propiedad más fuerte. No solo debe tener a cero la diferencia $f(x)-(m(x-a)+f(a))$, sino tambien debe tener a cero esta diferencia a una derivada entre $x-a$.

$$\frac{f(x)-(m(x-a)+f(a))}{x-a} \to 0$$

Entonces la definición anterior nos dice para que f sea derivable en a, debe existir una recta con esa propiedad, que solamente tiene la recta tangente

Derivabilidad significa la existencia de la recta tangente. en este sentido.

Proposición

Si la función $f(x)$ es derivable en $x=a$ entonces f es continua en $x=a$.

Demostración:
Si f es derivable en $x=a$ entonces por la definición

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Veamos que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

equivalentemente

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a)) \cdot 1$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(f(a+h) - f(a) \cdot \frac{h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) \cdot \lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Con lo cual $f(x)$ es continua en $x=a$.

Observación: El recíproco de la proposición no es cierto. Es decir una función $f(x)$ puede ser continua en $x=a$, pero no ser derivable en $x=a$.

Ejemplo son los del valor absoluto.

Propiedades de las derivadas

Sea f, g y h funciones diferenciales en a y c como constante, entonces.

a) $(c)' = 0$

b) $f'(cf) = cf'$

c) $(f+g)' = f' + g'$

d) $(f-g)' = f' - g'$

e) $(f \circ g)' = f'g + fg'$

f) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2(a)}$ si $g(a) \neq 0$

Ejercicio:

Sea $f(x)$ derivable y $F_2(x) = (f(x))^2$. Cuanto vale $(F_2(x))'$ o mejor dicho $((f(x))^2)'$

- Cuanto vale si $F_3 = (f(x))^3$, $(F_3)'$ o mejor dicho $([f(x)]^3)'$

Derivación de funciones trigonometricas

¿ Cuahto vale la derivada $f(x) = \tan x$?

$$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot (\cos x) - (\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x$$

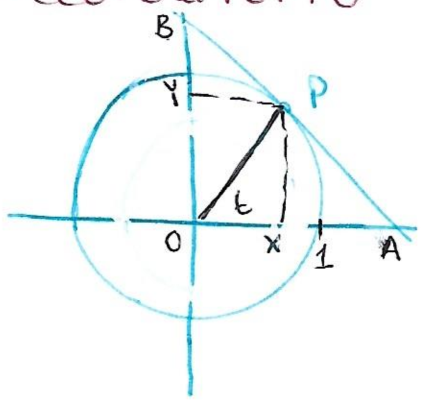
¿ Cuanto vale la derivada $f(x) = \cot x$

$$f'(x) = (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \operatorname{sen} x - (\cos x) \cdot (\operatorname{sen} x)'}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\csc^2 x.$$

Recordatorio



$\text{sen}(t) = XP \in \mathbb{R}$

$\cos(t) = YP \in \mathbb{R}$

$\tan(t) = PA \in \mathbb{R}$

$\cot(t) = BP \in \mathbb{R}$

$\sec(t) = OA \in \mathbb{R}$

$\csc(t) = OB \in \mathbb{R}$

$\triangle$' semejantes

$\tan(t) = \text{Sen}(t) / \cos(t)$

$\cot(t) = \cos(t) / \text{sen}(t)$

$\sec(t) = 1/\cos(t)$

$\text{scc}(t) = 1/\text{sen}(t)$

$\text{sen}(t)^2 + \cos(t)^2 = \underline{1}$

$\text{Sen}(A+B) = \text{Sen}\,A \cos B + \text{sen}\,B \cos A$

$\text{Cos}(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \text{Sen}\,A\,\text{Sen}\,B$

¿Cuanto vale la derivada de $f(x) = \sec x$?

$$(f(x))' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)'\cos x - 1\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 - 1(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$= \tan x \cdot \sec x$$

¿Cuanto vale la derivada de $f(x) = \csc x$?

$$(f(x))' = (\csc(x))' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(1)'\operatorname{sen} x - 1\cdot \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{0 - \cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\cot x \cdot \csc x$$

Proposición: Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones que tienen derivadas, tales que f está definida en todos los números que son valores de g. Entonces la función compuesta $f \circ g$ tiene una derivada, dada por:

$$(f\circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Si ponemos $u = g(x)$, tenemos

$$f(g(x)) = f(u),$$

Entonces podemos expresar la regla de la cadena como:

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

Demostración

Vamos a considerar la definición de derivada de la función compuesta (composición)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

Hagamos el cambio $u=g(x)$ y sea $k=g(x+h)-g(x)$

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} (g(x+h)-g(x)) = \lim_{h\to 0} (g(x+h)-0)$$

$$k = g(x+h)-u$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u+k)-f(u)}{h}$$

Supongamos que k es distinto de 0 para todos los valores pequeños de h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u+k)-f(u)}{h} \cdot \frac{k}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u+k)-f(u)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u+k)-f(u)}{k} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Vamos a distinguir dos tipos de números de h

- Primer tipo $g(x+h)-g(x) \neq 0$
- Segundo tipo $g(x+h)-g(x) = 0$

Sea H_1 con h t.q $g(x+h)-g(x) \neq 0$
H_2 con h t.q $g(x+h)-g(x) = 0$
para valores arbitrariamente pequeño de h

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0$$ para dichos valores esto

es para h en H_2 y en consecuencia

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0$$

dado que h es del segundo tipo, de modo que $g(x+h)-g(x)=0$, $g(x+h)=g(x)$, por lo tanto $f(g(x+h)) - f(g(x)) = 0$

Por otro lado, si tomamos el limite con h del primer tipo, entonces se aplica el argumento anterior, podemos dividir y multiplicar por K y hallamos

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_1}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_1}} \frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_1}} \frac{f(u+k)-f(u)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_1}} \frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k} \quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pero $g'(x)=0$, por ello el límite es $f'(g(x))\cdot g'(x) =$ cuando $h\to 0$ ya sea h del primer tipo o del segundo.

Ejercicios

1. $f(x) = \ln(4x^2 \cdot \cos(x))$

2. $f(x) = (5x^2 - 6x)^3$

3. $f(x) = -3(5x^5 + 9x^3)^4$

4. $f(x) = e^{2x^3}$

5. $f(x) = \text{sen}((9x^5 + \cos(x))^2)$

Derivadas de funciones inversas.

Antes de empezar con el teorema de derivadas de funciones inversas, recordemos algunos hechos sobre este importante concepto. Para que una función con dominio en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tenga inversa, es necesario que sea inyectiva (uno a uno), lo cual significa que dos puntos distintos x_1 y x_2 de su dominio no pueden tener la misma imagen es decir, si $x_1 \neq x_2$ entonces se debe tener $f(x_1) \neq f(x_2)$. Este enunciado equivale al siguiente:

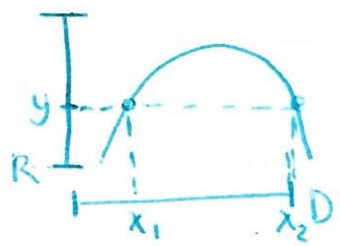
Si x_1 y x_2 son puntos del dominio tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$. En este caso, la función inversa está definida en la imagen (rango) de la función que es el conjunto $B = \{f(x) : x \in A\}$

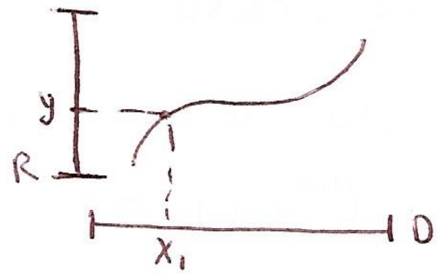
Recordatorio

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad$ $D, R \subset \mathbb{R}$ (usualmente intervalo)

$x \mapsto f(x) = y$

$y = \underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{Diferentes}}$ $\qquad\qquad$ $y = f(x_1)$ ← es unico.





f no es inyectiva

Si f es inyectiva entonces

$\forall\, y \in R,\ \exists!\, x \in D,\ f(x) = y$

Si f es inyectiva, definimos

$g : R \mapsto D$

$y \longmapsto g(y) = x$, t.q $f(x) = y$

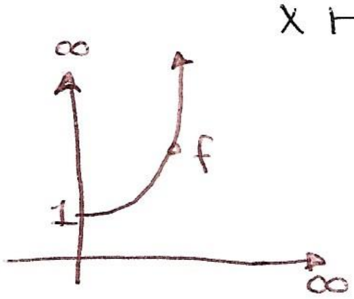
g se llama función inversa de f y se denota f^{-1}.

$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$

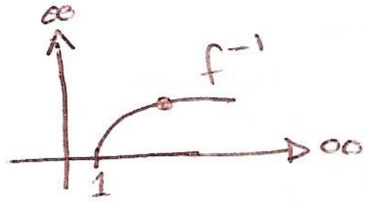
Ejemplo:

Sea $f : [0, \infty) \mapsto [1, \infty)$

$x \longmapsto f(x) = x^2 + 1 = y$

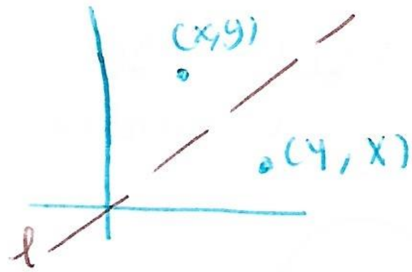


¿Como obtenemos f^{-1}?



$x^2+1=y \Rightarrow x=\sqrt{y-1}$

Si $y=f(x)$, los puntos



$(x, f(x))$, $(y, f^{-1}(y))$ son reflejados respecto ℓ.

Teorema: (Regla de la derivada para la inversa)

$f: D \to R$, $f'(x) \neq 0$ y existe

$\Rightarrow f^{-1}$ es diferenciable

y se tiene:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \begin{array}{l} x=f^{-1}(y) \\ y=f(x) \end{array}$$

Ejemplo:

$$D[\sqrt{y-1}] = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{t-1} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}$$

Teorema de la derivada de la función inversa.

Sea f una función definida en el intervalo (a,b) estrictamente creciente, derivable en un punto $c \in (a,b)$ y sea $f^{-1}: \mapsto \mathbb{R}$ la inversa de f. Supongamos $f(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$ y además

$$(f^{-1})' f(c) = \frac{1}{f'(X)}$$

Demostración.

Por demostrar $\lim_{y \to f(c)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))}{y - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}$

Es suficiente ver que para toda sucesión $y_1, y_2, y_3 \ldots$ de puntos de J, distintos de $f(c)$ que tiende a $f(c)$ se tiene

$$\lim_{y_n \to f(c)} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(c))}{y_n - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

Sea $y_1, y_2, y_3, \ldots$ una sucesión de puntos J diferentes de $f(c)$ que converge a $f(c)$.

Sea la sucesión

$$X_1 = f^{-1}(y_1),\ X_2 = f^{-1}(y_2),\ X_3 = f^{-1}(y_3), \ldots$$

Los puntos de esta sucesión están en el intervalo (a,b) y son diferentes de c como f es estrictamente creciente en el intervalo (a,b) f^{-1} es continua

Por lo tanto, si $\lim_{n \to \infty} y_n = f(c)$ se tiene

$$\lim_{n \to \infty} X_n = \lim_{n \to \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(f(c)) = c$$

Por otra parte, de la definición de $X_n = f^{-1}(y_n)$ se tiene $f(X_n) = y_n$, de donde tenemos

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(c))}{y_n - f(c)} = \frac{X_n - c}{f(X_n) - f(c)} = \frac{1}{\frac{f(X_n) - f(c)}{X_n - c}}$$

Por hipotesis

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

Por consiguiente, podemos hablar del siguiente limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{f(X_n) - f(c)}{X_n - c}} = \frac{1}{f'(c)}$$

Es decir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(c))}{y_n - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}$$

Reformulación del teorema de la derivación de la función inversa.

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y sea $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$, la inversa de f y $y_0 \in J$
Supongamos f derivable en $f^{-1}(y_0)$ y $f'(f^{-1}(y_0)) \neq$
Entonces f^{-1} es derivable en y_0 y además

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Derivadas de funciones inversas trigonométricas

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son sorprendentemente sencillas, y no encierra en absoluto funciones trigonométricas

Proposición

Para $-1 < x < 1$ entonces

a) $(\text{arc sen}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b.) $(\text{arc cos}(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ $\text{arctan}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Demostración

Usando el teorema de la derivada de la función inversa

Tenemos que

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$
$$(f \circ f^{-1}(x))' = (x)'$$
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$
$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

a) $$(\text{arc sen}(x))' = \frac{1}{\text{sen}'(\text{arc}(\text{sen}(x)))}$$

$$= \frac{1}{\cos(\text{arc sen}(x))}$$

tenemos $\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{1} = x$, $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$$(\operatorname{sen}(\arcsin(x)))^2 + (\cos(\arcsin x))^2 = 1$$

$$x^2 + \cos(\arcsin x)^2 = 1$$
$$\cos(\arcsin x)^2 = 1 - x^2$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) $$(\arccos(x))' = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arc}(\cos x))}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}(\cos x))^2 + \cos(\operatorname{arc}(x))^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}(\cos x))^2 + x^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}(\cos(x)))^2 = 1 - x^2$$
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}(\cos x))^2 = 1 - x^2$$
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}(\cos x))^2 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan(\arctan x))'}$$

$$= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \frac{1}{\tan(\arctan x)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

Derivadas de orden superior

Dada una función derivable f definida en un intervalo, su derivada f' es tambien una función en ese intervalo. Si sucede que también es derivable entonces su derivada se llama segunda derivada de f y de denota $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$.

También se llama derivada de orden dos de f en x.

No hay razón alguna para detenerse en la segunda derivada, y sin duda podemos seguir con la tercera ($f'''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$), cuarta etc. siempre que exista. Como resulta engorrosa una notación que acumula primas después de la f para denotar derivadas sucesivas escribimos $f^{(n)}$ para la n-ésimo derivada de f

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Cuando $n > 1$, diremos que $f^{(n)}(x)$ es una derivada de orden superior de f en x.

Ejemplos

$f(x) = x^3$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = 6x$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = 6$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right) = 0$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\frac{df}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \operatorname{sen} x.$$

Teoremas sobre funciones derivables

Teorema (Concavidad de una función)

Si una función $f(x)$ tiene $f''(x)>0$ en un intervalo o en $x=a$, entonces la función es cóncava hacia arriba en el intervalo o en $x=a$. Por otro lado, si la función tiene $f''(x)<0$ en un intervalo o en $x=a$, entonces la función es cóncava hacia abajo en el intervalo o en $x=a$

Ahora tenemos nuestro segundo método para determinar el estado de un punto crítico, que es la prueba de la segunda derivada.

Teorema (Prueba de la segunda derivada)

Si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$, entonces la curva es cóncava hacia arriba en $x=c$ y $(c, f(c))$ es un mínimo local. Alternativamente, si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$, entonces la curva es cóncava hacia abajo en $x=c$ y $(c, f(c))$ es un máximo local. Si $f''(c)=0$, no se puede sacar conclusiones.

Identificando puntos de inflexión

Un punto de inflexión de una función $f(x)$ tiene $f''(a)=a$ o la segunda derivada no está definida en $x=a$. En otras palabras, encuentra las raices $f''(x)$ (y cualquier valor donde $f''(x)$ no esté definida) y esos son los únicos lugares donde $f(x)$ puede tener un punto de inflexión, pero las raices de $f''(x)$ no tiene que ser puntos de inflexión. Ya que los puntos de inflexión de $f'(x)$ son lugares donde $f(x)$ tiene un máximo o mínimo local.

Ejemplo: Identifica cualquier máximo local, mínimo local y puntos de inflexión de la función.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 2$$

Solución: Para encontrar máximos o mínimos locales necesitamos los puntos críticos. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = x^2 - 6x + 8$.
Las raices se encuentran mediante:

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x-4)(x-2) = 0$$

Y las raices son $x=4$ y $x=2$. Aquí $f'(x)$ no tiene ningún valor de x donde este indefinida. Por lo tanto, las dos raices son únicos posibles lugares de máximos y mínimos del gráfico. Para comprobar si son un máximo o un mínimo necesitamos la segunda derivada, que es $f''(x) = 2x-6$
Ahora $f''(2) = -2 < 0$, por lo que la curva es cóncava hacia abajo en $x=2$, lo que hace que $(2, f(2)) = (2, 8.67)$ sea un máximo local. De manera similar, $f''(4) = 2 > 0$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba en $x=4$, lo que hace que $(4, f(4)) = (4, 7.33)$ sea un mínimo local.
Para encontrar cualquier punto de inflexión necesitamos las raíces de $f''(x)$, que se encuentran resolviendo

$$f''(x) = 0$$
$$2x - 6 = 0$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

Por lo tanto, hay posible punto de inflexión. Sabemos desde antes que la curva es cóncava hacia abajo en $x=2$ y cóncava hacia arriba en $x=4$, por lo que $(3, f(3)) = (3, 8)$, es, de hecho, un punto de inflexión.

Derivadas Parciales

Consideremos por considerar una función de dos variables $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U de $\mathbb{R}^2$. Sea $p = (x_0, y_0)$ un punto de U. Se define la derivada parcial de f con respecto de x (la primera variable de f) en el punto p, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ o $f_x(p)$, $f_1(p)$, $D_1 f(p)$, como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Cuando el límite existe. Del mismo modo, la derivada parcial de f con respecto a y (la segunda variable de f) en p, denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$, $f_y(p)$, $f_2(p)$ o $D_2 f(p)$, si el límite existe.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

La función $\varphi(x) = f(x, y_0)$ representa la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$. Esta es una curva que en el punto $x = x_0$ tiene una recta tangente cuya pendiente es precisamente $\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$.

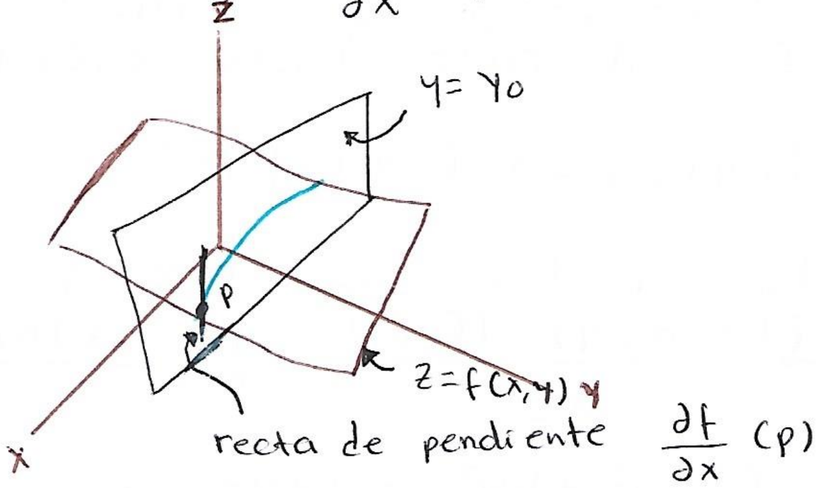


Figura 1. La derivada parcial de f con respecto a x.

Análogamente, la función $\varphi(y) = f(x_0, y)$ representa la curva obtenida de la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $x = x_0$ cuya pendiente en el punto $y = y_0$ es $\varphi'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

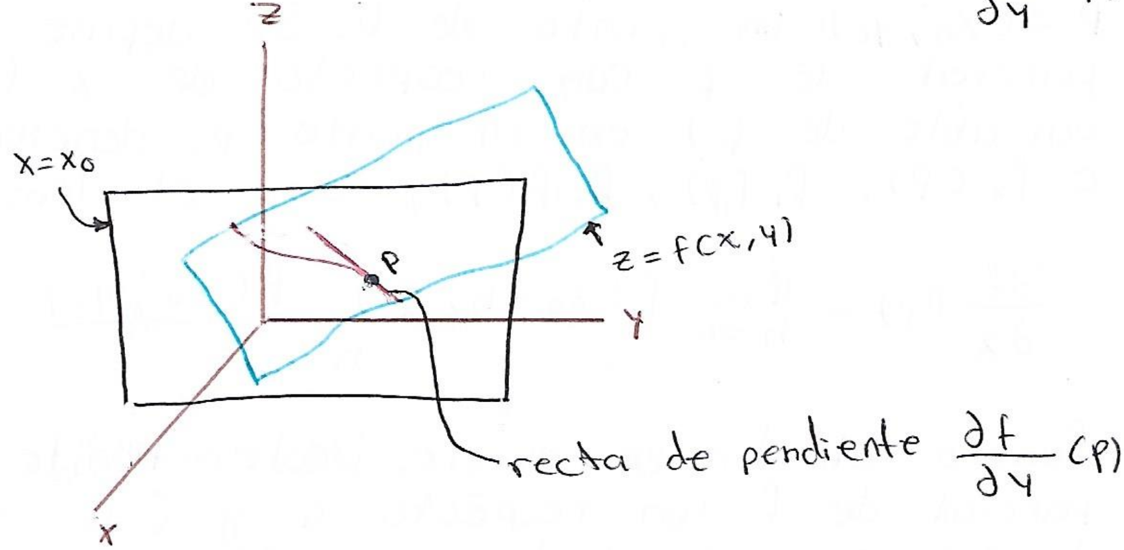


figura 2. Derivada parcial de f respecto a y.

Las derivadas parciales son conceptos "puntuales", es decir, se habla de la derivada parcial de una función en un punto dado (de su dominio). Es por eso que, en general, se debe hacer explícito el punto $p = (x_0, y_0)$ donde están evaluados $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, escribiendo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ (igualmente para $\frac{\partial f}{\partial y}$).

Sin embargo, muchas veces calculamos las derivadas parciales "en un punto cualquiera (x,y) de su dominio". En tal caso basta escribir $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$

(f_x y f_y o f_1 y f_2, o $D_1 f$ y $D_2 f$).

Ejemplo 1. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y^3$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2xy^3 + hy^3) = 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 (y+h)^3 - x^2 y^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2y^2 + 3x^2yh + x^2h^3) = 3x^2y^2.$$

Al considerar el caso general de funciones de n variables $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, conviene usar notación vectorial para definir las derivada parciales. El esquema que sigue la definición de derivada parcial de f respecto de su i-ésima variable, digamos x_i, es el mismo: digamos que se toma la función f con su i-ésima variable incrementada en h. Se resta la función evaluada en el punto considerado, se divide entre el valor del incremento (h) y se toma el límite cuando éste tiende a cero.

Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces he_i es un vector cualquiera, el vector $x + he_i$ será idéntico a x, excepto en la i-ésima coordenada, donde aparece la i-ésima coordenada de x, x_i, incrementada en h.

Definición (Derivadas Parciales)

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in U$. Se define la derivada parcial de f con respecto a su i-ésima variable en el punto x_0, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ ($f x_i (p)$ o $f_{x_i}(p)$ o $f_i(p)$ o $D_i f(p)$)

como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

Cuando éste existe.

Así, por ejemplo, para la función $f(x,y,z)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

y para la función $g(x,y,z,u)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x,y+h,z,u) - g(x,y,z,u)}{h}$$

Ejemplo: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{x^3 y^4 z^5}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \; e^{x^3 y^4 z^5} (3x^2 y^4 z^5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3 y^4 z^5} (4x^3 y^3 z^5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{x^3 y^4 z^5} (5x^3 y^4 z^4)$$

Derivadas Direccionales

Consideremos la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector dado de $\mathbb{R}^n$, cuya norma es 1. Ahora queremos estudiar la variación de la función f en el punto $x_0 \in U$ cuando su argumento varia en la dirección marcada por el vector v. La idea para lograr esto será la misma que aparece en el concepto de derivada de una función de una variable, y, más recientemente, en el estudio de las derivadas parciales, la derivada será "el limite cuando el incremento de la variable tiende a cero del cociente del incremento de la función, dividido entre el incremento de la variable". En el caso de las derivadas parciales, "el incremento de la variable" correspondía al de la variable respecto de la cual se estaba derivando. Lo que haremos ahora será tomar el "incremento de la variable", comenzando en el punto $X_0 \in U$, y yendo en la dirección del vector unitario $v \in \mathbb{R}^n$ dado.

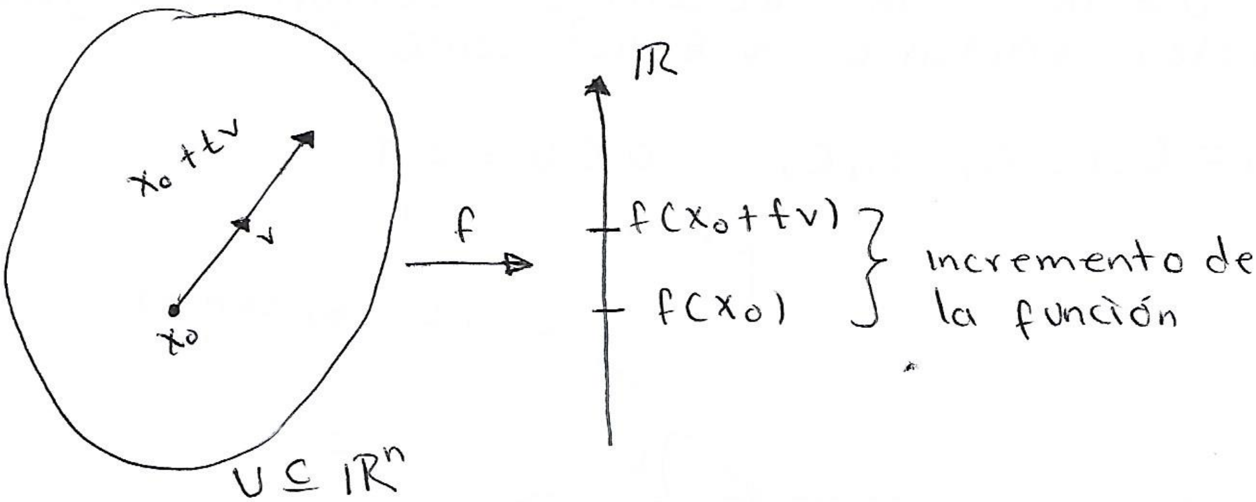


figura 3. Variación de la función en la dirección de v.

Definición. (Derivada direccional).

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $X_0 \in U$ un punto dado de U. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en X_0, en la dirección del vector v, denotada por $\frac{\partial f}{\partial v}(X_0)$, o $D_v f(X_0)$, como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(X_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0+tv) - f(X_0)}{t}.$$

La primera observación que debemos hacer de la definición es que el concepto de derivada direccional es un concepto que generaliza el de derivada parcial. Si $v = e_i = i$-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos que, efectivamente $\|v\| = \|e_i\| = 1$, y

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Otro punto que debemos observar es lo que pasa en el caso de una función de dos variables $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Podemos escribir en general el vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$ como

$$v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

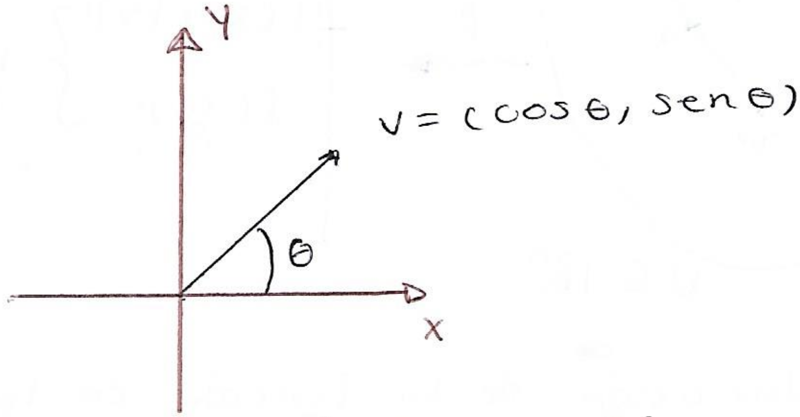


Figura 4: Un vector unitario en $\mathbb{R}^2$.

de modo que la derivada direccional de f en el punto $(x_0, y_0) \in U$ en la dirección de v se vería como

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Nuevamente observamos que si $\theta = 0$, o bien si $v = i = (1,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos 0, y_0 + t\operatorname{sen} 0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Del mismo modo, si $\theta = \pi/2$, o bien, si $v = j = (0,1)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} f(x_0 + t\cos\tfrac{\pi}{2}, y_0 + t\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{2}) - f(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ejemplo: Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculemos la derivada de esta función en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en la dirección del vector $v = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t(\cos\theta)^2 + (y + t\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - (x^2 + y^2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} (2x\cos\theta + 2y\,\mathrm{sen}\,\theta + t)$$

$$= 2x\cos\theta + 2y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

También, como dijimos, si $\theta = 0$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Diferenciabilidad.

Definición: Se dice que la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el punto $p = (x_0, y_0) \in U$, si se dan las derivadas parciales de f en p

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad , \quad A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y si el residuo $r(h_1, h_2)$ definido en la expresión

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + r(h_1, h_2)$$

tiene la propiedad

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Teorema: Si la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el punto $p = (x_0, y_0) \in U$, entonces es continua en ese punto.

Demostración:
Siendo f diferenciable en $p = (x_0, y_0)$ se tiene
$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + r(h_1, h_2)$$

Tomando el limite cuando $(h_1, h_2) \to 0$ y observando que de la condición establecida en la definición para el residuo $r(h_1, h_2)$ se deduce que

$$\lim_{(h_1, h_2) \to 0} r(h_1, h_2) = 0$$

vemos que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) = \lim_{(h_1,h_2)\to 0} (f(x_0,y_0)+A_1h_1+A_2h_2+r(h_1,h_2))$$

$$= f(x_0,y_0)$$

lo cual significa precisamente que la función f es continua en (x_0,y_0).

Ejemplo: Consideremos la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculalemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Aplicamos el teorema anterior, tenemos:

$$f((0,0)+(h_1,h_2)) = f(0,0) + (0)(h_1) + (0)h_2 + r(h_1,h_2)$$

de donde

$$r(h_1,h_2) = \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

y

$$\frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

Tomando el limite cuando $(h_1,h_2)\to(0,0)$ obtenemos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

$$= \xrightarrow{h_1=h_2}$$

$$= \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{2^{3/2}h_1^3} = \lim_{h_1\to 0} \frac{1}{2^{3/2}h_1}$$

$\therefore$ El limite no existe