Maestría en Ciencia de Datos y Sistemas Inteligentes
Curso Propedéutico
19 de noviembre de 2025

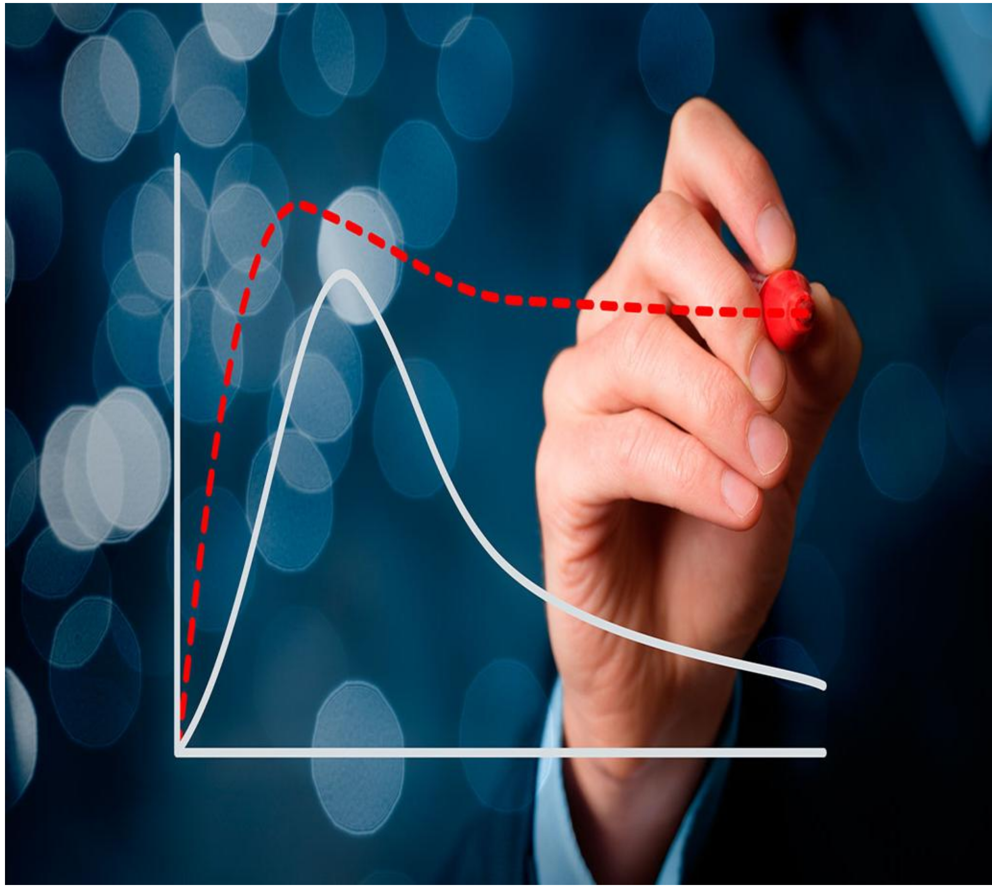
Fundamentos de Probabilidad

Nubia Montserrat Pineda Galeana

Fundamentos de Probabilidad

Contenido

1. Introducción
2. Conjuntos
3. Espacio Muestral y Espacio de Eventos
4. Probabilidad de un Evento
5. Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad
6. La Probabilidad en la Ciencia de Datos
7. Práctica



1 Introducción

¿Qué tan posible es que ocurra un evento?

Probabilidad

Grado de certeza que se tiene de que algo ocurra.

Es la **medida de la posibilidad** de que un evento tenga lugar.

Se expresa como un **valor entre 0 y 1**

- **0** (imposibilidad absoluta de ocurrencia)
- **1** (posibilidad total de ocurrencia)

Se calcula como la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Probabilidad
Conceptos Básicos

Experimento

Proceso o acción que se realiza con un resultado incierto.

Conjunto

Colección de elementos que comparten una propiedad en común.

Espacio Muestral

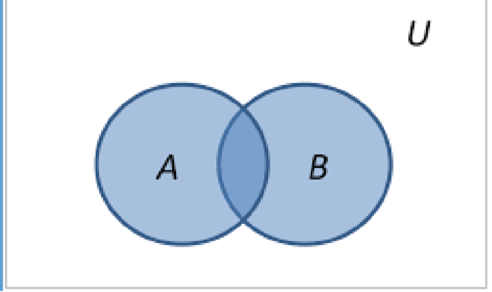
Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico.

Se representa con el símbolo Ω

Evento

Subconjunto de un espacio muestral.

2 Conjuntos



Conjunto

Colección de elementos u observaciones bien definidos que comparten una característica común.

Los elementos de un conjunto pueden ser números, pares ordenados, palabras, o cualquier objeto de interés

Notación – Conjunto A

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Los conjuntos **permiten describir los resultados posibles de un experimento aleatorio.**

Tipos de Conjuntos

Conjunto Finito

Se puede determinar su cardinalidad.
Número contable de elementos. A = {Cara, Cruz}

Conjunto Infinito

No se puede determinar su cardinalidad.
Número ilimitado de elementos.
Z = {Números enteros positivos}

Conjunto Vacío

No contiene ningún elemento. $\emptyset = \{ \}$

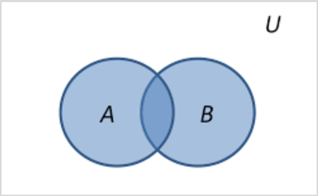
Conjunto Universal

Contiene todos los elementos de referencia.
Es el espacio muestral $U = \{ \Omega \}$

Conjunto Unitario

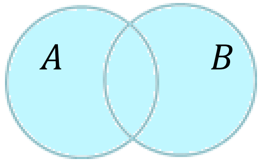
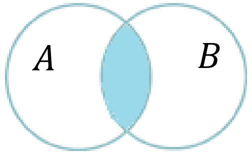
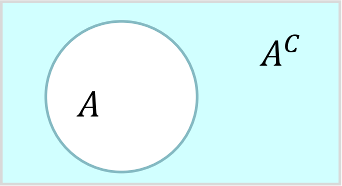
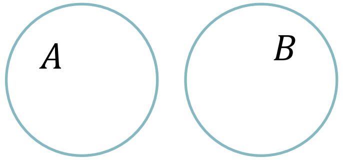
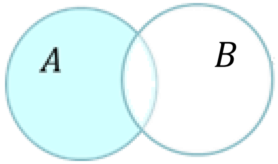
Contiene solo un elemento. $A = \{ 3 \}$

2 Conjuntos

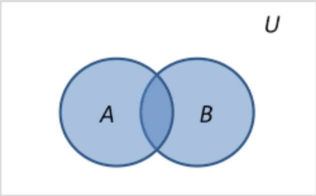


Teoría de Conjuntos

Estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos

Unión de Conjuntos $A \cup B$	La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B, o a ambos.	
Intersección de Conjuntos $A \cap B$	La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto que contiene todos los elementos que son comunes a A y a B.	
Complemento de un Conjunto A^C o A'	El complemento de un conjunto A respecto de Ω es el subconjunto de todos los elementos de Ω que no están en A.	
Conjuntos Disjuntos $A \cap B = \emptyset$	Dos conjuntos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \emptyset$; es decir, si A y B no tienen elementos en común.	
Diferencia de Conjuntos $A - B$	Es el conjunto que consiste en todos los elementos de A que no están contenidos en B.	

2 Conjuntos



Álgebra de Conjuntos

$\boldsymbol{A \subset B}$	Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$
$\boldsymbol{A \cap B}$	Si $A,\ B \in \Omega$, entonces $A \cap B = B \cap A$
Si A y B son dos conjuntos de Ω, entonces	$A \cup A^C = \Omega$ $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A$
$\boldsymbol{A - B}$	$A - B = A \cap B^C$
Ley conmutativa de las uniones	$A \cup B = B \cup A$
Ley asociativa de las uniones	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $= A \cup B \cup C$
Ley conmutativa de las intersecciones	$A \cap B = B \cap A$
Ley asociativa de las intersecciones	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $= A \cap B \cap C$

Primera Ley distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Segunda Ley distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Primera Ley de Morgan	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
Segunda Ley de Morgan	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
Para cualquier conjunto A y B	$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

3 Espacio Muestral

Experimento Aleatorio

Proceso o procedimiento cuyos resultados son inciertos y no predecibles, aunque todos los posibles resultados se conocen.

- Puede repetirse bajo las mismas condiciones
- Tiene varios resultados posibles
- No se puede predecir con certeza que ocurrirá antes de realizarlo.

Se sabe qué podría pasar, pero no se sabe qué pasará exactamente




Espacio Muestral Ω

Conjunto que contiene todos los resultados posibles de un experimento.

Cada uno de los resultados, se llama **elemento o punto muestral**.

Cardinalidad: es el número de elementos muestrales. Tamaño del espacio muestral.

Ω - Lanzamiento de un dado

Evento

Subconjunto del espacio muestral.

Este subconjunto representa la totalidad de los elementos para los que el evento es cierto.

Un evento **es un conjunto de resultados** que cumplen cierta condición.

Obtener múltiplos de 2

3 Espacio de Eventos

Espacio de Eventos

Conjunto formado por **todos los eventos posibles de un experimento aleatorio**.

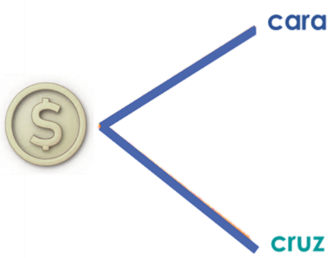
Incluye siempre a **ø** y a **Ω**

Colección de todos los eventos

El **total de eventos de** Ω se determina con la potencia $P(\Omega) = 2^{(\text{Num elementos de } \Omega)}$

Resumen

Experimento:
Lanzamiento de una moneda



Resultados posibles	Cara, Cruz
Espacio Muestral *Todos los resultados posibles*	**Ω** = {cara, cruz}
Evento *Subconjunto de Ω*	Ningún resultado ocurre: **ø** Evento "sale cara" : {cara} Evento "sale cruz" : {cruz} Evento seguro "sale algo": {cara, cruz} = **Ω**
Total de eventos de Ω	$P(\Omega) = 2^{(\text{Num elementos de } \Omega)} = 2^{(2)} = 4$
Espacio de Eventos *Todos los eventos posibles*	{ø, {cara}, {cruz}, {cara, cruz} }

4 Probabilidad de un Evento

Eventos aleatorios → **Incertidumbre** → **Ocurre/No ocurre**

La **probabilidad de un evento** es un número que nos dice **qué tan probable es** que ese evento ocurra cuando realizamos un experimento aleatorio.
La probabilidad oscila entre **0** y **1**

La probabilidad de un evento A es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en A. Por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \qquad P(\emptyset) = 0 \qquad y \qquad P(\Omega) = 1$$

Además, si $A_1, A_2, A_3, \cdots$ es una serie de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Probabilidad de un punto muestral en A.
Dado un espacio muestral: $\Omega = \{R_1, R_2, \ldots R_n\}$ con "n" resultados posibles, con las mismas probabilidades de ocurrir

Si se asigna una **probabilidad** ω **a cada punto muestral** de Ω, entonces

$$n\omega = 1 \qquad \text{o} \qquad \omega = \frac{1}{n}$$

4 Probabilidad de un Evento

Cálculo de Probabilidades

Reglas aditivas de probabilidad	Sean A y B dos eventos cualesquiera, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
	Sean A, B y C tres eventos, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
Propiedad del complemento	Si A y A^C son eventos complementarios, entonces $P(A) + P(A^C) = 1$ $P(A^C) = 1 - P(A)$
Propiedad para un subconjunto	Sean A y B dos eventos tales que $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

Probabilidad Condicional	La probabilidad de que ocurra un evento B dado que ocurrió un evento A $P(B\|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$
Independencia de Eventos	Dos eventos son independiente, sí: $P(A\|B) = P(A)$ ó $P(B\|A) = P(B)$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ *La ocurrencia de un evento no influye en las probabilidades de ocurrencia del otro.*

Ejercicio

Al realizar el lanzamiento de un dado, encontrar la probabilidad de obtener un número menor que 4, acorde a lo siguiente:

a) **Hacer un solo lanzamiento y no hay información adicional**
b) **Al hacer el lanzamiento se obtuvo un número impar**

Definir los Eventos

A = { Número menor que 4 } **= {1, 2, 3}**

B = { Número impar } **= { 1, 3, 5}**

Probabilidades de los Eventos

P(A) = 3/6 = 1/2

P(B) = 3/6 = 1/2

Situación a)

Obtener un número menor que 4

P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2 = **0.5**

Situación b)

Obtener un número menor que 4, dado que el lanzamiento resultó en un número impar

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}}$$

$$\mathbf{P(A|B)} = \mathbf{0.66}$$

Variable Aleatoria

Definición

Es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.

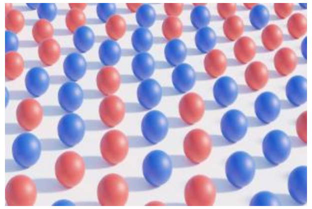
Función que **asigna un valor numérico a cada resultado del experimento aleatorio**.

Se denota por una mayúscula **X, Y, Z**

Las letras minúsculas x, y, z se emplean para cada uno de los valores que toma la variable aleatoria

Se tiene un contenedor con 4 bolas azules y 3 bolas rojas y se sacan 2 bolas sucesivamente y sin reemplazo.

Se define:
Variable Aleatoria *X* = número de bolas rojas seleccionadas
Posibles resultados x:



Espacio muestral	x
AA	0
AR	1
RA	1
RR	2

Variable Aleatoria

Tipos de VA

Variable Aleatoria Discreta

Toma **valores finitos o contables.**

- número de errores en una página
- número de llegadas por hora
- número de caras al lanzar una moneda

Función de densidad de probabilidad (fdp)

$$f(x) = P(X=x)$$

Función de distribución acumulada (FDA o CDF)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \text{para } -\alpha < x < \alpha$$

Variable Aleatoria Continua

Toma un **número infinito de valores o no contables.**

- tiempo de servicio en una fila
- temperatura
- peso, altura

Función de densidad de probabilidad (fdp)

$$f(x) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)$$

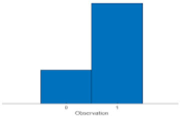
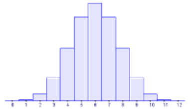
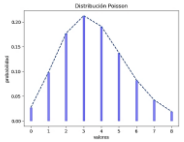
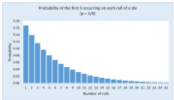
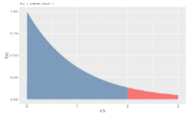
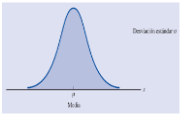
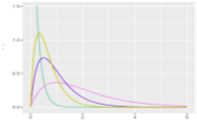
Función de distribución acumulada (FDA o CDF)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\alpha}^{x} f(t) \quad \text{para } -\alpha < x < \alpha$$

5 Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad

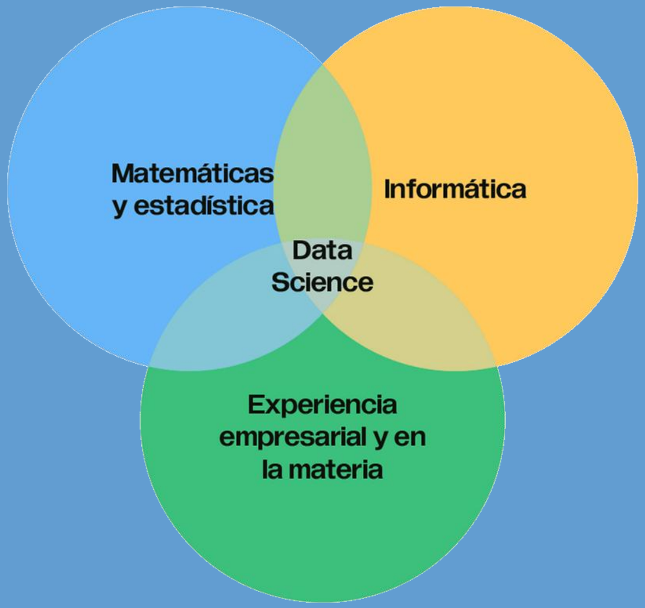
Distribución de Probabilidad

Indican como se asignan las probabilidades a los valores posibles de una **variable aleatoria**.

Variable	Distribución de Probabilidad	Aplicación
Discreta	**Bernoulli** 	Experimento con solo dos resultados posibles: “éxito” (1) y “fracaso” (0)
	Binomial 	N° de éxitos en n ensayos. Es una generalización de Bernoulli a *n* experimentos repetidos.
	Poisson 	Conteo de eventos raros. Ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas, o sucesos “raros”.
	Geométrica 	Ensayos hasta el primer éxito. Intentos necesarios realizar hasta que ocurra algo por primera vez.
Continua	**Exponencial** 	Tiempos entre eventos, hasta que ocurre el primer evento.
	Normal 	Fenómenos que se agrupan en torno a un valor central (la media)
	Gamma 	Tiempos entre eventos Medir variables continuas con distribuciones positivas y asimétricas

6

La Probabilidad en la Ciencia de Datos



Aprendizaje Automático

- **Modelos de machine learning son probabilísticos**

Regresión logística → estima probabilidades de clase
Naive Bayes → usa probabilidad condicional
Bosques aleatorios → predicciones probabilísticas
Modelos generativos → distribuciones de probabilidad

Ayuda a tomar decisiones basadas en datos

- Estimar la probabilidad de eventos futuros
- Identificar patrones y relaciones en los datos.
- Predicciones sobre tendencias o comportamientos futuros.

Modelar datos e incertidumbre.

- Aplicación de Distribuciones de Probabilidad: Normal, Binomial, Poisson, Gamma, etc

Inferencia Estadística

- Permite extraer conclusiones sobre una población a partir de una muestra.
- Cuantificar la incertidumbre

La Probabilidad en la Ciencia de Datos

Machine Learning

Modelo	Aplicación de la Probabilidad	Ejemplo
Regresión logística	Predice **probabilidad** de una clase	Probabilidad de compra
Naive Bayes	Usa **probabilidad condicional** *Clasifica según la clase que tenga mayor probabilidad de generar los datos observados*	Detección de spam
GMM **Modelo de Mezcla de Gaussianas**	Clustering Cada punto tiene una **probabilidad de pertenecer a un grupo**	Segmentación de clientes
Redes bayesianas	Relaciones causa–efecto con **probabilidades condicionales**	Diagnóstico médico
VAEs (Variational Autoencoder) / Diffusion	Generación basada en **distribuciones probabilísticas**	IA que genera imágenes

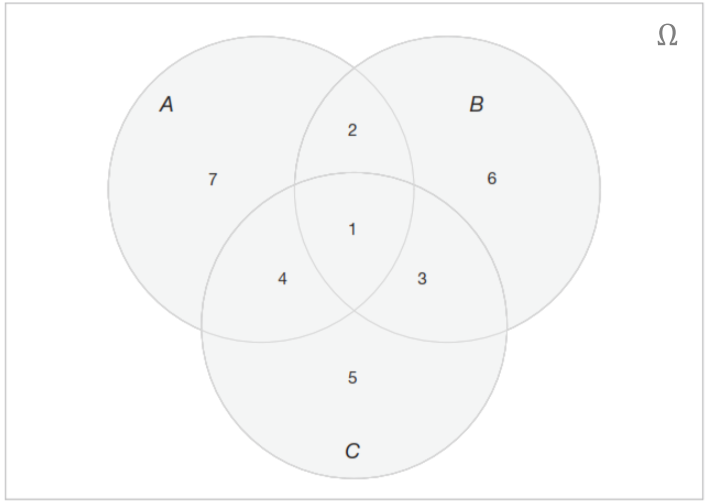
7 Práctica R Studio

Tarea

Fundamentos de Probabilidad

Tarea

1



Dados los conjuntos A, B y C, determinar y representar:

$A \cup C$
$B^C \cap A$
$A \cap B \cap C$
$(A \cup B) \cap C^C$
$A - B$
$B - C$
$(A \cup B)^C$
$A \cap (B \cup C)$

2

De los eventos siguientes, determine ¿Cuáles son iguales?

a) A= {1,3}
b) B = {x | x es un número de un dado}
c) C= {x | $x^2 - 4x + 3 = 0$}
d) D= {x | x es el número de caras cuando se lanzan seis monedas al aire}

3

En la Facultad de Ingeniería se seleccionaron al azar a 4 estudiantes del salón A-301. Se clasificaron a los estudiantes como hombres (H) y mujeres (M).

a) Definir el espacio muestral para la selección de los 4 estudiantes.

b) Definir un espacio muestral para la selección únicamente de mujeres.

a) Determine la cardinalidad de ambos espacios muestrales.

Tarea

4

En una baraja estándar de 52 cartas, hay 4 ases.
Un jugador extrae dos cartas. Encontrar la probabilidad de que ambas cartas sean ases, si la carta:

a) Se reemplaza

b) No se reemplaza

Tip: Podría apoyarse en la fórmula de probabilidad condicional.

5

En una comunidad de 900 habitantes, distribuidos en hombres y mujeres según condición de empleo:

Población	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	**600**	**300**	**900**

Se selecciona al azar a un habitante para realizarle una entrevista sobre la opinión pública de programas sociales en su localidad.

Se desea encontrar la probabilidad de:

a) Elegir a un hombre

b) Elegir a un hombre con empleo