Algebra lineal

María Guzmán Martínez

2025-11-17

Contents

1 Vectores

Dado un conjunto de valores, se puede definir un vector, de la siguiente manera:
Si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o también como

$$x\acute{} = (x_1, ..., x_n)$$

La multiplicación de un escalar por un vector, está dado por

$$cx = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

1.1 Suma

La operación de suma entre vectores está dada por

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Operaciones con vectores:

- Suma de dos vectores de la misma longitud:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

- Multiplicación por un escalar

$$c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$$

- Distributiva de la suma de escalares:

$$(c_1 + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}$$

1.2 Multiplicación

La multiplicación de dos vectores de dimensión n está dada por

$$x'y = x_1 \times y_1 + \cdots + x_n \times y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$$

A $x'y$ se le conoce también como producto punto, producto interno o producto escalar.

- Producto punto:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ tres vectores de dimensión n y sea c un escalar. Entonces:

- Multiplicación con un vector de ceros

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0$$

- Ley conmutativa del producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

- Ley distributiva del producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$$

- Multiplicación de un escalar y dos vectores

$$(c \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$

  Observe que no existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

  no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido.

1.3 Normas

La longitud de un vector x, se define como

$$L_x = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Es decir

$$L_x = \sqrt{x'x}$$

La longitud de un vector, también se le conoce como norma o módulo de un vector:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

La norma de un vector es una medida de su longitud o magnitud en un espacio vectorial. En términos generales, la norma de un vector $\mathbf{x}$ se define como una función que asigna a cada vector un número no negativo. La norma de $\mathbf{x}$, denotada como $\|\mathbf{x}\|$, cumple con las siguientes propiedades:

- No negatividad: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si

  $$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  el vector cero.

- Homogeneidad positiva: Para todo escalar c,

  $$\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$$

  .

- Desigualdad triangular: Para cualquier par de vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$,

  $$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Estas propiedades aseguran que la norma de un vector cumple con las propiedades básicas de una medida de distancia o magnitud en un espacio vectorial. La norma de un vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

está dada por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

1.4 Combinacione lineales

Dado un conjunto de k vectores, $x_1, \dots, x_k$, se dice que son linealmente independientes si existen constantes, $c_1, \dots, c_k$ no todas cero, tal que

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k = \mathbf{0}$$

La dependencia lineal implica que al menos un vector del conjunto puede ser escrito como una combinación lineal de los otros vectores.

Propiedades:

- Vectores son perpendiculares (ortogonales) que se escribe como $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, si

  $$\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$$

  Note que cuando dos vectores son perpendiculares, entonces formaran ángulos de 90 o 270 grados. De hecho si dos vectores son perpendiculares, entonces serán linealmente independientes.

1.5 Actividad 1

Dados los vectores $x = c(1, 3, 5, 7, 9)$ y $x = c(2, 4, 6, 8, 10)$

- Calcular la suma
- Multiplicarlo por el escalar $c = 10$
- Calcular el la longitud de cada vector
- Multiplicar ambos vectores

Funciones en R:

- Concatena valores: *c()*

2 Matrices

Una matriz es un arreglo de dimensión $n \times p$ de números reales, si se puede escribir como

$$\mathbf{X}_{n\times p} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

esta matriz X tiene n renglones (líneas horizontales) y p columnas (líneas verticales).

2.1 Suma

Si $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ son matrices de dimensiones $m \times n$, entonces la suma es la matriz de A y B, está dada por $A + B$.

Es decir,

$$\underset{m\times n}{A + B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades: Dadas A, B y C matrices del mismo tamaño, se tiene

- Conmutativa:
$$A + B = B + A$$
- Asociativa:
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
- Elemento neutro: Existe una matriz 0 llamada matriz nula tal que
$$A + 0 = A$$
- Elemento opuesto: Para cada matriz A, existe una matriz $-A$ tal que
$$A + (-A) = 0$$
- Para dos constantes dadas c_1 y c_2, se tiene
$$(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$$

2.2 Producto

Dado A una matriz de $n \times k$, y B una matriz de $k \times m$. El producto de las matrices denotado AB, es la matriz de $n \times m$ cuyos elementos están dados por

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

para $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., k$.

Esta definición significa que el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del producto AB se obtiene al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B y luego sumar los elementos de esta multiplicación, es decir, si$A$ y B son dos matrices de dimensión $n \times k$ y $k \times m$ respectivamente como se muestran a continuación:

$$\underset{n\times k}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\underset{k\times m}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times m}{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} \end{aligned}$$

Propiedades: Para matrices conformables

- Asociativa:
$$(AB)C = A(BC)$$
- Distributiva:
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$
- Producto por el elemento identidad:
$$IA = AI = A$$
donde I es la matriz identidad.
- No conmutativa: En general,
$$AB \neq BA$$
para matrices A y B de diferentes dimensiones.
- Propiedad escalable: c es un escalar
$$(cA) \cdot B = A \cdot (cB) = c(A \cdot B)$$

2.3 Transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la transpuesta de A, que se escribe $A^\top$, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$. En otras palabras

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Simplemente se coloca el renglón i de A como la columna i de $A^\top$ y la columna j de A como el renglón j de $A^\top$.

Propiedades

Dadas A y B matrices

- $$(A + B)' = A' + B'$$
- $$(AB)' = B'A'$$
- $$(cA)' = cA'$$
- Una matriz cuadrada es simétrica si $$A = A'$$

2.4 Determinante

El determinante de una matriz cuadrada de $n \times n$, denotado por $|A|$; desarrollo por la fila i de la matriz A de dimensión n :

$$|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|A_{ij}|(-1)^{i+j}$$

donde A_{ij} es la matriz de dimensión $n-1$ resultante de eliminar la fila i y la columna j de A. Por tanto, si la matriz es dimensión n, se calculan n determinantes de matrices de dimensión $n-1$

Propiedades: Si A y B son dos matrices cuadradas de $n \times n$

- $$|A| = |A'|$$
- Si A tiene un renglón o columna de ceros, entonces $$|A| = 0$$
- Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $$|A| = 0$$

- Determinante de un producto
$$|AB| = |A||B|$$

- Dado un escalar c, se tiene
$$|cA| = c^n|B|$$

2.5 Inversa

La matriz identidad I_n de $n \times n$ es una matriz cuyos elementos en la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás son 0. Es decir,
$$I_n = (b_{ij})$$

donde $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que $AB = BA = I$. Entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es invertible.

- Una matriz cuadrada que no es invertible se le denomina singular.
- Una matriz invertible se llama no singular.

Sean A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. La matriz inversa de A, denotada como A^{-1}, se calcula utilizando la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

donde $\det(A)$ es el determinante de la matriz A y $\mathrm{adj}(A)$ es la matriz adjunta de A.

Propiedades: Dado A y B matrices cuadradas de $k \times k$, para las cuales existe su inversa, entonces

- $$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

- $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2.6 Traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}$ de $k \times k$, escrita como $\mathrm{tr}(A)$, es la suma de los elementos diagonal; es decir,
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$
.

Sea A y B matrices $k \times k$ y c un escalar.

- $$\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A)$$

- $$\mathrm{tr}(A \pm B) = \mathrm{tr}(A) \pm \mathrm{tr}(B)$$

- $$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

- $$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$$

- $$\mathrm{tr}(AA') = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$$

2.7 Actividad 2

Funciones en R:

- Traza: *trace()*
- Producto de matrices %*%
- Determinante de una matriz *det()*
- Inversa de una matriz *solve()*