Universidad Autónoma de Guerrero

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Diseño en bloques completos al azar

Curso-Taller en Linea: Diseño experimentales con R

Sociedad Mexicana de Fitosanidad

Flaviano Godínez Jaimes
fgodinezj@uagro.mx

20 de noviembre del 2023


Universidad Tecnológica de Bahia de Banderas
CURSO-TALLER EN LÍNEA
DISEÑOS EXPERIMENTALES CON R
Imparten:
Dra. María Guzmán
Dr. Flaviano Godínez
Ing. Carlos D. Carretillo
13, 20, 27 NOVIEMBRE 2023
6:30 - 10:00 PM (HORA CIUDAD DE MÉXICO)
REGISTRO:
simponictia@gmail.com
322 240 5172

Contenido

Diseño en bloques completos al azar

Diseño en bloques completos al azar

Diseño en bloques completos al azar

Diseño del experimento

Diseño del experimento

Diseño del experimento

Uso del DBCA

1. **Las UE no son homogéneas.**
2. Las UE se agrupan de acuerdo a un factor, en conjuntos razonablemente homogéneos "dentro" de los grupos y heterogéneos "entre" los grupos.
3. Hay un gradiente de variación en las UE.
4. **No** existe <u>interacción</u> Tratamientos:Bloques.
5. Los efectos del factor y de bloques son aditivos, es decir, la relación entre los tratamientos es la misma en cada uno de los bloques.

Factor de ruido

Un factor de ruido o molestia posiblemente tiene un efecto en la variable respuesta pero **NO** interesa su efecto.

- Desconocido y no controlable no sabemos que el factor existe y que cambian sus niveles mientras se realiza el experimento. *Solución: La aleatorización.*
- Conocido y no controlable se observa el valor que el factor de molestia toma en cada corrida del experimento. *Solución: se compensa su efecto en el análisis estadístico usando análisis de covarianza.*
- Conocido y controlable tiene un efecto en la variable respuesta. *Solución: Se usa el bloqueo para eliminar sistemáticamente el efecto en la comparación estadística entre tratamientos.*

Ejemplo

Un químico desea comparar 4 procesos de producción de penicilina: A, B, C y D. El material que se usa es licor de maíz, que es muy variable y únicamente puede ser hecho en mezclas suficientes para cuatro corridas.

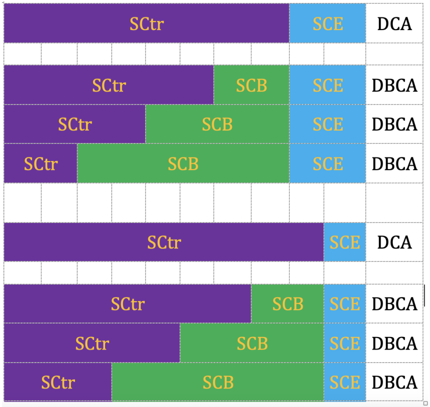
1. Variable respuesta: *producción de penicilina*
2. Factor de interés: *proceso de producción*
3. Qué representa el licor de maíz?
4. Qué Diseño debe usarse?

Faraway, JJ. 2002. [1] Practical Regression and Anova using R. p186.

Ejemplo

- El error experimental debe ser tan pequeño como sea posible, separando la variabilidad debido al factor de la variabilidad del error experimental.
- El Diseño en bloques **completos** al azar requiere que el experimentador pruebe cada proceso una sola vez en cada una de las mezclas.
- Los bloques (mezclas) forman una UE en la que se comparan los procesos.
- El DBCA mejora la precisión de las comparaciones entre procesos al eliminar la variabilidad entre mezclas. Dentro de un bloque el orden en el que las cinco procesos se prueban se determina al azar.

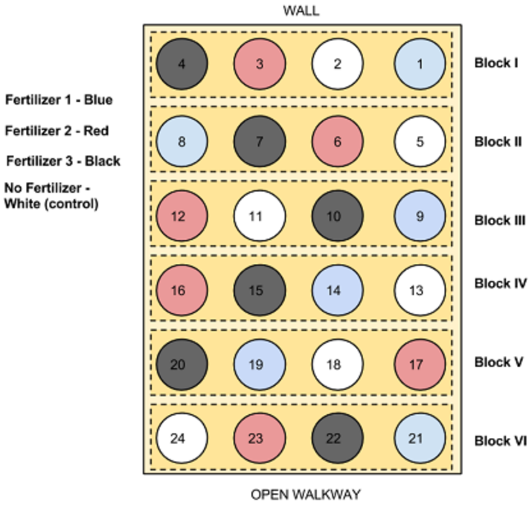
Ejemplo



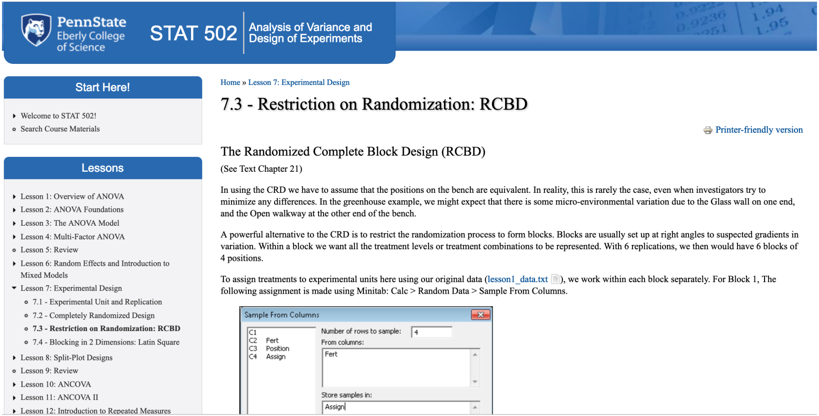
$$\underbrace{SCTotal}_{SCTotal} = \underbrace{SCTrat}_{SCTrat+SCB} + \underbrace{SCE}_{SCE}$$

Ejemplo

Factor de interés: Fertilizante



Ejemplo



PennState Eberly College of Science | STAT 502 | Analysis of Variance and Design of Experiments

Start Here!

- Welcome to STAT 502!
- Search Course Materials

Lessons

- Lesson 1: Overview of ANOVA
- Lesson 2: ANOVA Foundations
- Lesson 3: The ANOVA Model
- Lesson 4: Multi-Factor ANOVA
- Lesson 5: Review
- Lesson 6: Random Effects and Introduction to Mixed Models
- Lesson 7: Experimental Design
  - 7.1 - Experimental Unit and Replication
  - 7.2 - Completely Randomized Design
  - **7.3 - Restriction on Randomization: RCBD**
  - 7.4 - Blocking in 2 Dimensions: Latin Square
- Lesson 8: Split-Plot Designs
- Lesson 9: Review
- Lesson 10: ANCOVA
- Lesson 11: ANCOVA II
- Lesson 12: Introduction to Repeated Measures

Home » Lesson 7: Experimental Design

7.3 - Restriction on Randomization: RCBD

Printer-friendly version

The Randomized Complete Block Design (RCBD)

(See Text Chapter 21)

In using the CRD we have to assume that the positions on the bench are equivalent. In reality, this is rarely the case, even when investigators try to minimize any differences. In the greenhouse example, we might expect that there is some micro-environmental variation due to the Glass wall on one end, and the Open walkway at the other end of the bench.

A powerful alternative to the CRD is to restrict the randomization process to form blocks. Blocks are usually set up at right angles to suspected gradients in variation. Within a block we want all the treatment levels or treatment combinations to be represented. With 6 replications, we then would have 6 blocks of 4 positions.

To assign treatments to experimental units here using our original data (lesson1_data.txt), we work within each block separately. For Block 1, The following assignment is made using Minitab: Calc > Random Data > Sample From Columns.

https://newonlinecourses.science.psu.edu/stat502/node/176/

Análisis del experimento

Análisis del experimento

Análisis del experimento

Modelo de efectos DBCA

Variable respuesta

del tratamiento i en el bloque j

Error experimental

del tratamiento i en el bloque j

Efecto del tratamiento i

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Media general

Efecto del bloque j

$$i = 1, 2, \ldots, a; \quad j = 1, 2, \ldots, b; \quad \varepsilon_{ij} \sim IIDN(0, \sigma^2)$$

Parámetros: $\mu, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$ y σ^2.

Modelo de medias DBCA ($\mu_i = \mu + \tau_i + \beta_j$)

Variable respuesta

del tratamiento i en el bloque j

Error experimental

del tratamiento i en el bloque j

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

Media del tratamiento i

$$i = 1, 2, \ldots, a; \quad j = 1, 2, \ldots, b; \quad \varepsilon_{ij} \sim IIDN(0, \sigma^2)$$

Parámetros: $\mu, \quad \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$ y σ^2.

Supuestos sobre los errores

$$\varepsilon_{ij} \sim IIDN(0, \sigma^2)$$

El modelo estadístico supone que todos los errores experimentales son Independientes (1), tienen Idéntica distribución Normal (2) con media 0 y varianza constante (3), σ^2.

1	Independencia	$\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{an}$ son independientes
2	Distribución Normal	$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$
3	Homogeneidad de varianzas	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_a^2$

Aleatorización

https://www.youtube.com/watch?v=KjEJX3rbLhY

- Los tratamientos se asignan al azar dentro de cada bloque
- Se realiza una aleatorización independiente en cada bloque

Notación

Tratamiento	Bloque 1	2	$\dots$	b	Suma de Trat	Media de Trat
1	Y_{11}	Y_{12}	$\dots$	Y_{1b}	$Y_{1\cdot} = \sum_{j=1}^{b} Y_{1j}$	$\overline{Y}_{1\cdot}$
2	Y_{21}	Y_{22}	$\dots$	Y_{2b}	$Y_{2\cdot} = \sum_{j=1}^{b} Y_{2j}$	$\overline{Y}_{2\cdot}$
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	
a	Y_{a1}	Y_{a2}	$\dots$	Y_{ab}	$Y_{a\cdot} = \sum_{j=1}^{b} Y_{aj}$	$\overline{Y}_{a\cdot}$
Suma de Bloque	$Y_{\cdot 1} = \sum_{i=1}^{a} Y_{i1}$	$Y_{\cdot 2} = \sum_{i=1}^{a} Y_{i2}$	$\dots$	$Y_{\cdot b} = \sum_{i=1}^{a} Y_{ib}$	$Y_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{j} Y_{ij}$	
Media de Bloque	$\overline{Y}_{\cdot 1}$	$\overline{Y}_{\cdot 2}$		$\overline{Y}_{\cdot b}$	$\overline{Y}_{\cdot\cdot}$	

Estimación

μ, τ_i, β_j y σ^2 se estiman con el Método de Mínimos Cuadrados (Máxima Verosimilitud produce los mismos resultados).

$$SCE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\{\varepsilon_{ij}\}^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\{Y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\}^2$$

Se deriva SCE respecto a $\mu, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$

$$\frac{\partial SCE\,(\mu, \tau_i, \beta_j)}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial SCE\,(\mu, \tau_i, \beta_j)}{\partial \tau_i} = 0, \quad \frac{\partial SCE\,(\mu, \tau_i, \beta_j)}{\partial \beta_j} = 0$$

El sistema de $a + b + 1$ ecuaciones lineales no tiene solución única y se imponen dos restricciones sobre los efectos del factor y del bloque.

Estimación

Estimadores bajo las restricciones de suma de efectos igual a cero

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

μ	Media general	$\widehat{\mu} = \overline{Y}_{..}$
τ_i	Efecto del tratamiento i	$\widehat{\tau}_i = \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$
β_j	Efecto del bloque j	$\widehat{\beta}_j = \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}$
μ_i	Media del tratamiento i	$\widehat{\mu}_i = \overline{Y}_{i.} + \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}$
σ^2	Varianza de los errores	$\widehat{\sigma}^2 = CME$
Y_{ij}	Variable respuesta	$\widehat{Y}_{ij} = \overline{Y}_{i.} + \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}$
ε_{ij}	Error experimental	$\widehat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..}$ Residuo

Pruebas de hipótesis

Hipótesis para el factor de interés

Las medias de la VR en los niveles del factor son iguales
equivalentemente
No hay efecto del factor en la VR

Estas hipótesis se escriben

$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$	equivalente	$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$
Al menos una μ_i es diferente	equivalente	Al menos una $\tau_i \neq 0$

No se hacen PH sobre los Bloques

Los bloques son una restricción a la aleatorización

Pruebas de hipótesis

La suma de cuadrados total (SCTot) corregida se descompone en tres SC debidas a los tratamientos (SCT), a los bloques (SCB) y a los errores (SCE):

$$
\begin{aligned}
SCTot &= SCT + SCB + SCE \\
\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \overline{y}_{..})^2}_{SCTot} &= \underbrace{b\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^2}_{SCT} + \underbrace{a\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..})^2}_{SCB} \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.j} + \overline{y}_{..})^2}_{SCE} \\
ab - 1 &= a - 1 + b - 1 + (a-1)(b-1)
\end{aligned}
$$

Prueba de Hipótesis

- Hipótesis

$\mu_1 = \mu_2 = \ldots, = \mu_a$	equivalente	$\tau_1 = \tau_2 = \ldots, = \tau_a = 0$
Al menos una μ_i es diferente	equivalente	Al menos una $\tau_i \neq 0$

- Estadístico de prueba: $F = \frac{CMTratamientos}{CMError}$ tiene distribución $F_{a-1,\,(a-1)(b-1)}$.
- Regla de decisión: Rechazar H_0 si
  - $F_c > F_t$ donde $F_t = F_{1-\alpha;\,(a-1,(a-1)(b-1))}$
  - $p - value < \alpha$
- Conclusión 1: "Existe evidencia que indica que las **medias de la variable respuesta** de los tratamientos no son iguales"
- Conclusión 2: "Existe evidencia que indica que **hay efecto del factor** en la variable respuesta"

ANOVA del DBCA

Fuentes de Variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado Medio	F	p
Tratamientos	$a-1$	SCT	$\frac{SCTr}{a-1}$	$\frac{CMTr}{CME}$	α^*
Bloques	$b-1$	SCB	$\frac{SCB}{b-1}$		
Error	$(a-1)(b-1)$	SCE	$\frac{SCE}{(a-1)(b-1)}$		
Total	$ab-1$	SCTot			

$$SCT = b\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a} Y_{i\cdot}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{ab}$$

$$SCB = a\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{\cdot j}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{ab}$$

$$SCE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{\cdot j} + \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 \quad \text{Por diferencia}$$

$$SCTot = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{ab}$$

Verificación de los supuestos

$$\varepsilon_{ij} \sim IIDN(0, \sigma^2)$$

Supuesto	Diagnóstico	Correcto
Normalidad	Gráfica QQ	Puntos cerca de diagonal
	PH (SW, KS, AD, SF, CvM, P)	$p > \alpha$ (0.05)
Independencia	Gráfica de $\widehat{y}_i$ vs r_i, x's vs r_i	No hay patrón
	PH Durbin-Watson	$p > \alpha$ (0.05)
Homogeneidad	Gráfica de $\sqrt{r_i}$ vs $\widehat{y}_i$	Similar dispersión
	PH (Bartlett, Levene, Fligner)	$p > \alpha$ (0.05)

, ,

- Pruebas de normalidad:
  H_0 : Los errores tienen distribución normal
  H_1 : Los errores NO tienen distribución normal

  Shapiro-Wilk, *Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov)*, *Anderson-Darling*, Shapiro-Francia, Cramer-von Mises, Pearson [1].

- Pruebas de igualdad de varianzas:
  H_0 : Las varianzas de los errores de la VR de los tratamientos son iguales
  H_1 : Las varianzas de los errores de la VR de los tratamientos NO son iguales

  Prueba de Bartlet, Levene, Fligner-Killeen,

- Pruebas de independencia:
  El experimentador debe garantizarlo en el experimento
  Durbin-Watson (Si el tiempo es una VI en el modelo)

[1] Paquete nortest (Gross y Ligges, 2015)

Comparaciones Múltiples

- Si no se rechaza la hipótesis nula entonces todos los tratamientos tienen medias iguales y el análisis estadístico termina.
- Si se rechaza la hipótesis nula entonces no todos los tratamientos tienen medias iguales.
  Cuál es el nivel o combinaciones de niveles mejor?.
- Existen dos casos importantes:
  - Todos los contrastes (combinaciones lineales): Prueba de Scheffé.
  - Comparaciones por pares: Tukey, DMS, Duncan, SNK, Dunnett.

Ejemplos DBCA

Ejemplos DBCA

Ejemplos DBCA

Planteamiento

Se desea determinar si cuatro diferentes puntas producen diferentes lecturas de una maquina de prueba de dureza. El experimentador ha decidido obtener cuatro observaciones para cada punta. **Para remover la variabilidad entre placas del error experimental se probó cada punta una sola vez en cada una de las placas (DBCA)**. La respuesta observada es en la escala C de dureza de Rockwell menos 40.

	Placas			
	1	2	3	4
Punta 1	9.3	9.4	9.6	10.0
Punta 2	9.4	9.3	9.8	9.9
Punta 3	9.2	9.4	9.5	9.7
Punta 4	9.7	9.6	10.0	10.2

¿Que punta es mejor?

Douglas Montgomery, R. (2004). Diseño y analisis de experimentos. Grupo Editorial Iberoamérica, México. [4] p127.

Datos en los libros:

Tabla 4-1 Diseño de bloques completos aleatorizados para el experimento de la prueba de la dureza

Tipo de punta	Ejemplar de prueba			
	1	2	3	4
1	9.3	9.4	9.6	10.0
2	9.4	9.3	9.8	9.9
3	9.2	9.4	9.5	9.7
4	9.7	9.6	10.0	10.2

Datos en R:
Factor, Bloque y VR
(en cualquier orden)

```
> datos
     Punta   Placa Dureza
1  Punta 1 Placa 1    9.3
2  Punta 2 Placa 1    9.4
3  Punta 3 Placa 1    9.2
4  Punta 4 Placa 1    9.7
5  Punta 1 Placa 2    9.4
6  Punta 2 Placa 2    9.3
7  Punta 3 Placa 2    9.4
8  Punta 4 Placa 2    9.6
9  Punta 1 Placa 3    9.6
10 Punta 2 Placa 3    9.8
11 Punta 3 Placa 3    9.5
12 Punta 4 Placa 3   10.0
13 Punta 1 Placa 4   10.0
14 Punta 2 Placa 4    9.9
15 Punta 3 Placa 4    9.7
16 Punta 4 Placa 4   10.2
```

Aleatorización

https://www.youtube.com/watch?v=KjEJX3rbLhY
https://www.youtube.com/watch?v=_KvK_Y_JUZ8

- Los tratamientos (puntas) se asignan al azar dentro de cada bloque (placa).
- Se realiza una aleatorización independiente en cada bloque (placa).

Aleatorización

El factor **punta** tiene cuatro niveles: *1*, *2*, *3* y *4*. Se realizará un experimento con cuatro bloques (placas).

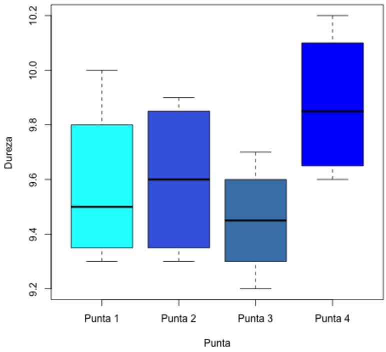
```
# 4 Tratamientos y 4 bloques
trt<-c("P1","P2","P3","P4")
outdesign <-design.rcbd(trt, 4, serie=1, seed = 986, kinds = '
outdesign
```

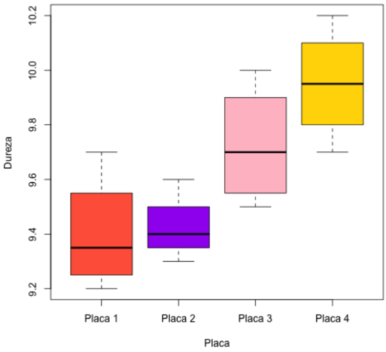
Aleatorización

```
   plots block trt
1     11     1  P1
2     12     1  P4
3     13     1  P2
4     14     1  P3
5     21     2  P3
6     22     2  P2
7     23     2  P4
8     24     2  P1
9     31     3  P1
10    32     3  P3
11    33     3  P2
12    34     3  P4
13    41     4  P4
14    42     4  P3
15    43     4  P2
16    44     4  P1
```

- Se usan 16 UE.
- La columna uno y *plots*: no importan.
- *block*: indica el bloque (Placa).
- En la Placa 1 (P1) las puntas se prueban en el orden 1, 4, 2 y 3.
- En la Placa 2 (P2) las puntas se prueban en el orden 3, 2, 4 y 1.
- En la Placa 3 (P3) las puntas se prueban en el orden 1, 3, 2 y 4.
- En la Placa 4 (P4) las puntas se prueban en el orden 4, 3, 2 y 1.

Análisis Exploratorio





- Outliers (Puntos separados en el diagrama de cajas)
- Sesgo (Simetría de las cajas)
- Varianzas homogéneas (Tamaños de cajas iguales)

Análisis Exploratorio

La media general de la dureza de las diferentes puntas es 9.62 con una varianza de 0.09. Las medias por tipo de punta son 9.57, 9.60, 9.45 y 9.88; mientras que las medias por placa son 9.40, 9.43, 9.72 y 9.95.

```
> MDureza=mean(Dureza);  round(MDureza, 2);     VDureza=var(Dureza);   round(VDurez
[1] 9.62
[1] 0.09
> MPunta = tapply(Dureza, Punta, mean); round(MPunta, 2)
Punta 1 Punta 2 Punta 3 Punta 4
   9.57    9.60    9.45    9.88
> VPunta = tapply(Dureza, Punta, var); round(VPunta, 5)
Punta 1 Punta 2 Punta 3 Punta 4
0.09583 0.08667 0.04333 0.07583
> MPlaca = tapply(Dureza, Placa, mean); round(MPlaca, 2)
Placa 1 Placa 2 Placa 3 Placa 4
   9.40    9.43    9.72    9.95
> VPlaca = tapply(Dureza, Placa, var);  round(VPlaca, 2)
Placa 1 Placa 2 Placa 3 Placa 4
   0.05    0.02    0.05    0.04
```

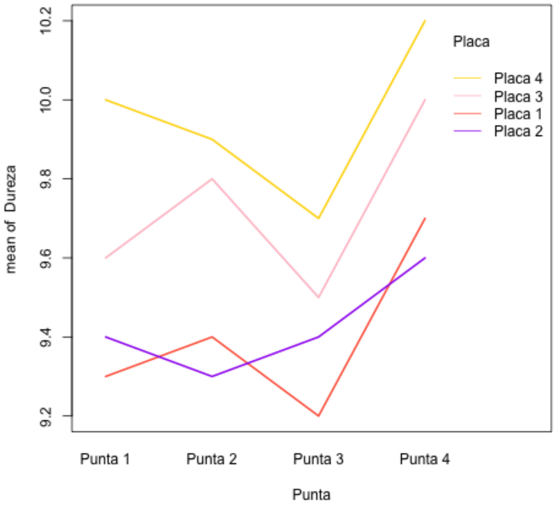
La media general de la dureza de las diferentes puntas es 9.62 con una varianza de 0.09. Las medias por tipo de punta son 9.57, 9.60, 9.45 y 9.88; mientras que las medias por placa son 9.40, 9.43, 9.72 y 9.95.

Cuadro: Medias de la dureza de las diferentes puntas.

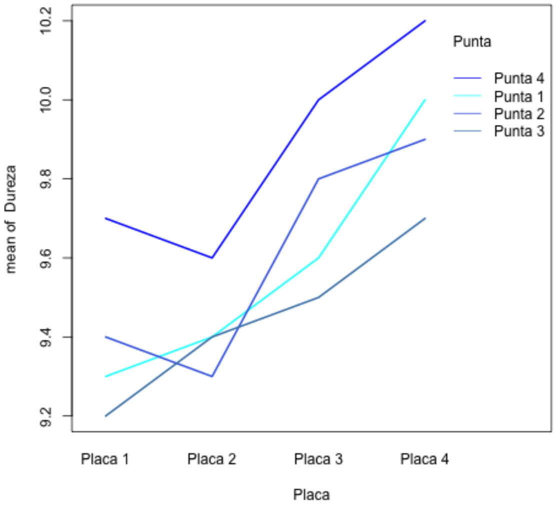
Punta	Media dureza		Varianza
General	9.62		0.09
Punta			
1	9.575	b	0.10
2	9.600	b	0.09
3	9.450	b	0.04
4	9.875	a	0.08
Placa			
1	9.40		0.05
2	9.43		0.02
3	9.72		0.05
4	9.95		0.04

Medias con la misma letra son estadísticamente iguales

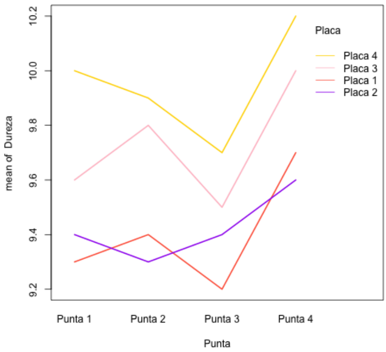
Gráfica de interacción

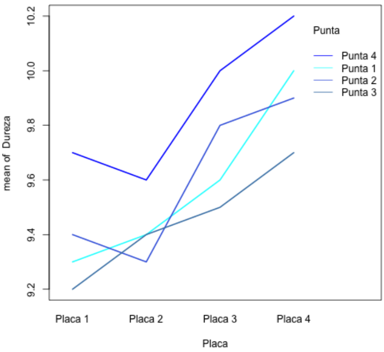


Gráfica de interacción



Gráfica de interacción





- El modelo es aditivo (Las medias tienen la misma tendencia)
- No hay interacción (Las medias tienen la misma tendencia)
- Las medias de la Punta 4 son las mayores sin importar la Placa.
- El cambio en la dureza es el mismo en las placas? Y en las puntas?

Postulación del modelo

- Modelo estadístico (Diseño en bloques completos al azar)

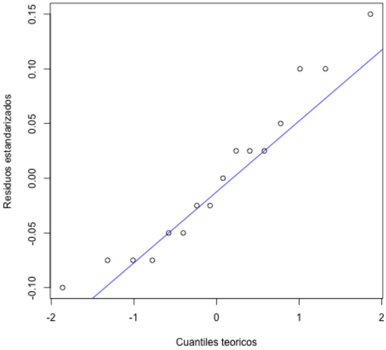
$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} \sim IIDN(0, \sigma^2) \\ i &= 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

- La variable respuesta es la medida de la dureza.
- Hay un Factor de interés: Punta que tiene cuatro niveles o tratamientos (1, 2, 3 y 4).
- Hay cuatro Bloques que corresponden a las Placas que son muy variables (gradiente de variación).
- El diseño es balanceado y completo.

Los parámetros se estiman usando el paquete estadístico R. Se usa la teoría de estimación de Método de Mínimos Cuadrados o de Máxima Verosimilitud.

Se cumplieron los supuestos?

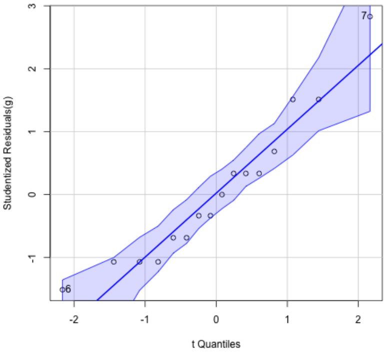
QQ-Plot de los residuos[2]



Los errores tienen distribución normal.

[2] **Correcto** Caigan pegados a la diagonal. **Problemas** Separación de la diagonal

QQ-Plot de los residuos[3]



Los errores tienen distribución normal.

3 **Correcto** Caigan pegados a la diagonal. **Problemas** Separación de la diagonal

Distribución Normal

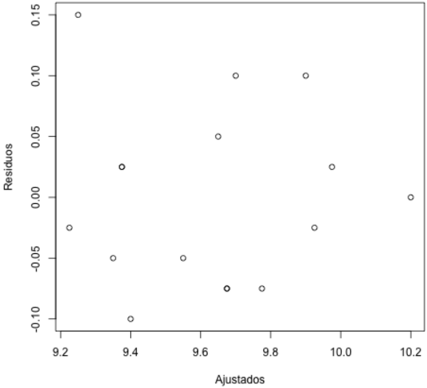
H_0 : Los errores tienen distribución normal
H_1 : Los errores NO tienen distribución normal

```
Shapiro-Wilk normality test         W = 0.93957, p-value = 0.3438

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
D = 0.13395, p-value = 0.62

Anderson-Darling normality test     A = 0.37514, p-value = 0.3704

Cramer-von Mises normality test     W = 0.055036, p-value = 0.4175

Pearson chi-square normality test  P = 5.875, p-value = 0.2087

Shapiro-Francia normality test      W = 0.94777, p-value = 0.3854

Jarque Bera Test           X-squared = 1.0723, df = 2, p-value = 0.585
```

Los errores tienen distribución normal (Shapiro-Wilk $W = 0.94$, p = 0.34).

Homogeneidad de varianzas

Gráfica de valores predichos vs residuos [4]



[4] El diseño y ejecución del experimento debe garantizar la independencia de las observaciones.

Correcto Que no haya un patrón. **Problemas** Se observe un patrón (curva, recta, embudo).

Homogeneidad de varianzas

H_0: Las varianzas de la dureza de las puntas son iguales; contra
H_1: Las varianzas de la dureza de las puntas no son iguales.

```
Bartlett test of homogeneity of variances
Bartlett's K-squared = 1.0123, df = 3, p-value = 0.7983

Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
      Df F value Pr(>F)
group  3  0.2182 0.8819
      12

 Fligner-Killeen test of homogeneity of variances
Fligner-Killeen:med chi-squared = 2.1398, df = 3, p-value
= 0.5439
```

Las varianzas de la dureza de las puntas son estadísticamente iguales (Bartlett $K^2(3) = 1.01$, $p = 0.80$).

Todo bien!
Podemos interpretar los resultados!

Coeficiente de determinación

```
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-0.10000 -0.05625 -0.01250  0.03125  0.15000 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)   9.35000    0.06236 149.934  < 2e-16 ***
PlacaPlaca 2  0.02500    0.06667   0.375 0.716345    
PlacaPlaca 3  0.32500    0.06667   4.875 0.000877 ***
PlacaPlaca 4  0.55000    0.06667   8.250 1.73e-05 ***
PuntaPunta 2  0.02500    0.06667   0.375 0.716345    
PuntaPunta 3 -0.12500    0.06667  -1.875 0.093550 .  
PuntaPunta 4  0.30000    0.06667   4.500 0.001489 ** 

Residual standard error: 0.09428 on 9 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.938,Adjusted R-squared:  0.8966 
F-statistic: 22.69 on 6 and 9 DF,  p-value: 5.933e-05
```

El 94 % de la variación en la dureza es explicada por el diseño en bloques completos al azar ($R^2 = 0.938$).

ANOVA

```
Analysis of Variance Table
          Df Sum Sq  Mean Sq F value    Pr(>F)    
Placa      3  0.825 0.275000  30.938 4.523e-05 ***
Punta      3  0.385 0.128333  14.438 0.0008713 ***
Residuals  9  0.080 0.008889
```

Se rechaza $H_0 : \mu_{P1} = \mu_{P2} = \mu_{P3} = \mu_{P4}$

Las medias de la dureza de las puntas **NO** son estadísticamente iguales ($F_{(3,9)} = 14.4,\ p < 0.001$).

Hay efecto de las puntas en la dureza ($F_{(3,9)} = 14.4,\ p < 0.001$).

Se rechaza $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$.

Las medias de la dureza de los **placas** no son estadísticamente iguales ($F_c(3,9) = 30.9, \quad p < 0.001$).

(No es correcto hacer esta prueba!!!).

Comparaciones múltiples

Comparaciones múltiples

Comparaciones múltiples

Prueba de Tukey

```
> CompHSD=HSD.test(gaov, "Punta",  main="")
$statistics
      MSerror Df  Mean        CV       MSD
  0.008888889  9 9.625 0.9795419 0.2081199

$parameters
    test name.t ntr StudentizedRange alpha
  Tukey  Punta   4          4.41489  0.05

$groups
          Dureza groups
Punta 4  9.875      a
Punta 2  9.600      b
Punta 1  9.575      b
Punta 3  9.450      b
```

Prueba de Tukey

- La prueba de Tukey identifica dos grupos de medias de la dureza de las puntas estadísticamente diferentes.
- El grupo con la mayor media de la dureza contiene solo a la Punta 4.
- El grupo con las menores medias de la dureza contiene a las Puntas 2, 1 y 3.

Prueba de Dunett

Supongamos que la Punta 1 es el tratamiento tradicional o estándar y los otros tres son nuevas opciones.

```
Multiple Comparisons of Means: Dunnett Contrasts

Fit: aov(formula = Dureza ~ Placa + FPunta)

                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
Punta 2 - Punta 1 == 0  0.02500    0.06667   0.375  0.96421
Punta 3 - Punta 1 == 0 -0.12500    0.06667  -1.875  0.21141
Punta 4 - Punta 1 == 0  0.30000    0.06667   4.500  0.00411 **
```

La media de la dureza de las Puntas 1 y 4 son estadísticamente diferentes.

Comparaciones múltiples

Cuadro: Comparaciones múltiples con los diferentes métodos.

Punta	Media dureza	Tukey	Duncan	LSD	SNK	Scheffe	Dunnett
Punta 4	9.875	a	a	a	a	a	$\neq$
Punta 2	9.600	b	b	b	b	b	$=$
Punta 1	9.575	b	b	b	b	b	*
Punta 3	9.450	b	b	b	b	b	$=$

Medias con la misma letra son estadísticamente iguales

Planteamiento

El experimento compara 4 procesos de producción de penicilina (tratamientos): A, B, C y D. El material, licor de maíz, es bastante variable y únicamente puede ser hecho en mezclas suficientes para cuatro corridas. Así, un diseño en bloques al azar es sugerido por la naturaleza de las unidades experimentales. Los datos son

	A	B	C	D
Blend 1	89	88	97	94
Blend 2	84	77	92	79
Blend 3	81	87	87	85
Blend 4	87	92	89	84
Blend 5	79	81	80	88

Que proceso produce mas penicilina?

Faraway, JJ. 2002. [1] Practical Regression and Anova using R. p186.

Los datos en los libros:

	A	B	C	D
Blend 1	89	88	97	94
Blend 2	84	77	92	79
Blend 3	81	87	87	85
Blend 4	87	92	89	84
Blend 5	79	81	80	88

```
   treat  blend yield
1      A Blend1    89
2      B Blend1    88
3      C Blend1    97
4      D Blend1    94
5      A Blend2    84
6      B Blend2    77
7      C Blend2    92
8      D Blend2    79
9      A Blend3    81
10     B Blend3    87
11     C Blend3    87
12     D Blend3    85
13     A Blend4    87
14     B Blend4    92
15     C Blend4    89
16     D Blend4    84
17     A Blend5    79
18     B Blend5    81
19     C Blend5    80
20     D Blend5    88
```

Los datos en R:
Factor, Bloque y VR.

Aleatorización

https://www.youtube.com/watch?v=KjEJX3rbLhY
https://www.youtube.com/watch?v=_KvK_Y_JUZ8

- Los procesos se asignan al azar dentro de cada mezcla.
- Se realiza una aleatorización independiente en cada mezcla.

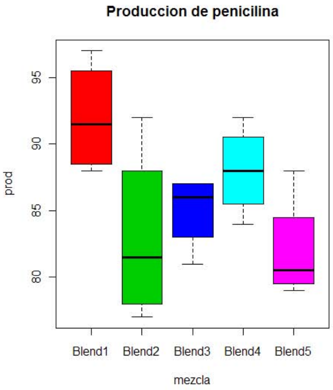
El factor **Proceso de producción** tiene cuatro niveles: *A*, *B*, *C* y *D*. Se realizará un experimento con cinco bloques completos.

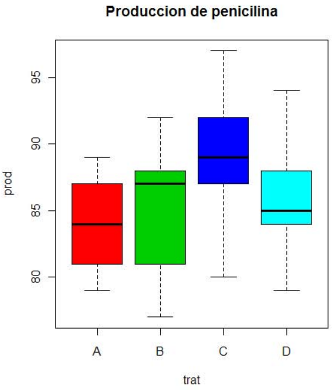
```
# 4 treatments and 5 blocks
trt<-c("A","B","C","D")
outdesign <-design.rcbd(trt, 5,serie=1,seed = 986,kinds = "Wi
outdesign
```

```
   plots block trt
1     11     1   A
2     12     1   B
3     13     1   D
4     14     1   C
5     21     2   B
6     22     2   D
7     23     2   A
8     24     2   C
9     31     3   D
10    32     3   B
11    33     3   A
12    34     3   C
13    41     4   D
14    42     4   B
15    43     4   C
16    44     4   A
17    51     5   B
18    52     5   A
19    53     5   D
20    54     5   C
```

- Se usan 20 UE.
- La columna uno y *plots*: no importan.
- *block*: indica el bloque (Mezcla de licor).
- En la Mezcla de licor 1 (ML1) los tratamientos se usan en el orden A, B, D y C.
- En la ML2 los tratamientos se usan en el orden B, D, A y C.
- En la ML3 los tratamientos se usan en el orden D, B, A y C.

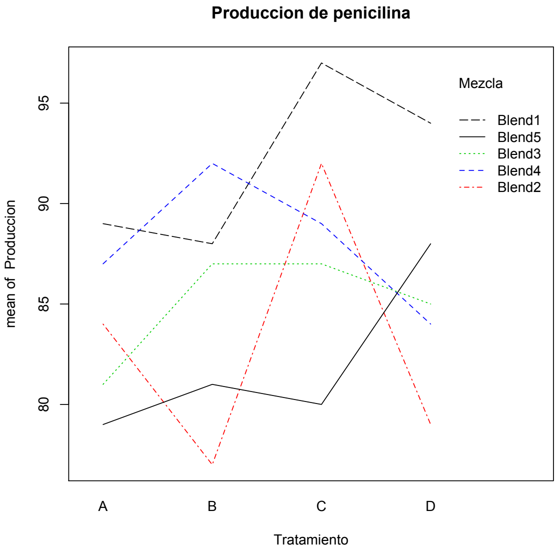
Análisis Exploratorio



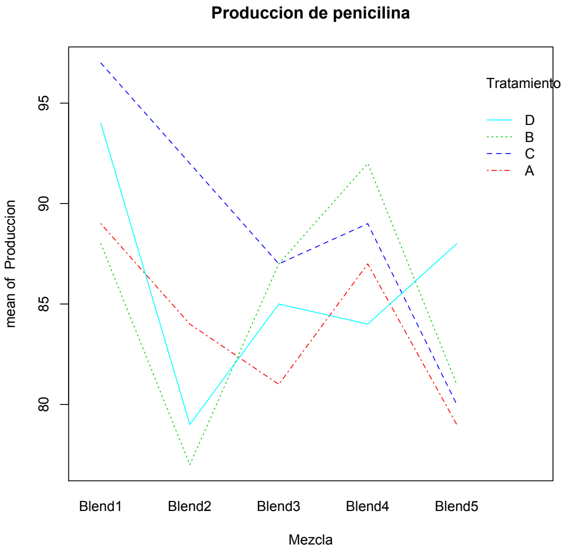


- Outliers (Puntos separados en el diagrama de cajas)
- Sesgo (Simetría de las cajas)
- Varianzas homogéneas (Tamaños de cajas iguales)

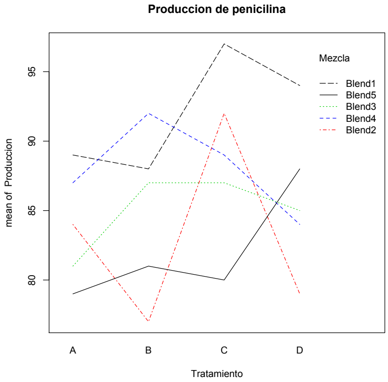
Gráfica de interacción

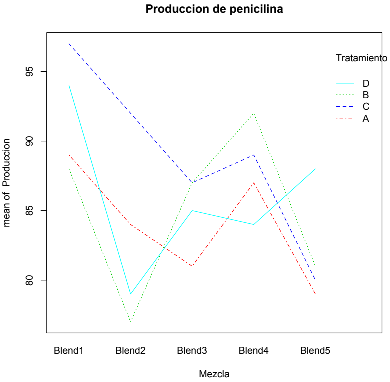


Gráfica de interacción



Gráfica de interacción





- El modelo es aditivo? (Las medias tienen la misma tendencia)
- Hay interacción? (Las medias **NO** tienen la misma tendencia)
- El cambio en la producción de penicilina es el mismo en los bloques? Y en las mezclas?

```
> Mprod=mean(prod);  round(Mprod, 2)
[1] 86
> Vprod=var(prod);   round(Vprod, 2)
[1] 29.47

> Mtrat = tapply(prod, trat, mean); round(Mtrat, 2)
 A  B  C  D
84 85 89 86
> Vtrat = tapply(prod, trat, var); round(Vtrat, 5)
   A    B    C    D
17.0 35.5 39.5 30.5

> Mmezcla = tapply(prod, mezcla, mean); round(Mmezcla, 2)
Blend1 Blend2 Blend3 Blend4 Blend5
    92     83     85     88     82
> Vmezcla = tapply(prod, mezcla, var);  round(Vmezcla, 2)
Blend1 Blend2 Blend3 Blend4 Blend5
 18.00  44.67   8.00  11.33  16.67
```

Postulación del modelo

- Modelo estadístico (Diseño en bloques completos al azar)

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &= \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} \sim IIDN(0, \sigma^2) \\
i &= 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

- La variable respuesta es la producción de penicilina.
- Solo hay un Factor: Proceso de producción que tiene cuatro niveles o tratamientos (A, B, C y D).
- Son cinco Bloques que corresponden a las Mezclas de licor de maíz que son muy variables (gradiente de variación).
- El modelo es balanceado.

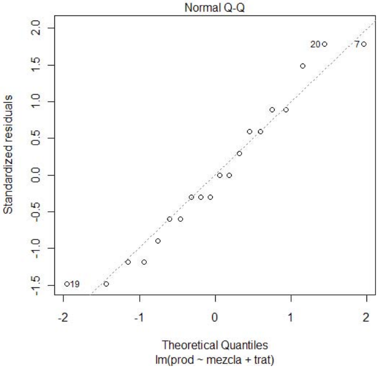
Estimación del modelo

Los parámetros se estiman usando el paquete estadístico R. Implícitamente se usa el Método de Mínimos Cuadrados o el de Máxima Verosimilitud.

Se cumplieron los supuestos?

Distribución Normal

QQ-Plot de los residuos[5]



Los errores tienen distribución normal.

5 **Correcto** Caigan pegados a la diagonal. **Problemas** Separación de la diagonal

Distribución Normal

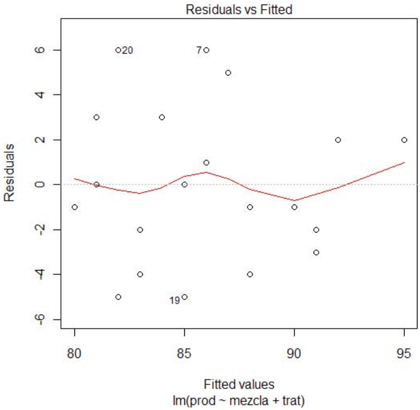
H_0 : Los errores tienen distribución normal
H_1 : Los errores NO tienen distribución normal

```
Shapiro-Wilk normality test
W = 0.95047, p-value = 0.3743

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
D = 0.11407, p-value = 0.709

Anderson-Darling normality test
A = 0.27568, p-value = 0.6201

Cramer-von Mises normality test
W = 0.03563, p-value = 0.7451

Shapiro-Francia normality test
W = 0.96666, p-value = 0.5927

Pearson chi-square normality test
P = 2.4, p-value = 0.6626
```

Los errores tienen distribución normal (Shapiro-Wilk $W = 0.95$, $\mathbf{p = 0.37}$).

Independencia

Gráfica de valores predichos vs residuos [6]



Los errores son independientes.

[6] El diseño y ejecución del experimento debe garantizar la independencia de las observaciones.

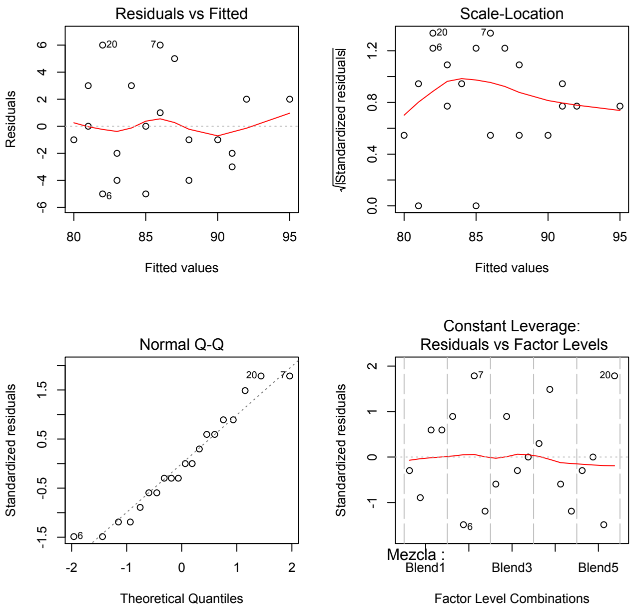
Correcto Que no haya un patrón. **Problemas** Se observa un patrón (curva, recta, embudo).

Homogeneidad de varianzas

H_0: Las varianzas de producción de penicilina de los procesos son iguales; contra H_1: Las varianzas de producción de penicilina de los procesos no son iguales

```
        Bartlett test of homogeneity of variances
Bartlett's K-squared = 2.245, df = 3, p-value = 0.5231

Levene's Test for Homogeneity of Variance
      Df F value Pr(>F)
group  3  0.7716 0.5267
      16

        Fligner-Killeen test of homogeneity of variances
Fligner-Killeen  chi-squared=2.355, df=3, p-value =0.5021
```

Las varianzas de la producción de penicilina de los procesos son estadísticamente iguales (Bartlett $K^2(3) = 1.67$, p = 0.6).


Residuals vs Fitted
Residuals
Fitted values
Scale-Location
√|Standardized residuals|
Fitted values
Normal Q-Q
Standardized residuals
Theoretical Quantiles
Constant Leverage:
Residuals vs Factor Levels
Standardized residuals
Mezcla :
Blend1
Blend3
Blend5
Factor Level Combinations

Todo bien!
Podemos interpretar los resultados!

Coeficiente de determinación

```
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     90.000      2.745  32.791  4.1e-13 ***
mezclaBlend2    -9.000      3.069  -2.933  0.01254 *
mezclaBlend3    -7.000      3.069  -2.281  0.04159 *
mezclaBlend4    -4.000      3.069  -1.304  0.21686
mezclaBlend5   -10.000      3.069  -3.259  0.00684 **
tratB            1.000      2.745   0.364  0.72194
tratC            5.000      2.745   1.822  0.09351 .
tratD            2.000      2.745   0.729  0.48018

Residual standard error: 4.34 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5964,Adjusted R-squared:  0.361
F-statistic: 2.534 on 7 and 12 DF,  p-value: 0.07535
```

El 60 % de la variación en la producción de penicilina es explicada por el diseño en bloques completos al azar ($R^2 = 0.5964$).

$\widehat{\sigma}^2 = 4.34^2 = 18.833$

ANOVA

```
          Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)  
mezcla     4    264  66.000  3.5044 0.04075 *
trat       3     70  23.333  1.2389 0.33866  
Residuals 12    226  18.833                  
```

No se rechaza $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$ $(F_c(3, 12) = 1.24, p = 0.34)$
Las medias de la producción de penicilina de los procesos son estadísticamente iguales ($F_{(3,12)} = 1.24,\ p = 0.34$).
No hay efecto de los procesos en la producción de penicilina ($F_{(3,12)} = 1.24,\ p = 0.34$).

Se rechaza $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5$ $(F_c = 3.50, \quad p = 0.04)$
Conclusión:
Las medias de la producción de penicilina de los mezclas de licor son diferentes (No es correcto hacer esta prueba).

ANOVA

Los cuatro procesos producen medias de producción de penicilina estadísticamente iguales.

Las comparaciones múltiples no deben hacerse si no se rechazó H_0.

Ejercicios

Ejercicios

Ejercicios

Ejercicio 1 BxCx

Un químico quiere probar el efecto de cuatro agentes químicos sobre la resistencia de un tipo particular de tela. Debido a que podría haber variabilidad de un rollo de tela a otro, el químico decide usar un diseño de bloques aleatorizados, con los rollos de tela considerados como bloques. Selecciona cinco rollos y aplica los cuatro agentes químicos de manera aleatoria a cada rollo. A continuación se presentan las resistencias a la tensión resultantes. Analizar los datos de este experimento (utilizar $\alpha = 0.05$) y sacar las conclusiones apropiadas.

Agente químico	Rollo 1	2	3	4	5
1	73	68	74	71	67
2	73	67	75	72	70
3	75	68	78	73	68
4	73	71	75	75	69

Ejercicio 2

Considere el experimento del algoritmo de control de radio. El experimento fue conducido realmente como un diseño en bloques al azar, donde seis periodos de tiempo fueron seleccionados como los bloques, y los cuatro algoritmos de control de radio fueron probados en cada período de tiempo a la vez. El voltaje medio de la célula y la desviación estándar del voltaje (mostrado entre paréntesis) para cada celda son (use $\alpha = 0.05$).

Algoritmo	Periodo de tiempo					
de control	1	2	3	4	5	6
1	4.93 (0.05)	4.86 (0.04)	4.75 (0.05)	4.95 (0.06)	4.79 (0.03)	4.88 (0.05)
2	4.85 (0.04)	4.91 (0.02)	4.79 (0.03)	4.85 (0.05)	4.75 (0.03)	4.85 (0.02)
3	4.83 (0.09)	4.88 (0.13)	4.90 (0.11)	4.75 (0.15)	4.82 (0.08)	4.90 (0.12)
4	4.89 (0.03)	4.77 (0.04)	4.94 (0.05)	4.86 (0.05)	4.79 (0.03)	4.76 (0.02)

Ejercicio 3

Tres soluciones para lavar se están comparando para estudiar su eficacia en retardar el crecimiento de las bacterias en envases de leche de 5 galones. El análisis se hace en un laboratorio y solamente tres ensayos se pueden realizar en cualquier día. Debido a que los días podrían representar una fuente potencial de variabilidad, el experimentador decide utilizar un diseño en bloques al azar. Las observaciones se toman por cuatro días. Analice los datos de este experimento (use $\alpha = 0.05$).

	Dias			
Solución	1	2	3	4
1	13	22	18	39
2	16	24	17	44
3	5	4	1	22

Ejercicio 4

El fabricante de una aleación maestra de aluminio produce refinadores de textura en forma de lingotes. La compañía produce el producto en cuatro hornos. Se sabe que cada horno tiene sus propias características únicas de operación, por lo que en cualquier experimento que se corra en la fundición en el que se use más de un horno, los hornos se considerarán como una variable perturbadora. Los ingenieros del proceso sospechan que la velocidad de agitación afecta la medida de la textura del producto. Cada horno puede operarse con cuatro diferentes velocidades de agitación. Se lleva a cabo un diseño de bloques aleatorizados para un refinador particular y los datos resultantes de la medida de la textura se muestran a continuación:

	Horno			
Velocidad de agitación (rpm)	1	2	3	4
5	8	4	5	6
10	14	5	6	9
15	14	6	9	2
20	17	9	3	6

a) ¿Existe evidencia de que la velocidad de agitación afecta la medida de la textura?

b) Representar los residuales de este experimento en una gráfica de probabilidad normal. Interpretar esta gráfica.

c) Graficar los residuales contra el horno y la velocidad de agitación. ¿Esta gráfica proporciona alguna información útil?

d) ¿Cuál sería la recomendación de los ingenieros del proceso con respecto a la elección de la velocidad de agitación y del horno para este refinador de textura particular si es deseable una medida de la textura pequeña?

Faraway, J. J.
Practical Regression and Anova using R.
Chapman & Hall 2002; 229

Montgomery C. D. (2005).
Design and analysis de experiments
6ta. Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Montgomery, C. D. (2005).
Diseño and análisis de experimentos.
2a. Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Montgomery, C. D. (2004).
Diseño y analisis de experimentos.
Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Montgomery, C. D. (2010).
Diseño y análisis of experimentos.
Editorial Limusa. Mexico

Peña D. (2002).
Regresión y diseño de experimentos.
Alianza Editorial. Madrid.

Fox J and S Weisberg. (2011).
An R Companion to Applied Regression,
Second Edition. Thousand Oaks CA: Sage. Recuperado de
http://socserv.socsci.mcmaster.ca/jfox/Books/Companion

Gross, J., y U. Ligges. (2015).
nortest: Tests for normality.

R package versión 1.0-4. Recuperado de https://CRAN.R-project.org/package=nortest