Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики»

Студентка 515 группы
А. А. Наумова

Руководитель практикума
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

Дана система, описывающая динамику численности популяций жертвы и хищника:

$$\begin{cases} \dot{u} = au - \dfrac{bu^2 v}{1 + Pu} + d_1 u_{xx}, \\ \dot{v} = -cv + \dfrac{du^2 v}{1 + Pu} + d_2 v_{xx}. \end{cases}$$

Требуется:

1. Сделать замены переменных
2. Исследовать фазовый портрет нераспределенной системы (неподвижные точки, их тип, изоклины)
3. Проверить наличие волновых решений распределенной системы
4. Выбрать подходящее решение и скорость волны
5. Привести иллюстрации и графики фазовых портретов и решений

2 Исследование нераспределенной системы

2.1 Замена переменных

Пусть
$$\widetilde{u} = \alpha u; \widetilde{v} = \beta u; \widetilde{t} = \gamma t; \widetilde{x} = \delta x.$$
Тогда система примет следующий вид:
$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{t}} = \dfrac{a}{\alpha}\widetilde{u} - \dfrac{b}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_1\dfrac{\delta^2}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}, \\ \dfrac{\gamma}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{t}} = \dfrac{-c}{\beta}\widetilde{v} + \dfrac{d}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_2\dfrac{\delta^2}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}. \end{cases}$$
Чтобы избавиться от лишних коэффициентов, возьмем
$$\gamma = a; \beta = \frac{b}{a}; \alpha = P; \delta = \sqrt{\frac{a}{d_2}}.$$
Получим
$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - \dfrac{1}{P}\dfrac{uv}{1+u}\right) + \dfrac{d_1}{d_2}u_{xx}, \\ \dot{v} = \dfrac{-c}{a}v\left(1 - \dfrac{d}{P^2c}\dfrac{u^2}{1+u}\right) + v_{xx}. \end{cases}$$
Переобозначим
$$k_1 = \frac{1}{P}; k_2 = \frac{-c}{a}; k_3 = \frac{d}{P^2c}.$$
Предполагаем, что $d_1 = 0$ (жертвы сконцентрированы в одной точке). Тогда получаем систему размерности 3:
$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - k_1\dfrac{uv}{1+u}\right), \\ \dot{v} = k_2v\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) + v_{xx}. \end{cases}$$

2.2 Неподвижные точки и их тип

Якобиан системы имеет вид:
$$\text{J(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 - k_1uv\dfrac{2+u}{(1+u)^2} & -k_1\dfrac{u^2}{1+u} \\ -k_2k_3uv\dfrac{2+u}{(1+u)^2} & k_2\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) \end{pmatrix}$$
Рассмотрим неподвижную точку $T_1 = (0, 0)$.

Якобиан в этой точке принимает вид: $\text{J(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Так как существует собственное значение с положительной вещественной частью ($\lambda_1 = 1$, то данная точка неустойчива по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Далее рассмотрим систему уравнений, решения которой отвечают изоклинам рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} 1 - k_1 \dfrac{uv}{1+u} = 0, \\ 1 - k_3 \dfrac{u^2}{1+u} = 0. \end{cases}$$

Решение второго уравнения: $u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

Так как $k_3 > 0$, в область $\mathcal{R}^+$ попадает только $u^* = \dfrac{1+\sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

Для удобства вычислений возьмем $k_3 = 1$. Также будем помнить, что $k_1 > 0; k_2 \leq 0$; (плюс еще надо не забыть рассмотреть случаи $P = 0; c = 0; d = 0$).

Тогда $u^* = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, v^* = \dfrac{1+u^*}{k_1 u^*} = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right) = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$.

Исследуем теперь данную неподвижную точку $T_2 = (u^*, v^*)$.

Якобиан в этой точке принимает вид:

$$\text{J(u*,v*)} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}} + 1 & -\frac{k_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}} \\ -\frac{k_2\left(1+\sqrt{5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{k_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\right)} & k_2\left(-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}} + 1\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\tfrac{21\sqrt{5}\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} + \tfrac{47\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\lambda_2 = -\tfrac{47\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} + \tfrac{21\sqrt{5}\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{\sqrt{5}}{4}$$

После упрощения выражений и численного вычисления значений получаем:

$$\lambda_1 = -0.190983005625053 + 1.17557050458504\sqrt{(k_2 + 0.026393202250021)}$$

$$\lambda_2 = -0.190983005625053 - 1.17557050458504\sqrt{(k_2 + 0.026393202250021)}$$

Заметим, что при $k_2 = (\dfrac{0.190983005625053}{1.17557050458504})^2 - 0.026393202250021 = 0$ $\lambda_1 = 0$. Вспомним также, что $k_2 \leq 0$. Получим несколько возможных случаев.

1) $-0.026393202250021 \leq k_2 < 0$.

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

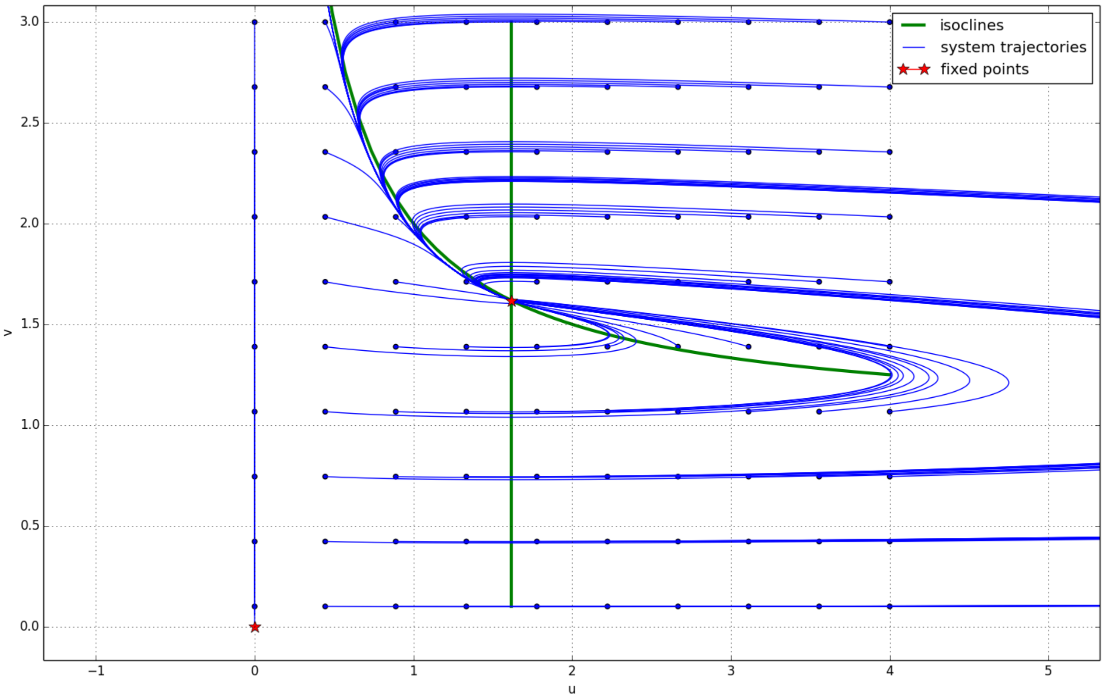
2) $k_2 < -0.026393202250021$.

$Re(\lambda_1) < 0, Re(\lambda_2) < 0, Im(\lambda_1) > 0, Im(\lambda_2) < 0$

Оба положения устойчивы.

2.3 Фазовый портрет

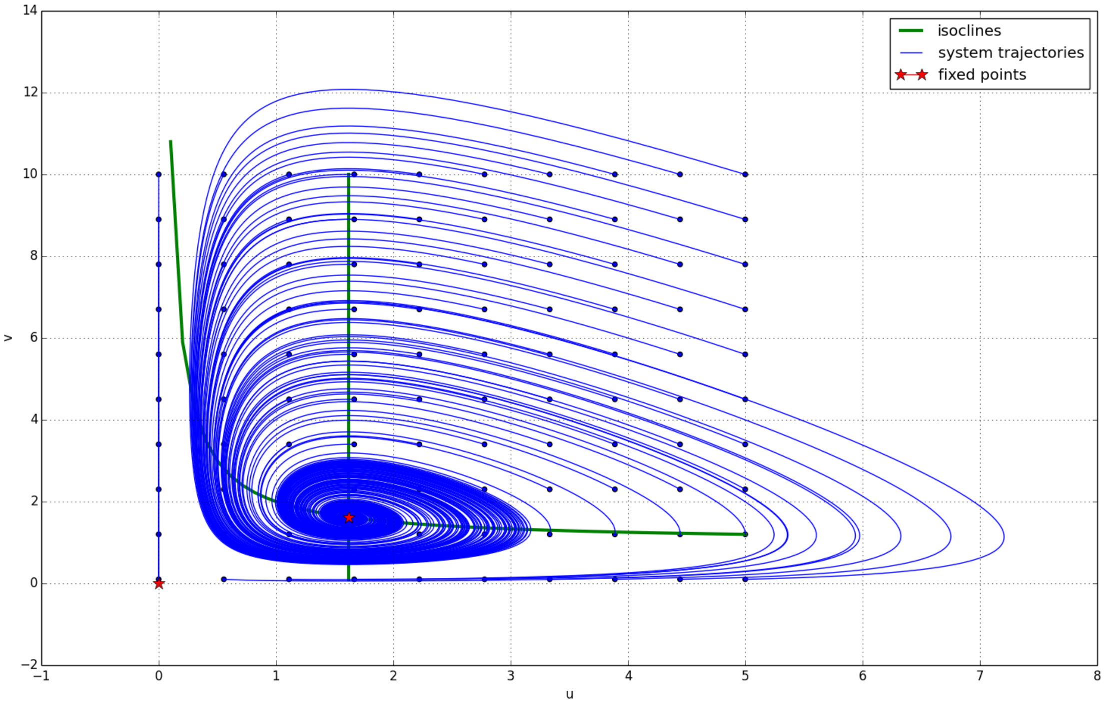
2.3.1 Случай 1



Данный фазовый портрет был построен при $k_1 = 1, k_2 = -0.02, k_3 = 1$, точки начала траекторий расположены на сетке 10x10, с параметрами $\mathrm{start}_u = 0.0, stop_u = 4.0, start_v = 0.1, stop_v = 3.0, stop_t = 100, num_t = 10000$.

Видим, что неподвижная точка $T_2 = (u^*, v^*)$ устойчива, к ней устремляются все трактории, кроме наинающихся в 0. А точка $T_1 = (0, 0)$ неучтойчива - траектории с $u_0 = 0$ стремятся к ней, а траектории с $v_0 = 0$ удаляются от нее.

2.3.2 Случай 2



Данный фазовый портрет был построен при $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1$, точки начала траекторий расположены на сетке 10x10, с параметрами $\text{start}_u = 0.0, stop_u = 5.0, start_v = 0.1, stop_v = 10.0, stop_t = 100, num_t = 10000$.

3 Исследование распределенной системы

3.1 Замена переменных

Волновые решения ищем в форме: $u(t,x) = u(x+ct), v(t,x) = v(x+ct)$, где $c > 0$. Подставим это в уравнение системы. Получим:

$$\begin{cases} cu'(z) = u(z)\left(1 - k_1 \dfrac{u(z)v(z)}{1+u(z)}\right), \\ cv'(z) = k_2 v(z)\left(1 - k_3 \dfrac{u(z)^2}{1+u(z)}\right) + v''(z). \end{cases}$$

Введем переменную w и перепишем систему:

$$\begin{cases} cu'(z) = u(z)\left(1 - k_1 \dfrac{u(z)v(z)}{1+u(z)}\right), \\ v'(z) = w(z), \\ w'(z) = cw(z) - k_2 v(z)\left(1 - k_3 \dfrac{u(z)^2}{1+u(z)}\right). \end{cases}$$

3.2 Неподвижные точки и их тип

У этой системы 2 неподвижных точки, попадающих в рассматриваемую область значений: $\overline{O} = (0,0,0)$ и $\overline{P} = (u^*, v^*, 0)$, где $u^* = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, v^* = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$.

Якобиан системы имеет вид:

$$\text{J(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}(1 - k_1 uv\dfrac{2+u}{(1+u)^2}) & \dfrac{-k_1}{c}\dfrac{u^2}{1+u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 k_3 uv\dfrac{2+u}{(1+u)^2} & -k_2\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) & c \end{pmatrix}$$

Рассмотрим Якобиан в точках $\overline{O}$ и $\overline{P}$.

$$\text{J(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & c \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$k_2\left(-\lambda + \frac{1}{c}\right) - \lambda\left(c - \lambda\right)\left(-\lambda + \frac{1}{c}\right) = 0$
Имеет корни:

$\lambda_1 = \frac{1}{c}$;

$\lambda_2 = \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2-4k_2}}{2}$;

$\lambda_3 = \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2-4k_2}}{2}$;

Так как $k_2 < 0, c > 0$, получим $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$. Точка неустойчива.

$$J(u^*, v^*, 0) = \begin{pmatrix} \frac{-\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}+1}{c} & -\frac{k_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{c\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2\left(1+\sqrt{5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{k_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\right)} & -k_2\left(-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}+1\right) & c \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$k_2\left(-\lambda+\frac{-\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}+1}{c}\right)\left(-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}+1\right)-\lambda(c-\lambda)\left(-\lambda+\frac{-\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}+1}{c}\right)-\frac{k_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(c-\lambda)\left(1+\sqrt{5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{c\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\right)^2} = 0$$

Имеет корни:

$\lambda_1 = c$;

$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{37396\sqrt{5}ck_2+83620ck_2+987\sqrt{5}+2207}-47-21\sqrt{5}}{110\sqrt{5}c+246c} =$
$= \frac{1}{c}(1.17557050458495 * \sqrt{c * k2 + 0.026393202250021} - 0.190983005625053)$;

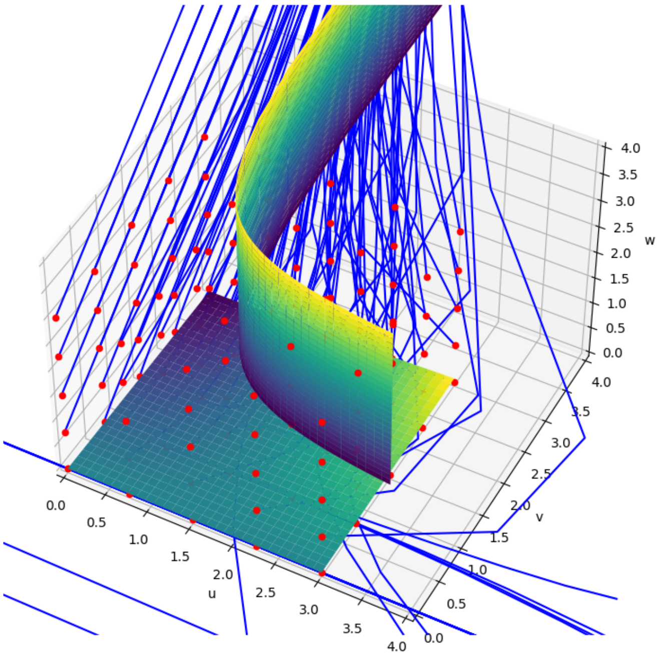
$\lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{37396\sqrt{5}ck_2+83620ck_2+987\sqrt{5}+2207}+21\sqrt{5}+47}{110\sqrt{5}c+246c} =$
$= \frac{1}{c}(-1.17557050458495 * \sqrt{c * k2 + 0.026393202250021} - 0.190983005625053)$;

$\lambda_1 > 0, Re(\lambda_3) < 0, Re(\lambda_2)$ может быть как >0 так и <0 в зависимости от c и k_2. Точка неустойчива.

3.3 Проверка наличия волновых решений

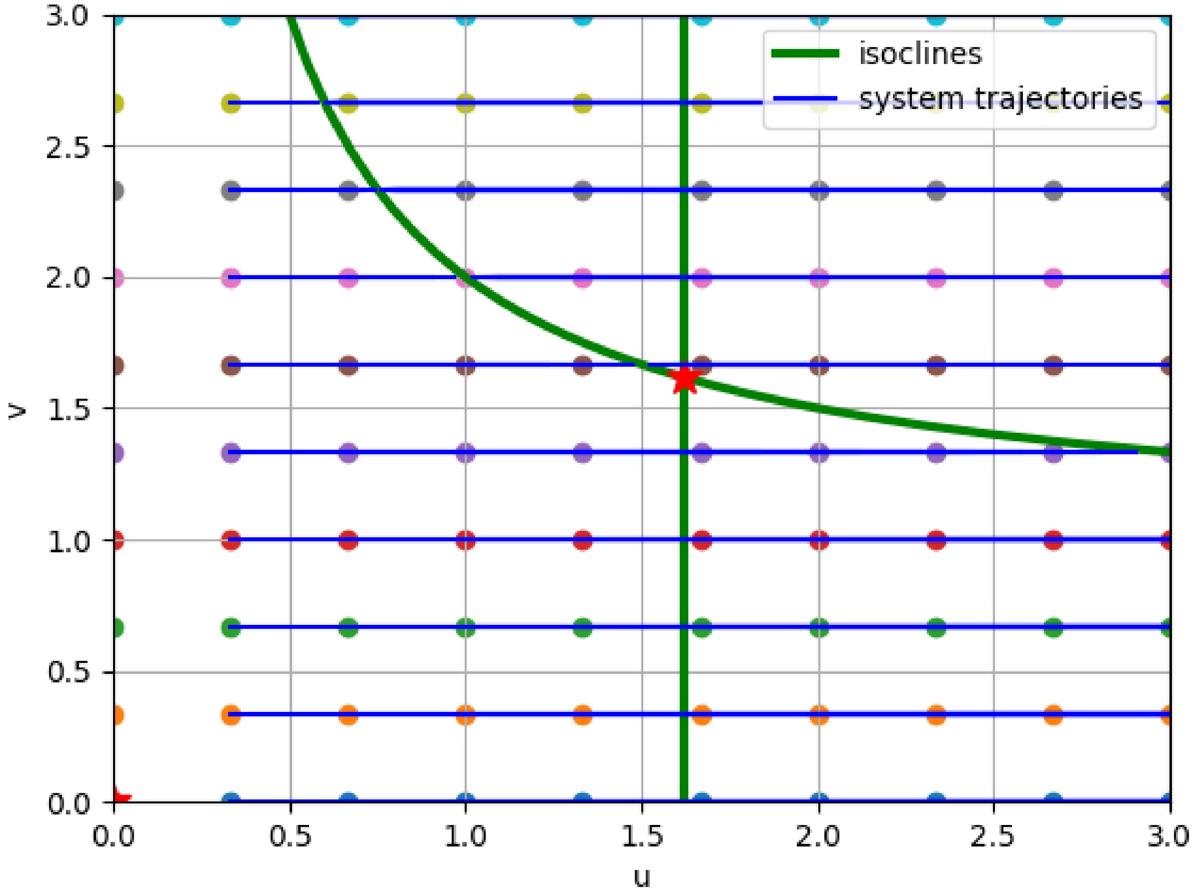
Точка $\overline{O}$ имеет одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразие. Точка $\overline{P}$ имеет одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразие, либо двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразие.

На данном графике изображено поведение траекторий и изоповерхности для распределенной системы.



Видим, что траектории с > 0 удаляются от неподвижных точек.

Так как обе неподвижные точки находятся на плоскости $w = 0$, рассмотрим поведение траекторий, находящихся на данной плоскости.



Из графика (а также из того факта, что при $w = 0$ $u' = 0$) получаем горизонтально направленные траектории, из чего следует, что не существует траекторий, которые попали бы из точки $\overline{O}$ в точку $\overline{P}$, поскольку для этого было бы необходимо иметь $u' > 0$.

Получаем, что в данной системе нет волновых решений.

Список литературы

[1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011 г.