Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики»

Студентка 515 группы
А. А. Наумова

Руководитель практикума
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{u} = au - \dfrac{bu^2v}{1+Pu} + d_1 u_{xx}, \\ \dot{v} = -cv + \dfrac{du^2v}{1+Pu} + d_2 v_{xx}. \end{cases}$$

2 Исследование фазового портрета нераспределенной системы

2.1 Замена переменных

Пусть

$$\widetilde{u} = \alpha u; \widetilde{v} = \beta u; \widetilde{t} = \gamma t; \widetilde{x} = \delta x.$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{t}} = \dfrac{a}{\alpha}\widetilde{u} - \dfrac{b}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_1\dfrac{\delta^2}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}, \\ \dfrac{\gamma}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{t}} = \dfrac{-c}{\beta}\widetilde{v} + \dfrac{d}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_2\dfrac{\delta^2}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от лишних коэффициентов, возьмем

$$\gamma = a; \beta = \frac{b}{a}; \alpha = P; \delta = \sqrt{\frac{a}{d_1}}.$$

Получим

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - \dfrac{1}{P}\dfrac{uv}{1+u}\right) + u_{xx}, \\ \dot{v} = \dfrac{-c}{a}v\left(1 - \dfrac{d}{P^2c}\dfrac{u^2}{1+u}\right) + \dfrac{d_2}{d_1}v_{xx}. \end{cases}$$

Переобозначим

$$k_1 = \frac{1}{P}; k_2 = \frac{-c}{a}; k_3 = \frac{d}{P^2c}.$$

Предполагаем, что $d_2 = 0$ (Или $d_1 = 0$?). Тогда получаем систему размерности 3:

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - k_1\dfrac{uv}{1+u}\right) + u_{xx}, \\ \dot{v} = k_2 v\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right). \end{cases}$$

2.2 Неподвижные точки и их тип

Рассмотрим неподвижную точку $T_1 = (0, 0)$.
Якобиан в этой точке принимает вид: J(0,0) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Так как существует собственное значение с положительной вещественной частью ($\lambda_1 = 1$, то данная точка неустойчива по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Далее рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - k_1\dfrac{uv}{1+u} = 0, \\ 1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u} = 0. \end{cases}$$

Решение второго уравнения – $u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

В область $\mathcal{R}^+$ попадает только $u^* = \dfrac{1 + \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

$v^* = \dfrac{1+u^*}{k_1 u^*} = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right)$

Список литературы

[1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011 г.