



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики»

Студентка 515 группы
А. А. Наумова

Руководитель практикума
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Исследование нераспределенной системы	4
2.1	Замена переменных	4
2.2	Неподвижные точки и их тип	4
2.3	Фазовый портрет	6
2.3.1	Случай 1	6
2.3.2	Случай 2	7
3	Исследование распределенной системы	8
3.1	Замена переменных	8
3.2	Неподвижные точки и их тип	8
3.3	Проверка наличия волновых решений	9
	Список литературы	12

1 Постановка задачи

Дана система, описывающая динамику численности популяций жертвы и хищника:

$$\begin{cases} \dot{u} = au - \frac{bu^2v}{1 + Pu} + d_1u_{xx}, \\ \dot{v} = -cv + \frac{du^2v}{1 + Pu} + d_2v_{xx}. \end{cases}$$

Требуется:

1. Сделать замены переменных
2. Исследовать фазовый портрет нераспределенной системы (неподвижные точки, их тип, изоклины)
3. Проверить наличие волновых решений распределенной системы
4. Выбрать подходящее решение и скорость волны
5. Привести иллюстрации и графики фазовых портретов и решений

2 Исследование нераспределенной системы

2.1 Замена переменных

Пусть

$$\tilde{u} = \alpha u; \tilde{v} = \beta v; \tilde{t} = \gamma t; \tilde{x} = \delta x.$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha} \tilde{u}_{\tilde{t}} = \frac{a}{\alpha} \tilde{u} - \frac{b}{\alpha^2 \beta} \frac{\tilde{u}^2 \tilde{v}}{(1 + P\tilde{u}/\alpha)} + d_1 \frac{\delta^2}{\alpha} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, \\ \frac{\gamma}{\beta} \tilde{v}_{\tilde{t}} = \frac{-c}{\beta} \tilde{v} + \frac{d}{\alpha^2 \beta} \frac{\tilde{u}^2 \tilde{v}}{(1 + P\tilde{u}/\alpha)} + d_2 \frac{\delta^2}{\beta} \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от лишних коэффициентов, возьмем

$$\gamma = a; \beta = \frac{b}{a}; \alpha = P; \delta = \sqrt{\frac{a}{d_2}}.$$

Получим

$$\begin{cases} \dot{u} = u \left(1 - \frac{1}{P} \frac{uv}{1+u} \right) + \frac{d_1}{d_2} u_{xx}, \\ \dot{v} = \frac{-c}{a} v \left(1 - \frac{d}{P^2 c} \frac{u^2}{1+u} \right) + v_{xx}. \end{cases}$$

Переобозначим

$$k_1 = \frac{1}{P}; k_2 = \frac{-c}{a}; k_3 = \frac{d}{P^2 c}.$$

Предполагаем, что $d_1 = 0$ (жертвы сконцентрированы в одной точке). Тогда получаем систему размерности 3:

$$\begin{cases} \dot{u} = u \left(1 - k_1 \frac{uv}{1+u} \right), \\ \dot{v} = k_2 v \left(1 - k_3 \frac{u^2}{1+u} \right) + v_{xx}. \end{cases}$$

2.2 Неподвижные точки и их тип

Якобиан системы имеет вид:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1 - k_1 uv \frac{2+u}{(1+u)^2} & -k_1 \frac{u^2}{1+u} \\ -k_2 k_3 uv \frac{2+u}{(1+u)^2} & k_2 \left(1 - k_3 \frac{u^2}{1+u} \right) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим неподвижную точку $T_1 = (0, 0)$.

Якобиан в этой точке принимает вид: $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Так как существует собственное значение с положительной вещественной частью ($\lambda_1 = 1$), то данная точка неустойчива по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Далее рассмотрим систему уравнений, решения которой отвечают изоклинам рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} 1 - k_1 \frac{uv}{1 + \frac{u^2}{2}} = 0, \\ 1 - k_3 \frac{u^2}{1 + u} = 0. \end{cases}$$

Решение второго уравнения: $u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3}$.

Так как $k_3 > 0$, в область \mathcal{R}^+ попадает только $u^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3}$.

Для удобства вычислений возьмем $k_3 = 1$. Также будем помнить, что $k_1 > 0; k_2 \leq 0$; (плюс еще надо не забыть рассмотреть случаи $P = 0; c = 0; d = 0$).

Тогда $u^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, v^* = \frac{1 + u^*}{k_1 u^*} = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2k_3}{1 + \sqrt{1 + 4k_3}} \right) = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)$.

Исследуем теперь данную неподвижную точку $T_2 = (u^*, v^*)$.

Якобиан в этой точке принимает вид:

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\sqrt{5}+5}{2} + 1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}} & -\frac{k_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}} \\ -\frac{k_2 \left(1 + \sqrt{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right)}{k_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} \right)} & k_2 \left(-\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}} + 1 \right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\frac{21\sqrt{5}\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} + \frac{47\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\lambda_2 = -\frac{47\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} + \frac{21\sqrt{5}\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

После упрощения выражений и численного вычисления значений получаем:

$$\lambda_1 = -0.190983005625053 + 1.17557050458504\sqrt{(k_2 + 0.026393202250021)}$$

$$\lambda_2 = -0.190983005625053 - 1.17557050458504\sqrt{(k_2 + 0.026393202250021)}$$

Заметим, что при $k_2 = \left(\frac{0.190983005625053}{1.17557050458504} \right)^2 - 0.026393202250021 = 0$ $\lambda_1 = 0$. Вспомним также, что $k_2 \leq 0$. Получим несколько возможных случаев.

1) $-0.026393202250021 \leq k_2 < 0$.

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$

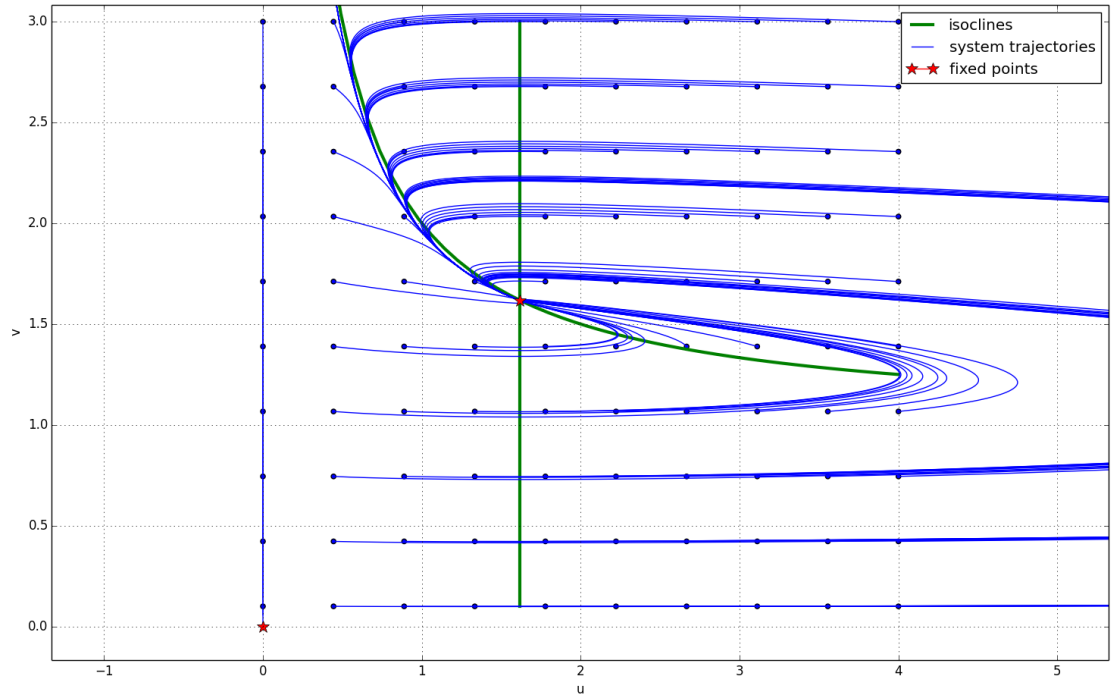
2) $k_2 < -0.026393202250021$.

$$Re(\lambda_1) < 0, Re(\lambda_2) < 0, Im(\lambda_1) > 0, Im(\lambda_2) < 0$$

Оба положения устойчивы.

2.3 Фазовый портрет

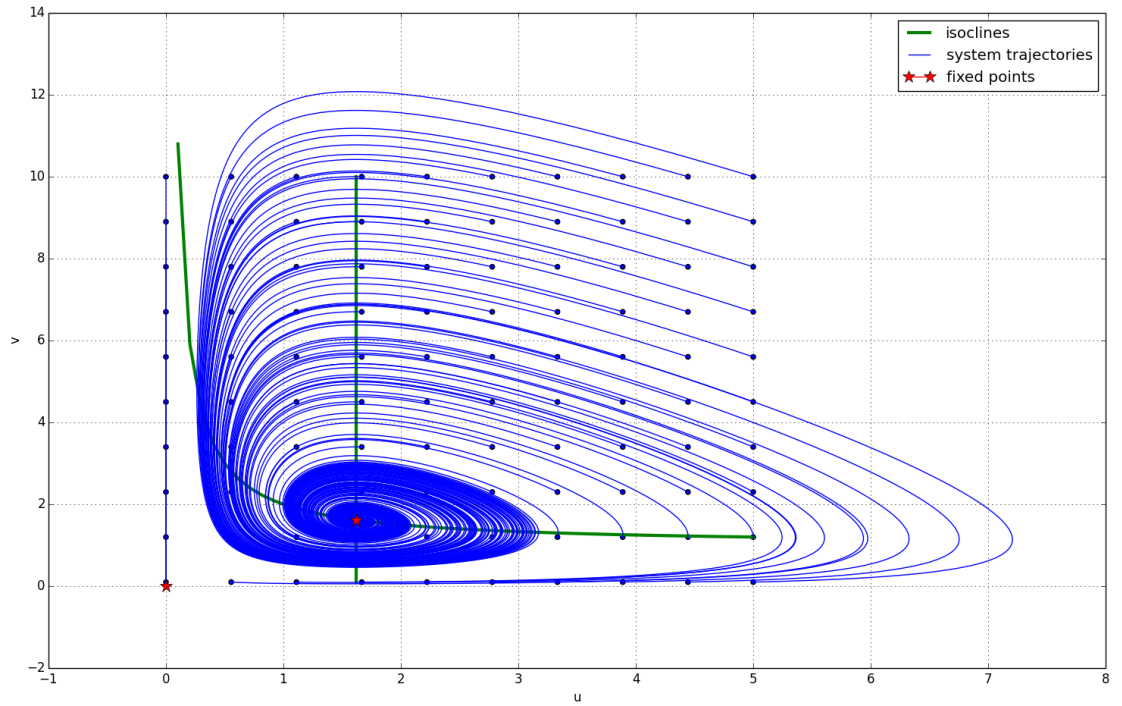
2.3.1 Случай 1



Данный фазовый портрет был построен при $k_1 = 1, k_2 = -0.02, k_3 = 1$, точки начала траекторий расположены на сетке 10×10 , с параметрами $start_u = 0.0, stop_u = 4.0, start_v = 0.1, stop_v = 3.0, stop_t = 100, num_t = 10000$.

Видим, что неподвижная точка $T_2 = (u^*, v^*)$ устойчива, к ней устремляются все траектории, кроме наиниющих в 0. А точка $T_1 = (0, 0)$ неустойчива - траектории с $u_0 = 0$ стремятся к ней, а траектории с $v_0 = 0$ удаляются от нее.

2.3.2 Случай 2



Данный фазовый портрет был построен при $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1$, точки начала траекторий расположены на сетке 10×10 , с параметрами $start_u = 0.0, stop_u = 5.0, start_v = 0.1, stop_v = 10.0, stop_t = 100, num_t = 10000$.

3 Исследование распределенной системы

3.1 Замена переменных

Волновые решения ищем в форме: $u(t, x) = u(x + ct)$, $v(t, x) = v(x + ct)$, где $c > 0$. Подставим это в уравнение системы. Получим:

$$\begin{cases} cu'(z) = u(z) \left(1 - k_1 \frac{u(z)v(z)}{1 + u(z)} \right), \\ cv'(z) = k_2 v(z) \left(1 - k_3 \frac{u(z)^2}{1 + u(z)} \right) + v''(z). \end{cases}$$

Введем переменную w и перепишем систему:

$$\begin{cases} cu'(z) = u(z) \left(1 - k_1 \frac{u(z)v(z)}{1 + u(z)} \right), \\ v'(z) = w(z), \\ w'(z) = cw(z) - k_2 v(z) \left(1 - k_3 \frac{u(z)^2}{1 + u(z)} \right). \end{cases}$$

3.2 Неподвижные точки и их тип

У этой системы 2 неподвижных точки, попадающих в рассматриваемую область значений:

$$\bar{O} = (0, 0, 0) \text{ и } \bar{P} = (u^*, v^*, 0), \text{ где } u^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, v^* = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right).$$

Якобиан системы имеет вид:

$$J(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \left(1 - k_1 uv \frac{2 + u}{(1 + u)^2} \right) & -\frac{k_1}{c} \frac{u^2}{1 + u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 k_3 uv \frac{2 + u}{(1 + u)^2} & -k_2 \left(1 - k_3 \frac{u^2}{1 + u} \right) & c \end{pmatrix}$$

Рассмотрим Якобиан в точках \bar{O} и \bar{P} .

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & c \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$k_2 \left(-\lambda + \frac{1}{c} \right) - \lambda (c - \lambda) \left(-\lambda + \frac{1}{c} \right) = 0$$

Имеет корни:

$$\lambda_1 = \frac{1}{c};$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2 - 4k_2}}{2};$$

$$\lambda_3 = \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 - 4k_2}}{2};$$

Так как $k_2 < 0$, $c > 0$, получим $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$. Точка неустойчива.

$$J(u^*, v^*, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\sqrt{5}+5}{2}+1}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} & -\frac{k_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{c\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2\left(1+\sqrt{5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{k_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)} & -k_2\left(-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}+1\right) & c \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$k_2 \left(-\lambda + \frac{-\frac{\sqrt{5}+5}{2}+1}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \right) \left(-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} + 1 \right) - \lambda (c - \lambda) \left(-\lambda + \frac{-\frac{\sqrt{5}+5}{2}+1}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \right) - \frac{k_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(c-\lambda)\left(1+\sqrt{5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{c\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2} = 0$$

Имеет корни:

$$\lambda_1 = c;$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{37396\sqrt{5}ck_2+83620ck_2+987\sqrt{5}+2207-47-21\sqrt{5}}}{110\sqrt{5}c+246c} = \frac{1}{c}(1.17557050458495 * \sqrt{c * k_2 + 0.026393202250021} - 0.190983005625053);$$

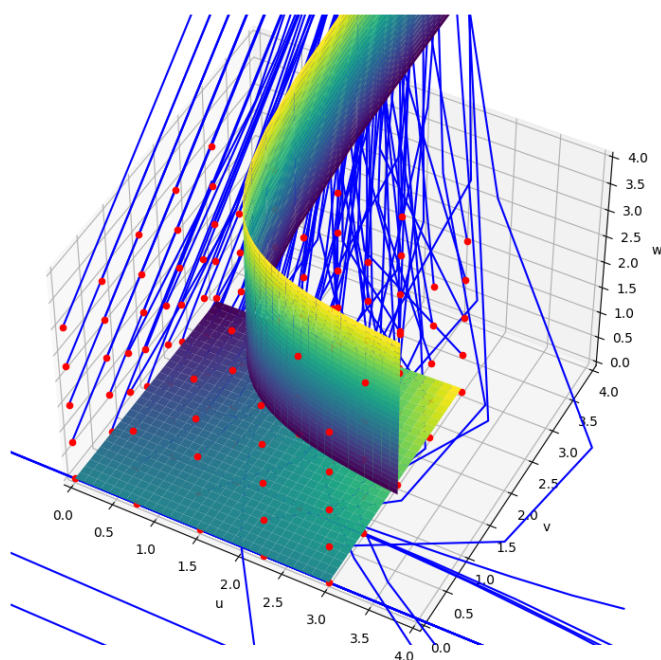
$$\lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{37396\sqrt{5}ck_2+83620ck_2+987\sqrt{5}+2207+21\sqrt{5}+47}}{110\sqrt{5}c+246c} = \frac{1}{c}(-1.17557050458495 * \sqrt{c * k_2 + 0.026393202250021} - 0.190983005625053);$$

$\lambda_1 > 0, Re(\lambda_3) < 0, Re(\lambda_2)$ может быть как >0 так и <0 в зависимости от c и k_2 . Точка неустойчива.

3.3 Проверка наличия волновых решений

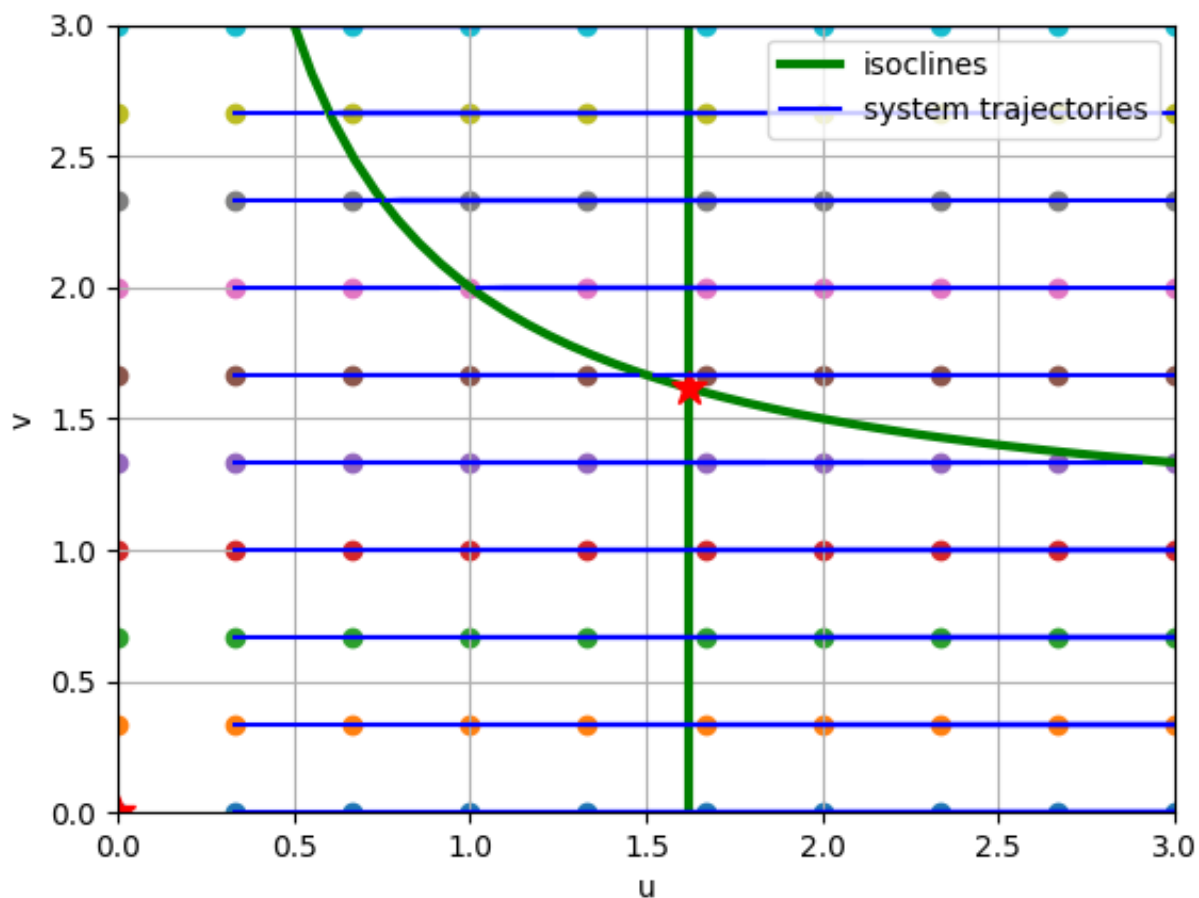
Точка \bar{O} имеет одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразие. Точка \bar{P} имеет одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразие, либо двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразие.

На данном графике изображено поведение траекторий и изоповерхности для распределенной системы.



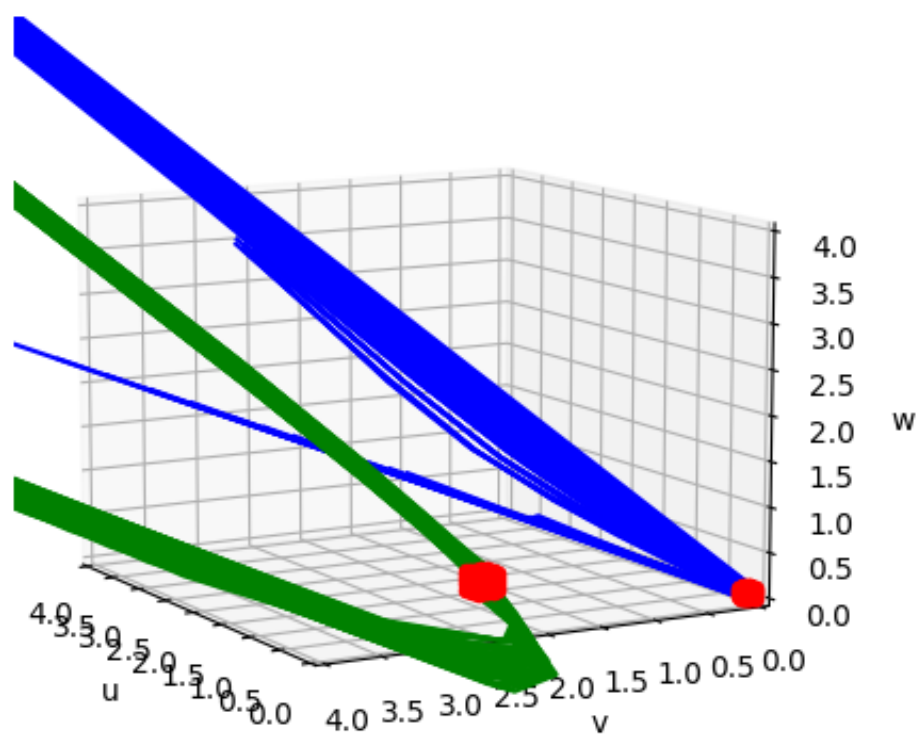
Видим, что траектории с $s > 0$ удаляются от неподвижных точек.

Так как обе неподвижные точки находятся на плоскости $w = 0$, рассмотрим поведение траекторий, находящихся на данной плоскости.



Из графика (а также из того факта, что при $w = 0$ $u' = 0$) получаем горизонтально направленные траектории, из чего следует, что не существует траекторий, которые попали бы из точки \bar{O} в точку \bar{P} , поскольку для этого было бы необходимо иметь $u' > 0$.

Рассмотрим также траектории, выходящие из окрестности радиусом 0.1 точки \bar{O} и \bar{P} . Они не приводят из одной точки в другую, а удаляются на бесконечность.



Получаем, что в данной системе нет волновых решений.

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011 г.