



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики»

Студентка 515 группы
А. А. Наумова

Руководитель практикума
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Исследование фазового портрета нераспределенной системы	4
2.1	Замена переменных	4
2.2	Неподвижные точки и их тип	4
	Список литературы	6

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{u} = au - \frac{bu^2v}{1+Pu} + d_1u_{xx}, \\ \dot{v} = -cv + \frac{du^2v}{1+Pu} + d_2v_{xx}. \end{cases}$$

2 Исследование фазового портрета нераспределенной системы

2.1 Замена переменных

Пусть

$$\tilde{u} = \alpha u; \tilde{v} = \beta v; \tilde{t} = \gamma t; \tilde{x} = \delta x.$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha} \tilde{u}_{\tilde{t}} = \frac{a}{\alpha} \tilde{u} - \frac{b}{\alpha^2 \beta} \frac{\tilde{u}^2 \tilde{v}}{(1 + P \tilde{u}/\alpha)} + d_1 \frac{\delta^2}{\alpha} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, \\ \frac{\gamma}{\beta} \tilde{v}_{\tilde{t}} = \frac{-c}{\beta} \tilde{v} + \frac{d}{\alpha^2 \beta} \frac{\tilde{u}^2 \tilde{v}}{(1 + P \tilde{u}/\alpha)} + d_2 \frac{\delta^2}{\beta} \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от лишних коэффициентов, возьмем

$$\gamma = a; \beta = \frac{b}{a}; \alpha = P; \delta = \sqrt{\frac{a}{d_2}}.$$

Получим

$$\begin{cases} \dot{u} = u \left(1 - \frac{1}{P} \frac{uv}{1+u} \right) + \frac{d_1}{d_2} u_{xx}, \\ \dot{v} = \frac{-c}{a} v \left(1 - \frac{d}{P^2 c} \frac{u^2}{1+u} \right) + v_{xx}. \end{cases}$$

Переобозначим

$$k_1 = \frac{1}{P}; k_2 = \frac{-c}{a}; k_3 = \frac{d}{P^2 c}.$$

Предполагаем, что $d_1 = 0$ (жертвы сконцентрированы в одной точке). Тогда получаем систему размерности 3:

$$\begin{cases} \dot{u} = u \left(1 - k_1 \frac{uv}{1+u} \right), \\ \dot{v} = k_2 v \left(1 - k_3 \frac{u^2}{1+u} \right) + v_{xx}. \end{cases}$$

2.2 Неподвижные точки и их тип

Якобиан системы имеет вид:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1 - k_1 v \left(\frac{1}{(1+u)^2} \right) & -k_1 \frac{u^2}{1+u} \\ -k_2 k_3 v \frac{2u+u^2}{(1+u)^2} & k_2 \left(1 - k_3 \frac{u^2}{1+u} \right) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим неподвижную точку $T_1 = (0, 0)$.

$$\text{Якобиан в этой точке принимает вид: } J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Так как существует собственное значение с положительной вещественной частью ($\lambda_1 = 1$, то данная точка неустойчива по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Далее рассмотрим систему уравнений, решения которой отвечают изоклинам рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} 1 - k_1 \frac{uv}{1 + u} = 0, \\ 1 - k_3 \frac{u^2}{1 + u} = 0. \end{cases}$$

Решение второго уравнения: $u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3}$.

Так как $k_3 > 0$, в область \mathcal{R}^+ попадает только $u^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3}$.

Для удобства вычислений возьмем $k_3 = 1$. Также будем помнить, что $k_1 > 0; k_2 \leq 0$; (плюс еще надо не забыть рассмотреть случаи $P = 0; c = 0; d = 0$).

Тогда $u^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, v^* = \frac{1 + u^*}{k_1 u^*} = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2k_3}{1 + \sqrt{1 + 4k_3}} \right) = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)$.

Исследуем теперь данную неподвижную точку $T_2 = (u^*, v^*)$.

Якобиан в этой точке принимает вид:

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} 1 - k_1 \left(\frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2k_3}{1 + \sqrt{1 + 4k_3}} \right) \right) \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right)^2 \right)} \right) & -k_1 \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right)}{1 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right)} \\ -k_2 k_3 \left(\frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{2k_3}{1 + \sqrt{1 + 4k_3}} \right) \right) \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right) \left(2 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right) \right)}{\left(1 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right) \right)^2} & k_2 \left(1 - k_3 \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right)}{1 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k_3}}{2k_3} \right)} \right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\frac{17\sqrt{10}\sqrt{3571\sqrt{5}k_2+7985k_2+377\sqrt{5}+843}}{2} + 19\sqrt{2}\sqrt{3571\sqrt{5}k_2+7985k_2+377\sqrt{5}+843} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = -19\sqrt{2}\sqrt{3571\sqrt{5}k_2+7985k_2+377\sqrt{5}+843} + \frac{17\sqrt{10}\sqrt{3571\sqrt{5}k_2+7985k_2+377\sqrt{5}+843}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}$$

После упрощения выражений и численного вычисления значений получаем:

$$\lambda_1 = 0.381966011250105 - 1.17557050458481\sqrt{(k_2 + 0.105572809000084)}$$

$$\lambda_2 = 0.381966011250105 + 1.17557050458481\sqrt{(k_2 + 0.105572809000084)}$$

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011 г.