Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики»

Студентка 515 группы
А. А. Наумова

Руководитель практикума
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{u} = au - \dfrac{bu^2v}{1+Pu} + d_1 u_{xx}, \\ \dot{v} = -cv + \dfrac{du^2v}{1+Pu} + d_2 v_{xx}. \end{cases}$$

2 Исследование нераспределенной системы

2.1 Замена переменных

Пусть
$$\widetilde{u} = \alpha u; \widetilde{v} = \beta u; \widetilde{t} = \gamma t; \widetilde{x} = \delta x.$$
Тогда система примет следующий вид:
$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{t}} = \dfrac{a}{\alpha}\widetilde{u} - \dfrac{b}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_1\dfrac{\delta^2}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}, \\ \dfrac{\gamma}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{t}} = \dfrac{-c}{\beta}\widetilde{v} + \dfrac{d}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_2\dfrac{\delta^2}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}. \end{cases}$$
Чтобы избавиться от лишних коэффициентов, возьмем
$$\gamma = a; \beta = \frac{b}{a}; \alpha = P; \delta = \sqrt{\frac{a}{d_2}}.$$
Получим
$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - \dfrac{1}{P}\dfrac{uv}{1+u}\right) + \dfrac{d_1}{d_2}u_{xx}, \\ \dot{v} = \dfrac{-c}{a}v\left(1 - \dfrac{d}{P^2c}\dfrac{u^2}{1+u}\right) + v_{xx}. \end{cases}$$
Переобозначим
$$k_1 = \frac{1}{P}; k_2 = \frac{-c}{a}; k_3 = \frac{d}{P^2c}.$$
Предполагаем, что $d_1 = 0$ (жертвы сконцентрированы в одной точке). Тогда получаем систему размерности 3:
$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - k_1\dfrac{uv}{1+u}\right), \\ \dot{v} = k_2 v\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) + v_{xx}. \end{cases}$$

2.2 Неподвижные точки и их тип

Якобиан системы имеет вид:
$$\text{J(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 - k_1uv\dfrac{2+u}{(1+u)^2} & -k_1\dfrac{u^2}{1+u} \\ -k_2k_3uv\dfrac{2+u}{(1+u)^2} & k_2\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) \end{pmatrix}$$
Рассмотрим неподвижную точку $T_1 = (0, 0)$.

Якобиан в этой точке принимает вид: $\text{J(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Так как существует собственное значение с положительной вещественной частью ($\lambda_1 = 1$, то данная точка неустойчива по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Далее рассмотрим систему уравнений, решения которой отвечают изоклинам рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} 1 - k_1 \dfrac{uv}{1+u} = 0, \\ 1 - k_3 \dfrac{u^2}{1+u} = 0. \end{cases}$$

Решение второго уравнения: $u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

Так как $k_3 > 0$, в область $\mathcal{R}^+$ попадает только $u^* = \dfrac{1 + \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

Для удобства вычислений возьмем $k_3 = 1$. Также будем помнить, что $k_1 > 0; k_2 \leq 0$; (плюс еще надо не забыть рассмотреть случаи $P = 0; c = 0; d = 0$).

Тогда $u^* = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, v^* = \dfrac{1+u^*}{k_1 u^*} = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right) = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$.

Исследуем теперь данную неподвижную точку $T_2 = (u^*, v^*)$.

Якобиан в этой точке принимает вид:

$$\text{J(u*,v*)} = \begin{pmatrix} 1 - k_1 \left(\frac{1}{k_1}\left(1 + \frac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right)\right)\left(\frac{1}{(1+\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right))^2}\right) & -k_1 \frac{(\ldots}{1+\ldots} \\ -k_2 k_3 \left(\frac{1}{k_1}\left(1 + \frac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right)\right) \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right)\left(2 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right)\right)}{\left(1 + \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right)\right)^2} & k_2 \left(1 - k_3 \frac{\ldots}{1+\ldots}\right. \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -\frac{21\sqrt{5}\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} + \frac{47\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$

$\lambda_2 = -\frac{47\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} + \frac{21\sqrt{5}\sqrt{2728\sqrt{5}k_2+6100k_2+72\sqrt{5}+161}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$

После упрощения выражений и численного вычисления значений получаем:

$$\lambda_1 = -0.190983005625053 + 1.17557050458504\sqrt{(k_2 + 0.026393202250021)}$$

$$\lambda_2 = -0.190983005625053 - 1.17557050458504\sqrt{(k_2 + 0.026393202250021)}$$

Заметим, что при $k_2 = (\dfrac{0.381966011250105}{1.17557050458481})^2 - 0.105572809000084 = 0$ $\lambda_1 = 0$. Вспомним также, что $k_2 \leq 0$. Получим несколько возможных случаев.

1) $-0.105572809000084 \leq k_2 < 0$.

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

2) $k_2 < -0.105572809000084$.

$Re(\lambda_1) > 0, Re(\lambda_2) > 0, Im(\lambda_1) < 0, Im(\lambda_2) > 0$

Оба положения неустойчивы.

2.3 Фазовый портрет

картинки

3 Исследование распределенной системы

3.1 Проверка наличия волновых решений

Список литературы

[1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011 г.