Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Прикладные задачи системного анализа: задачи биоматематики»

Студентка 515 группы
А. А. Наумова

Руководитель практикума
аспирант Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{u} = au - \dfrac{bu^2v}{1+Pu} + d_1 u_{xx}, \\ \dot{v} = -cv + \dfrac{du^2v}{1+Pu} + d_2 v_{xx}. \end{cases}$$

2 Исследование фазового портрета нераспределенной системы

2.1 Замена переменных

Пусть

$$\widetilde{u} = \alpha u; \widetilde{v} = \beta u; \widetilde{t} = \gamma t; \widetilde{x} = \delta x.$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{t}} = \dfrac{a}{\alpha}\widetilde{u} - \dfrac{b}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_1\dfrac{\delta^2}{\alpha}\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}, \\ \dfrac{\gamma}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{t}} = \dfrac{-c}{\beta}\widetilde{v} + \dfrac{d}{\alpha^2\beta}\dfrac{\widetilde{u}^2\widetilde{v}}{(1+P\widetilde{u}/\alpha)} + d_2\dfrac{\delta^2}{\beta}\widetilde{v}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от лишних коэффициентов, возьмем

$$\gamma = a; \beta = \frac{b}{a}; \alpha = P; \delta = \sqrt{\frac{a}{d_2}}.$$

Получим

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - \dfrac{1}{P}\dfrac{uv}{1+u}\right) + \dfrac{d_1}{d_2}u_{xx}, \\ \dot{v} = \dfrac{-c}{a}v\left(1 - \dfrac{d}{P^2c}\dfrac{u^2}{1+u}\right) + v_{xx}. \end{cases}$$

Переобозначим

$$k_1 = \frac{1}{P}; k_2 = \frac{-c}{a}; k_3 = \frac{d}{P^2c}.$$

Предполагаем, что $d_1 = 0$ (жертвы сконцентрированы в одной точке). Тогда получаем систему размерности 3:

$$\begin{cases} \dot{u} = u\left(1 - k_1\dfrac{uv}{1+u}\right), \\ \dot{v} = k_2v\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) + v_{xx}. \end{cases}$$

2.2 Неподвижные точки и их тип

Якобиан системы имеет вид:

$$\text{J(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 - k_1v\left(\dfrac{1}{(1+u)^2}\right) & -k_1\dfrac{u^2}{1+u} \\ -k_2k_3v\dfrac{2u+u^2}{(1+u)^2} & k_2\left(1 - k_3\dfrac{u^2}{1+u}\right) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим неподвижную точку $T_1 = (0,0)$.

Якобиан в этой точке принимает вид: $\text{J(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Так как существует собственное значение с положительной вещественной частью ($\lambda_1 = 1$, то данная точка неустойчива по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

Далее рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - k_1 \dfrac{uv}{1+u} = 0, \\ 1 - k_3 \dfrac{u^2}{1+u} = 0. \end{cases}$$

Решение второго уравнения: $u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

Так как $k_3 > 0$, в область $\mathcal{R}^+$ попадает только $u^* = \dfrac{1 + \sqrt{1+4k_3}}{2k_3}$.

$v^* = \dfrac{1+u^*}{k_1 u^*} = \dfrac{1}{k_1}\left(1 + \dfrac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right)$.

Исследуем теперь данную неподвижную точку $T_2 = (u^*, v^*)$.

Якобиан в этой точке принимает вид:

$$\mathrm{J(u^*,v^*)} = \left(\begin{array}{ll} 1 - k_1\left(\dfrac{1}{k_1}\left(1+\dfrac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right)\right)\left(\dfrac{1}{(1+\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right))^2}\right) & -k_1 \\ -k_2k_3\left(\dfrac{1}{k_1}\left(1+\dfrac{2k_3}{1+\sqrt{1+4k_3}}\right)\right)\dfrac{\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right)\left(2+\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right)\right)}{\left(1+\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k_3}}{2k_3}\right)\right)^2} & k_2 \end{array}\right.$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{-2k_2\left(k_3^2\sqrt{4k_3+1}+5k_3^2+3k_3\sqrt{4k_3+1}+5k_3+\sqrt{4k_3+1}+1\right)^2\left(k_3^{13}\sqrt{4k_3+1}+27k_3^{13}+91k_3^{12}\sqrt{4k_3+1}+819k_3^{12}+1365k_3^{11}\sqrt{4k_3+1}+7371k_3^{11}+8008k_3^{10}\right.}{}}$$

$$\frac{-k_3^{16}\sqrt{4k_3+1}-27k_3^{16}-89k_3^{15}\sqrt{4k_3+1}-759k_3^{15}-1140k_3^{14}\sqrt{4k_3+1}-5116k_3^{14}-3808k_3^{13}\sqrt{4k_3+1}-5576k_3^{13}+6630k_3^{12}\sqrt{4k_3+1}+60554k_3^{12}+75582k_3^{11}}{\left(k_3^2\sqrt{4k_3+1}+5k_3^2+3k_3\sqrt{4k_3+1}+5k_3+\sqrt{4k_3+1}+1\right)\left(k_3^{13}\sqrt{4k_3+1}+27k_3^{13}+91k_3^{12}\sqrt{4k_3+1}+819k_3^{12}+1365k_3^{11}\sqrt{4k_3+1}+7371k_3^{11}\right.}$$

1

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{-2k_2\left(k_3^2\sqrt{4k_3+1}+5k_3^2+3k_3\sqrt{4k_3+1}+5k_3+\sqrt{4k_3+1}+1\right)^2\left(k_3^{13}\sqrt{4k_3+1}+27k_3^{13}+91k_3^{12}\sqrt{4k_3+1}+819k_3^{12}+1365k_3^{11}\sqrt{4k_3+1}+7371k_3^{11}+8008k_3^{10}\right.}{}}$$

$$\frac{-k_3^{16}\sqrt{4k_3+1}-27k_3^{16}-89k_3^{15}\sqrt{4k_3+1}-759k_3^{15}-1140k_3^{14}\sqrt{4k_3+1}-5116k_3^{14}-3808k_3^{13}\sqrt{4k_3+1}-5576k_3^{13}+6630k_3^{12}\sqrt{4k_3+1}+60554k_3^{12}+75582k_3^{11}}{\left(k_3^2\sqrt{4k_3+1}+5k_3^2+3k_3\sqrt{4k_3+1}+5k_3+\sqrt{4k_3+1}+1\right)\left(k_3^{13}\sqrt{4k_3+1}+27k_3^{13}+91k_3^{12}\sqrt{4k_3+1}+819k_3^{12}+1365k_3^{11}\sqrt{4k_3+1}+7371k_3^{11}\right.}$$

1

Получилось как-то страшно. Пойдем другим путем.

Что мы знаем о коэффициентах: $k_1 > 0; k_2 \leq 0; k_3 \geq 0$ (плюс еще надо не забыть рассмотреть случаи $P = 0; c = 0; d = 0$).

Характеристический многочлен:

$$\lambda^2 + \lambda\left(-1 - k_2 + \tfrac{k_1 v}{(u+1)^2} + \tfrac{k_2 k_3 u^2}{u+1}\right) - \tfrac{k_1 k_2 k_3 u^4 v}{(u+1)^3} - \tfrac{2k_1 k_2 k_3 u^3 v}{(u+1)^3} + \tfrac{k_1 k_2 k_3 u^2 v}{(u+1)^3} - \tfrac{k_1 k_2 v}{(u+1)^2} - \tfrac{k_2 k_3 u^2}{u+1} + k_2 = 0$$

Под корнем ($b^2 - 4ac$) будет:

$$\frac{4k_1k_2k_3u^4v}{u^3+3u^2+3u+1} + \frac{8k_1k_2k_3u^3v}{u^3+3u^2+3u+1} - \frac{4k_1k_2k_3u^2v}{u^3+3u^2+3u+1} + \frac{4k_1k_2v}{u^2+2u+1} + \frac{4k_2k_3u^2}{u+1} - 4k_2 + \left(\frac{k_1v}{u^2+2u+1} + \frac{k_2k_3u^2}{u+1} - k_2 - 1\right)^2$$

$$\frac{k_1^2v^2}{u^4+4u^3+6u^2+4u+1} + \frac{4k_1k_2k_3u^4v}{u^3+3u^2+3u+1} + \frac{8k_1k_2k_3u^3v}{u^3+3u^2+3u+1} - \frac{2k_1k_2k_3u^2v}{u^3+3u^2+3u+1} + \frac{2k_1k_2v}{u^2+2u+1} - \frac{2k_1v}{u^2+2u+1} + \frac{k_2^2k_3^2u^4}{u^2+2u+1} - \frac{2k_2^2k_3u^2}{u+1} + k_2^2 + \frac{2k_2k_3u^2}{u+1} - 2k_2 + 1$$

Список литературы

[1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2011 г.