4. cvičení – řešení

(1) Rozhodněte, zda je matice regulární

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupujem jako při určování hodnosti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice je čtvercová, ale má hodnost rovnou 3.
Tedy matice nemá LN řádky $\Rightarrow$ není regulární.

2. Urcete ξ, η pro které je matice regulární

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & \xi \\ 4 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & \eta \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 4 & 2 & 5 & \xi \\ 4 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 3 & 3 & 7-2\eta \\ 0 & 3 & 3 & 8-2\eta \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 6 & 3 & 3\xi-6\eta \\ 0 & 6 & 6 & 14-4\eta \\ 0 & 6 & 6 & 16-4\eta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 0 & 3 & 14-3\xi+2\eta \\ 0 & 0 & 3 & 16-3\xi+2\eta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 0 & 3 & 14-3\xi+2\eta \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Máme že matice je čtvercová a zároveň vidíme, že pro každé $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ je hodnost matice rovno 4. Tedy jsou řádky LN a tedy i matice je regulární pro $\xi \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}$.

3) Vypočtěte $(A+B)C$ pro $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Máme, že $(A+B)C = AC + BC$ (vlastnost, kterou je potřeba umět!). Spočítáme tedy postupně AC a BC:

$$AC = \begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 15+1\\ 0 & 0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 16\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0 & 3+1\\ 2+0 & 6+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

tedy $$AC+BC = \begin{pmatrix}5 & 16\\ 0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+1 & 16+4\\ 0+2 & 2+7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 20\\ 2 & 9\end{pmatrix}$$

4. Určete inverzní matici k matici A

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ Matice je čtvercová, tedy můžeme zkusit obvyklý postup:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1/2 & -1/4 & 1/4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1/2 & 1/2\end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 1/4\\ -1 & 1/2 & 1/2\\ 1 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$ je inverzní matice k matici A.

Víme, že je vše v pořádku a, že inverz je určený jednoznačně z toho, že matice je čtvercová s plnou hodností.

(5) Vypočtěte matici X. (všechny operace jsou definované.

$XA - 3X = XC + B$ S využitím vlastností maticových operací budeme upravovat rovnici:

$$XA - 3X = XC + B$$
$$XA - 3X - XC = B \qquad \text{máme, že } AJ = JA = A$$
$$XA - 3JX - XC = B$$
$$XA - X(3J) - XC = B$$
$$X(A - 3J - C) = B$$ pokud $(A-3J-C)$ je regulární tak

$$X\underbrace{(A-3J-C)(A-3J-C)^{-1}}_{J} = B(A-3J-C)^{-1}$$

$$XJ = X = B(A-3J-C)^{-1}$$ za předpokladu, že $(A-3J-C)$ je regulární

(6) Určete X vyhovující mat. rovnici $AX = B - 3X + A$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Nejprve upravíme rovnici:
$$AX = B - 3X + A$$
$$AX + 3X = B + A$$
$$AX + 3JX = B + A$$
$$(A+3J)X = B + A$$

Musíme tedy dopočítat $(A+3J)$ a zjistit, zda je regulární:

$$A + 3J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 4 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/16 & 1/4 \end{array}\right)$$

$(A+3J)_{2\times 2}$ je čtvercová s hodností 2 a tradičním postupem jsme dostali inverz. matice je regulární a tedy je i inverz určený jednoznačně. Potom můžeme vynásobit obě strany rovnice zleva tímto inverzem:

$$(A+3J)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/16 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A+3J)^{-1}(A+3J)}_{J}X = (A+3J)^{-1}(B+A)$$

$$X = (A+3J)^{-1}(B+A)$$

dopočítáme $(B+A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-0 \\ 3+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

a $X = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/16 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2+0 & 1/2+0 \\ -1/8+1 & -1/8+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 7/8 & 3/8 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

Tedy $X = 1/8 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$