

4. cvičení - řešení

① Rozhodněte, zda je matice regulární

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Postupujeme jako při určování hodnoty:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice je čtvercová, ale má hodnotu rovnou 3.
Tedy matice nemá LN řádky \Rightarrow není regulární.

4. cvičení

1) Kordanův systém

+ u první pářky udělat lin. kombinaci veličin?

2) Určete ξ, η pro které je matice regulární

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & \xi \\ 4 & 3 & 7 & \eta \\ 2 & 0 & 2 & \eta \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 4 & 2 & 5 & \xi \\ 4 & 3 & 7 & \eta \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 3 & 3 & 7-2\eta \\ 0 & 3 & 3 & 8-2\eta \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 6 & 6 & 14-4\eta \\ 0 & 6 & 6 & 16-4\eta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 0 & 3 & 14-3\xi+2\eta \\ 0 & 0 & 3 & 16-3\xi+2\eta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \eta \\ 0 & 2 & 1 & \xi-2\eta \\ 0 & 0 & 3 & 14-3\xi+2\eta \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Máme že matice je čtvercová a zároveň vidíme, že pro každé $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ je hodnota matice rovno 4. Tedy jsou řádky LN a tedy i matice je regulární pro $\xi \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}$.

③ Vypočítejte $(A+B)C$ pro $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Máme, že $(A+B)C = AC + BC$ (vlastnost, kterou je potřeba umět!). Spočítáme tedy postupně AC a BC :

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15+1 \\ 0 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+1 \\ 2+0 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{tedy } AC + BC = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 & 16+4 \\ 0+2 & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

④ Určete inverzní matici k matici A
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Matice je čtvercová, tedy můžeme zkusit obvyklý postup:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ je inverzní matice k matici A .
 Víme, že je vše v pořádku a, že inverz je určený jednoznačně z toho, že matice je čtvercová s plnou hodností.

5) Vypočítejte matici X . (všechny operace jsou definovány).

$XA - 3X = XC + B$ S využitím vlastností maticových operací budeme upravovat rovnici.

$$XA - 3X = XC + B$$

$$XA - 3X - XC = B$$

$$XA - 3JX - XC = B$$

$$XA - X(3J) - XC = B$$

$$X(A - 3J - C) = B$$

máme, že $AJ = JA = A$

pokud $(A - 3J - C)$ je regulární tak

$$X \underbrace{(A - 3J - C)}_{=J} (A - 3J - C)^{-1} = B(A - 3J - C)^{-1}$$

$$XJ = X = B(A - 3J - C)^{-1} \text{ za předpokladu, že } (A - 3J - C) \text{ je regulární}$$

6) Určete X vyhovující mat. rovnici $AX = B - 3X + A$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Nejprve upravíme rovnici:

$$AX = B - 3X + A$$

$$AX + 3X = B + A$$

$$AX + 3JX = B + A$$

$$(A + 3J)X = B + A$$

zkusíme tedy dopočítat $(A + 3J)$ a zjistit, zda je regulární:

$$A + 3J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 4 & -1/4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/16 & 1/4 \end{array} \right)$$

$(A + 3J)_{2 \times 2}$ je čtvercová s hodnotí 2 a tradičním postupem jsme dostali inverzi, matice je regulární a tedy je i inverz určený jednoznačně. Potom můžeme vynásobit obě strany rovnice zleva tímto inverzem:

$$(A + 3J)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/16 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A + 3J)^{-1}}_J (A + 3J)X = (A + 3J)^{-1}(B + A)$$

$$X = (A + 3J)^{-1}(B + A)$$

dopozítame $(B+A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

a $X = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/16 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2+0 & 1/2+0 \\ -1/8+1 & -1/8+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 7/8 & 3/8 \end{pmatrix} =$
 $= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

Tedy $X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$