3. cvičení - řešení

① Najít obecné řešení SLR

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Nejprve určíme tvar rozšířené matice soustavy a potom převedeme na horní trojúhelníkový tvar;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right)$$

Máme, že $h\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 3 = h\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$, tedy z Frobeniových podmínek máme, že SLR má nějaké řešení.

Spočítáme počet řešení;

(počet neznamých) - (hodnost matice) = (počet parametrů), v našem případě $3 - 3 = 0$, tedy SLR má jenom jedno řešení.

Postupně toto řešení dopočítame;

- z posledního řádku upravené matice máme:

$$7x_3 = -7 \Rightarrow x_3 = -1$$

- ze druhého řádku máme:

$$7x_2 - 5x_3 = 19 \text{ dosadíme } x_3 = -1$$
$$\Rightarrow 7x_2 + 5 = 19 \Rightarrow 7x_2 = 14 \Rightarrow x_2 = 2$$

- z prvního řádku máme:

$$1x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \text{ dosadíme } x_3 = -1, x_2 = 2$$
$$x_1 - 4 - 2 = -5 \Rightarrow x_1 - 6 = -5 \Rightarrow x_1 = 1$$

Obecné řešení je tedy $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)$

2) Určete obecné řešení SLR

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

NEDĚSÍME SE!
JDE O KLASICKOU SLR, AKORÁT JENOM S 1 ROVNICÍ

Nejprve určíme rozšířenou matici SLR:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$h(1\ 1\ -1\ 2\ 1) = 1 = h(1\ 1\ -1\ 2\ 1\ 0)$$

Tedy SLR má řešení z Frob. podmínky. Určíme počet řešení

$5 - 1 = 4 \leftarrow$ tedy budeme mít 4 parametry, neboli nekonečně mnoho řešení

Označíme tedy 4 neznámé x_2, x_3, x_4, x_5 za parametry a vyjádříme x_1:

$$x_5 = t \quad x_4 = s \quad x_3 = k \quad x_2 = \ell \Rightarrow x_1 = -t - 2s + k - \ell$$

Tedy obecné řešení je $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t-2s+k-\ell, \ell, k, s, t)$

$$= (-1,0,0,0,1)t + (-2,0,0,1,0)s + (1,0,1,0,0)k + (-1,1,0,0,0)\ell \qquad t,s,k,\ell \in \mathbb{R}$$

③ Určete obecné řešení SLR

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 5x_5 = 5$$

Nejprve určíme rozšířenou matici SLR a převedeme na horní trojúhelníkový tvar:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 10 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 2 = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, tedy z Frob. podm. máme, že SLR má řešení. Určíme počet.

$$\underset{\text{počet neznámých}}{5} - \underset{\text{hodnost}}{2} = \underset{\text{počet parametrů}}{3}$$

Označíme 3 neznámé x_3, x_4, x_5 za parametry a postupně vyjádříme x_1, x_2. $x_3 = k$, $x_4 = s$, $x_5 = t$

Ze druhého řádku máme:

$$x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - 4k - 7s - 3t$$

Z prvního: $x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2$, tedy

$$x_1 + (3 - 4k - 7s - 3t) + 3k + 3s + 2t = 2$$
$$\Rightarrow x_1 = 2 - 3 - 3k + 4k - 3s + 7s - 2t + 3t = -1 + k + 4s + t$$

Obecné řešení je $(-1 + k + 4s + t, 3 - 4k - 7s - 3t, k, s, t) =$
$= (-1, 3, 0, 0, 0) + (1, -4, 1, 0, 0)k + (4, -7, 0, 1, 0)s +$
$+ (1, -3, 0, 0, 1)t = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

④ V závislosti na α, β řešte:

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3$
$-x_1 + x_2 + \alpha x_3 = \beta$

Nejprve určíme rozšířenou matici soustavy a převedeme na horní trojúhelníkový tvar. S α, β pracujeme jako s čísly.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha+2 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta-2 \end{array}\right)$$

V případě, že $\alpha = 0$, potom $h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = h\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{hor. trojúhelníkový tvar}} = 2$

a zároveň $h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \beta = 2; h = 2 \\ \beta \neq 2; h = 3 \end{cases}$

- Z toho vyplývá, že pokud $\alpha = 0$ a $\beta \neq 2$, tak SLR nemá žádné řešení z Frob. podm.
- Pokud $\alpha = 0$ a $\beta = 2$, tak SLR má řešení z Frob. pod. Máme, že $3 - 2 = 1$ ← počet parametrů, tedy SLR má nekonečně mnoho řešení. Označíme $x_3 = t$ ← parametr a dopočítáme x_2 z druhého řádku: $3x_2 + 3x_3 = 3$

$x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_2 + t = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - t$

Ze třetího řádku dopočítáme x_1:

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, dosadíme $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$

$\Rightarrow x_1 = -2t - 1 + t = -1 - t$

Tedy obecné řešení pro $\alpha = 0$ a $\beta = 2$ je $(x_1, x_2, x_3) = (-1-t, 1-t, t) = (-1, 1, 0) + (-1, -1, 1)t$, $t \in \mathbb{R}$

- Pokud $\alpha \neq 0$, potom $h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = 3 = h\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta-2 \end{pmatrix}$, tedy SLR má řešení. $3 - 3 = 0$, tedy dokonce jedno řešení. Dopočítáme ho:

$\alpha x_3 = \beta - 2 \Rightarrow x_3 = \frac{\beta-2}{\alpha}$

$x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_2 + \frac{\beta-2}{\alpha} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\alpha - \beta + 2}{\alpha}$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + \frac{\alpha-\beta+2}{\alpha} + 2\frac{\beta-2}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-\alpha - \beta + 2}{\alpha}$

Tedy je obecné řešení $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha}, \frac{\alpha-\beta+2}{\alpha}, \frac{\beta-2}{\alpha}\right)$

$\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.