Cvičení 5 - řešení

1. Rozvojem podle třetího sloupce určete determinant:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 7 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (0 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 0 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 8 \cdot 2 \cdot 3) +$$

$$+ (-7) \cdot (0 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 0 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 2) +$$

$$+ 2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 7 \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot 2)$$

$$+ (-7) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 0 - 2 \cdot 4 \cdot 1) =$$

$$= 5 \cdot (42 + 12 - 12 - 48) + (-7) \cdot (18 + 8 - 12 - 32) +$$

$$+ 2 \cdot (96 + 36 + 56 - 36 - 84 - 64) - 7 \cdot (12 +$$

$$+ 28 - 18 - 8) = 5 \cdot (-6) + 126 + 2 \cdot 4 - 98 = \underline{\underline{6}}$$

2. Vypočtěte determinant převodem na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 3 \cdot 2 = \underline{\underline{6}}$$

(3) Cramerovým pravidlem řešte SLR:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 21 \end{aligned}$$

Napíšeme jako rozšířenou matici soustavy a označme matici soustavy jako A a rozšířenou matici soustavy jako $(A|\vec{b})$ a matici, kde vyměníme i-tý sloupec za vektor pravých stran označme A_i.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 2 + 2 - 2 + 30 = 49$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 21 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 0 - 42 - 42 - 14 - 0 = -63$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 21 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 126 - 7 - 0 - 21 - 105 = -7$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 21 \end{vmatrix} = 21 + 42 + 0 + 7 - 0 + 126 = 196$$

Dle Cramerova pravidla tedy

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-63}{49}, \frac{-7}{49}, \frac{196}{49}\right) = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{1}{7}, 4\right)$$

4. Určete vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(-1-\lambda)(9-\lambda)+8+7\cdot 2(-1)- -1\cdot(-1-\lambda)7-(-1)\cdot 8\cdot(-\lambda)-(9-\lambda)2=$$

$$=-\lambda^3+8\lambda^2+9\lambda+8-14+7+7\lambda-8\lambda-18+2\lambda=$$

$$=-\lambda^3+8\lambda^2+9\lambda+7\lambda-8\lambda+2\lambda+8-14+7-18=$$

$$=-\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda-17$$

Najdeme kořeny $-\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda-17=0$
hned můžeme odhadnout kořen $\lambda_1=1$ a tedy

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+7\lambda+17)=0$$

$$D=49+4\cdot 17=49+68=117$$

$$\lambda_{1,3}=\frac{-7\pm\sqrt{117}}{-2}=\frac{-7\pm 3\sqrt{13}}{-2}$$

$$\lambda_2=\frac{-7+3\sqrt{13}}{-2}$$

$$\lambda_3=\frac{-7-3\sqrt{13}}{-2}=$$

$$=\frac{7+3\sqrt{13}}{2}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{7-3\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_3=\frac{7+3\sqrt{13}}{2}$