

Varianta 201

① Rozhodněte o LZ či LN vektorech

$$(-1, -3, 1, 2), (2, 1, -2, -3), (-1, 2, 1, 1)$$

- řešení: Vektory napíšeme jako řádky matice a převedeme na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Matice vpravo je horní trojúhelníková, tedy je její hodnost je rovna počtu řádků \Rightarrow v našem případě $h=3$.

Hodnost původní matice je rovná hodnosti výsledné matice, tedy 3. Počet vektorů = hodnost \Rightarrow vektory jsou LN.

② Určete všechny hodnoty parametru a tak, aby matice byla regulární. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$

- matice je čtvercová, tedy může být regulární.

- upravíme matici na trojúhelníkový tvar;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pokud } a \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 0 & 0 & 4a-a^2 \end{pmatrix} \quad 4a-a^2 = a(4-a)$$

pokud $a=0$, tak matice není regulární, jelikož hodnost není 3

pokud $a=4$, potom hodnost $A=2$, tedy není regulární

pokud $a \neq 0, 4 \Rightarrow$ matice je regulární

③ Cramerovým pravidlem vypočítejte x_2 ze soustavy

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_3 = 1$$

$$4x_1 + 2x_2 = 2$$

Označme $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Máme } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 8 - 0 - 4 - 0 =$$

$$= -2$$

~~$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 4 - 0 - 0 - 0 =$$~~

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-6) + 0 + 4 - 4 - 0 = -6$$

$$\text{tedy } x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = \underline{\underline{3}}$$