2. cvičení - řešení

(1) Spočítejte hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pomocí elementárních úprav a úpravy „prohození sloupců" převedeme matici na horní trojúhelníkový tvar.

vydělíme 1. řádek 2

přičteme -3násobek prvního řádku ke druhému

přičteme -2násobek prvního řádku ke třetímu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

přičteme -1.násobek druhého řádku ke třetímu

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

odstraníme nulový řádek

Výsledná matice je v horním trojúhelníkovém tvaru, jelikož prvky na místech 1,1 a 2,2 jsou nenulové a zároveň prvky pod hl. diagonálou tedy na místě 2,1 je nulový. Z toho vyplývá, že hodnost matice výsledné je rovna počtu řádků = 2. Tedy hodnost původní matice je též rovna 2.

(2) Kdy má matice A hodnost 3, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \lambda \\ 1 & 4 & -2 & 2 & \mu \\ 1 & -12 & 8 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Nejprve musíme matici upravit na horní trojúhelníkový tvar;

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & \lambda \\ 1 & 4 & -2 & 2 & \mu \\ 1 & -12 & 8 & 0 & \nu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & \mu \\ 2 & 0 & 1 & 3 & \lambda \\ 1 & -12 & 8 & 0 & \nu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & \mu \\ 0 & -8 & 5 & -1 & \lambda-2\mu \\ 0 & -16 & 10 & -2 & \nu-\mu \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & \mu \\ 0 & -8 & 5 & -1 & \lambda-2\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu-2\lambda+3\mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & \mu & -2 & 2 \\ 0 & -8 & \lambda-2\mu & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \nu-2\lambda+3\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

v tomto kroku kromě standartních elementárních úprav používáme úpravu „prohození sloupců"

Pokud $\nu-2\lambda+3\mu \neq 0$, potom je matice v trojúhelníkovém tvaru, jelikož na hl. diagonále jsou nenulové prvky a pod ní jsou nuly. Z toho vyplývá, že hodnost matice v tomto případě je rovna 3.

Pokud $\nu-2\lambda+3\mu=0$, tak uděláme úpravu „vynechání nulového řádku" a tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \mu & -2 & 2 \\ 0 & -8 & \lambda-2\mu & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{\nu-2\lambda+3\mu}_{=0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & \mu & -2 & 2 \\ 0 & -8 & \lambda-2\mu & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

a matice je v trojúhelníkovém tvaru, a tedy hodnost je rovna 2.

(3) Chceme ξ takové, že x_1, x_2, x_3 jsou LZ.

1) Postupujeme standardně jako při ověřování lineární (ne)závislosti. Zapíšeme vektory do řádků matice a převedeme matici na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & \xi \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & \xi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & \xi+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \xi-2 \end{pmatrix}$$

Upravená matice je v trojúhelníkovém tvaru, tedy hodnost se rovná počtu nenulových řádků. V našem případě může být 2, nebo 3.

hosdnost = 2, pokud $\xi = 2$

hodnost = 3, pokud $\xi \neq 2$

2) Chceme, aby vektory byly LZ, tedy hodnost matice byla menší, než počet vektorů $\Rightarrow$ vektory x_1, x_2, x_3 jsou LZ, pokud $\xi = 2$.