Международный консорциум «Электронный университет»

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

Евразийский открытый институт

Н.Ю. Грызина, И.Н. Мастяева, О.Н. Семенихина

Математические методы исследования операций в экономике

Учебно-методический комплекс

Москва 2008

УДК 519.6
ББК 22.19
М 327

Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ**: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008. – 204 с.

ISBN 978-5-374-00071-9

Цели и задачи дисциплины

Целью изучения курса «Математические методы исследования операций в экономике (ММИОвЭ)» является освоение математических методов решения задач, возникающих в области экономики, финансов, менеджмента, маркетинга. В процессе изучения этой дисциплины у студентов должны быть сформированы теоретические знания и практические навыки в получении решения и анализе полученных результатов.

Задачами курса «ММИОвЭ» являются:

– ознакомление с различными направлениями и методологией исследования операций;
– обучение будущих специалистов применению математических, т.е. количественных, методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной деятельности;
– обучение теории и практике формализации задач, возникающих в микро- и макроэкономике;
– развитие навыков математического моделирования элементов экономической динамики на макро- и микроуровнях;
– рассмотрение широкого круга задач, возникающих в практике менеджмента и связанных с принятием решений, относящихся ко всем областям и уровням управления.

В системе подготовки специалистов в области экономики, финансов, менеджмента и маркетинга курс «ММИОвЭ» является основным, вместе с курсом высшей математики, в структуре блока математических дисциплин. Преподавание курса «ММИОвЭ» основано на знании элементарной математики и высшей математики. Сам курс «ММИОвЭ» является основой для изучения других курсов блока математических дисциплин («Управленческие решения», «Управление проектами», «Моделирование рисковых ситуаций») и дисциплин финансового, инвестиционного блоков.

В результате изучения дисциплины «ММИОвЭ» студент должен

***знать*:**

– основные методы исследования операций;
– области их применения;

уметь:

– использовать компьютерные технологии реализации методов исследования операций.

Основные виды занятий: лекции, практические занятия, занятия в компьютерных классах.

Форма активных методов обучения – использование при выполнении самостоятельных работ MS Excel, MS Project, MS Power Point, Math Cad, УТФ.

Для изучения данной дисциплины необходимо знать: элементарную математику, элементы высшей математики, основы экономических знаний на уровне средней школы, основы информатики, а также прослушать следующие дисциплины: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Микро- и макроэкономика», дисциплины предметной области, дисциплины, связанные с информационной поддержкой принятия решений.

Оглавление

ТЕМА 1.

Введение в исследование операций

Для изучения данного раздела дисциплины необходимы основные экономические знания на уровне средней школы.

В результате изучения темы студент должен знать: основные определения исследования операций, основные этапы исследования операций, их последовательность и значение, уметь строить простейшие модели операций, иметь общие представления о классификации методов исследования операций.

Цель изучения – ознакомление с различными направлениями и методологией исследования операций

1.1. Основные определения

Термин *исследование операций* впервые появился в англоязычной литературе в 1939 г. в Великобритании. Возникнув в военных целях, исследование операций получило хорошую «базу» и легко перенеслось в экономику.

Исследование операций (ИО) – это применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности (*Вентцель Е.С. Введение в ИО).*

Исследование операций (ИО) – это применение математических методов для моделирования систем и анализа их характеристик *(Таха Х, Введение в ИО).*

Операция – всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Исследовать операцию – найти наилучшее решение, в условиях, когда имеют место ограничения (экономического, технического и др. характера).

Решение – определенный выбор зависящих от организатора параметров.

Цель исследования операций – предварительное количественное обоснование оптимальных решений *(Вентцель Е.С. Введение в ИО).*

Цель исследования операций заключается в том, чтобы выявить наилучший (оптимальный) способ действий при решении той или иной задачи организационного управления в условиях, когда имеют место ограничения технико-экономического или какого-либо другого характера (*Таха Х. Введение в ИО).*

Оптимальными считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других. Поэтому **основной задачей исследования операций** является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Эффективность операции — количественно выражается в виде критерия эффективности — целевой функции.

Для применения количественных методов исследования требуется построить математическую модель операции.

Экономико-математическая модель — достаточно точное описание исследуемого экономического процесса или объекта с помощью математического аппарата (различного рода функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.).

1.2. Этапы исследования операций

Усложнение производства, техники и организационной структуры общества приводит к тому, что принятие решений и эффективное руководство все больше и больше нуждаются в широкой, точной и быстрой информации, количественной оценке и прогнозе результатов, последствий принятых решений. Назначение методов исследования операций – объективно разобраться в каждом явлении, численно оценить предлагаемые целенаправленные действия и, возможно, предложить варианты решений, отличные от тех, которые рассматривали хозяйственные или другие руководители.

Несмотря на многообразие задач, возникающих в экономике (задача оптимального планирования инвестиций, формирование минимальной потребительской корзины, организация рекламной деятельности, составление штатного расписания, определение специализации предприятия и т.д.), при их решении можно выделить некоторую общую последовательность этапов, через которые проходит любое операционное исследование:

1. ***Постановка задачи***
2. ***Идентификация переменных***
3. ***Построение математической модели***
4. ***Анализ модели, или решение задачи с помощью выбранного метода***
5. ***Анализ решения***
6. ***Проверка адекватности модели***
7. ***Реализация полученного решения.***

Краткое описание каждого этапа

1, 2. Постановка задачи является одним из наиболее важных этапов исследования операций. Здесь необходимо определить цель, преследуемую субъектом управления (ЛПР), и установить, значение каких характеристик исследуемой системы (процесса) можно варьировать (управляемые переменные), а изменение значений каких переменных не зависит от решений ЛПР (неуправляемые). Кроме того, на данном этапе необходимо определить требования, условия и ограничения на исследуемую операцию. На этом же этапе должны быть решены проблемы информационного обеспечения будущей модели ИО.

3. Построение модели. На этом этапе необходимо выбрать модель, наиболее подходящую для адекватного описания ИО. При построении модели должны быть установлены количественные соотношения для выражения целевой функции (ЦФ) и ограничений в виде функций от управляемых переменных. Наиболее важным типом моделей ИО являются математические модели (ММ). В основе их построения лежит допущение о том, что все переменные, ограничения, их связывающие, а также целевая функция количественно измеримы. Поэтому если X_j, $j = 1, n$ представляют собой n управляемых переменных, а условия функционирования исследуемой системы (ИС) характеризуются m ограничениями, то ММ может быть записана в следующем виде:

$f(x_1, x_2 \ldots x_n) \rightarrow \max, \min$ – целевая функция

$g_i(x_1, x_2 \ldots x_n) \le b_i$, $i = 1, m$ – ограничения.

4. Анализ модели обычно производится с помощью методов математического программирования.

5. Анализ решения, или анализ на чувствительность, – это процесс, реализуемый после того, как оптимальное решение задачи получено. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели, т.е. фактически рассматривается совокупность моделей, что придает исследуемой операции определенную динамичность.

6. Решение, полученное при помощи анализа модели, не может, однако, непосредственно быть рекомендовано для практической реализации. Математическая модель, как и любая другая модель, лишь частично отображает действительность, акцентирует отдельные ее аспекты. Адекватность модели исследуемой операции и, следовательно, качество полученного результата можно проверить, сопоставляя результаты, установленные без использования модели, с результатами, вытекающими из анализа модели.

7. Работы по исследованию операций имеют смысл, если они завершаются внедрением результатов исследования в практику. Важность задач координации научной и производственной деятельности и трудности, связанные с внедрением научных рекомендаций в производство, заставляют рассматривать эти вопросы как отдельный этап в исследовании операций. При этом следует помнить, что задача исследователя операции – подготовить решение, а не принять его. Руководитель, ответственный за решение, должен учитывать помимо рекомендаций исследователя операций, основанных на количественных оценках, и другие факторы, не поддающиеся формализации.

В исследовании операций используется разнообразный математический аппарат. Чаще других методов для анализа моделей операций и подготовки решений используются методы математического программирования, комбинаторного анализа и статистического моделирования.

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Задача математического программирования (ЗМП) имеет вид:

$f(x_1, x_2 \dots x_n) \rightarrow \max, \min$ – целевая функция

$g_i(x_1, x_2 \dots x_n) \le b_i,\ i = 1, m$ – ограничения.

В зависимости от свойств функций f и g_i математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Прежде всего, задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i линейные, то соответствующая задача является **задачей линейного программирования**. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является **задачей нелинейного программирования.**

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены **задачи выпуклого программирования.** Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы **задачи квадратичного программирования**. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений, или некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В **задачах целочисленного программирования** неизвестные могут принимать только целочисленные значения.

В **задачах параметрического программирования** целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных, или и то и другое зависят от некоторых параметров.

В **задачах дробно-линейного программирования** целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также являются линейными.

Выделяют отдельные классы задач стохастического и динамического программирования.

Если в целевой функции или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такая задача относится к **задаче стохастического программирования.**

Задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным, относится к **задаче динамического программирования.**

Рассмотрим несколько примеров проведения операционного исследования.

Пример 1.1. Фабрика выпускает продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства этой продукции используются три исходных продукта – A, B, C. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6, 8 и 5 т соответственно. Расходы сырья A, B, C на 1 тыс. изделий $П_1$ и $П_2$ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 тыс. изделий (т)		Максимально возможный запас (т)
	$П_1$	$П_2$	
A	1	2	6
B	2	1	8
C	1	0,8	5

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на изделия $П_2$ никогда не превышает спроса изделия $П_1$ более чем на 1 тыс. шт. Кроме того, установлено, что спрос на изделия $П_2$ никогда не превышает 2 тыс. шт. в сутки.

Оптовые цены 1 тыс. шт. изделий $П_1$ равны 3 тыс. руб., 1 тыс. шт. $П_2$ – 2 тыс. шт.

Какое количество изделий (в тыс. шт.) каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели следует начать с идентификации переменных (искомых величин). После этого целевая функция и ограничения выражаются через соответствующие переменные.

В рассматриваемом примере имеем следующее:

<u>Переменные</u>. Так как нужно определить объемы производства каждого вида продукции, переменными являются:

X_1 – суточный объем производства изделия $П_1$ в тыс. шт.;

X_2 – суточный объем производства изделия $П_2$ в тыс. шт.

<u>Целевая функция</u>. Так как стоимость 1 тыс. изделий $П_1$ равна 3 тыс. руб., суточный доход от ее продажи составит $3X_1$ тыс. руб. Аналогично доход от реализации X_2 тыс. шт.

$П_2$ составит $2X_2$ тыс. руб. в сутки. При допущении независимости объемов сбыта каждого из изделий общий доход равен сумме двух слагаемых – дохода от продажи изделий $П_1$ и дохода от продажи изделий $П_2$.

Обозначив доход (в тыс. руб.) через $f(\overline{X})$, можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить (допустимые) значения X_1 и X_2 , максимизирующие величину общего дохода:

$f(\overline{X})=3X_1+2X_2$, $\overline{X}=(X_1,X_2)$.

Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения на расход исходных продуктов А, В и С и спрос на изготовляемую продукцию, что можно записать так:

Расход исходного продукта для производства обоих видов изделия	$\leq$	Максимально возможный запас данного исходного продукта

Это приводит к трем ограничениям:

$X_1 + 2X_2 \leq 6$ (для А),
$2X_1 + X_2 \leq 8$ (для В),
$X_1 + 0{,}8X_2 \leq 5$ (для С).

Ограничения на величину спроса на продукцию имеют вид:

$X_2 - X_1 \leq 1$ (соотношение величин спроса на изделия $П_1$ и $П_2$),
$X_2 \leq 2$ (максимальная величина спроса на изделия $П_2$).

Вводятся также условия неотрицательности переменных, т.е. ограничения на их знак:

$X_1 \geq 0$ (объем производства $П_1$),
$X_2 \geq 0$ (объем производства $П_2$).

Эти ограничения заключаются в том, что объемы производства продукции не могут принимать отрицательных значений.

Следовательно, математическая модель записывается следующим образом.

Определить суточные объемы производства (X_1 и X_2) изделий $П_1$ и $П_2$ в тыс. шт., при которых достигается

$\max f(\overline{X}) = 3X_1 + 2X_2$ (целевая функция)

при

$$\left.\begin{array}{r} X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + X_2 \leq 8 \\ X_1 + 0{,}8X_2 \leq 5 \\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ X_2 \leq 2 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ ограничения} \qquad (1.1)$$

Пример 1.2. Металлургическому заводу требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Завод закупает три сорта угля A, B, C с известным содержанием примесей. В какой пропорции нужно смешивать исходные продукты A, B, C, чтобы смесь удовлетворяла ограничениям на содержание примесей и имела минимальную цену?

Содержание примесей и цена исходных продуктов приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Сорт угля	Содержание (%)		Цена 1 т (руб.)
	фосфора	золы	
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Построим математическую модель.

Обозначим:

X_1 – количество угля сорта A в тонне смеси
X_2 – количество угля сорта B в тонне смеси
X_3 – количество угля сорта C в тонне смеси

$\left.\right\}$ переменные модели

$f(\overline{X}) = 30X_1 + 30X_2 + 45X_3 \Rightarrow \min$ – стоимость 1 т смеси – целевая функция,

$0{,}06X_1 + 0{,}04X_2 + 0{,}02X_3 \le 0{,}03$ (%) – ограничение на содержание фосфора в смеси,

$2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \le 3{,}25$ (%) – ограничение на содержание зольных примесей,

$X_1 + X_2 + X_3 = 1$ (т) – ограничение на состав 1 т смеси.

Окончательно, математическая модель имеет вид.

Определить количество угля сортов A, B, C (X_1, X_2, X_3) в тонне смеси, при которых достигается

$$\min f(\overline{X}) = 30X_1 + 30X_2 + 45X_3$$

при

$$\begin{aligned} &0{,}06X_1 + 0{,}04X_2 + 0{,}02X_3 \le 0{,}03 \\ &2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \le 3{,}25 \\ &X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ &X_{1,2,3} \ge 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Пример 1.3. (задача составления кормовой смеси (задача о диете).

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 500 г = 0,5 кг.

Для того чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов.

В табл. 1.3 приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Смесь должна содержать:

не менее 0,8% кальция
не менее 22% белка
не более 5% клетчатки

$\left.\right\}$ от общего веса смеси

Требуется определить количество (в кг) каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

Таблица 1.3

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/ингредиента)			Стоимость (руб./кг)
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	-	-	0,4
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,50	0,08	0,40

Математическая формулировка задачи.

Введем следующие обозначения:

X_1 – содержание известняка в смеси (кг);

X_2 – содержание зерна в смеси (кг);

X_3 – содержание соевых бобов в смеси (кг).

Общий вес смеси, еженедельно расходуемый на кормление цыплят:

$20\,000 \times 0{,}5 = 10\,000$ кг.

Ограничения, связанные с содержанием кальция, белка и клетчатки в кормовом рационе, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
0{,}38X_1 + 0{,}001X_2 + 0{,}002X_3 &\geq 0{,}008 \times 10\,000,\\
0{,}09X_2 + 0{,}50X_3 &\geq 0{,}22 \times 10\,000,\\
0{,}02X_2 + 0{,}08X_3 &\leq 0{,}05 \times 10\,000.
\end{aligned}
$$

Окончательный вид математической формулировки задачи:

$$\min f(\overline{X}) = 0{,}04X_1 + 0{,}15X_2 + 0{,}40X_3$$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&X_1 + X_2 + X_3 = 10\,000\\
&0.38X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \geq 80\\
&0.09X_2 + 0.50X_3 \geq 2200\\
&0.02X_2 + 0.08X_3 \leq 500\\
&X_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

Пример 1.4. (задача о раскрое, или минимизации отходов (обрезков)). Продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины – по 2 метра. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны и других размеров, для чего производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Заказ	Ширина рулона (м)	Количество рулонов
1	0,5	150
2	0,7	200
3	0,9	300

Требуется найти такие сочетания различных вариантов разрезания стандартных рулонов, чтобы поступившие заказы полностью удовлетворить с минимальными потерями (отходами). Рассмотрим все возможные варианты раскроя стандартного рулона и соответствующие данные сведем в табл. 1.5.

Определим переменные: X_j – количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту j, j = 1, 2,…, 6.

Ограничения непосредственно связаны с требованием обеспечить изготовление требуемого количества нестандартных рулонов. Используя данные табл. 1.5, получим:

Таблица 1.5

Ширина рулона (м)	Варианты раскроя рулона						Минимальное количество рулонов
	1	2	3	4	5	6	
0,5	0	2	2	4	1	0	150
0,7	1	1	0	0	2	0	200
0,9	1	0	1	0	0	2	300
Отходы (м)	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2	-

$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150$ – количество рулонов шириной 0,5 м,
$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200$ – количество рулонов шириной 0,7 м,
$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300$ – количество рулонов шириной 0,9 м.

Выражение для суммарной величины потерь бумаги (отходы) (в м) имеет вид
$0{,}4X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}1X_3 + 0{,}1X_5 + 0{,}2X_6$
Таким образом, математическая модель в общем виде имеет вид:

$$\min f\left(\overline{X}\right) = 0{,}4X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}1X_3 + 0{,}1X_5 + 0{,}2X_6$$

при ограничениях:

$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 =150$
$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200$
$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300$
$X_j \geq 0$; X_j – целые; j = 1,..., 6.

Контрольные вопросы

1. Дайте несколько определений термина «исследование операций» и сравните их между собой.
2. Дайте определение термина «операция».
3. В чем состоит цель, которую преследуют в процессе исследования операций?
4. Приведите примеры экономических проблем, решаемых с помощью ММИО.
5. Перечислите этапы ИО.
6. Опишите подробно третий этап ИО.
7. Какие переменные модели ИО называются управляемыми?
8. Какие переменные модели ИО называются неуправляемыми?
9. Запишите формулировку задачи математического программирования.
10. Приведите классификацию ММИО.

Задание №1

1. Завод – производитель высокоточных элементов для автомобилей – выпускает два различных типа деталей X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10 000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Составить математическую модель задачи, если необходимо получить информацию, сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю при том, что доход от производства одной детали типа X составляет 30 ф. ст., а от производства одной детали типа Y– 40 ф. ст.?

2. Завод по производству электронного оборудования выпускает персональные компьютеры и системы подготовки текстов. В настоящее время освоены две модели:

а) «Юпитер» – объем памяти 1 Гб, одинарный дисковод;

б) «Марс» – объем памяти 2 Гб, двойной дисковод.

В производственный процесс вовлечены три цеха завода – цех узловой сборки, сборочный и испытательный. Распределение времени, требуемого для обработки каждой модели в каждом цехе, а также максимальные производственные мощности цехов приведены в табл. Отдел исследований рынка производит периодическую оценку потребительского спроса на каждую модель. Максимальные прогнозные значения спроса и доходы от реализации единицы продукции каждой модели также содержатся в табл.

Построить математическую модель для изложенной проблемы производства изделий в ассортименте, если цель состоит в максимизации общего ежемесячного дохода.

Время, требуемое на обработку каждой модели в каждом цехе

Характеристики	Время на единицу продукции, ч		Максимальная производственная мощность,
	«Юпитер»	«Марс»	час
Цех: узловой сборки сборочный испытательный	 5 2 0,1	 20 8 2	 800 420 150
Максимальное прогнозное значение спроса, за месяц	100	25	
Доход, ф.ст.	15	120	

3. Менеджер по ценным бумагам намерен разместить 100 000 ф. ст. капитала таким образом, чтобы получать максимальные годовые проценты с дохода. Его выбор ограничен двумя возможными объектами инвестиций: А и В. Объект А позволяет получать 6% годовых, объект В – 8% годовых. Для всех объектов степень риска и условия размещения капитала различны. Чтобы не подвергать риску имеющийся капитал, менеджер принял решение, что не менее половины инвестиций необходимо вложить в объект А. Чтобы обеспечить ликвидность, не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в объект В. Особенности налоговой политики требуют, чтобы в объект А было вложено не менее 30% капитала. Сформулировать для изложенной проблемы распределения инвестиций математическую модель.

4. «Princetown Paints Ltd.» выпускает два основных типа румян – перламутровые и матовые – с использованием одинаковых смесеобразующих машин и видов работ. Главному бухгалтеру фирмы было поручено разработать для компании план производства на неделю. Информация о ценах продаж и стоимости 100 л товара приведена в таблице (ф. ст.).

Характеристики	Румяна	
	Перламутровые	Матовые
Издержки производства товаров на 100 л:	126	110
стоимость сырья	25	20
стоимость трудозатрат	36	24
стоимость приготовления смеси	20	36
другие издержки	15	10

Стоимость 1 чел.-ч составляет 3 ф. ст., а стоимость 1 ч приготовления смеси — 4 ф. ст. Фонд рабочего времени ограничен 8000 чел.-ч. в неделю, а ограничение на фонд работы смесеобразующих машин равно 5900 ч в неделю.

В соответствии с контрактными соглашениями компания должна производить 25000 л матовых румян в неделю. Максимальный спрос на перламутровые румяна — 29000 л в неделю.

Требуется сформулировать математическую модель задачи, позволяющую определить объемы производства матовых и перламутровых румян в неделю, при которых достигается максимальное значение получаемой за неделю прибыли.

5. Администрация компании «Nemesis Company», осуществляя рационализаторскую программу корпорации, приняла решение о слиянии двух своих заводов в Аббатсфилде и Берчвуде. Предусматривается закрытие завода в Аббатсфилде и за счет этого — расширение производственных мощностей предприятия в Берчвуде. На настоящий момент распределение рабочих высокой и низкой квалификации, занятых на обоих заводах, является следующим:

Квалификация рабочих	Аббатсфилд	Берчвуд
Высокая	200	100
Низкая	300	200
Итого	500	300

В то же время после слияния завод в Берчвуде должен насчитывать 240 рабочих высокой и 320 рабочих низкой квалификации.

После проведения всесторонних переговоров с привлечением руководителей профсоюзов были выработаны следующие финансовые соглашения:

1. Все рабочие, которые попали под сокращение штатов, получат выходные пособия следующих размеров:

квалифицированные рабочие – 2000 ф. ст.;

неквалифицированные рабочие – 1500 ф. ст.

2. Рабочие завода в Аббатсфилде, которые должны будут переехать, получат пособие по переезду в размере 2000 ф. ст.

3. Во избежание каких-либо преимуществ для рабочих Берчвудского завода доля бывших рабочих завода в Аббатсфилде на новом предприятии должна совпадать с долей рабочих Берчвудского завода.

Требуется построить модель линейного программирования, в которой определяется, как осуществить выбор работников нового предприятия из числа рабочих двух бывших заводов таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, связанные с увольнением и переменой места жительства части рабочих.

6. Компания «Bermuda Paint» – частная промышленная фирма, специализирующаяся на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	Цена продажи 1 галлона, ф. ст.	Издержки производства 1 галлона, ф. ст.
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин. трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака – 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 унциям, тогда как ее расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 галлонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 галлонов. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется:

а) Построить линейную модель для производственной проблемы, с которой столкнулась компания.

б) Используя графический метод, определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину дохода.

7. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количестве 24, 31 и 18 шт. соответственно. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт. при расходе по способу)	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

8. В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры разрядов 1 и 2. Норма выработки ОТК за 8-часовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер разряда 1 проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер разряда 2 проверяет 15 изделий в час, и его точность составляет 95%.

Заработная плата контролера разряда 1 равна 4 долл. в час, контролер разряда 2 получает 3 долл. в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 долл. Фирма может использовать 8 контролеров разряда 1 и 10 контролеров разряда 2. Руководство фирмы хочет определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальными.

9. Фирма, специализирующаяся на производстве полуфабрикатов, выпускает три различных продукта, каждый из которых получается путем определенной обработки картофеля. Фирма может закупить картофель у двух различных поставщиков. При этом объемы продуктов 1, 2, 3, которые можно получить из одной тонны картофеля первого поставщика, отличаются от объемов, получаемых из того же количества картофеля второго поставщика. Соответствующие показатели приведены в таблице.

Продукт	Поставщик 1	Поставщик 2	Ограничения на объем выпускаемой продукции
1	0,2	0,3	1,8
2	0,2	0,1	1,2
3	0,3	0,3	2,4
Относит. прибыль	5	6	

Какое количество картофеля следует купить у каждого из поставщиков?

10. Фирма, имеющая лесопильный завод и фабрику, на которой изготавливается фанера, столкнулась с проблемой наиболее рационального использования лесоматериалов. Чтобы получить 2,5 м^3 комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 куб. м еловых и 7,5 куб. м пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 кв. м фанеры требуется 5 куб. м еловых и 10 куб. м пихтовых материалов. Фирма имеет 80 куб. м еловых и 180 куб. м пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 куб. м пиломатериалов и 1200 кв. м фанеры. Доход с 1 куб. м пиломатериалов составляет 16 долл., а со 100 кв. м фанеры – 60 долл.

Определить оптимальные объемы производства пиломатериалов и фанеры.

Составить математическую модель задачи.

11. Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы 4 моделей (А, В, С, D). Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливают радиаторы.

Модель радиатора	A	B	C	D
Необходимое кол-во раб. силы	0,7	1,6	2	1,8
Необходимое кол-во стального листа, м^2	4	3	5	6
Прибыль от продажи одного радиатора, долл.	15	15	22,5	10

Кол-во стального листа – не более 2500 м^2, количество человеко-часов не более 500. Рыночный спрос на радиаторы В и С составляет соответственно 10 и 30 штук.

Решить задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции.

12. Фирма производит три вида продукции (А, В, С), для выпуска каждого из них требуется определенное время обработки на всех 4 устройствах I, II, III, IV.

Вид продукции	Время обработки				Прибыль, долл.
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	300
B	6	1	3	3	600
C	3	3	2	4	400

Пусть время работы на устройствах соответственно 64, 32, 41 и 52 часа. Определить, какую продукцию и в каких количествах следует производить. Рыночный спрос на продукцию А составляет 5 штук.

Рассмотреть задачу максимизации прибыли.

13. Прибыль от изделий А, В, С составляет соответственно 13, 14, 15 единиц. Для каждого изделия требуется время использования станка I и II, которые доступны соответственно 18 и 14 часов в день:

Станок	Изделие		
	A	B	C
I	2	3	3
II	4	1	2

Найти оптимальный план производства, если задан план производства продукции В = 2 единицам.

14. Фирма, выпускающая трикотажные изделия, использует для производства продукции 2 вида сырья.

Сырье	Запас сырья	Затраты на единицу продукции		
		свитер	палантин	пуловер
Чистая шерсть	160	0,4	0,2	0,8
Полиамид	60	0,2	0,1	0,2
Прибыль за изделие, ден. ед.		160	50	120

Найти план выпуска готовой продукции, максимизирующий прибыль, если задан план производства свитеров, равный 100 единицам.

15. В торговом зале необходимо выставить для продажи товары Т1 и Т2. Рабочее время продавцов не превышает 340 часов, а площадь торгового зала, которую можно занять, не превышает 120 м^2. Каждая реализованная единица товара приносит прибыль соответственно в 50 и 80 ден. ед. Нормы затрат ресурсов на единицу проданного товара составляют:

Ресурсы	Т1	Т2
Рабочее время, ч	0,4	0,6
Площадь, м^2	0,2	0,1

Найти оптимальную структуру товарооборота (чем меньше единиц товара, тем лучше), обеспечивающую прибыль не менее 30 000 ден. ед.

16. Фирма занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг (или 1л) имеющихся продуктов?

Известно, что хлеб, соя и фрукты будут включены в рацион в размере соответственно 2, 1 и 5 единиц.

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

17. Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь четырех компонентов. Данные о ресурсах приведены в таблице:

Характеристика	Компонент автомобильного бензина			
	№1	№2	№3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость, ден. ед./ тонн	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной. Необходимо использовать заданное количество тонн компонентов №1 и №4, составляющее соответственно 150 и 100 тонн.

18. В пекарне для выпечки 4 видов хлеба используются мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование позволяет переработать в сутки не более 250 кг муки I сорта, 200 кг муки II сорта, 60 кг маргарина и 1380 штук яиц.

Наименование продукта	Нормы расхода на 1 кг хлеба по видам			
	1	2	3	4
Мука I(кг)	0,5	0,5	0	0
Мука II(кг)	0	0	0,5	0,5
Маргарин (кг)	0,125	0	0	0,125
Яйцо(шт)	2	1	1	1
Прибыль	14	12	5	6

Определить суточный план выпечки хлеба, максимизирующий прибыль, при котором хлеба вида 2 и 3 будет выпечено по 100 килограмм.

19. Прядильная фабрика для производства 2 видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1 т пряжи		Количество сырья
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	0,1	0,4	620
Акрил	0,4	0,2	500
Прибыль от реализации пряжи	1100	900	

Требуется составить план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

20. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и В, смешивая 3 ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай.

Ингредиенты	Нормы расхода (т/т)		Объем запасов (т)
	А	В	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1 т продукции	320	290	

Требуется составить план производства чая, максимизирующий прибыль.

21. Оптика выпускает 3 вида продукции: обыкновенные очки, солнцезащитные очки и контактные линзы. Для производства используются 3 вида сырья: А, В, С.

Расходы сырья приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расходов сырья			Расходы сырья за 1 день
	обыкновенные очки	солнцезащитные очки	контактные линзы	
A	4	2	5	820
B	3	6	2	800
C	1	2	4	600

Составить план производства продукции, максимизирующий прибыль, учитывая, что спрос на контактные линзы составляет 50 единиц.

22. Завод выпускает 3 вида мотоциклов: кроссовый, спортивный, грузовой. Для их изготовления используется сырье 3 типов: S1, S2, S3, где:

S1 – сталь;

S2 – резина;

S3 – пластмасса.

Норма расхода каждого из видов сырья на 1 мотоцикл и объем расхода сырья на 1 день приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расходов сырья на 1 мотоцикл			Расходы сырья за 1 день
	кроссовый	спортивный	грузовой	
S1	80	70	120	4200
S2	5	6	10	302
S3	15	20	8	754

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида мотоцикла, максимизирующий суммарную прибыль, если известно, что грузовых мотоциклов необходимо выпустить 10 штук.

23. Фабрика молочных изделий производит йогурты двух видов А и В (большие – 500 гр. и маленькие – 800 гр.). В день реализуется до 1500 йогуртов. Для производства одной баночки йогурта вида А требуется 400 гр. «основы», а для производства одной баночки вида В – 200 гр. «основы». Всего «основы» в неделю изготавливается 8000 кг. На изготовление одной баночки А расходуется 5 мин., на изготовление баночки В расходуется 3 мин. Всего оборудование в неделю можно использовать 150 часов. Получить максимальную прибыль, если прибыль с одной баночки йогурта А составляет 4 рубля, а с одной баночки В – 2 рубля.

24. Фирма производит одежду двух видов: платья и костюмы. В неделю фирма продает 600 изделий. Для каждого платья требуется 3 м полотна, а для костюма 5 м. Фирма в неделю получает 1200 м полотна. Для шитья 1 платья требуется 30 минут, а для шитья костюма 40 минут. Оборудование может использоваться не больше 80 часов в неделю. Если прибыль от продаж платья – 50$, то от костюма – 85$. Сколько изделий надо выпускать в неделю для получения максимальной прибыли?

25. Текстильная фабрика специализируется по выпуску изделий 4 видов: свитеров, футболок, курток и брюк. При этом используется сырье 4 видов: S1, S2, S3, S4.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну вещь, усл. ед.				Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	свитер	футболки	куртки	брюки	
S1	5	3	4	6	2700
S2	2	1	1	3	800
S3	3	2	2	2	1600
S4	4	5	3	4	3000
Прибыль	200	150	120	210	

Составить план производства, максимизирующий прибыль. Задан план производства курток и брюк, составляющий, соответственно, 200 и 100 единиц.

ТЕМА 2.

Элементы линейной алгебры

Для изучения данного раздела дисциплины необходимы знания элементарной математики.

Изучив данную тему, студент должен:

– научиться работать с матричной формой представления информации, решать любые СЛАУ;
– уметь решать любые задачи линейной алгебры;
– приобрести навыки решения задач линейной алгебры с помощью пакетов прикладных программ.

Цель изучения – выработать навыки решения систем линейных алгебраических уравнений.

2.1. Алгебра матриц

2.1.1. ВИДЫ МАТРИЦ

Определение: *Матрицей* $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \ \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} ($I = 1...m$; $j = 1...n$), составляющие данную матрицу, называются ее *элементами*: i – номер строки матрицы, j – номер столбца.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* порядка n. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 1 & 5 & 0{,}8 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица третьего порядка.}$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *вектором-строкой*, а матрица, состоящая из одного столбца – *вектором-столбцом*. $A = (a_{11}\ a_{12},\dots,\ a_{1n})$ – вектор-строка;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец.}$$

Элементы квадратной матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки ($I = j$), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

Если все внедиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \text{– диагональная матрица третьего порядка.}$$

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E. Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю:

$$\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ называются *равными*, если их соответствующие элементы равны, т.е. $A = B$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$, $i=1...m; j = 1...n$.

2.1.2. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой c_{ij} равны сумме соответствующих элементов a_{ij} и b_{ij} матриц A и B.

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Для суммы матриц справедливы следующие свойства:

1. $A + B = B + A$ – коммутативность;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ – ассоциативность;
3. $A + \mathbf{0} = A$, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой b_{ij} вычисляются следующим образом: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1...m; j = 1...n$. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } 5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}.$$

Из определения произведения матрицы на число вытекают следующие свойства:

1. $\alpha A = A\alpha$ 4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
2. $1 \times A = A$ 5. $(\alpha + \beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}$.
3. $0 \times A = 0$ 6. $\alpha(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A} + \alpha\mathrm{B}$.

Определение: Матрица $(-A) = (-1) \times A$ называется *противоположной* матрице A.

Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \times B$.

Произведением матрицы A порядка $m \times k$ на матрицу B порядка $k \times n$ (т.е. количество столбцов первой матрицы равно числу строк второй) называется матрица $C = A \times B$ порядка $m \times n$, элементы которой c_{ij} вычисляются по формуле

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{ki}$, $I = 1\ldots m;\ j = 1\ldots n.$

Из данного выражения следует правило умножения матриц: чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы C, необходимо все элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Для произведения матриц справедливы следующие свойства:

1. $A(BC) = (AB)C$ 3. $(A+B)C = AC+BC$
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ 4. $C(A+B) = CA+CB$

Произведение двух матриц не коммутативно, т.е. в общем случае $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются коммутативными. Так, например, единичная матрица E коммутативна с любой квадратной матрицей того же порядка, причем $AE = EA = A$.

Пример 2.1. Найти произведения AB и BA матриц:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 0+1\times 1 & 0\times 0+1\times 0 \\ 0\times 0+0\times 1 & 0\times 0+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 0+0\times 0 & 0\times 1+0\times 0 \\ 1\times 0+0\times 0 & 1\times 1+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 2.2. Найти произведение AB двух векторов:

$$A = (2 \quad -3 \quad 8 \quad 0),\ B = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. При умножении матрицы-строки (1×4) на вектор-столбец (4×1) получаем число (1×1):

$$AB = (14 + (-21) + 32 + 0) = 25.$$

Пример 2.3. Найти произведение KL следующих матриц:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$KL=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 5\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\cdot 2+3\cdot 1 & 0\cdot 3+3\cdot 3 & 0\cdot(-1)+3\cdot 5 & 0\cdot 0+3\cdot 4\\ 1\cdot 2+5\cdot 1 & 1\cdot 3+5\cdot 3 & 1\cdot(-1)+5\cdot 5 & 1\cdot 0+5\cdot 4\\ (-1)\cdot 2+1\cdot 1 & (-1)\cdot 3+1\cdot 3 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 5 & (-1)\cdot 0+1\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 9 & 15 & 12\\ 7 & 18 & 24 & 20\\ -1 & 0 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Транспонирование матрицы – это такое преобразование, при котором строки заменяются соответствующими столбцами. Обозначение *транспонированной* матрицы: A', A^T .

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами:

1. $(A`)` = A$,
2. $(A + B)` = A` + B`$,
3. $(AB)` = B`A`$.

Матрица $A = (a_{ij})_{m,n}$ называется *симметрической*, если она совпадает со своей транспонированной.

Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется *обратной* к матрице A, если она удовлетворяет соотношению

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Обратную матрицу можно вычислить на основании следующих элементарных преобразований (преобразований Жордана–Гаусса) над строками матрицы:

1. умножение строки матрицы на любое число, отличное от нуля;
2. прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на любое число.

Для того чтобы вычислить обратную матрицу для матрицы A, необходимо составить матрицу $\mathrm{B}=\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{E}\right)$, затем с помощью элементарных преобразований преобразовать матрицу A к виду единичной матрицы E, тогда на месте единичной матрицы получим матрицу A^{-1}.

Пример 2.4. Вычислить обратную матрицу для матрицы A:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 12\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу $B^{(0)}$ вида

$$\mathrm{B}^{(0)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 12 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Элемент $b_{11}^{(0)}=1$ и первую строку, содержащую данный элемент, назовем *направляющими*. Осуществим элементарные преобразования, в результате которых первый столбец преобразуется в единичный, с единицей в первой строке. Для этого ко второй и третьей строкам прибавим первую строку, соответственно умноженную на 1 и (-2). В результате данных преобразований получим матрицу

$$B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

В матрице $B^{(1)}$ преобразуем второй столбец в единичный. В качестве направляющего элемента выберем элемент $b_{22}^{(1)} = 3$. Так как направляющий элемент $b_{22}^{(1)} \neq 1$, то разделим вторую (направляющую) строку на 3. Затем к первой строке прибавим вторую, умноженную на -3. Получим матрицу

$$B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Третий столбец матрицы $B^{(2)}$ преобразуем в единичный. В качестве направляющего элемента выбираем $b_{33}^{(2)} = 4$. Делим направляющую (третью) строку на 4 и ко второй строке прибавляем третью, умноженную на (–4/3). Получим матрицу

$$B^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

откуда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $A^{-1}A = E$.

2.2. Вычисление определителей

Определение: *Определителем n-го* порядка, соответствующим квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется алгебраическая сумма *n!*[1] членов, каждый из которых есть произведение *n* элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем член берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную перестановку, и со знаком минус — в противном случае:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum^{n!} (-1)^{\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

где суммирование распространяется на всевозможные перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из *n* чисел 1, 2,...., *n*.

Несмотря на громоздкость определения, в первую очередь, следует запомнить, что *определитель* – это *число*, характеризующее квадратную матрицу.

Вычисление определителей *n*-го порядка производится на основании свойств определителей и теоремы Лапласа.

Перечислим основные свойства определителей, опуская доказательства:

1. *Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.*
2. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число* λ, *то её определитель умножится на это число.*
3. *При транспонировании матрицы её определитель не изменяется:* $|A'| = |A|$.
4. *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.*
5. *Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю.*
6. *Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то её определитель равен нулю.*
7. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.*

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка называется определитель матрицы (*n*-1)-го порядка, полученной из матрицы *A* вычёркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца (*I* + *j*) – чётное число, и отличается от минора знаком, когда (*I* + *j*) – нечётное число.

Теорема 2.1 (Лапласа). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|\mathrm{A}| = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \dots + a_{in}\mathrm{A}_{in}$$

(разложение по элементам *i*-й строки; *I* = 1, 2,…, *n*).

[1] Число *n!* называется *факториалом* числа *n* и вычисляется по формуле: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 2.5. Вычислить определитель второго порядка матрицы **A:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель второго порядка непосредственно вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Пример 2.6. Вычислить определитель третьего порядка матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Пример 2.7. Вычислить определитель:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. В каком-либо столбце (строке) определителя получим единицу. Для этого осуществим следующее преобразование: из элементов второго столбца вычтем соответствующие элементы первого столбца. На основании свойств определителя величина определителя при этом не изменится:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Второй столбец преобразуем так, чтобы все элементы его, за исключением элемента $a_{12} = 1$, были равны нулю. Для этого прибавим первую строку ко второй и четвертой, а из третьей строки вычтем первую. Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 9 & 9 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$|A| = 1 \times A_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 9 \end{vmatrix}.$$

В результате получим определитель третьего порядка. Преобразуем данный определитель, получая единицу с нулями во второй строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 19 & 6 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 23 & 9 & -18 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по элементам второй строки:

$$|A| = A_{22} = \begin{vmatrix} 19 & -10 \\ 23 & -18 \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 23 & 9 \end{vmatrix} = -2(19 \times 9 - 23 \times 5) = -112.$$

Квадратная матрица A порядка n называется *невырожденной* (*неособенной*), если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица A называется *особенной* (*вырожденной*).

Теорема 2.2. Для всякой невырожденной матрицы $A=(a_{ij})_{m,n}$ существует единственная обратная матрица, равная

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*,$$

где A^* – присоединенная матрица, каждый элемент которой есть алгебраическое дополнение[1] элемента a_{ij} матрицы A, т.е.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.8. Вычислить обратную матрицу для матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы: $|A| = -7 \neq 0$.

Определитель матрицы A отличен от нуля, следовательно, для матрицы А существует единственная обратная матрица. Вычислим присоединенную матрицу A^*:

$$A_{11} = -3,\ A_{12} = -1,\ A_{22} = 2,\ A_{21} = -1,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что $AA^{-1} = E$.

2.3. Решение систем алгебраических уравнений

2.3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i ($I = 1, 2,\ldots, m; j = 1, 2,\ldots, n$) – произвольные числа, называемые соответственно *коэффициентами при переменных* и *свободными членами* уравнений.

Решением системы линейных уравнений называется совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – таких, что при подстановке их вместо неизвестных каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если существует хотя бы одно ее решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*.

Совместные системы подразделяются на *определенные*, имеющие единственное решение, и *неопределенные*, имеющие бесконечное множество решений.

Запишем систему в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X, то их произведение AX есть матрица-столбец. Элементами этой матрицы-столбца являются левые части системы. На основании определения равенства матриц систему можно записать в матричной форме:

$$AX = B.$$

2.3.2. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА И МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Формулы Крамера применяются при решении системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными, определитель которой отличен от нуля.

Решение системы линейных уравнений находится по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{|\mathrm{A_j}|}{|\mathrm{A}|};\ \mathrm{j} = 1 \ldots \mathrm{n},$$

где $|A|$ — определитель матрицы *A*, определённой нами выше, $|A_j|$ — определитель, полученный из определителя $|A|$ путем замены *j*-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 2.9. Решить систему уравнений по правилу Крамера:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$$
$$X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = -2$$
$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 + X_4 = 12$$
$$3X_1 + 4X_2 - 3X_3 + 9X_4 = 38$$

Решение. Вычислим определитель матрицы *A*:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -6 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & -6 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -2(10 + 24) = -68\,.$$

Определитель $|\mathrm{A}| \neq 0$, следовательно, система совместна и обладает единственным решением. Вычислим определители $|A_j|$, $j = 1, \ldots, 4$:

$$|\mathrm{A}_1| = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & 4 & 1 \\ 38 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 1 & 4 & 5 \\ 32 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 5 \\ 16 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 13 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 4(35 - 52) = -68.$$

Аналогично вычисляем определители $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_4|$: $|A_2|$ = -136, $|A_3|$ = -204, $|A_4|$ = -272. Решение системы имеет вид:

$$x_1 = \frac{-68}{-68} = 1;\ x_2 = \frac{-136}{-68} = 2;\ x_3 = \frac{-204}{-68} = 3;\ x_4 = \frac{-272}{-68} = 4.$$

После нахождения решения целесообразно сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы, и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства.

Методом обратной матрицы решаются системы n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которых отличен от нуля. Решение матричного уравнения имеет вид: $X = A^{-1}B$ (получено из системы, записанной в матричной форме, определённой в пункте 2.3.1.).

Пример 2.10. Решить систему линейных уравнений матричным методом:

$$3X_1 - X_2 = 1$$
$$2X_1 + X_2 - 3X_3 = -5$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 8.$$

Решение. Представим данную систему в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу, обратную для матрицы A:

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 9 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор неизвестных X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{26} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 9 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 7-5+24 \\ -5-15+72 \\ 3+35+40 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 26 \\ 52 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем решение системы: $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$.

После нахождения решения целесообразно сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы, и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства.

2.3.3. МЕТОД ЖОРДАНА–ГАУССА

Каждой системе линейных уравнений поставим в соответствие *расширенную матрицу* $\widetilde{A}$, полученную присоединением к матрице A столбца свободных членов:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Метод Жордана–Гаусса применяется для решения системы m линейных уравнений с n неизвестными вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1 \ldots m.$$

Данный метод заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе уравнений с матрицей определенного вида.

Над строками расширенной матрицы $\widetilde{A}$ осуществляем следующие элементарные преобразования:

1. *перестановка двух строк;*
2. *умножение строки на любое число, отличное от нуля;*
3. *прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число;*
4. *отбрасывание нулевой строки (столбца).*

Пример 2.11. Решить методом Жордана–Гаусса системы линейных уравнений:

$$\textbf{\textit{а}})\ X_1 + X_2 + 2X_3 = -1$$
$$2X_1 - X_2 + 2X_3 = -4$$
$$4X_1 + X_2 + 4X_3 = -2$$

Решение: Составим расширенную матрицу:

$$\widetilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

<u>Итерация 1</u>

В качестве направляющего элемента выбираем элемент $a_{11}^{(0)} = 1$. Преобразуем первый столбец в единичный. Для этого ко второй и третьей строкам прибавляем первую строку, соответственно умноженную на (-2) и (-4). Получим матрицу:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

На этом первая итерация закончена.

<u>Итерация 2</u>

Выбираем направляющий элемент $a_{22}^{(1)} = -3$. Так как $a_{22}^{(1)} \neq 1$, то делим вторую строку на -3. Затем умножаем вторую строку соответственно на (-1) и на 3 и складываем соответственно с первой и третьей строками. Получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

<u>Итерация 3</u>

Выбираем направляющий элемент $a_{33}^{(2)} = -2$. Так как $a_{33}^{(2)} \neq 1$, то делим третью строку на (-2). Преобразуем третий столбец в единичный. Для этого умножаем третью строку соответственно на (-4/3) и на (-2/3) и складываем соответственно с первой и второй строками. Получим матрицу

$$\widetilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

откуда $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = -2$.

Закончив решение, на этапе обучения необходимо выполнять проверку, подставив найденные значения в исходную систему, которая при этом должна обратиться в верные равенства.

б) $X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 4$

$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 8$

$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 10X_4 = 20$

$2X_1 - 4X_2 + X_3 - 6X_4 = 4$

Решение: Расширенная матрица имеет вид:

$$\widetilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right).$$

Применяя элементарные преобразования, получим:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right),$$

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Исходная система эквивалентна следующей системе уравнений:

$X_1 - 3X_2 - 5X_4 = 0$

$2X_2 + X_3 + 4X_4 = 4$

Последние две строки матрицы $A^{(2)}$ являются линейно зависимыми.

Определение. Строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = 0,$$

где **0**=(0, 0…0). Строки матрицы являются *линейно независимыми*, когда комбинация этих строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю.

В линейной алгебре очень важно понятие *ранга матрицы*, т.к. оно играет очень большое значение при решении систем линейных уравнений.

Теорема 2.3 (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные её строки (столбцы).

Ранг матрицы $A^{(2)}$ равен 2, т.к. в ней максимальное число линейно независимых строк равно 2 (это первые две строки матрицы).

Теорема 2.4 (Кронекера–Капели). Система линейных уравнений совместна и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

1. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е.* $r = n$, *то система имеет единственное решение.*
2. *Если ранг матрицы системы меньше числа переменных, т.е.* $r < n$, *то система неопределённая и имеет бесконечное множество решений.*

В данном случае система имеет 4 переменных, а её ранг равен 2, следовательно, она имеет бесконечное множество решений.

Определение. Пусть $r < n$, r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *базисными*, если определитель матрицы из коэффициентов при них (*базисный минор*) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются *свободными*.

Определение. *Решение* системы, в котором все $n - r$ свободных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Совместная система m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) имеет бесконечное множество решений, среди которых базисных решений конечное число, не превосходящее $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)}$, где $r \le m$.

В нашем случае $C_4^2 = 6$, т.е. система имеет не более 6 базисных решений.

Общее решение имеет вид:

$$X_1 = 3X_2 + 5X_4$$
$$X_3 = 4 - 2X_2 - 4X_4$$

Найдем базисные решения. Для этого полагаем $X_2 = 0$, $X_4 = 0$, тогда $X_1 = 0$, $X_3 = 4$. Базисное решение имеет вид: (0, 0, 4, 0).

Получим другое базисное решение. Для этого в качестве свободных неизвестных примем X_3 и X_4. Выразим неизвестные X_1 и X_2 через неизвестные X_3 и X_4:

$$X_1 = 6 - 3/2X_2 - X_4$$
$$X_2 = 2 - 1/2X_3 - 2X_4 .$$

Тогда базисное решение имеет вид: (6, 2, 0, 0).

Пример 2.12. Решить систему:

$$X_1 + 2X_2 - X_3 = 7$$
$$2X_1 - 3X_2 + X_3 = 3$$
$$4X_1 + X_2 - X_3 = 16$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству 0 = –1, следовательно, данная система несовместна. Данный вывод можно также получить, если заметить, что ранг матрицы системы равен 2, тогда как ранг расширенной матрицы системы равен 3.

2.4. Векторное пространство

2.4.1. n-МЕРНЫЙ ВЕКТОР И ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. **n**-мерным вектором $\overline{x}$ называется упорядоченная совокупность n действительных чисел ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются компонентами вектора $\overline{x}$.

Определение. **n**-мерным векторным пространством R_n называют совокупность **n**-мерных векторов с действительными компонентами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

2.4.2. РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Вектор $\overline{a}_0$ называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все одновременно равные нулю, что имеет место равенство $\overline{a}_0 = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{a}_k$.

Введем два эквивалентных определения линейной зависимости векторов.

Определение. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ ($k > 1$) пространства R_n называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов. В противном случае система векторов называется *линейно независимой*.

Определение. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ ($k > 1$) пространства R_n называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что имеет место равенство: $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{a}_k = \overline{0}$. В противном случае система векторов называется *линейно независимой*.

Пример 2.13. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой.

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{a_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем решение эквивалентного равенства $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{0}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача сводится к решению однородной системы линейных уравнений

$$\begin{gathered} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{gathered}$$

относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\widetilde{A}^{(0)}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&3&0\\1&3&-1&0\\1&1&1&0\\2&3&1&0\end{array}\right);\ \widetilde{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-5&5&0\\1&3&-1&0\\0&-2&2&0\\0&-3&3&0\end{array}\right);\ \widetilde{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&0\\1&0&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Система имеет бесконечное множество решений. Поэтому система векторов является линейно зависимой.

Общее решение имеет вид: $\lambda_1=-2\lambda_3,\ \ \lambda_2=\lambda_3$.

Подставим общее решение в векторное равенство $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}=\overline{0}$.

Полагая $\lambda_3\neq 0$, получим: $-2\overline{a_1}+\overline{a_2}+\overline{a_3}=\overline{0}$, откуда можно любой вектор выразить как линейную комбинацию остальных векторов. Например, $\overline{a_2}=2\overline{a_1}-\overline{a_3}$ или $\overline{a_3}=2\overline{a_1}-\overline{a_2}$.

В пространстве R_n максимальное число линейно независимых векторов равно n. Любая система из n+1 вектора является линейно зависимой.

Определение. Совокупность n линейно независимых векторов пространства R_n называется его *базисом*.

Например, базис пространства R_n образуют n единичных векторов $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots\overline{e_i},\ldots\overline{e_n}$, причем i-я координата вектора e_i равна единице, а остальные координаты равны нулю. Данный базис принято называть *естественным*.

Пример 2.14. В естественном базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ заданы векторы $\overline{a_1}$ = (1, 1, 0)^т, $\overline{a_2}$ = (1, -1, 1)^т, $\overline{a_3}$ = (-3, 5, -6)^т, $\overline{b}$ = (4, -4, 5)^т. Показать, что векторы $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ образуют базис. Выразить вектор $\overline{b}$ в базисе $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ и найти связь между базисом $\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}$ и базисом $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$.

Решение. Векторы $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ образуют базис, если они линейно независимы. Решим векторное уравнение $\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\lambda_3\overline{a_3}=\overline{0}$ относительно неизвестных $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Решение данного уравнения единственное, а именно нулевое: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0$. Следовательно, векторы $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}$ образуют линейно независимую систему векторов и составляют базис.

Выразим связь между базисами и определим координаты вектора $\overline{b}$ в новом базисе:

$$\overline{e_1}=x_{11}\overline{a_1}+x_{12}\overline{a_2}+x_{13}\overline{a_3};\qquad \overline{e_3}=x_{31}\overline{a_1}+x_{32}\overline{a_2}+x_{33}\overline{a_3};$$

$$\overline{e_2}=x_{21}\overline{a_1}+x_{22}\overline{a_2}+x_{23}\overline{a_3};\qquad \overline{b}=x_1\overline{a_1}+x_2\overline{a_2}+x_3\overline{a_3}.$$

Выпишем для данных систем расширенную матрицу

$$\left(E|A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1&0&0&1&0&-3&5\\0&1&0&1&-1&5&-4\\0&0&1&0&1&6&5\end{array}\right).$$

Коэффициенты при неизвестных x_{ij}, x_j (i,j = 1, 3) в системах совпадают. Поэтому методом Жордана–Гаусса находим одновременно решение четырех систем. Все вычисления представим в виде следующей таблицы:

Базис	$\overline{e_1}$	$\overline{e_2}$	$\overline{e_3}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$	$\overline{b}$
$\overline{e_1}$	1	0	0	1	1	-3	4
$\overline{e_2}$	0	1	0	1	-1	5	-4
$\overline{e_3}$	0	0	1	0	1	-6	5
$\overline{a_1}$	1	0	0	1	1	-3	4
$\overline{e_2}$	-1	1	0	0	-2	8	-8
$\overline{e_3}$	0	0	1	0	1	-6	5
$\overline{a_1}$	1/2	1/2	0	1	0	1	0
$\overline{a_2}$	1/2	-1/2	0	0	1	-4	4
$\overline{e_3}$	-1/2	1/2	1	0	0	-2	1
$\overline{a_1}$	1/4	3/4	1/2	1	0	0	1/2
$\overline{a_2}$	3/2	-3/2	-2	0	1	0	2
$\overline{a_3}$	1/4	-1/4	-1/2	0	0	1	-1/2

Матрицу *A*, составленную из координат векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, преобразуем в единичную матрицу *E*, тогда на месте единичной матрицы *E* получим обратную матрицу A^{-1}. Матрица *B* преобразуется в матрицу $A^{-1}B$. Вектор $\overline{b}$ в новом базисе выражается в виде следующей линейной комбинации векторов нового базиса $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$: $\overline{b} = 1/2\overline{a_1} + 2\overline{a_2} - 1/2\overline{a_3}$.

Связь между старым и новым базисами выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{e_1} &= 1/4\overline{a_1} + 3/2\overline{a_2} + 1/4\overline{a_3} \\ \overline{e_2} &= 3/4\overline{a_1} - 3/2\overline{a_2} - 1/4\overline{a_3}. \\ \overline{e_3} &= 1/2\overline{a_1} - 2\overline{a_2} - 1/2\overline{a_3} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\overline{e_1} = 1/4\overline{a_1} + 3/2\overline{a_2} + 1/4\overline{a_3} = 1/4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3/2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + 1/4\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overline{e_2} = 3/4\overline{a_1} - 3/2\overline{a_2} - 1/4\overline{a_3} = 3/4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 3/2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - 1/4\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overline{e_3} = 1/2\overline{a_1} - 2\overline{a_2} - 1/2\overline{a_3} = 1/2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - 1/2\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2.5. Решение задач линейной алгебры с помощью MS Excel

Среда MS Excel представляет собой набор инструментов для обработки данных, как правило, числовых. Ядром данной прикладной программы являются функции MS Excel (финансовые, математические, статистические, баз данных и т.д.), предназначение которых ясно из названий. В этом параграфе мы применим средства Excel для выполнения действий над матрицами, что, надеемся, облегчит студентам решение задач.

Итак, в Excel существуют следующие функции действий над матрицами:

МУМНОЖ – возвращает произведение матриц (матрицы хранятся в массивах). Результатом является массив с таким же числом строк, как массив 1, и с таким же числом столбцов, как массив 2.

МОПРЕД – возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

ТРАНСП – транспонирование матрицы.

МОБР – возвращает обратную матрицу для матрицы, хранящейся в массиве.

Для простейших действий над матрицами, такими как:

- сложение/вычитание двух матриц;
- умножение матрицы на число –

использование встроенных функций MS Excel не требуется. Для выполнения арифметических действий, но не над числами, а над массивами чисел (матрицами), достаточно составить необходимую формулу для одного из элементов, а затем скопировать ее для всех остальных. За счет индексации (адреса) каждой ячейки листа MS Excel будет получен корректный результат.

Пример 2.15. Найдем матрицу C = A + B и D = 4*A, где A и B – матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. В данном случае необходимо ввести значения матрицы A и B (рис. 2.1). К оформлению никаких строгих правил не предъявляется:

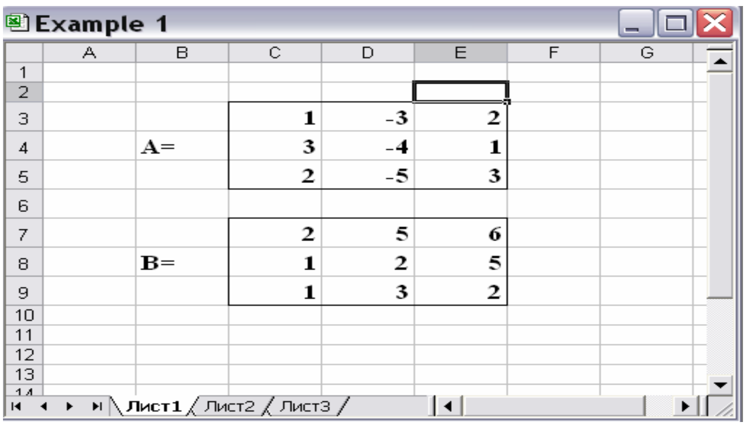


Рис. 2.1. **Исходные данные для примера**

Для нахождения матрицы С запишем в первый элемент результирующей матрицы формулу. Поскольку сложение матриц происходит поэлементно, то первый элемент матрицы С будет суммой первых элементов матриц А и В (рис. 2.2).

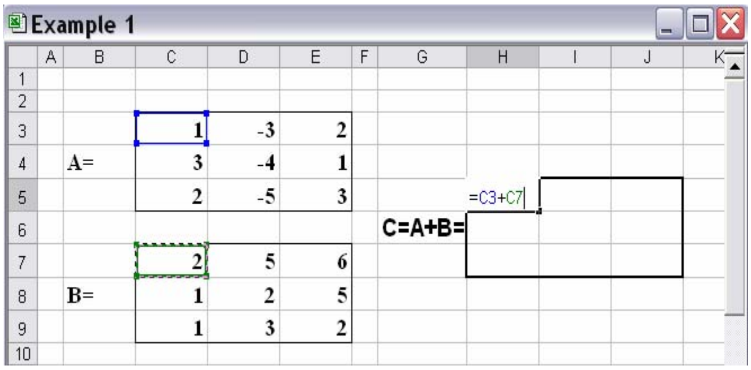


Рис.2.2. **Сумма первых элементов**

После нажатия клавиши «ENTER» в первой ячейке области, отведенной под матрицу С, появится результат сложения. Формулу, составленную для первого элемента, используем для нахождения оставшихся элементов. Для этого формулу необходимо скопировать и «забить» в нужные ячейки. Копирование и вставку можно провести тремя способами:

– поставив курсор в первую клетку, вызвать в пункте главного меню «Правка» подпункт «Копировать/Вставить»;

– правой кнопкой «мышки» нажать на первую ячейку и в появившемся меню выбрать «Копировать/Вставить»;

– воспользоваться «горячими» клавишами: копировать – Ctrl+C; вставить – Ctrl+V.

После копирования (занесения в буфер памяти) формулы, необходимо выделить область результирующей матрицы, в данном случае 3 клетки х 3 клетки, и вставить формулу перечисленными тремя способами или просто нажав клавишу «ENTER».

В результате должна получиться результирующая матрица С (рис. 2.3).

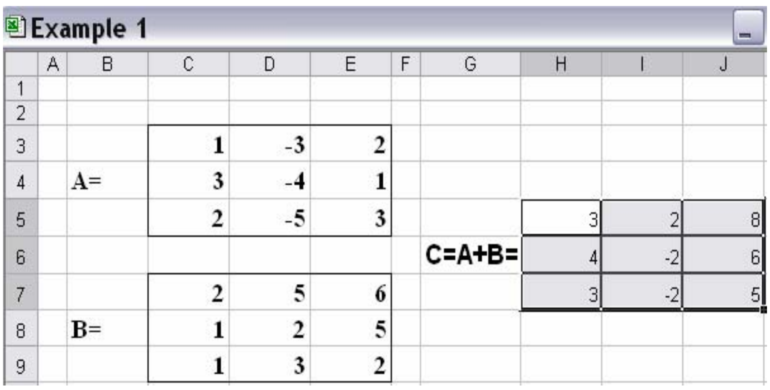


Рис. 2.3. **Результат сложения матриц**

Аналогичным образом получим матрицу D = 4*A (рис. 2.4).

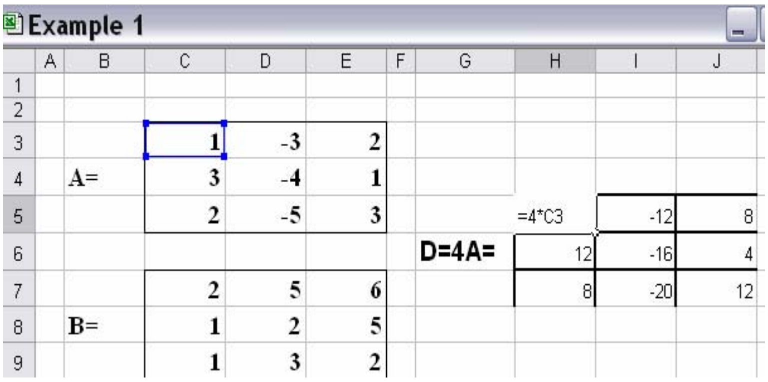


Рис. 2.4. **Результат умножения матрицы на число**

Все перечисленные выше функции можно найти в полном алфавитном списке функций MS Excel, который можно вызвать тремя способами:

– в пункте главного меню «Вставка» выбрать пункт «Функции» (рис. 2.5).

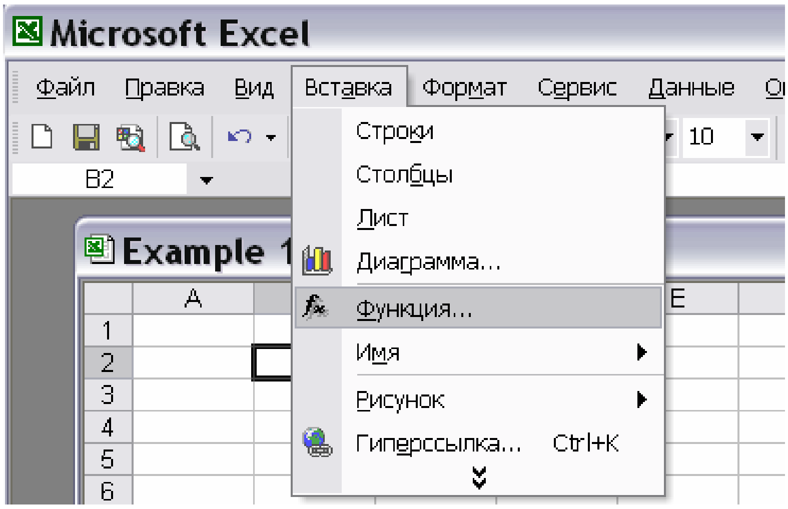


Рис. 2.5.

– нажатием на панели инструментов иконки со значком f^x (рис. 2.6).

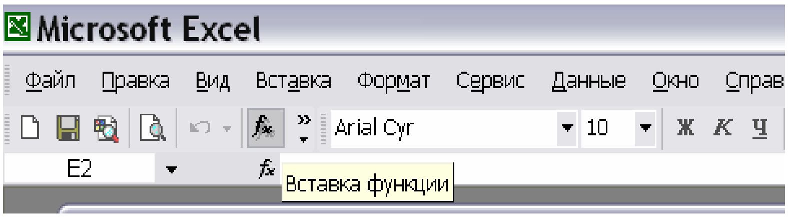


Рис. 2.6.

– после ввода в желаемую ячейку символа «=» справа под панелью инструментов появляется выпадающее меню, в котором отображены последние 10 использованных функций (рис. 2.7 и рис. 2.8).

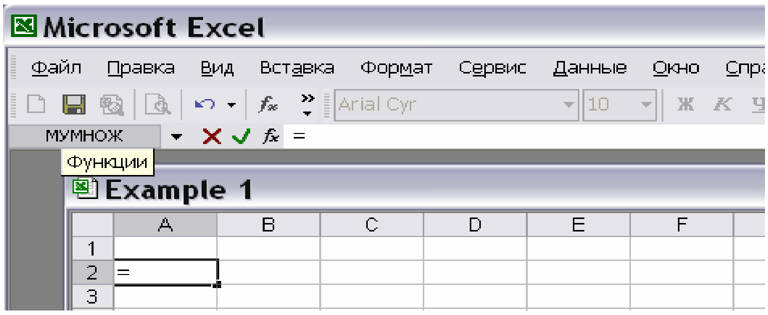


Рис. 2.7

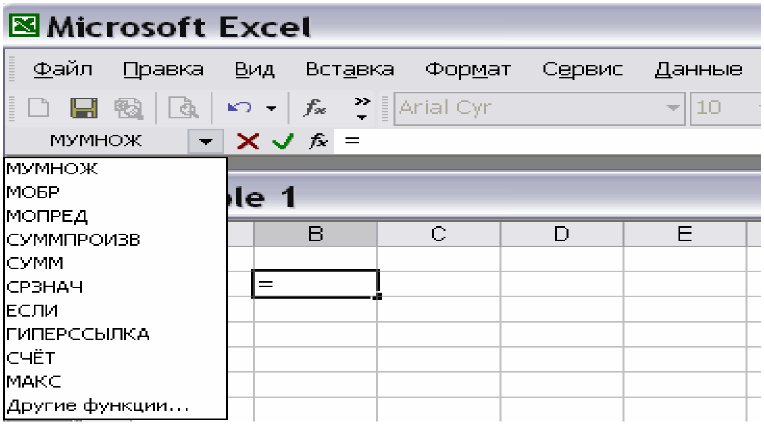


Рис. 2.8

Рассмотрим использование данных функций на примерах.

Пример 2.16. Найти **произведение матриц** А и В из примера 2.15.

Решение. В задаче перемножения матриц прежде всего необходимо определить размерность итоговой матрицы. В нашем случае, матрица Е = А*В будет содержать 3 строки и 3 столбца. На листе **Excel** необходимо выделить область 3х3 и в первой ячейке вызвать функцию МУМНОЖ (рис. 2.9).

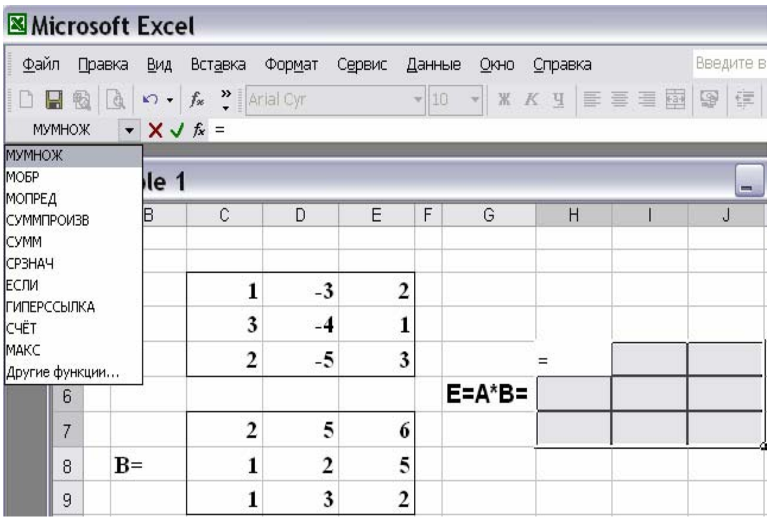


Рис. 2.9. **Вызов функции МУМНОЖ**

В окне функции МУМНОЖ заносятся адреса перемножаемых массивов. Для этого в верхнем окне для адреса первого массива необходимо нажать кнопку  и указать выделением на рабочем листе расположение элементов первого массива (рис. 2.10 и 2.11).

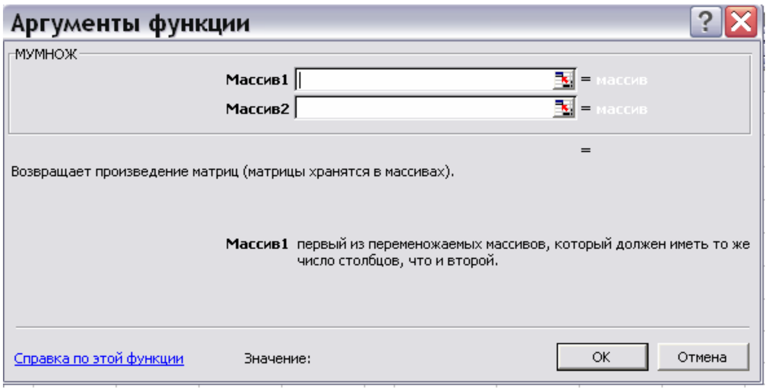


Рис. 2.10

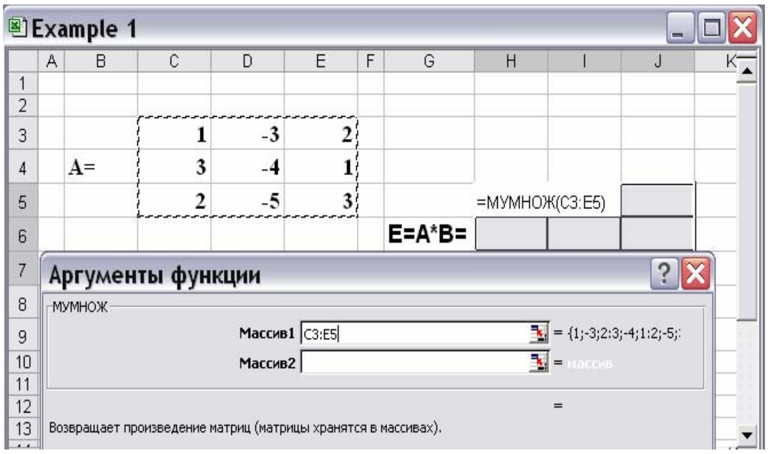


Рис. 2.11

Аналогично заполнить адрес второго массива в строке «Массив 2» (рис. 2.12).

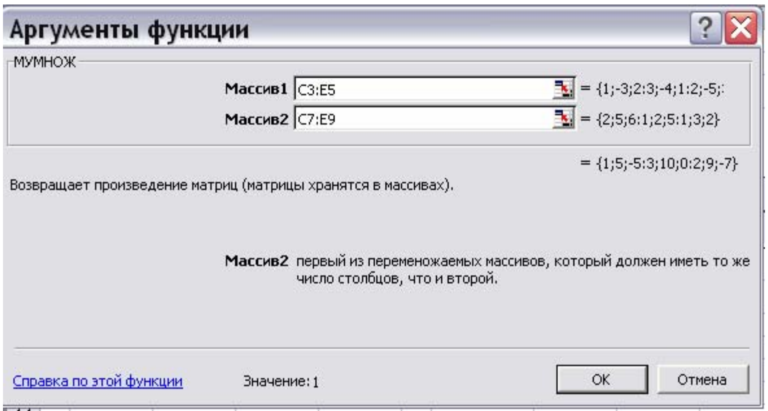


Рис. 2.12

Следующей задачей является перенос полученных результатов на рабочий лист. Поскольку в данном действии результатом является не одна ячейка, а девять, то вместо клавиши «ENTER» нажимается комбинация клавиш Ctrl+Shift+Enter. В результате должен получиться заполненный массив Е (рис. 2.13).

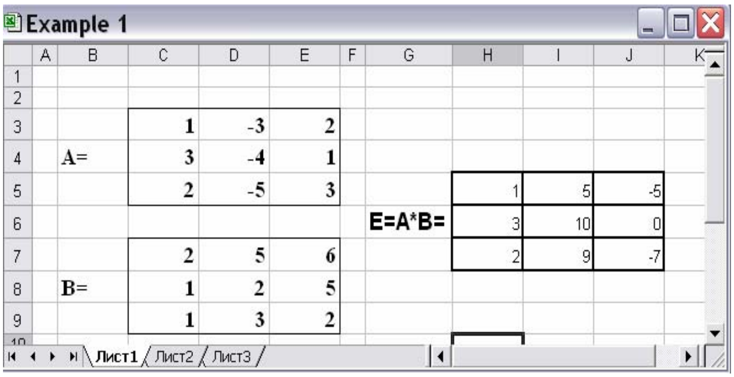


Рис. 2.13

Аналогичным образом производится работа с функцией МОБР, которая служит для нахождения обратной матрицы.

Пример 2.17. С помощью Excel найти обратную матрицу для матрицы B из примера 2.15.

Решение. Для отыскания матрицы B^{-1} выделить на рабочем листе область 3х3 и вызвать функцию МОБР. Синтаксис этой функции предполагает адрес одного массива (рис. 2.14).

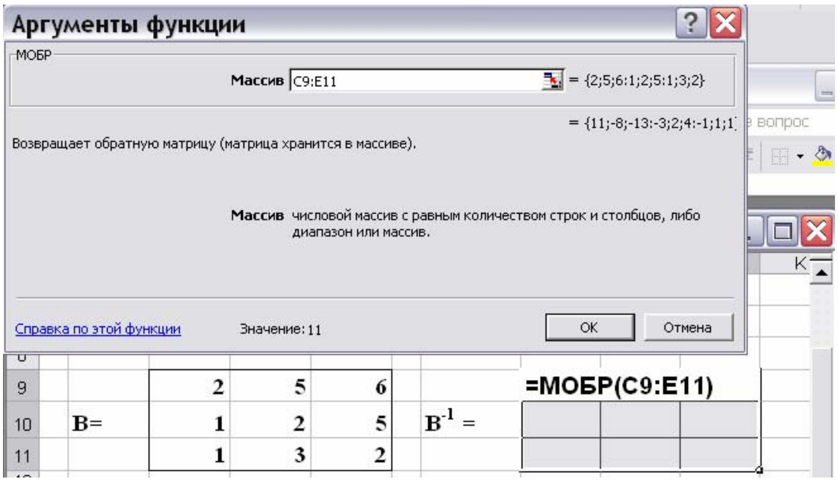


Рис. 2.14. **Нахождение обратной матрицы**

В результате нажатия комбинации клавиш (поскольку требуется заполнить не одну ячейку) Ctrl+Shift+Enter в выделенной области будет размещаться обратная матрица для массива B (рис. 2.15).

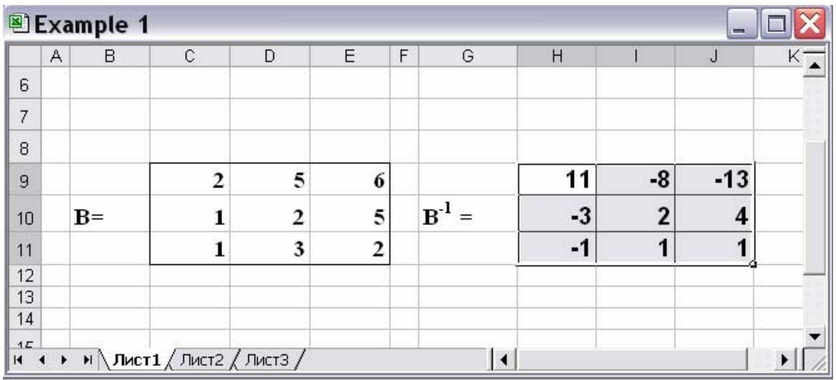


Рис. 2.15

Аналогично выполняется транспонирование матрицы с единственным отличием – используется функция ТРАНСП.

Пример 2.18. Найти определитель матрицы А из примера 2.15.

Решение. Для нахождения определителей любых порядков используется функция МОПРЕД. Поскольку опредилитель – это **число**, характеризующее квадратную матрицу, нет необходимости в выделении области для ответа. Решением будет число, помещенное в одну ячейку (рис. 2.16).

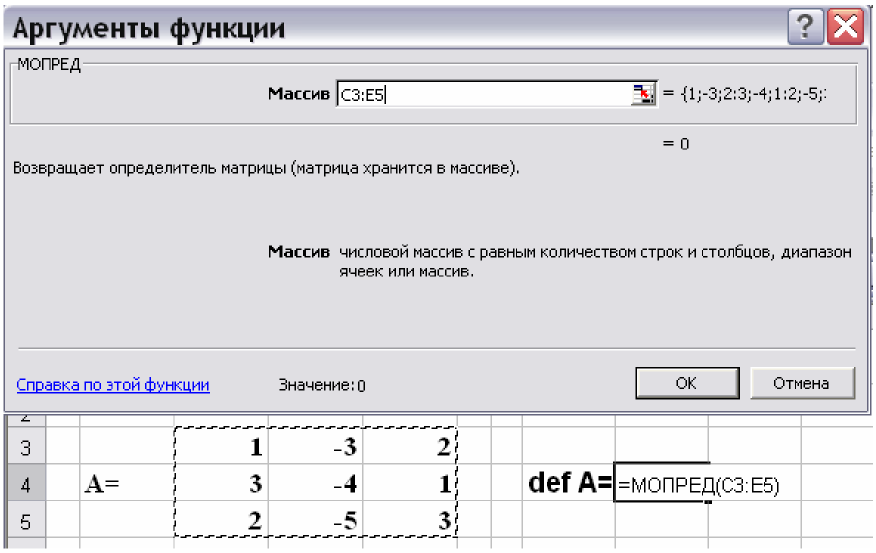


Рис. 2.16.

Необходимо помнить, что в случае, когда в результате действий над матрицами ответом будет являться массив, а не число, следует следить за выполнением двух требований:

1) перед вызовом функции выделять область, в которой ожидается решение;
2) после заполнения необходимой информации в окне таких функций, как МУМНОЖ, МОБР и ТРАНСП, следует нажимать комбинацию Ctrl+Shift+Enter.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы.
2. Перечислите виды матриц.
3. Какие матрицы можно складывать, умножать?
4. Дайте определение n-мерного вектора.
5. Является ли вектор матрицей или наоборот?
6. Что такое минор M_{ij} матрицы А?
7. Что такое алгебраическое дополнение A_{ij}?
8. Что такое определитель матрицы?
9. Как вычислить определитель квадратной матрицы второго порядка, третьего порядка?
10. Для всех ли матриц существует понятие определителя?
11. Дайте определение обратной матрицы.
12. Что такое неособенная матрица?
13. Как вычислить обратную матрицу?

14. Как проверить, является ли матрица B обратной к A?
15. Запишите СЛАУ в матричной форме.
16. Как решить СЛАУ методом Крамера?
17. Как решить СЛАУ методом обратной матрицы?
18. Запишите решение матричного уравнения AX = B.
19. Какие системы можно решать методом Гаусса?
20. Какие случаи возможны при решении СЛАУ?
21. Что такое однородная СЛАУ?
22. Дайте определение общего решения СЛАУ.
23. Дайте определение частного решения СЛАУ.
24. Дайте определение базисного решения СЛАУ.
25. Сколько базисных решений может иметь СЛАУ.
26. Что называется линейной комбинацией системы векторов?
27. Какая система векторов называется линейно-зависимой (независимой)?
28. Что называется базисом n-мерного пространства?
29. Как определить линейную зависимость или независимость системы векторов?
30. Как перейти от одного базиса векторного пространства к другому?

Задание №2

Для матриц A и B определить:

а) $3A + 4B$;

б) $AB - BA$;

в) $(A-B)^{-1}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ -7 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Задание №3

Вычислить следующие определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 3 & -12 & 21/5 & 15 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 5/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/4 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 2/5 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 5/2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 4/3 & 5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & -5 & 8 \\ 6 & -5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 7 & -8 & -4 & -5 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/2 & -1 & -2/3 \\ 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 21/5 & 15 \\ 1/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 5/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 8 & -5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -9 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & 3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & 0 & -7/3 \\ 4/3 & 5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & 5 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 7/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 4 & -8 & 0 & 12 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 5/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 4 & -6 \\ 2 & 6 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 8 \\ 1/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -7/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 8 & -5 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2/3 & 5/3 & 1/6 & 4/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & -1/4 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 2/5 & 0 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 & 4/3 \\ 3/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 7/2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2 & -7 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5/3 & -8/3 & -1/3 & -7/3 \\ 5/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 4/3 & 7/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -6 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 8/3 & -5/3 & -1 & -1/3 \\ 5/3 & -6/3 & -2/3 & -7/3 \\ 3/2 & 0 & -3/2 & -3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & -6 & 5 & 10 \\ 5 & -3 & -5 & 8 \\ 6 & 7 & -4 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 7 & -8 & -4 & -5 \\ 5/3 & -4/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -7/2 & -1 & -2/3 \\ 3/2 & -7/2 & -3/2 & -3 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \\ -5 & 4 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3/2 & -7/2 & -3/2 & -4 \\ 1/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 5/3 & -5/3 & -2/3 & -7/3 \\ 7 & -8 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 6 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & -5 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & -12 & 11/5 & 15 \\ 5/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 2/3 & -7/2 & 4/5 & 15/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 8 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & -9 & 2 & -9 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5/2 & -9/2 & 3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & 0 & -7/3 \\ 4/3 & 2/3 & -1 & -2/3 \\ 1 & -8 & -7 & 5 \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & 8 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 8/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 3 & -6 & 0 & 9 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 1/2 \\ -1/7 & 3/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 \\ -3 & 7 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & -7 & -5 \\ -4 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5/4 & 2 & -7/2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 8 \\ 1/6 & -5/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -7/5 & 3/2 & 12/5 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 9 & -5 & 4 & 8 \\ -3 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2/3 & -5/3 & 1/6 & 4/3 \\ 3/2 & 1/4 & -1/2 & 5 \\ 1/2 & 7/2 & -3/4 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 2/5 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -8 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 & 4/3 \\ 3/2 & 0 & 3/2 & 2 \\ 5/2 & -5/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 4 & 7/2 \end{vmatrix}$

Задание №4

Решите систему линейных уравнений двумя способами (после решения необходимо выполнить проверку):

- по формулам Крамера;
- матричным способом.

1) $2X_1 + 5X_2 - 8X_3 = 8$
$4X_1 + 3X_2 - 9X_3 = 9$
$2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 7$

2) $X_1 + 8X_2 - 7X_3 = 12$
$2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 7$
$6X_1 + 8X_2 - 17X_3 = 17$

3) $2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 7$
$5X_1 + 11X_2 - 16X_3 = 21$
$4X_1 + 3X_2 - 9X_3 = 9$

4) $6X_1 + 6X_2 - 14X_3 = 16$
$2X_1 + 5X_2 - 8X_3 = 8$
$4X_1 + 3X_2 + 9X_3 = 9$

5) $-7X_1 + 3X_2 + 8X_3 = 75$
$9X_1 - 4X_2 = -3$
$X_1 - 7X_2 - 3X_3 = 12$

6) $13X_1 - 6X_2 = 32$
$8X_1 + 4X_2 + 1X_3 = 12$
$2X_1 + 9X_2 + 5X_3 = -5$

7) $7X_1 - 4X_2 = 61$
$8X_1 + 9X_2 - 6X_3 = 48$
$9X_1 - 6X_2 - 2X_3 = 99$

8) $6X_1 + 3X_2 + 9X_3 = -111$
$-7X_1 - 4X_2 - 2X_3 = 52$
$X_1 - 7X_2 + 3X_3 = -47$

9) $-5X_1 + 7X_2 + 11X_3 = -2$
$2X_1 + 6X_2 + 3X_3 = 11$
$3X_1 - 5X_2 + 4X_3 = 11$

10) $2X_1 + X_2 + 3X_3 = 11$
$3X_1 + 2X_2 - 5X_3 = -20$
$5X_1 - 2X_2 + 3X_3 = -4$

11) $2X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 18$
$4X_1 + 3X_2 - 9X_3 = 9$
$2X_1 + 2X_2 - 5X_3 = 10$

12) $X_1 + 7X_2 - 5X_3 = 25$
$X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 15$
$6X_1 + 8X_2 - 17X_3 = 17$

13) $2X_1 + 5X_2 - 5X_3 = 25$
$5X_1 + 11X_2 - 16X_3 = 21$
$4X_1 + 2X_2 - X_3 = 8$

14) $6X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$
$2X_1 + X_2 - 8X_3 = 36$
$4X_1 + 3X_2 + 9X_3 = 90$

15) $-X_1 + 3X_2 + 8X_3 = 24$
$9X_1 - 4X_2 = -36$
$X_1 - 7X_2 - 3X_3 = 12$

16) $12X_1 - 6X_2 = 45$
$8X_1 + X_2 + 7X_3 = 56$
$2X_1 + 9X_2 + 5X_3 = -5$

17) $7X_1 - 4X_2 = 60$
$8X_1 + 9X_2 - 3X_3 = 48$
$9X_1 - 6X_2 - 2X_3 = 99$

18) $6X_1 + 2X_2 + 9X_3 = -81$
$-7X_1 - 4X_2 - 2X_3 = 52$
$X_1 - 5X_2 + 3X_3 = -45$

19) $-3X_1 + 7X_2 + 5X_3 = -20$
$2X_1 + 6X_2 + 2X_3 = 120$
$3X_1 - 5X_2 + 4X_3 = 90$

20) $2X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 110$
$3X_1 + 2X_2 - 3X_3 = -20$
$5X_1 - 12X_2 + 3X_3 = -4$

21) $2X_1 + 7X_2 - 8X_3 = 80$
$14X_1 + 3X_2 - 9X_3 = 90$
$2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 70$

22) $X_1 + 8X_2 - 3X_3 = 90$
$2X_1 + 3X_2 - 5X_3 = 70$
$X_1 + 8X_2 - 15X_3 = 120$

23) $2X_1 + 3X_2 - X_3 = 7$
$5X_1 + 5X_2 - 16X_3 = 25$
$X_1 + 3X_2 - 9X_3 = 9$

24) $6X_1 + 6X_2 - X_3 = 16$
$5X_1 + 5X_2 - 8X_3 = 80$
$4X_1 + 3X_2 + 9X_3 = 90$

25) $-7X_1 + 3X_2 + 8X_3 = 64$
$9X_1 - 4X_2 = -30$
$X_1 - 7X_2 - 2X_3 = 14$

Задание №5

Решить системы линейных уравнений методом Жордана–Гаусса
Вариант №1 – решить системы №1, 6, 11
Вариант №2 – решить системы №2, 7, 12
Вариант №3 – решить системы №3, 8, 13
Вариант №4 – решить системы №4, 9, 14
Вариант №5 – решить системы №5, 10, 15

Вариант №6 – решить системы №1, 7, 13
Вариант №7 – решить системы №2, 8, 14
Вариант №8 – решить системы №3, 9, 15
Вариант №9 – решить системы №4, 10, 11
Вариант №10 – решить системы №5, 6, 12
Вариант №11 – решить системы №1, 7, 12
Вариант №12 – решить системы №2, 9, 13
Вариант №13 – решить системы №3, 10, 11
Вариант №14 – решить системы №4, 8, 14
Вариант №15 – решить системы №5, 9, 12
Вариант №16 – решить системы №1, 8, 14
Вариант №17 – решить системы №2, 10, 12
Вариант №18 – решить системы №3, 9, 15
Вариант №19 – решить системы №4, 7, 11
Вариант №20 – решить системы №5, 6, 13
Вариант №21 – решить системы №1, 6, 15
Вариант №22 – решить системы №2, 8, 15
Вариант №23 – решить системы №3, 6, 14
Вариант №24 – решить системы №4, 10, 15
Вариант №25 – решить системы №5, 7, 11

1. $2X_1 + X_2 + X_3 = 2$
$X_1+3X_2 + X_3 = 5$
$X_1 +X_2 +5X_3 = -7$
$2X_1+3X_2 - 3X_3 = 14$

2. $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 3$
$3X_1 + X_2 - 5X_3 = 0$
$4X_1 - X_2 + X_3 = 3$
$X_1 + 3X_2 -13X_3 = -6$

3. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6$
$X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0$
$X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 4$
$X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 2$

4. $2X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 1$
$2X_1 - X_2 - 3X_4 = 2$
$3X_1 - X_3 + X_4 = -3$
$2X_1+2X_2 -2X_3+ 5X_4 = -6$
$11X_1 -X_2 - X_3+ X_4 = -5$

5. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$
$X_2 + X_3 +X_4 +X_5 = 0$
$X_1 +2X_2 +3X_3 = 2$
$X_2 + X_3+3X_4 = -2$
$X_3+2X_4 +X_5 = 2$

6. $X_1 +5X_2 - 9X_3 + 8X_4 = 1$
$5X_1+18X_2 + 4X_3 + 5X_4 = 12$
$2X_1 +7X_2 +3X_3 + 4X_4 = 5$
$1X_1 +3X_2 +5X_3 - 2X_4 = 3$

7. $2X_1 + 3X_2 + 9X_3 -7X_4 = 3$
$8X_1 +12X_2 - 9X_3 +8X_4 = 3$
$4X_1 + 6X_2 + 3X_3 - 2X_4 = 3$
$2X_1+ 3X_2 - X_3 + X_4 = 1$

8. $9X_1 +4X_2 + X_3 + 7X_4 = 2$
$2X_1+ 7X_2 + 3X_3 + X_4 = 6$
$3X_1 +5X_2 +2X_3 + 2X_4 =4$

9. $2X_1 - 3X_2 - 11X_3 -15X_4 = 1$
$2X_1 - 3X_2 + 5X_3 + 7X_4 = 1$
$4X_1 - 6X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 2$

10. $9X_1+12X_2 + 3X_3 +10X_4 = 13$
$3X_1+ 4X_2 + X_3 + 2X_4 = 3$
$6X_1 + 8X_2 +2X_3 + 5X_4 = 7$

11. $7X_1 - 4X_2 + X_3 + 3X_4 = 5$
$3X_1 - 5X_2 + 2X_3 + 4X_4 = 2$
$5X_1 + 7X_2 - 4X_3 - 6X_4 = 3$

12. $3X_1 + 3X_2 + 5X_3 - 2X_4 + 3X_5 = 1$
$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 + 3X_5 = 2$
$X_1 + X_2 + 3X_3 - 2X_4 + 5X_5 = 1$
$2X_1 + 2X_2 + 8X_3 - 3X_4 + 9X_5 = 2$

13. $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2$
$X_1 + X_2 + 2X_3 = 1$
$3X_1 + 5X_2 + 8X_3 = 0$
$-X_1 + X_2 + 4X_3 = 2$

14. $X_1 + X_2 - 3X_3 = -1$
$2X_1 + X_2 - 2X_3 = 1$
$X_1 + X_2 + X_3 = 3$
$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 1$

15. $2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 = 4$
$3X_1 - 2X_2 + 2X_3 - 3X_4 = 2$
$2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 1$
$5X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 1$

Задание №6

В естественном базисе заданы векторы. Установить, составляют ли они базис. Если составляют, то найти связь между новым и старым базисами, а также в новом базисе найти компоненты вектора $\overline{\mathrm{P}}$.

Для вариантов 1–10 $\overline{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Для вариантов 11–20 $\overline{P} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -13 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Для вариантов 21–30 $\overline{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

ТЕМА 3.

Линейное программирование

Для изучения данного раздела дисциплины необходимо знание темы 2.

Изучив тему, студент должен:

– знать формы записи ЗЛП, основные определения и свойства ЗЛП;
– уметь использовать графический, симплекс-метод, Р-метод, двухэтапный симплекс-метод решения ЗЛП;
– приобрести навыки решения ЗЛП с помощью MS Excel;
– уметь определять интервалы изменения коэффициентов целевой функции, при которых структура оптимального плана остается неизменной;
– уметь определять интервалы изменения значений констант в правой части ограничений, при которых структура оптимального плана остается неизменной.

Цель изучения – изучение темы «Линейное программирование» должно дать достаточно полное представление о возможностях применения методов линейного программирования и интерпретации получаемых с их помощью результатов.

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения; само возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с экономической проблематикой.

Как показывают приведенные в теме 1 примеры, левая и правая части ограничений линейной модели могут быть связаны знаками «≤», «=», «≥». Также и переменные, фигурирующие в линейных моделей, могут быть неотрицательными, отрицательными или не иметь ограничений в знаке, поэтому задачи линейного программирования имеют несколько вариантов постановки.

3.1. Постановки задачи линейного программирования

3.1.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных $X_1, X_2,\ldots,X_n$, максимизирующие линейную форму

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1x_1+\ldots+c_nx_n \qquad (3.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots, m_1 \ (m_1 \le m), \qquad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1,\ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1,\ldots, p \ (p \le n). \qquad (3.3)$$

Соотношения (3.2) и (3.3) будем называть соответственно функциональными и прямыми ограничениями задачи линейного программирования (ЗЛП).

Значения переменных X_j ($j = 1, 2,\ldots, n$) можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\overline{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ пространства E_n.

Определение. Планом, или допустимым решением, задачи линейного программирования будем называть вектор $\overline{X}$ пространства E_n, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи.

Множество всех планов задачи линейного программирования (3.1) – (3.3) будем обозначать P.

Теорема 3.1. Множество планов P задачи линейного программирования (ЗЛП) есть замкнутое выпуклое множество.

Множество P может быть как ограниченным, так и неограниченным, кроме того оно может оказаться пустым.

Напомним, что множество точек P пространства E_n есть выпуклое множество, если вместе с любыми двумя его точками $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ ему принадлежит и любая выпуклая линейная комбинация этих точек, то есть если $\overline{X}_1, \overline{X}_2 \in P$, то и любая точка

$$\overline{X} = (1-\lambda)\overline{X}_1 + \lambda\overline{X}_2, \ 0 \le \lambda \le 1$$

также принадлежит множеству P.

Множество точек $\overline{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ пространства E_n, компоненты которых удовлетворяют условию

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n = b,$$

называется гиперплоскостью пространства E_n.

Множество точек $\overline{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ пространства E_n, компоненты которых удовлетворяют условию

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \le b \ (\ge b),$$

называется полупространством пространства E_n.

Очевидно, что гиперплоскость и полупространство являются выпуклыми множествами пространства E_n.

Напомним, что точка $\overline{X}_0$ выпуклого множества K является крайней, если в K не существует таких точек $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, $\overline{X}_1 \ne \overline{X}_2$, что

$$\overline{X} = (1-\lambda)\overline{X}_1 + \lambda\overline{X}_2, \text{ при некотором } \lambda \in (0,1).$$

Геометрически это означает, что эта крайняя точка не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки выпуклого множества. Она лишь может быть одной из концевых точек этого отрезка.

Определение. План $\overline{X}^* = (X_1^*,\ldots X_n^*)$ будем называть решением задачи линейного программирования, или ее оптимальным планом, если

$$f(\bar{x}^*) = \max_{\bar{x}\in P} f(\bar{x}) .$$

Определение. Будем говорить, что задача линейного программирования разрешима, если она имеет хотя бы один оптимальный план.

3.1.2. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности.

Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, максимизирующие линейную форму

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i , \quad , i = 1,\ldots, m , \tag{3.5}$$

$$xj \ge 0,\ j = 1,\ldots, n \tag{3.6}$$

или в векторно-матричной форме

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max \tag{3.7}$$

$$A\bar{x} \le \bar{b} \tag{3.8}$$

$$\bar{x} \ge \bar{o} , \tag{3.9}$$

где $\bar{c} = (c_1, c_2,\ldots, c_n)$; $\bar{b} = (b_1, b_2,\ldots, b_m)$; $A = (a_{ij})$ – матрицы коэффициентов ограничений (3.5). Задача (3.4) – (3.6) или (3.7) – (3.9) называется основной ЗЛП. Основная ЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при $m_1 = m$, $p = n$.

3.1.3. КАНОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для построения общего метода решения ЗЛП разные формы ЗЛП должны быть приведены к некоторой стандартной форме, называемой канонической задачей линейного программирования (КЗЛП).

В канонической форме

1. все функциональные ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;
2. все переменные неотрицательны;
3. целевая функция подлежит максимизации.

Таким образом, КЗЛП имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{3.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j ,\ i = 1,\ldots,m \tag{3.11}$$

$$x_i \ge 0,\ j = 1,\ldots,n;\ b_i \ge 0;\ i = 1,\ldots,m \tag{3.12}$$

или в векторно-матричной форме

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max \tag{3.13}$$

$$A\overline{x} = \overline{b} \qquad (3.14)$$

$$\overline{x} \geq \overline{0}, \quad \overline{b} \geq \overline{0} \qquad (3.15)$$

КЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при $m_1 = 0$, $p = n$

Любую ЗЛП можно привести к каноническому виду, используя следующие правила:

а) максимизация целевой функции $f(\overline{x}) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ равносильна минимизации целевой функции: $f(\overline{x}) = -c_1x_1 - \ldots - c_nx_n$;

б) ограничение в виде неравенства, например, $3X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 6$, может быть приведено к стандартной форме $3X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 6$, где новая переменная X_4 неотрицательна. Ограничение $X_1 - X_2 + 3X_3 \geq 10$ может быть приведено к стандартной форме $X_1 - X_2 + 3X_3 - X_5 = 10$, где новая переменная X_5 неотрицательна;

в) если некоторая переменная X_k может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду $X_k = X_k' - X_k''$, где $X_k' \geq 0$ и $X_k'' \geq 0$.

3.2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП

Графическим методом целесообразно решать ЗЛП, содержащие не более двух переменных.

Алгоритм графического метода рассмотрим применительно к задаче:

$$\max f(\overline{x}) = 3X_1 + 2X_2 \qquad (3.16)$$

при

$$P = \left\{\begin{array}{rl} X_1 + 2X_2 \leq 6 & \text{(а)} \\ 2X_1 + X_2 \leq 8 & \text{(б)} \\ X_1 + 0{,}8X_2 \leq 5 & \text{(в)} \\ -X_1 + X_2 \leq 1 & \text{(г)} \\ X_2 \leq 2 & \text{(д)} \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 & \text{(е)} \end{array}\right. \qquad (3.17)$$

<u>Шаг 1.</u> Строим область допустимых решений (3.17) – область P, т.е. геометрическое место точек, в котором одновременно удовлетворяются все ограничения ЗЛП. Каждое из неравенств (а)–(д) системы ограничений (3.17) задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$\begin{array}{rl} X_1 + 2X_2 = 6 & \text{(а)} \\ 2X_1 + X_2 = 8 & \text{(б)} \\ X_1 + 0{,}8X_2 = 5 & \text{(в)} \\ -X_1 + X_2 = 1 & \text{(г)} \\ X_2 = 2 & \text{(д)} \end{array}$$

Условия неотрицательности переменных (е) ограничивают область допустимых решений первым квадратом. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения (3.17) в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных (рис. 3.1).

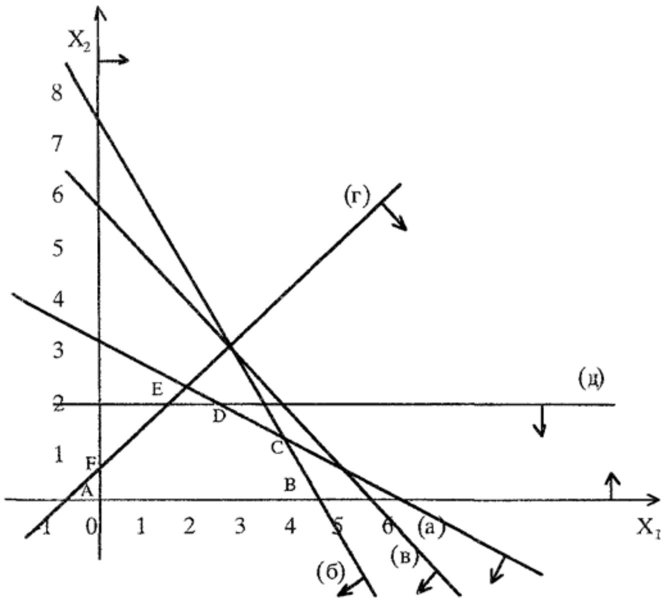


Рис. 3.1

Если система неравенств (3.17) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Полученная таким образом область допустимых решений P – планов ЗЛП (см. рис. 3.1) есть многоугольник ABCDEF – замкнутое, ограниченное, выпуклое множество с шестью крайними, или угловыми, точками: A, B, C, D, E, F.

Шаг 2. Строим вектор-градиент $\overline{C} = (C_1, C_2)$ линейной формы $f(\overline{x})$, $\overline{C} = (3{,}2)$, указывающий направления возрастания функции f.

Шаг 3. Строим прямую $C_1X_1 + C_2X_2 = \text{const}$ – линию уровня функции $f(\overline{x})$, перпендикулярную вектору-градиенту $\overline{C}$:

$3X_1 + 2X_2 = \text{const}$ (рис.3.2).

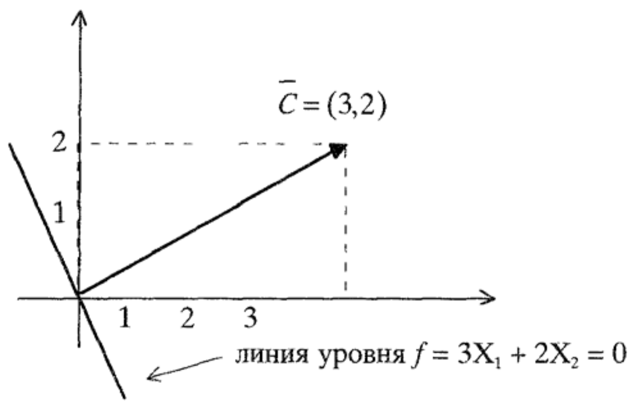


Рис. 3.2

Шаг 4. В случае максимизации $f(\overline{x})$ передвигают прямую $3X_1 + 2X_2 = \text{const}$ в направлении вектора $\overline{C}$ до тех пор, пока она не покинет область P. Крайняя точка (или точки) области, в которой линия уровня покидает допустимую область, и является решением задачи (рис. 3.3).

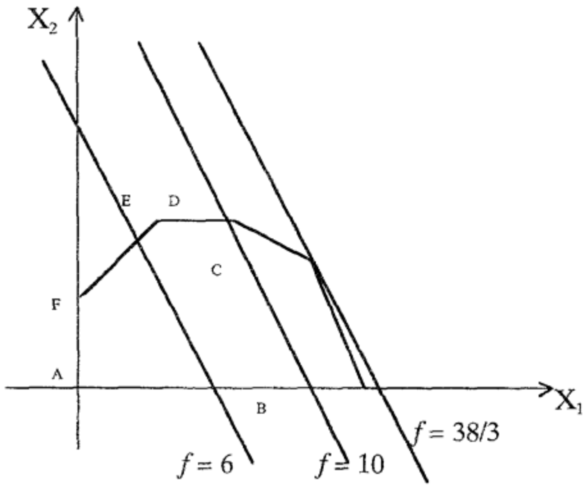


Рис. 3.3

Крайняя точка С – точка максимума $f(\bar{x})$, С = $\bar{X}^*$ лежит на пересечении прямых (а) и (б). Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$X_1 + 2X_2 = 6$$
$$2X_1 + X_2 = 8.$$

Откуда $X^*_1 = 10/3$; $X^*_2 = 4/3$ или $\bar{X}^* = (10/3; 4/3)$.

Подставляя значения X^*_1 и X^*_2 в функцию $f(\bar{x})$, найдем

$\max f(\bar{x}) = f(\bar{x}^*) = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3$.

Замечания.

1. В случае минимизации $f(\bar{x})$ прямую $C_1X_1 + C_2X_2 = \text{const}$ надо перемещать в направлении ($-\bar{C}$), противоположном $\bar{C}$.

2. Если допустимая область решений Р представляет собой неограниченную область и прямая при движении в направлении вектора $\bar{C}$ (или противоположном ему) не покидает Р, то в этом случае $f(\bar{x})$ не ограничена сверху (или снизу), т.е. $\max f(\bar{x}) = +\infty$ (или $\min f(\bar{x}) = -\infty$).

Пример 3.1. Графическим способом решить ЗЛП

$\max (2X_1 + X_2)$

при

$X_1 - X_2 \le 2$ (1)

$X_1 + 3X_2 \ge 3$ (2)

$7X_1 - X_2 \ge 2$ (3)

$X_{1,2} \ge 0.$

Шаг 1. Строим область Р (рис. 3.4). Она является неограниченной.

Шаг 2. Строим вектор $\bar{C} = (2,1)$.

Шаг 3. Строим линию уровня функции $f(\bar{x}) = 2X_1 + X_2 = \text{const}$.

Шаг 4. Передвигая линию уровня в направлении вектора $\bar{C} = (2,1)$, убеждаемся в неограниченном возрастании функции $f(\bar{x})$, то есть $\max f(\bar{x}) = \infty$.

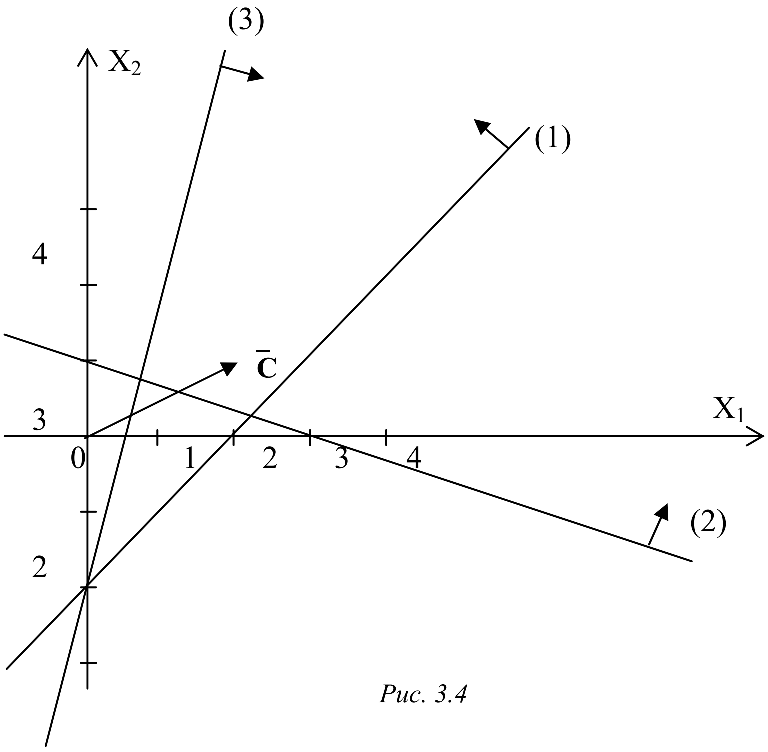


Рис. 3.4

Пример 3.2. Решить графическим методом ЗЛП. Найти

$$\max f(\bar{x}) = X_1 + 3X_2$$

при ограничениях

$$
\begin{array}{rl}
2X_1 + 3X_2 \le 6 & (1) \\
X_1 + 2X_2 \ge 5 & (2) \\
X_1 \ge 4 & (3) \\
0 \le X_2 \le 3 & (4)
\end{array}
$$

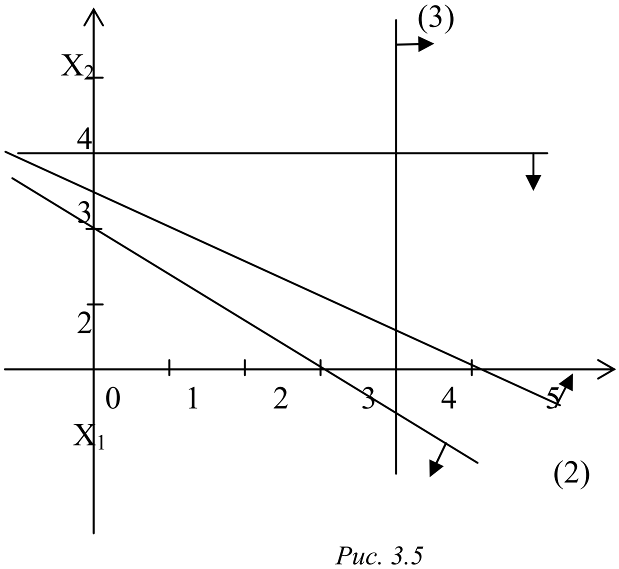


Рис. 3.5

Из рис. 3.5 видно, что область допустимых решений пуста (P=∅).
Задача не имеет решения.

3.3. Анализ решения (модели) на чувствительность

Модель линейного программирования является как бы «моментальным снимком» реальной ситуации, когда параметры модели (коэффициенты целевой функции и неравенств ограничений) предполагаются неизменными. Естественно изучить влияние изменения параметров модели на полученное оптимальное решение задачи ЛП. Такое исследование называется **анализом на чувствительность**. В этом разделе анализ чувствительности основывается на графическом решении задачи ЛП.

Пример 3.3.

Компания производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: М1 и М2.

Необходимая информация представлена в следующей таблице:

	Расход сырья на 1 тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	Для наружных работ	Для внутренних работ	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход на тонну краски (тыс. дол.)	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т, а кроме того этот показатель не должен превышать более чем на тонну показатель выпуска краски для внешних работ.

Цель компании:

Определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

Составленная математическая модель задачи выглядит следующим образом:

Максимизировать $Z(x) = 5X_1 + 4X_2$
при выполнении ограничений

$$
\begin{aligned}
6X_1 + 4X_2 &\le 24 \\
X_1 + 2X_2 &\le 6 \\
X_2 &\le 2 \\
X_2 - X_1 &\le 1 \\
X_1 &\ge 0 \\
X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

В результате применения графического метода решения ЗЛП, рассмотренного в параграфе 3.2, получен график (рис. 3.6).

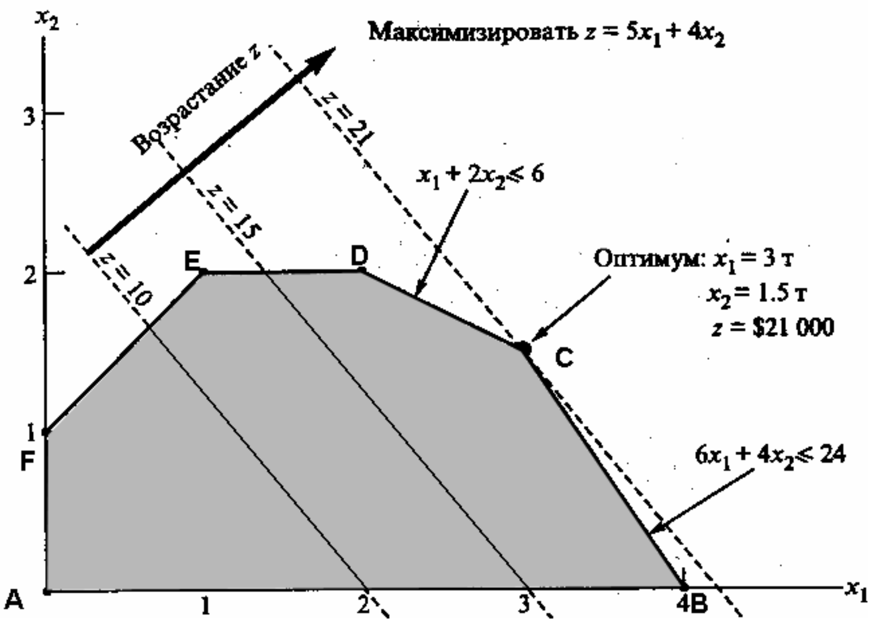


Рис. 3.6. **Решение задачи**

Решением задачи является точка с координатами: $X_1 = 3; X_2 = 1{,}5$. Целевая функция при таком решении принимает значение Z = 21 тыс. дол.

Проведем для данной задачи анализ чувствительности. Рассмотрим два случая:

1) изменение коэффициентов целевой функции;
2) изменение значений констант в правой части неравенств-ограничений.

1. Изменение коэффициентов целевой функции. В общем виде целевую функцию задачи ЛП можно записать следующим образом:

Максимизировать или минимизировать $\mathbf{Z(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2}$

Изменение значений коэффициентов C_1 и C_2 приводит к изменению угла наклона прямой Z. Графический способ решения показывает, что это может привести к изменению оптимального решения: оно будет достигаться в другой угловой точке пространства решений. Вместе с тем, очевидно, существуют интервалы изменения коэффициентов C_1 и C_2, когда текущее оптимальное решение сохраняется. Задача анализа чувствительности и состоит в получении такой информации. В частности, представляет интерес определение интервала оптимальности для отношения C_1 / C_2 (или, что то же самое, для C_2 / C_1); если значение отношения C_1 / C_2 не выходит за пределы этого интервала, то оптимальное решение в данной модели сохраняется неизменным.

На рис. 3.6 видно, что функция $Z(x) = 5X_1 + 4X_2$ достигает максимального значения в угловой точке С. При изменении коэффициентов целевой функции $Z(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2$ точка С останется точкой оптимального решения до тех пор, пока угол наклона линии Z будет лежать между углами наклона двух прямых, пересечением которых является точка С. Этими прямыми являются $6X_1 + 4X_2 \leq 24$ (ограничение на сырье М1) и $X_1 + 2X_2 \leq 6$ (ограничение на сырье М2). Алгебраически это можно записать следующим образом:

$$\frac{4}{6} \leq \frac{C_2}{C_1} \leq \frac{2}{1}, \qquad C_1 \neq 0$$

или

$$\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{6}{4}, \qquad C_2 \neq 0\,.$$

В первой системе неравенств условие $C_1 \neq 0$ означает, что прямая, соответствующая целевой функции, не может быть горизонтальной. Аналогичное условие в следующей системе неравенств означает, что эта же прямая не может быть вертикальной. Из рис. 3.7 видно, что интервал оптимальности данной задачи (он определяется двумя пересекающимися в точке С прямыми) не разрешает целевой функции быть ни горизонтальной, ни вертикальной. Таким образом, получено две системы неравенств, определяющие интервал оптимальности в данной задаче.

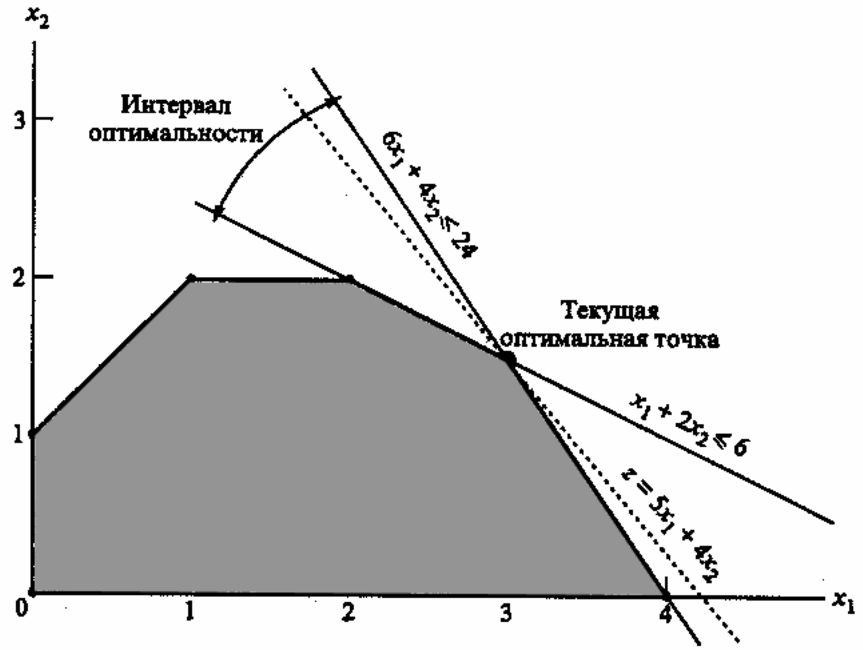


Рис. 3.7. **Интервал оптимальности**

Итак, если коэффициенты C_1 и C_2 удовлетворяют приведенным выше неравенствам, оптимальное решение по-прежнему будет достигаться в точке С. Отметим, если прямая $Z(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2$ совпадет с прямой $X_1 + 2X_2 \leq 6$, то оптимальным решением будет любая точка отрезка CD. Аналогично, если прямая, соответствующая целевой функции, совпадет с прямой $6X_1 + 4X_2 = 24$, тогда любая точка отрезка BC будет оптимальным решением. Однако очевидно, что в обоих случаях точка С остается точкой оптимального решения.

Приведенные выше неравенства можно использовать при определении интервала оптимальности для какого-либо одного коэффициента целевой функции, если предположить, что другой коэффициент остается неизменным. Например, зафиксируем значение коэффициента C_2 (пусть $C_2 = 4$), тогда интервал оптимальности для коэффициента C_1 получаем из неравенств $\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{6}{4}$ путем подстановки туда значения $C_2 = 4$. После выполнения элементарных арифметических опреаций получаем неравенства для коэффициента C_1: $2 \leq C_1 \leq 6$.

Это означает, что при фиксированной цене на краску для внутренних работ цена на краску для наружных работ может меняться в интервале от 2 тыс. дол. за тонну до 6 тыс. дол. за тонну, при том, что оптимальное соотношение (решение) останется неизменным.

Аналогично, если зафиксировать значение коэффициента C_1 (пусть $C_1 = 5$), тогда из неравенства $\frac{4}{6} \le \frac{C_2}{C_1} \le \frac{2}{1}$ получаем интервал оптимальности для коэффициента C_2: $\frac{10}{3} \le C_2 \le 10$.

2. Изменение значений констант в правой части неравенств-ограничений. Стоимость ресурсов. Во многих моделях линейного программирования ограничения трактуются как условия ограниченности ресурсов. В таких ограничениях правая часть неравенств является верхней границей количества доступных ресурсов. Рассмотрим на примере чувствительность оптимального решения к изменению ограничений, накладываемых на ресурсы. Такой анализ задачи ЛП предлагает простую меру чувствительности решения, называемую **стоимостью единицы ресурса**; при изменении количества доступных ресурсов (на единицу) значение целевой функции в оптимальном решении изменится на стоимость единицы ресурса.

В данной примере первые два неравенства представляют собой ограничения на использование сырья М1 и М2 соответственно. Определим стоимость единиц этих ресурсов.

В данной задаче оптимальное решение достигается в точке С, являющейся точкой пересечения прямых, соответствующих ограничениям на сырье М1 и М2. При изменении уровня доступности материала М1 (увеличение или уменьшение текущего уровня, равного 24 т) точка С оптимального решения «плывет» вдоль отрезка DG (рис. 3.8).

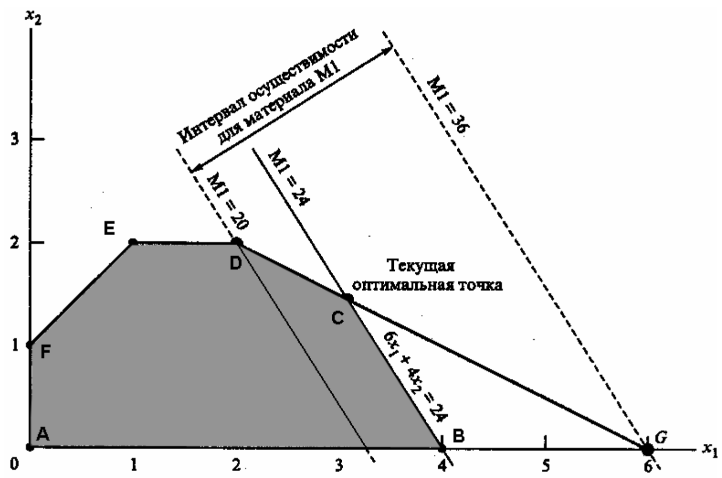


Рис. 3.8

Любое изменение уровня доступности материала М1, приводящее к выходу точки пересечения С из этого отрезка, ведет к неосуществимости оптимального решения в точке С. Поэтому можно сказать, что концевые точки D = (2,2) и G = (6,0) отрезка DG определяют **интервал осуществимости** для ресурса М1. Количество сырья М1, соответствующего точке D = (2,2), равно $6X_1 + 4X_2 = 20$ т. Аналогично, количество сырья, соответствующего точке G = (6,0), равно 36 т. Таким образом, интервал осуществимости для ресурса М1 составляет $20 \le M_1 \le 36$. Если определить M_1 как $M_1 = 24 + D_1$, где D_1 – отклонение количества материала М1 от текущего уровня в 24 т, тогда последние неравенства можно переписать как $20 \le 24 + D_1 \le 36$ или $-4 \le D_1 \le 12$. Это означает, что текущий уровень ресурса М1 может быть уменьшен не более чем на 4 т и увеличен не более чем на 12 т. В этом случае структура оптимального решения не изменится.

Вычислим стоимость единицы материала М1. При изменении количества сырья М1 от 20 до 36 тонн, значения целевой функции Z будут соответствовать положению точки С на отрезке DG. Обозначив через y_1 стоимость единицы ресурса М1, получим следующую формулу:

$$y_1 = \frac{\text{изменение значения Z при перемещении т.C от D до G}}{\text{изменение количества M1 при перемещении т.C от D до G}}.$$

Если точка С совпадает с точкой D = (2,2), то Z = 5 × 2 + 4 × 2 = 18 (тыс. дол.), если же точка С совпадает с точкой G = (6,0), тогда Z = 5×6 + 4×0 = 30 (тыс. дол.). Отсюда следует, что

$$y_1 = \frac{30-18}{36-20} = \frac{3}{4}$$ (тыс. дол. на тонну материала М1).

Этот результат показывает, что изменение количества ресурса М1 на одну тонну приводит к изменению в оптимальном решении значения целевой функции на 750 дол.

Рассмотрим ресурс М2. На рис. 3.9 видно, что интервал осуществимости для ресурса М2 определяется концевыми точками В и Н отрезка ВН, где В = (4,0) и Н = (8/3,2).

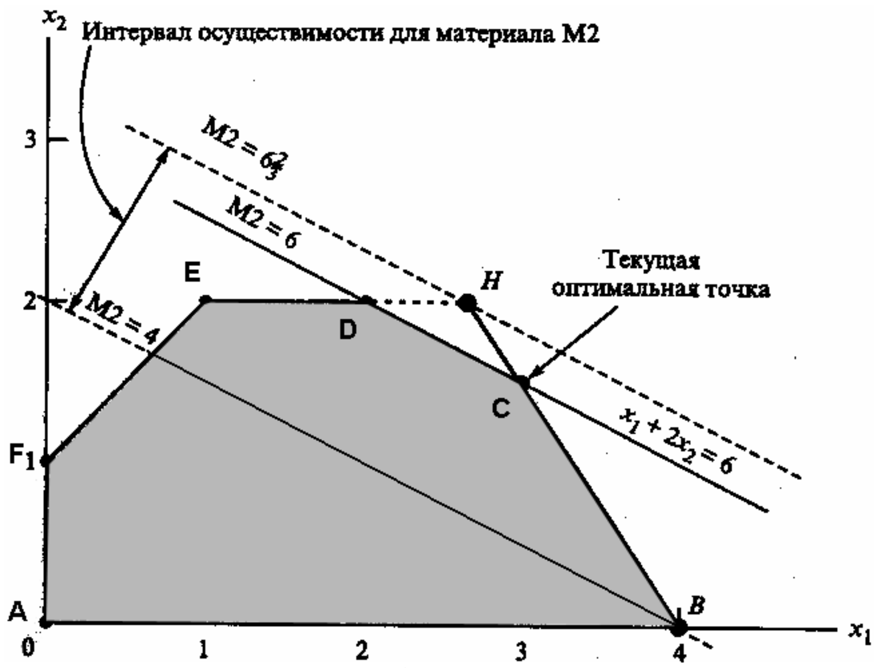


Рис. 3.9

Точка Н находится на пересечении прямых ED и ВС. Находим, что количество сырья М2, соответствующего точке В, равно $X_1 + 2X_2 = 4 + 2 \times 0 = 4$т, а в точке Н – 20/3 т. Значение целевой функции в точке В равно Z = 5 × 4 + 4 × 0 = 20 тыс. дол., а в точке Н: Z = 5 × × 8/3 + 4 × 2 = 64/3 тыс. дол. Отсюда следует, что количество сырья М2 может изменяться от 4 до 20/3 тонн, а стоимость единицы ресурса М2, обозначенная как y_2, равна $y_2 = \frac{64/3-20}{20/3-4} = \frac{1}{2}$ (тысяч долларов на тонну материала М2).

3.4. Решение линейных моделей Симплекс-методом

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП):

$$f(\overline{x}) = (\overline{C}, \quad \overline{x}) \to \max$$

$$A\overline{x} = \overline{b} \qquad (3.18)$$

$$\overline{x} \geq \overline{0}, \overline{b} \geq \overline{0}.$$

Будем в дальнейшем считать, что ранг матрицы A системы уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$ равен m, причем m < n.

Запишем КЗЛП в векторной форме:

$$\max(\overline{c}, \overline{x}) \qquad (3.19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{b}, \qquad (3.20)$$

$$\overline{x} \geq \overline{0} \quad , \overline{b} \geq \overline{0}, \qquad (3.21)$$

где $\overline{a_j}$ – j-й столбец матрицы A.

Определение. Опорным планом (ОП) задачи линейного программирования будем называть такой ее план, который является базисным решением системы линейных уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$.

Согласно определению и предположению о том, что r(A) = m , всякому опорному плану задачи линейного программирования (как и всякому базисному решению системы линейных уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$) соответствует базисная подматрица B порядка m матрицы A и определенный набор m базисных переменных системы линейных уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$.

Определение. m компонент базисного решения системы линейных уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$, являющихся значениями соответствующих ему базисных переменных, будем называть базисными компонентами этого решения.

Отметим, что базисные компоненты опорного плана неотрицательны; остальные n-m его компонент равны нулю. Очевидно, что число опорных планов задачи линейного программирования конечно и не превышает C_n^m. Число строго положительных компонент опорного плана не превышает m.

Определение. K-матрицей КЗЛП будем называть расширенную матрицу системы линейных уравнений, равносильной системе $\sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} x_j = \overline{b}$, содержащую единичную подматрицу на месте первых n своих столбцов и все элементы (n+1)-го столбца которой неотрицательны.

Число K-матриц конечно и не превышает C_n^m. Каждая K-матрица определяет ОП КЗЛП и наоборот.

Теорема 3.2 (о крайней точке). Опорный план ЗЛП является крайней точкой множества P′ и наоборот.

Доказательство.

Пусть вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – опорный план ЗЛП, у которого компоненты $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}$ строго положительные, а остальные n-k компонент равны нулю.

Тогда согласно определению опорного плана ЗЛП векторы $\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}, ..., \overline{a}_{j_k}$ линейно независимы.

Предположим, что вектор $\overline{X}$ не является крайней точкой множества P′, то есть существуют векторы $\overline{X}' = (x_1', x_2', ..., x_n') \in P', \overline{X}'' = (x_1'', x_2'', ..., x_n'') \in P'$, $\overline{X}' \neq \overline{X}''$ и $\alpha \in (0,1)$ такие, что

$$\overline{X} = (1-\alpha)\overline{X}' + \alpha\overline{X}''. \qquad (3.22)$$

Векторы $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$ – планы ЗЛП. Это означает, во-первых, что компоненты векторов $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$ неотрицательные и вследствие (3.22) ровно k компонент $x_{j_1}', x_{j_2}', ..., x_{j_k}'$ вектора $\overline{X}'$ и ровно k компонент $x_{j_1}'', x_{j_2}'', ..., x_{j_k}''$ вектора $\overline{X}''$ могут быть строго положительными. Остальные n-k компонент каждого из векторов $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$ равны нулю.

Во-вторых, компоненты векторов $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$ удовлетворяют функциональным ограничениям (3.20) ЗЛП. Следовательно, имеют место следующие равенства:

$$\sum_{r=1}^{k} \overline{a}_{jr} x_{jr}' = \overline{b},$$

$$\sum_{r=1}^{k} \overline{a}_{jr} x_{jr}'' = \overline{b}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\sum_{r=1}^{k} (x_{jr}' - x_{jr}'')\overline{a}_{jr} = \overline{0}\ . \qquad (3.23)$$

Так как векторы $\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}, ..., \overline{a}_{j_k}$ линейно независимы, то из (3.23) следует, что $x_{jr}' - x_{jr}'' = 0, r = 1,2,...,k$ или $x_{jr}' = x_{jr}'', r = 1,2,...,k$. Последнее означает, что $\overline{X}' = \overline{X}''$.

Получили противоречие, следовательно, $\overline{X}$ – крайняя точка множества P′.

Обратно, пусть теперь вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – крайняя точка множества P′, строго положительными компонентами которой являются $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}$. Так как вектор $\overline{X}$ – план ЗЛП, то его компоненты удовлетворяют функциональным ограничениям (3.20) задачи, то есть имеет место равенство

$$\sum_{r=1}^{k} \overline{a}_{jr} x_{jr} = \overline{b}. \qquad (3.24)$$

Предположим, что вектор $\overline{X}$ не является опорным планом ЗЛП. Тогда согласно определению опорного плана ЗЛП векторы $\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}, ..., \overline{a}_{j_k}$ линейно зависимы, то есть существуют такие действительные числа, $d_1, d_2, ..., d_k$, не все равные нулю, что

$$\sum_{r=1}^{k} \overline{a}_{jr} d_r = \overline{0}. \qquad (3.25)$$

Зададим некоторое ε > 0. Умножим левую и правую части равенства (3.25) сначала на ε, затем на (-ε). Каждое из полученных равенств сложим с (3.24), в результате получим

$$\sum_{r=1}^{k} \overline{a}_{jr}(x_{jr} + \varepsilon \cdot d_r) = \overline{b}, \qquad (3.26)$$

$$\sum_{r=1}^{k} \overline{a}_{jr}(x_{jr} - \varepsilon \cdot d_r) = \overline{b}, \qquad (3.27)$$

Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$x_{jr} + \varepsilon \cdot d_r \ge 0,$$
$$x_{jr} - \varepsilon \cdot d_r \ge 0, r = 1,2,..., k. \quad (3.28)$$

Рассмотрим векторы $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$, у каждого из которых отличными от нуля могут быть лишь k компонент

$$x_{j_1} + \varepsilon \cdot d_1, x_{j_2} + \varepsilon \cdot d_2, ..., x_{j_k} + \varepsilon \cdot d_k$$

и

$$x_{j_1} - \varepsilon \cdot d_1, x_{j_2} - \varepsilon \cdot d_2, ..., x_{j_k} - \varepsilon \cdot d_k$$

соответственно, а остальные n-k компонент равны нулю.

Согласно (3.26) – (3.28) векторы $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$ являются планами ЗЛП.

Имеем $\overline{X} = \frac{1}{2}\overline{X}' + \frac{1}{2}\overline{X}''$, то есть $\overline{X}$ лежит внутри отрезка, соединяющего две различные точки $\overline{X}'$ и $\overline{X}''$ множества P′.

Последнее означает, что $\overline{X}$ – не крайняя точка множества P′. Получили противоречие, следовательно, $\overline{X}$ – опорный план ЗЛП.

Теорема доказана.

Следствие 1. Крайняя точка множества P′ может иметь не более m строго положительных компонент.

Следствие 2. Число крайних точек множества P′ конечно и не превышает C_n^m.

Следствие 3. Если множество P′ ограниченное, то оно является выпуклым многогранником.

Теорема 3.3 (о существовании опорного плана или решения ЗЛП). Если линейная форма $f(\overline{x})(\overline{c} \ne \overline{0})$ ограничена сверху на непустом множестве P′, то ЗЛП разрешима, то есть существует такая точка $\overline{x}^* \in P'$, что $f(\overline{x}^*) = \max\limits_{\overline{x} \in P'} f(\overline{x})$.

Теорема 3.4. Если множество P′ не пусто, то оно имеет опорный план (или крайнюю точку).

Доказательство.

Заметим, прежде всего, что если правые части b_i (i = 1, 2,…, m) системы линейных уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{b}$ равны нулю, то, так как ранг матрицы A равен m, вектор $\overline{X} = (0, 0, ..., 0)$ является вырожденным опорным планом задачи линейного программирования. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что среди b_i есть отличные от нуля.

Пусть вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – план, но не опорный план задачи линейного программирования с k строго положительными компонентами. Не нарушая общности, будем считать, что строго положительными являются первые k компонент вектора $\overline{X}$, тогда имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{a}_j x_j = \overline{b}. \quad (3.29)$$

Так как вектор $\overline{X}$ – не опорный план, то согласно определению опорного плана ЗЛП векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ линейно зависимы, то есть существуют действительные числа λ_j, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overline{a}_j = \overline{0}. \qquad (3.30)$$

Введём обозначение

$$\mu = \max_{1 \le j \le k} \frac{\lambda_j}{x_j}. \qquad (3.31)$$

Изменением знака в (3.30) можно всегда добиться, чтобы μ было положительным.

Умножим левую и правую части (3.30) на $(-\frac{1}{\mu})$ и полученное равенство сложим с (3.29), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{a}_j x_j - \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overline{a}_j = \overline{b}$$

или, так как $x_j > 0 (j = 1,2,...,k)$,

$$\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{k} [(\mu - \frac{\lambda_j}{x_j}) x_j]\overline{a}_j = \overline{b}. \qquad (3.32)$$

В силу (3.32) $\mu - \frac{\lambda_j}{x_j} \ge 0,\ j = 1, 2,..., k$ (3.33)

и обязательно существует такое j, для которого в соотношении (3.33) имеет место равенство.

Положим для определённости, что $\mu - \frac{\lambda_k}{x_k} = 0$.

Таким образом, мы построили план задачи линейного программирования, j-я компонента которого есть $\frac{1}{\mu}[(\mu - \frac{\lambda_j}{x_j}) x_j],\ j = 1, 2,..., k-1$, а остальные n – k + 1 компонент равны нулю.

Если при этом векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2,..., \overline{a}_{k-1}$ оказались линейно зависимыми, то, рассуждая аналогично, получим план задачи линейного программирования, у которого k – 2 строго положительных компонент и так далее до тех пор, пока не построим такой план задачи линейного программирования с l (l ≤ k) строго положительными компонентами, что соответствующие этим компонентам векторы $\overline{a}_j$ будут линейно независимыми. Так по предложению среди b_i есть отличные от нуля, то $l \ne 0$.

Согласно определению опорного плана ЗЛП построенный план является при $l = m$ невырожденным, а при $l < m$ вырожденным опорным планом задачи линейного программирования.

Теорема доказана.

Теорема 3.5. Пусть векторы – планы задачи линейного программирования. Тогда вектор

$$\overline{X}^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{X}_i, \qquad (3.34)$$

где

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \alpha_i \succ 0, i = 1, 2, ..., N, \qquad (3.35)$$

будет решением задачи линейного программирования тогда и только тогда, когда её решением является каждый из векторов

$$\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N.$$

Доказательство.

Пусть каждый из векторов $\overline{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, .., x_{in}), i = 1, 2, ..., N$ является решением задачи линейного программирования, то есть

$$f(\overline{X}_1) = f(\overline{X}_2) = ... = f(\overline{X}_N) = \max_{\overline{X} \in P'} f(\overline{X}).$$

Тогда

$f(\overline{X}^*) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} C_j x_{ij} = (\max_{\overline{X} \in P'} \sum_{j=1}^{n} C_j x_j) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \max_{\overline{X} \in P'} f(\overline{X})$, то есть вектор $\overline{X}^*$, определяемый соотношениями (3.34) и (3.35), также является решением задачи линейного программирования.

Обратно, пусть вектор $\overline{X}^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{X}_i$, где $\overline{X}_i \in P', \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \alpha_i \succ 0, i = 1, 2, ..., N$, является решением задачи линейного программирования.

Предположим, что среди векторов $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N$ есть хотя бы один вектор $\overline{X}_l (1 \le l \le N)$, который не является решением задачи линейного программирования, то есть имеет место следующее неравенство:

$$f(\overline{X}_l) < f(\overline{X}^*). \qquad (3.36)$$

Тогда, учитывая (3.35), будем иметь

$$f(\overline{X}^*) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(\overline{X}_i) < \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(\overline{X}^*) = f(\overline{X}^*).$$

Получили противоречие, следовательно, каждый из векторов $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N$ есть решение задачи линейного программирования.

Теорема доказана.

Можно доказать следующую теорему о существовании оптимального опорного плана, или опорного решения, задачи линейного программирования.

Теорема 3.6. Пусть вектор $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ является решением задачи линейного программирования. Тогда существует опорный план, на котором функция $f(\overline{x})$ достигает своего глобального максимума.

Доказательство.

Заметим, что так как по условию теоремы множество планов P′ не пусто, то согласно теореме 3.4 оно имеет хотя бы одну крайнюю точку.

Рассмотрим 2 случая:

1. Пусть P′ – выпуклый многогранник, а $\overline{X}^*$ – решение задачи линейного программирования. Тогда согласно теореме, которая гласит, что любая точка $\overline{X}$ выпуклого замк-

нутого ограниченного множества K может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации конечного числа крайних точек этого множества,

$$\overline{X}^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{X}_i \ , \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, ..., k \ , \tag{3.37}$$

где $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_k$ - крайние точки множества P′.

Выбросим из системы крайних точек $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_k$ те, которые входят в разложение (3.37) с коэффициентом $\alpha_i = 0$. Пусть это будут точки

$$\overline{X}_{N+1}, \overline{X}_{N+2}, ..., \overline{X}_k \ .$$

Тогда

$$\overline{X}^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{X}_i \ , \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, ..., N,$$

т.е. выполняются условия теоремы 3.5 и, следовательно,

$$f(\overline{X}^*) = f(\overline{X}_1) = ... = f(\overline{X}_N) \ ,$$

что и доказывает теорему.

2. Пусть P′ – неограниченное множество, а $\overline{X}^*$ – конечное решение задачи линейного программирования.

Тогда можно указать такое положительное число M, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* < M \ . \tag{3.38}$$

Введём в задачу линейного программирования дополнительное функциональное ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq M \tag{3.39}$$

и рассмотрим новую задачу линейного программирования

$$\max(\overline{c}, \overline{X}) \tag{3.40}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq M, \tag{3.41 – 3.42}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0.$$

Множество планов данной задачи обозначим P″. Множество P″ – ограниченное, а так как компоненты вектора $\overline{X}^*$ удовлетворяют условиям (3.41 – 3.42) и $P'' \subset P'$, то $\overline{X}^*$ является решением задачи. Следовательно, согласно доказанному в случае 1 во множестве P″ существуют крайние точки $\overline{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}), i = 1, 2, ..., N,$ такие, что

$$\max_{\overline{X} \in P'} (\overline{c}, \overline{X}) = (\overline{c}, \overline{X}^*) = (\overline{c}, \overline{X}_1) = ... = (\overline{c}, \overline{X}_N) \ ,$$

причём

$$\overline{X}^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{X}_i \ , \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, i = 1, 2, ..., N. \tag{3.43}$$

Если бы хотя бы одна крайняя точка $\overline{X}_i$ (I = 1, 2,…, N) не принадлежит гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = M , \tag{3.44}$$

то она является крайней точкой множества P′ и теорема доказана.

Пусть все крайние точки $\overline{X}_i$ (I = 1, 2,…, N) принадлежат гиперплоскости (3.44), то имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M , i = 1,2,..., N .$$

Тогда из (3.43) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M,$$

что противоречит условию (3.38) выбора M > 0.

Теорема доказана.

Теорема 3.7. (следствие теоремы 3.5) Если решение задачи линейного программирования достигается в нескольких крайних точках области P′, то оно достигается и в любой выпуклой линейной комбинации этих точек.

Пусть требуется решить задачу (3.18). Так как по доказанному выше решением задачи (3.18) является неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$, то метод решения задачи (3.18) должен содержать четыре момента:

1) обоснование способа перехода от одного опорного плана (K-матрицы) к другому;
2) указание признака оптимальности, позволяющего проверить, является ли данный опорный план оптимальным;
3) указание способа построения нового опорного плана, более близкого к оптимальному;
4) указание признака отсутствия конечного решения.

ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ K-МАТРИЦЫ ЗЛП К ДРУГОЙ K-МАТРИЦЕ

Пусть известна K-матрица

$$K^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S)} & a_{12}^{(S)} & \dots & a_{1n}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ a_{21}^{(S)} & a_{22}^{(S)} & \dots & a_{2n}^{(S)} & b_2^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & a_{m2}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Обозначим через $\overline{N}^{(S)} = (N_1^{(S)},..., N_m^{(S)})$ вектор номеров базисных (единичных) столбцов матрицы $K^{(S)}$, $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = (b_1^{(S)},..., b_m^{(S)})$ – вектор, компоненты которого есть базисные компоненты опорного плана, определяемого матрицей $K^{(S)}$, и могут быть отличны от нуля. Остальные (n-m) компонент опорного плана, определяемого матрицей $K^{(S)}$, равны нулю. Очевидно, что векторы $\overline{N}^{(S)}$ и $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$ полностью задают опорный план, определяемый матрицей $K^{(S)}$. Например, пусть

$$K^{(S)}=\left(\begin{array}{cccccc|c}0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 0 & 1 & 8 & 1 & 4\end{array}\right),$$

тогда $\overline{N}^{(S)}$ = (3, 1, 6); $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}=\overline{b}^{(S)}$ = (1, 2, 4) и, следовательно, опорный план, определяемый $K^{(S)}$, имеет вид

$$\overline{X} = (2, 0, 1, 0, 0, 4).$$

Итак, пусть К-матрица (3.45) определяет невырожденный опорный план

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = (b_1^{(S)}, b_2^{(S)}, ..., b_m^{(S)})$$

$$\overline{N}^{(S)} = (N_1^{(S)}, N_2^{(S)}, ..., N_m^{(S)}) \ . \qquad (3.46)$$

Выберем в матрице $K^{(S)}$ столбец $\overline{a}_K^{(S)}$, не принадлежащий единичной подматрице, т.е. $k \neq N_i^{(S)}$, $i=\overline{1,m}$, и такой, что в этом столбце есть хотя бы один элемент больше нуля.

Пусть $a_{lK}^{(S)} > 0$. Считая $a_{lK}^{(S)}$ направляющим элементом, совершим над матрицей $K^{(S)}$ один шаг метода Жордана–Гаусса. В результате получим новую матрицу

$$K^{(S+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S+1)} & ... & a_{1n}^{(S+1)} & b_1^{(S+1)} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}^{(S+1)} & ... & a_{mn}^{(S+1)} & b_m^{(S+1)} \end{pmatrix}, \qquad (3.47)$$

в которой столбец $\overline{a}_K^{(S)}$ стал единичным, но которая может и не быть К-матрицей, так как среди величин $b_i^{(S+1)}$ могут быть отрицательные. Условия выбора направляющего элемента $\overline{a}_{lK}^{(S)}$, позволяющие получить новую К-матрицу $K^{(S+1)}$, т.е. обосновывающие способ перехода от опорного плана $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$ к опорному плану $\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}$, составляют содержание следующей теоремы, которая была доказана выше:

Теорема 3.8 Пусть в ***K***-м столбце К-матрицы $K^{(S)}$ - $\overline{a}_K^{(S)}$ есть хотя бы один строго положительный элемент ($k \neq N_i^{(S)}, i=\overline{1,m}$). Тогда с помощью одного шага метода Жордана–Гаусса можно построить новую К-матрицу $K^{(S+1)}$, выбрав направляющий элемент из условия

$$\frac{b_l^{(s)}}{a_{lK}^{(S)}} = \min_{\substack{a_{iK}^{(S)}>0 \\ i=\overline{1,m}}} \frac{b_i^{(s)}}{a_{iK}^{(s)}} = \theta^{(s)}. \qquad (3.48)$$

Определение. Величину

$$\Delta_j^{(S)} = (\overline{C}_{\overline{N}^{(S)}}, \overline{a}_j^{(S)}) - C_j, \qquad (3.49)$$

где $\overline{C}_{\overline{N}^{(S)}}$ – вектор, компонентами которого являются коэффициенты линейной функции $f(\overline{x}) = (\overline{c}, \overline{x})$ при базисных ($\overline{N}^{(S)}$) переменных опорного плана, определяемого матрицей $K^{(S)}$, назовем j-й симплекс-разностью матрицы $K^{(S)}$.

Если столбец $\overline{a}_j^{(S)}$ является единичным в матрице $K^{(S)}$, то $\Delta_j^{(S)}$ =0.

Пусть $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$ и $\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}$ – опорные планы, определяемые матрицами $K^{(S)}$ и $K^{(S+1)}$ соответственно. Тогда очевидно, что

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) = (\overline{C}_{\overline{N}^{(S+1)}}, \overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}); \;\; f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S1)}}) = (\overline{C}_{\overline{N}^{(S)}}, \overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}); \tag{3.50}$$

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}) - \theta^{(S)}\Delta_K^{(S)} = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}) - \frac{b_l^{(S)}}{a_{lK}^{(S)}}\Delta_K^{(S)}, \tag{3.51}$$

где K – номер столбца $\overline{a}_K^{(S)}$, вводимого в базис при получении матрицы $K^{(S+1)}$ из $K^{(S)}$. $\theta^{(s)}$ определяется по формуле (3.48).

Теорема 3.9. Пусть в матрице $K^{(S)}$ есть $\Delta_K^{(S)} < 0$ и в столбце $\overline{a}_K^{(S)}$ ($k \neq N_i^{(S)}$, $i = \overline{1,m}$) есть хотя бы один строго положительный элемент. Тогда от матрицы $K^{(S)}$ можно перейти к матрице $K^{(S+1)}$, причем

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) \geq f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}). \tag{3.52}$$

Доказательство.

Так как в $\overline{a}_K^{(S)}$ столбце $K^{(S)}$ матрицы есть строго положительный элемент, то согласно теореме 3.1 от матрицы $K^{(S)}$ можно перейти к новой матрице $K^{(S+1)}$ ЗЛП, выбрав направляющий элемент из условия (3.48).

Неравенство (3.52) вытекает из выражения (3.51), так как $\Delta_K^{(S)} < 0$, а $\theta^{(s)} \geq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.10. (критерий оптимальности опорного плана). Пусть все симплекс-разности матрицы $K^{(S)}$ неотрицательные. Тогда опорный план $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$, определяемый матрицей $K^{(S)}$, является оптимальным.

Доказательство.

По условию теоремы

$$\Delta_j^{(S)} = (\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(s)}) - C_j \geq 0,$$

или

$$(\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(s)}) \geq C_j, \; j = 1,2,..,n. \tag{3.52}$$

Пусть $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – произвольный план задачи линейного программирования. Умножим левую и правую части (3.52) на x_i, тогда в силу неотрицательности x_i получим

$$(\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(s)})x_j \geq C_j x_j, \; j = 1, 2,.., n. \tag{3.53}$$

Согласно (3.53) имеем

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(S)})x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{N_i}^{(S)} \overline{a}_{ij}^{(S)} x_j = \sum_{i=1}^{m} C_{N_i}^{(S)} b_i^{(S)} = f(\overline{X}_N^{(S)})$$

или

$$f(\overline{X}_N^{(S)}) \geq f(\overline{X}),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3.11. Пусть в матрице $K^{(S)}$ есть $\Delta_K^{(S)} < 0$ и в столбце $\overline{a}_K^{(S)}$ ($k \neq N_i^{(S)}, i = \overline{1,m}$) нет ни одного строго положительного элемента. Тогда ЗЛП (3.18) не имеет конечного решения.

Доказательство.

Пусть k-я симплекс-разность матрицы $K^{(S)}$

$$\Delta_j^{(S)} = (\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_k^{(s)}) - C_k \geq 0, \tag{3.54}$$

и все

$$a_{ik}^{(S)} \leq 0, \;\; i - 1, 2,.., m. \tag{3.55}$$

Матрица $K^{(S)}$ определяет опорный план

$$\overline{X}_N^{(S)} = (b_1^{(S)}, b_2^{(S)}, ..., b_m^{(S)})$$
$$\overline{N}^{(S)} = (N_1^{(S)}, N_2^{(S)}, .., N_m^{(S)})$$

Рассмотрим вектор

$$\overline{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ -- \\ x_n' \end{pmatrix},$$

у которого

$$X'_{N_1^{(S)}} = b_1^{(S)} - a_{1k}^{(S)} x_k,$$
$$X'_{N_2^{(S)}} = b_2^{(S)} - a_{2k}^{(S)} x_k,$$
$$-------------$$
$$X'_{N_m^{(S)}} = b_m^{(S)} - a_{mk}^{(S)} x_k,$$
$$x_k' = x_k,\ k \ne N_i^{(S)},\quad i = 1, 2, ..., m,$$

где x_k – любое положительное число.

Остальные $n - m + 1$ компонент вектора $\overline{X}'$ положим равными нулю.

В силу условия (3.55) компонент вектора $\overline{X}'$ неотрицательные. Легко убедиться в том, что компоненты вектора $\overline{X}'$ удовлетворяют и функциональным ограничениям задачи линейного программирования, т.е. вектор $\overline{X}'$ – план задачи линейного программирования при любом положительном x_k.

Имеем:

$$f(\overline{x}') = C_{N_1}^{(S)} \cdot (b_1^{(S)} - a_{1k}^{(S)} x_k) + C_{N2}^{(S)} \cdot (b_2^{(S)} - a_{2k}^{(S)} x_k) + ... + C_{Nm}^{(S)} \cdot (b_m^{(S)} - a_{mk}^{(S)} x_k) + C_k x_k =$$
$$= (C_{N_1}^{(S)} b_1^{(S)} + C_{N2}^{(S)} b_2^{(S)} + ... + C_{N_m}^{(S)} b_m^{(S)}) - x_k (C_{N_1}^{(S)} a_{1k}^{(S)} + C_{N2}^{(S)} a_{2k}^{(S)} + ... + C_{N_m}^{(S)} a_{mk}^{(S)} - C_k)$$

или окончательно

$$f(\overline{X}') = f(\overline{X}_N^{(S)}) - x_k \Delta_k^{(S)} \tag{3.56}$$

Так как $\Delta_K^{(S)} < 0$, то из (3.56) следует, что для любого числа $M > 0$ всегда можно найти план $\overline{X}'$ ЗЛП, для которого

$$f(\overline{X}') > M,$$

т.е. линейная форма $f(\overline{X})$ не ограничена сверху на множестве P' планов.

Теорема доказана.

АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Будем считать, что известна исходная K-матрица $K^{(0)}$ задачи линейного программирования, определяющая исходный опорный план

$$\overline{X}_N^{(0)} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, ..., b_m^{(0)}),$$
$$\overline{N}^{(0)} = (N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, ..., N_m^{(0)}).$$

В симплексном методе последовательно строят K-матрицы

$K^{(0)}, K^{(1)}, ..., K^{(S)}, ...$ задачи линейного программирования, пока не выполнится критерий оптимальности или критерий, позволяющий убедиться в отсутствии конечного решения. Рассмотрим алгоритм S-й итерации симплексного метода. В начале S-й итерации имеем K-матрицу $K^{(S-1)}$ задачи линейного программирования, определяющую опорный план

$$\overline{X}_N^{(S-1)} = (b_1^{(S-1)}, b_2^{(S-1)}, ..., b_m^{(S-1)}),$$
$$\overline{N}^{(S-1)} = (N_1^{(S-1)}, N_2^{(S-1)}, ..., N_m^{(S-1)}).$$

Шаг 1. Вычисляем для столбцов $\overline{a}_j^{(S-1)}$ матрицы $K^{(S-1)}$ $\left(j \neq N_i^{(s-1)},\ i = \overline{1,m}\right)$ симплекс-разности $\Delta_j^{(s-1)}$ и находим номер k из условия $\Delta_k^{(s-1)} = \min \Delta_j^{(s-1)}$, $1 \le j \le n$.

Шаг 2. Если $\Delta_k^{(s-1)} \ge 0$, то опорный план

$$\overline{X}_N^{(S-1)} = (b_1^{(S-1)}, b_2^{(S-1)}, ..., b_m^{(S-1)}),$$
$$\overline{N}^{(S-1)} = (N_1^{(S-1)}, N_2^{(S-1)}, ..., N_m^{(S-1)})$$

является оптимальным, а

$$f(\overline{X}_N^{(S-1)}) = (\overline{C}_N^{(S-1)}, \overline{X}_N^{(S-1)})$$

есть оптимальное значение линейной формы $f(\overline{X})$, иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если $a_{ik}^{(s-1)} \le 0$, $i = \overline{1,m}$, то ЗЛП не имеет конечного решения, иначе находим номер l из условия

$$\theta^{(S-1)} = \max_{\substack{1 \le i \le m \\ a_{ik}^{(S-1)} > 0}} \frac{b_i^{(S-1)}}{a_{ik}^{(S-1)}} = \frac{b_l^{(S-1)}}{a_{lk}^{(S-1)}}.$$

Направляющий элемент на S-й итерации метода есть элемент $a_{lk}^{(S-1)}$.

Шаг 4. Вычисляем компоненты вектора $\overline{N}^{(s)}$: $N_i^{(s)} = N_i^{(s-1)}, i \neq l, N_l^{(s)} = k$.

Шаг 5. Производим один шаг метода Жордана–Гаусса с направляющим элементом $a_{lk}^{(S-1)}$. Присваиваем переменной S алгоритма значение S+1 и переходим к шагу 1.

Пример 3.3. Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max f\left(\overline{X}\right) = 3X_1 + 2X_2 \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\le 6 \\ 2X_1 + X_2 &\le 8 \\ -X_1 + X_2 &\le 1 \\ X_2 &\le 2 \\ X_1 \ge 0\ X_2 &\ge 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Приводим систему линейных неравенств (3.58) к каноническому виду, вводя в каждое неравенство дополнительную переменную S_i, где $i = \overline{1,4}$. Получим систему линейных уравнений:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 6$$

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + S_2 &= 8 \\ -X_1 + X_2 + S_3 &= 1 \\ X_2 + S_4 &= 2 \end{aligned} \qquad (3.59)$$

$X_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,2}, \qquad S_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,4}.$

Целевая функция будет иметь вид $F(\overline{X}) = 3X_1 + 2X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3 + 0\,S_4$

Расширенная матрица $K^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

системы линейных уравнений (3.59) является исходной K-матрицей $K^{(0)}$ ЗЛП, которая определяет исходный опорный план:

$$\overline{X}_{\overline{N^{(0)}}} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \overline{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ \overline{C}_{\overline{N^{(0)}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты последовательных итераций симплекс-алгоритма удобно оформить в виде симплексной таблицы.

Таблица 3.1

S	i	$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}}^{(s)}$	$\overline{X}_{\overline{N}}^{(s)} = \overline{b}^{(s)}$	3 $\overline{a}_1^{(s)}$	2 $\overline{a}_2^{(s)}$	0 $\overline{a}_3^{(s)}$	0 $\overline{a}_4^{(s)}$	0 $\overline{a}_5^{(s)}$	0 $\overline{a}_6^{(s)}$	$\theta^{(s)}$
0	1	3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
	2	4	0	8	2	1	0	1	0	0	4
	3	5	0	1	-1	1	0	0	1	0	-
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	-
	5	$\Delta_j^{(0)}$		$f = 0$	-3	-2	0	0	0	0	K = 1 L = 2
1	1	3	0	2	0	3/2	1	-1/2	0	0	4/3
	2	1	3	4	1	1/2	0	1/2	0	0	8
	3	5	0	5	0	3/2	0	1/2	1	0	10/3
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	2
	5	$\Delta_j^{(1)}$		$f = 12$	0	-1/2	0	3/2	0	0	K = 2 l = 1
2	1	2	2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	
	2	1	3	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	
	3	5	0	3	0	0	-1	1	1	0	
	4	6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	
	5	$\Delta_j^{(2)}$		$f = 38/3$	0	0	1/3	4/3	0	0	

На второй итерации S = 2, все $\Delta_j^{(2)} \geq 0 \quad j = \overline{1,6}$, следовательно, опорный план

$$\overline{X}_{\overline{N^{(2)}}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \overline{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

определяемый K-матрицей $K^{(2)}$, оптимальный, $\overline{X}^* = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Оптимальное значение линейной формы равно:

$$f(\overline{X^*}) = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(z)}}) = (\overline{C}_{\overline{N}^{(2)}}, \overline{b}^{(2)}) = C_{N_1^{(2)}} b_1^{(2)} + C_{N_2^{(2)}} b_2^{(2)} + C_{N_3^{(2)}} b_3^{(2)} + C_{N_4^{(2)}} =$$
$$= 2\times\frac{4}{3} + 3\times\frac{10}{3} + 0\times 3 + 0\times\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Пример 3.4. Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max(2X_1+X_2) \tag{3.60}$$

$$X_1-X_2\le 10$$
$$X_1\le 40 \tag{3.61}$$
$$X_{1,2}\ge 0$$

Приводим ЗЛП к каноническому виду

$$\max(2X_1+X_2+0\,S_1+0S_2)$$
$$X_1-X_2+S_1=10 \tag{3.62}$$
$$X_1+S_2=40$$

$X_j \ge 0, \quad j=\overline{1,2}, \quad S_i \ge 0, \quad i=\overline{1,2}.$

Результаты последовательных итераций записываем в симплекс-таблицу.

Таблица 3.2

S	i	$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}^{(s)}}$	$\overline{X}_{\overline{N}^{(s)}}=\overline{b}^{(s)}$	2 $\overline{a}_1^{(s)}$	1 $\overline{a}_2^{(s)}$	0 $\overline{a}_3^{(s)}$	0 $\overline{a}_4^{(s)}$	$\theta^{(s)}$
0	1	3	0	10	1	-1	1	0	10
	2	4	0	40	1	0	0	1	40
	3	$\Delta_j^{(0)}$		$f=0$	-2	-1	0	0	
1	1	1	2	10	1	-1	1	0	-
	2	4	0	30	0	1	-1	1	30
	3	$\Delta_j^{(1)}$		$f=20$	0	-3	2	0	
2	1	1	2	40	1	0	0	1	-
	2	2	1	30	0	1	-1	1	-
	3	$\Delta_j^{(2)}$		$f=110$	0	0	-1	3	

Из симплекс-таблицы при S = 2 следует, что согласно шагу 3 симплекс-алгоритма данная ЗЛП не имеет конечного решения, т.к. отрицательная симплекс-разность $\Delta_3^{(2)}$ соответствует столбцу $\overline{a}_3^{(2)}$, все элементы которого неположительны.

Итак, $\max\limits_P f(\overline{X}) = \infty$.

3.5. Двойственный симплекс-метод (Р-Метод)

Пример 3.5. Рассмотрим следующую ЗЛП:

$$\min(2X_1+4X_2)$$
$$3X_1+X_2\ge 3$$
$$4X_1+3X_2\ge 6 \tag{3.63}$$
$$X_1+2X_2\le 3$$
$$X_{1,2}\ge 0$$

Приведем рассматриваемую ЗЛП к каноническому виду

$$\max(-2X_1 - 4X_2)$$
$$3X_1 + X_2 - S_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 - S_3 = 3$$
$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

или

$$\max(-2X_1 - 4X_2)$$
$$-3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$
$$-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6 \qquad (3.64)$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$
$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы линейных уравнений (3.64):

$$P^{(0)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Матрица $P^{(0)}$ содержит единичную подматрицу порядка 3 и, следовательно, определяет базисное решение

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (-3; -6; 3); \ \overline{N}^{(0)} = (3; 4; 5)$$

системы уравнений, причем $\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}} = (0, 0, 0)$. Так как элементы (n + 1 = 6)-го столбца матрицы системы $P^{(0)}$ не являются неотрицательными, то она не является К-матрицей ЗЛП. Вычислим симплекс-разности матрицы $P^{(0)}$:

$$\Delta_j^{(0)} = (\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}}, \overline{a}_j^{(0)}) - C_j = -C_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}.$$

Так как все симплекс-разности матрицы $P^{(0)}$ являются неотрицательными, то базисное решение $\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (-3; -6; 3)$, не являющееся допустимым решением ЗЛП, является «лучшим», чем оптимальное решение.

При решении задачи симплекс-методом текущее базисное решение является допустимым, но неоптимальным. Эти соображения позволяют построить метод решения определенного класса ЗЛП. В этом методе, называемом двойственным симплекс-методом, на каждой итерации обеспечивается выполнение условия оптимальности текущего базисного решения, не являющегося допустимым. Критерием окончания процесса итераций является получение допустимого решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Р-МАТРИЦЫ ЗЛП

Определение. Р-матрицей КЗЛП (3.18) будем называть расширенную матрицу системы линейных уравнений, равносильной системе (3.63), содержащую единичную подматрицу порядка m на месте n первых столбцов, все симплекс разности которой неотрицательны.

Очевидно, что всякая Р-матрица ЗЛП определяет некоторое базисное решение системы уравнений (3.63) (см. пример 3.5).

Определение. Базисное решение системы линейных уравнений (3.63), определяемое Р-матрицей, называется псевдопланом ЗЛП.

УСЛОВИЯ ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОЙ Р-МАТРИЦЫ ЗЛП К ДРУГОЙ

Пусть известна Р-матрица $P^{(S)}$ ЗЛП (3.18), определяющая псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = \overline{b}^{(S)},\ \overline{N}^{(S)}.$$

Условия перехода от матрицы $P^{(S)}$ к матрице $P^{(S+1)}$ составляют содержание теоремы 3.12.

Теорема 3.12. Пусть $b_l^{(S)} < 0$ и в l-й строке матрицы $P^{(S)}$ есть хотя бы один отрицательный элемент. Тогда с помощью одного шага метода Жордана–Гаусса можно построить новую Р-матрицу $P^{(S+1)}$, выбрав направляющий элемент из условия

$$\theta^{(S)} = \frac{\Delta_k^{(S)}}{-a_{lk}^{(S)}} = \min_{\substack{1\le j\le n \\ a_{ij},<0}} \frac{\Delta_j^{(S)}}{-a_{lj}^{(S)}}\ . \tag{3.65}$$

Замечание 1. Если в матрице $P^{(S)}$ нет $b_l^{(S)} < 0$, то определяемый ею псевдоплан является решением ЗЛП.

Теорема 3.13. Пусть $b_l^{(S)} < 0$ и в l-й строке матрицы $P^{(S)}$ нет ни одного отрицательного элемента. Тогда множество планов Р ЗЛП (3.18) пусто.

Замечание 2. При переходе от матрицы $P^{(S)}$ к матрице $P^{(S+1)}$ целевая функция изменяется в соответствии с формулой

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}) + \theta^{(S)} b_l^S = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}) + \frac{\Delta_k^{(S)}}{-a_{lk}^{(S)}} b_l^{(S)}, \tag{3.66}$$

откуда следует, что

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) \le f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}), \tag{3.67}$$

так как $b_l^{(S)} < 0$ и $a_{lk}^{(S)} < 0$. Из неравенства (3.67) следует, что при переходе от одного псевдоплана к другому значение целевой функции $f(\overline{x})$ не возрастает.

АЛГОРИТМ Р-МЕТОДА

Будем считать, что известна исходная Р-матрица $P^{(0)}$ задачи линейного программирования, определяющая исходный псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, ..., b_m^{(0)}),$$
$$\overline{N}^{(0)} = (N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, ..., N_m^{(0)}).$$

В методе последовательного уточнения оценок последовательно строят Р-матрицы $P^{(1)}, P^{(2)}, ..., P^{(S)}$, … задачи линейного программирования, пока не получат Р-матрицу задачи линейного программирования, определяющую ее оптимальный план.

Рассмотрим алгоритм S-й итерации метода последовательного уточнения оценок. В начале S-й итерации имеем Р-матрицу $P^{(S-1)}$ задачи линейного программирования, определяющую псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}} = \overline{b}_l^{(S-1)}, \ \overline{N}^{(S-1)}.$$

<u>Шаг 1</u>. Найдем номер *l* из условия

$$b_l^{(S-1)} = \min_{1 \le i \le m} b_i^{(S-1)}.$$

<u>Шаг 2</u>. Если $b_l^{(S-1)} \ge 0$,

то псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}} = \overline{b}_l^{(S-1)}, \ \overline{N}^{(S-1)}$$

является оптимальным опорным планом, а

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}}) = (\overline{C}_{\overline{N}^{(S-1)}}, \overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}})$$

есть оптимальное значение линейной формы $f(\overline{x})$, иначе переходим к шагу 3.

<u>Шаг 3</u>. Если

$$a_{lj}^{(S-1)} \ge 0, \ j = \overline{1,n},$$

то задача линейного программирования не имеет решения (множество планов Р пусто), иначе переходим к шагу 4.

<u>Шаг 4</u>. Вычисляем для столбцов $\overline{a}_j^{(S-1)}$ матрицы $P^{(S-1)}$ ($j \ne N_i^{(S-1)}$, i = 1, 2, …,m) симплекс-разности $\Delta_j^{(S-1)}$ и находим номер k из условия

$$\theta^{(S-1)} = \frac{\Delta_k^{(S-1)}}{-a_{lk}^{(S-1)}} = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{\Delta_j^{(S-1)}}{-a_{lj}^{(S-1)}}, a_{lj}^{(S-1)} < 0 \right\}.$$

Направляющий элемент на S-й итерации метода есть элемент $a_{lK}^{(S-1)}$.

<u>Шаг 5</u>. Вычисляем компоненты вектора $\overline{N}^{(S)}$:

$$N_i^{(S)} = N_i^{(S-1)}, \ i = \overline{1,m}, \ i \ne l, \ \mathrm{N}_1^{(\mathrm{S})} = \mathrm{k}.$$

<u>Шаг 6</u>. Производим один шаг метода Жордана–Гаусса с направляющим элементом $\mathrm{a}_{\mathrm{lk}}^{(\mathrm{S}-1)}$. Вычисляем элементы Р-матрицы $P^{(S)}$ методом Жордана–Гаусса. Присваиваем переменной алгоритма S значение S+1 и переходим к шагу 1.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ Р-МЕТОДОМ

Решим задачу из примера 3.5. Результаты решения приведены в симплекс-таблице.

Таблица 3.3

S	I	$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}}^{(s)}$	$\overline{X}_{\overline{N}}^{(s)}$	-2 $\overline{a}_1^{(S)}$	-4 $\overline{a}_2^{(S)}$	0 $\overline{a}_3^{(S)}$	0 $\overline{a}_4^{(S)}$	0 $\overline{a}_5^{(S)}$
0	1	3	0	-3	-3	-1	1	0	0
	2	4	0	-6	-4	-3	0	1	0
	3	5	0	3	1	2	0	0	1
	4	$\Delta_j^{(0)}$		f = 0	2	4	0	0	0
	5	$\theta^{(0)}$			2/4	4/3	-	-	-
S	I	$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}}^{(s)}$	$\overline{X}_{\overline{N}}^{(s)}$	-2 $\overline{a}_1^{(S)}$	-4 $\overline{a}_2^{(S)}$	0 $\overline{a}_3^{(S)}$	0 $\overline{a}_4^{(S)}$	0 $\overline{a}_5^{(S)}$
1	1	3	0	3/2	0	5/4	1	3/4	0
	2	1	-2	3/2	1	3/4	0	-1/4	0
	3	5	0	3/2	0	5/4	0	1/4	1
	4	$\Delta_j^{(1)}$		f = -3	0	5/2	0	1/2	0
	5								

Так как компоненты псевдоплана $\overline{X}_{\overline{N}^{(1)}}$ =(3/2, 3/2, 3/2) являются неотрицательными, то $\overline{X}_{\overline{N}^{(1)}}$ является оптимальным опорным планом ЗЛП (3.63). Итак,

$$\overline{X}^* = (3/2,\ 0,\ 3/2,\ 0,\ 3/2) \text{ и } \min f(\overline{x}) = 3.$$

Пример 3.6. Решим ЗЛП:

$$\max f(\overline{x}) = -X_1 + 2X_2$$

$$\begin{gathered} -2X_1 + X_2 \ge 2 \\ X_1 + 2X_2 \le 4 \\ X_1 + 4X_2 \ge 4 \\ X_{1,2} \ge 0 \end{gathered} \tag{3.68}$$

Приведем рассматриваемую ЗЛП к каноническому виду

$$\max f(\overline{x}) = (-X_1 + 2X_2)$$

$$\begin{gathered} -2X_1 + X_2 - S_1 = 2 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 = 4 \\ X_1 + 4X_2 - S_3 = 4 \end{gathered}$$

$$X_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,2}, \qquad S_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,3}.$$

или

$$\max f(\overline{x}) = (-X_1 + 2X_2) \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{gathered} 2X_1 - X_2 + S_1 = -2 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 = 4 \\ -X_1 - 4X_2 + S_3 = -4 \end{gathered} \tag{3.69}$$

$$X_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,2}, \qquad S_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,3}.$$

Расширенная матрица

$$\widetilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений (3.69) не являются Р-матрицей рассматриваемой ЗЛП, так как

$$\Delta_1^{(0)} = (0,0,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = 1 > 0\,,\ \Delta_2^{(0)} = (0,0,0)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 = -2 < 0.$$

Следовательно, к решению ЗЛП (3.68) не применим Р-метод.

Пример 3.7. Найти минимум функции

$$f(\overline{x}) = (6X_1 + 3X_2)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &-3X_1 + X_2 \ge 1 \\ &2X_1 - 3X_2 \ge 2 \\ &X_{1,2} \ge 0 \end{aligned} \qquad (3.70)$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду

$$f(\overline{x}) = (-6X_1 - 3X_2) \to \max$$

$$3X_1 - X_2 + S_1 = -1$$

$$-2X_1 + 3X_2 + S_2 = -2$$

$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Так как расширенная матрица

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений рассматриваемой задачи является Р-матрицей ($\Delta_1^{(0)}$ = 6 > 0; $\Delta_2^{(0)}$ = 3 > 0), то задачу можно решить Р-методом. Решение задачи ведем в симплексной таблице.

Таблица 3.4

S	i	$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}}^{(s)}$	$\overline{X}_{\overline{N}}^{(s)}$	-6 $\overline{a}_1^{(S)}$	-3 $\overline{a}_2^{(S)}$	0 $\overline{a}_3^{(S)}$	0 $\overline{a}_4^{(S)}$
0	1	3	0	-1	3	-1	1	0
	2	4	0	-2	-2	3	0	1
	3	$\Delta_j^{(0)}$	$f(\overline{x}) = 0$		6	3	0	0
	4	$\theta^{(0)}$	-	-	3	-	-	-
1	1	3	0	-4	0	7/2	1	3/2
	2	1	-6	1	1	-3/2	0	-1/2
	3	$\Delta_j^{(1)}$	$f(\overline{x}) = -6$		0	12	0	3
	4	$\theta^{(1)}$	-		-	-	-	-

Так как $b_l^{(1)} = b_1^{(1)} = -4 < 0$, а все $a_{1j}^{(1)} \geq 0$, то множество планов ЗЛП (3.70) является пустым множеством.

3.6. Решение ЗЛП двухэтапным Симплекс-методом

Пример 3.14. Рассмотрим задачу

$$\min f\left(\overline{X}\right) = 0{,}4X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}1X_3 + 0{,}1X_5 + 0{,}2X_6 \qquad (3.71)$$

$$\begin{aligned} &2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150 \\ &X_1 + X_2 + 2X_5 = 200 \\ &X_1 + X_3 + 2X_6 = 300 \end{aligned} \qquad (3.72)$$

$$X_j \geq 0;\ j = 1,\ldots,6 \qquad (3.73)$$

Так как ограничения (3.72) рассматриваемой ЗЛП уже имеют вид строгих равенств, то для приведения ее к каноническому виду достаточно только изменить знак функции $f(\overline{x})$ на противоположный и рассмотреть задачу нахождения $\max\left(-f\left(\overline{X}\right)\right) = -0{,}4X_1 - 0{,}3X_2 - 0{,}1X_3 - 0{,}1X_5 - 0{,}2X_6$ (3.74) при тех же ограничениях (3.72)–(3.73).

Рассмотрим расширенную матрицу А системы уравнений (3.72)

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 150 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 300 \end{array}\right)$$

Так как матрица А не содержит единичной подматрицы порядка 3, то она не является К-матрицей ЗЛП и, следовательно, к задаче (3.71)–(3.73) не может быть применен симплекс-метод.

Рассмотрим метод отыскания исходного опорного плана (К-матрицы)- метод искусственного базиса.

ПЕРВЫЙ ЭТАП – РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть в ЗЛП (3.18) расширенная матрица системы линейных уравнений (3.63) не является К-матрицей. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти вектор $\overline{X}_M = (X_1,\ldots,X_n,U_1,\ldots,U_m) \in E_{n+m}$, максимизирующий функцию

$$\varphi\left(\overline{X}_M\right) = -\sum_{i=1}^{m} U_i \qquad (3.74)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + U_i = b_i,\ \ i = \overline{1,m}, \qquad (3.75)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ U_i \geq 0,\ b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}. \qquad (3.76)$$

Переменные $U_1, U_2, \ldots, U_m$ называются искусственными переменными вспомогательной задачи (ВЗ) (3.74–3.76). Обозначим P_M множество планов ВЗ. Очевидно, что множество $P_M \neq 0$, так как вектор $\overline{X}_M = (0,\ldots,0,b_1,\ldots,b_m) \in P_M$, а функция $\varphi\left(\overline{X}_M\right) \leq 0$ ограничена сверху, следовательно, ВЗ (3.74–3.76) всегда разрешима, т.е. существует вектор $\overline{X}^*_M \in P_M$ такой, что $\max\limits_{P_M} \varphi\left(\overline{X}_M\right) = \varphi(\overline{X}^*_M) = d$.

Рассмотрим расширенную матрицу системы (3.75)

$$\widetilde{A}_M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \end{pmatrix}, \qquad (3.77)$$

которая является K-матрицей ВЗ (3.74–3.76), т.е. ВЗ может быть решена симплекс-методом.

Предположим, что ВЗ решена симплекс-методом, на S-й итерации которого получен ее оптимальный опорный план

$$\overline{X}^*_M = (X_1^*,\dots,X_n^*,U_1^*,\dots,U_m^*),\ \varphi(\overline{X}^*_M) = d, \qquad (3.78)$$

определяемый K-матрицей ВЗ.

$$K_M^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S)} & \dots & a_{1n}^{(S)} & a_{1n+1}^{(S)} & \dots & a_{1n+m}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & a_{mn+1}^{(S)} & \dots & a_{mn+m}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{pmatrix}. \qquad (3.79)$$

Очевидно, что матрица

$$\widetilde{A}^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S)} & \dots & a_{1n}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{pmatrix} \qquad (3.80)$$

является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной системе (3.63).

Теорема 3.14. Если $\varphi(\overline{X}^*_M) = d = 0$, то вектор $\overline{X}^* = (X_1^*,\dots, X_n^*)$ является опорным планом ЗЛП (3.18), если $\varphi(\overline{X}^*_M) = d < 0$, то множество планов ЗЛП (3.18) пусто.

Из теоремы 3.14 следует, что при решении ВЗ (3.74–3.76) симплекс-методом могут представиться следующий три случая:

1. На S-й итерации симплексного метода ни одна из искусственных переменных не является базисной, ($N_i^{(S)} \neq n+i, i=\overline{1,m}$), т.е. матрица $\widetilde{A}^{(S)} = K^{(S)}$ (3.61) является K-матрицей ЗЛП (3.18), а план $\overline{X}^* = (\overline{X}^*_1, \dots, \overline{X}^*_n)$ – опорным планом ЗЛП (3.18), определяемым этой K-матрицей.
2. На S-й итерации симплексного метода в числе базисных оказались искусственные переменные, например,

$$U_1, U_2,\dots,U_p,\ p \le m,$$

т.е.

$$N_1^{(S)} = n + 1,\ N_2^{(S)} = n + 1, \dots, N_p^{(S)} = n + p,$$

причем

$$b_i^{(S)} = U_i^{(*)} = 0,\ i = \overline{1,p}.$$

Тогда вектор $\overline{X}^*_M$ является вырожденным оптимальным опорным планом вспомогательной задачи линейного программирования, а матрица $\widetilde{A}^{(S)}$ (3.61) содержит p < m единичных столбцов и не является K-матрицей основной задачи.

Однако в этом случае матрицу $\widetilde{A}^{(S)}$ можно преобразовать в К-матрицу основной задачи линейного программирования, определяющую ее исходный опорный план.

Для этой цели рассмотрим любую *r*-ю строку из первых Р строк матрицы $\widetilde{A}^{(S)}$ $(r = \overline{1, p})$.

Среди элементов $a_{ij}^{(S)}$ $(j = \overline{1, n})$ этой строки есть хотя бы один элемент, отличный от нуля, так как в противном случае ранг матрицы А меньше m.

Выберем этот элемент в качестве направляющего и совершим один шаг метода Жордана–Гаусса преобразования матрицы $\widetilde{A}^{(S)}$ с выбранным направляющим элементом. В результате базисная искусственная переменная U_r будет заменена одной из основных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$, а элементы (n + 1) столбца матрицы не изменятся.

После р таких шагов метода Жордана–Гаусса матрица $\widetilde{A}^{(S)}$ будет преобразована в К-матрицу основной задачи линейного программирования, определяющую ее исходный опорный план

$$\overline{X}^* = (X_1^*, \ldots, X_n^*).$$

Очевидно, этот опорный план будет вырожденным.

3. На S-й итерации симплексного метода в числе базисных оказались искусственные переменные $U_1, U_2, ..., U_p$, $p \le m$, причем хотя бы одна $U_i^{(*)}$ не равна нулю. В этом случае множество Р планов ЗЛП (3.18) пусто.

ВТОРОЙ ЭТАП – РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Если на первом этапе решение ВЗ закончилось случаем 1 или 2, то можно перейти ко второму этапу – решению исходной задачи.

$$\max f(\overline{x}) \tag{3.81}$$

$$A^{(S)}\overline{x} = \overline{b}^{(S)} \tag{3.82}$$

$$\overline{x} \ge \overline{0}, \tag{3.83}$$

так как расширенная матрица системы линейных уравнений (3.82) является К-матрицей.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Вернемся к решению задачи из примера в начале темы. Для задачи (3.51)–(3.53) запишем ВЗ:

$$\varphi(\overline{X}_M) = -(U_1+U_2+U_3) \to \max \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned} &2X_1 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 + U_1 = 150 \\ &X_1 + X_2 + 2X_5 + U_2 = 200 \\ &X_1 + X_3 + 2X_6 + U_3 = 300 \end{aligned} \tag{3.85}$$

$$X_j \ge 0; \quad U_i \ge 0; \quad j = \overline{1,6}; \quad I = \overline{1,3}. \tag{3.86}$$

Результаты первого этапа представлены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}^{(s)}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)}$	0 $\bar{a}_1$	0 $\bar{a}_2$	0 $\bar{a}_3$	0 $\bar{a}_4$	0 $\bar{a}_5$	0 $\bar{a}_6$	-1 $\bar{a}_7$	-1 $\bar{a}_8$	-1 $\bar{a}_9$	$\theta^{(s)}$
	1	7	-1	150	0	2	2	4	1	0	1	0	0	37,5
0	2	8	-1	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	-
	3	9	-1	300	1	0	1	0	0	2	0	0	1	-
	4	$\Delta_j^{(0)}$		-650	-2	-3	-3	-4	-3	-2	0	0	0	
	1	4	0	37,5	0	0,5	0,5	1	0,25	0	0,25	0	0	- 150 -
1	2	8	-1	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	200 100 -
	3	9	-1	300	1	0	1	0	0	2	0	0	1	300 - 150
	4	$\Delta_j^{(1)}$		-500	-2	-1	-1	0	-2	-2	1	0	0	
	1	4	0	37,5	0	0,5	0,5	1	0,25	0	0,25	0	0	-
2	2	1	0	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	-
	3	9	-1	100	0	-1	1	0	-2	2	0	-1	1	50
	4	$\Delta_j^{(2)}$		-100	0	1	-1	0	2	-2	1	2	0	
	1	4	0	37,5	0	0,5	0,5	1	0,25	0	0,25	0	0	
3	2	1	0	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	
	3	6	0	50	0	-0,5	0,5	0	-1	1	0	-0,5	0,5	
	4	$\Delta_j^{(3)}$		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	

На третьей итерации симплексного метода получен оптимальный план вспомогательной задачи: $\bar{X}_M^* = (200; 0; 0; 37.5; 0; 50; 0; 0; 0)$, в котором ни одна из искусственных переменных не является базисной, следовательно, вектор $\bar{X}^* = (200; 0; 0; 37.5; 0; 50)$ является невырожденным опорным планом исходной задачи, определяемым К-матрицей.

$$\tilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.25 & 0 & 150 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 200 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & -1 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

На втором этапе решаем задачу

$$\max(-0{,}4X_1 - 0{,}3X_2 - 0{,}1X_3 - 0{,}1X_5 - 0{,}2X_6)$$

$$A^{(3)}\bar{x} = \bar{b}^{(3)} \quad \bar{x} \ge \bar{0}.$$

Решение приведено в табл. 3.6.

Таблица 3.6

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}^{(s)}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)}$	-0.4 $\bar{a}_1$	-0.3 $\bar{a}_2$	-0.1 $\bar{a}_3$	0 $\bar{a}_4$	-0.1 $\bar{a}_5$	-0.2 $\bar{a}_6$	$\theta^{(s)}$
	1	4	0	37,5	0	0,5	0,5	1	0,25	0	150
0	2	1	-0,4	200	1	1	0	0	2	0	100
	3	6	-0,2	50	0	-0,5	0,5	0	-1	1	-
	4	$\Delta_j^{(0)}$		-90	0	0	0	0	-0,5	0	

Окончание табл. 3.6

	1	4	0	12,5	-0,125	0,375	0,5	1	0	0	25
1	2	5	-0,1	100	0,5	0,5	0	0	1	0	-
	3	6	-0,2	150	1	0	1	0	0	1	300
	4	$\Delta_j^{(1)}$		-40	0,25	0,25	0	0	0	0	
	1	3	-0,1	25	-0,25	0,75	1	2	0	0	
2	2	5	-0,1	100	0,5	1	0	0	1	0	
	3	6	-0,2	137,5	0,625	-0,375	0	-1	0	1	
	4	$\Delta_j^{(2)}$		-100	0,25	0,25	0	0	0	0	

На первой итерации (табл. 3.6) второго этапа получен оптимальный план исходной задачи $\overline{X}^*{}_1$ = (0; 0; 12.5; 100; 150) и $f\left(\overline{X}_1^*\right) = 40$.

Так как $\Delta_3^{(1)} = 0$, а вектор $\overline{a}_3$ не является базисным, то его можно ввести в базис, и при этом в соответствии с формулой (3.28) значение целевой функции не изменится, т.е. на второй итерации можно получить еще один оптимальный план исходной задачи

$\overline{X}^*{}_2$ = (0; 0,25; 0; 100; 137,5) и $f\left(\overline{X}_2^*\right) = 40$.

Исходная задача имеет бесчисленное множество решений, задаваемое формулой

$$\overline{X}^* = \lambda \overline{X}_1^* + (1-\lambda)\overline{X}_2^*; \quad 0 \le \lambda \le 1. \tag{3.87}$$

Пример 3.15. Решить ЗЛП:

$$\begin{gathered} \max\,(2X_1 - X_2 - X_4) \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 10 \\ -2X_1 - X_2 - 2X_4 \ge 18 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 \ge 36 \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,4} \end{gathered} \tag{3.88}$$

Приведем ЗЛП (3.88) к каноническому виду

$$\begin{gathered} \max\,(2X_1 - X_2 - X_4) \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 10 \\ -2X_1 - X_2 - 2X_4 - S_1 = 18 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 - S_2 = 36 \\ X_j \ge 0;\ j = \overline{1,4} \\ S_j \ge 0;\ j = \overline{1,2} \end{gathered} \tag{3.89}$$

Расширенная матрица системы линейных уравнений (3.89)

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 18 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 36 \end{array}\right)$$

не является К-матрицей ЗЛП (3.89) , т.к. не содержит единичной подматрицы.

Запишем вспомогательную задачу для ЗЛП (3.89). Т.к. матрица $\widetilde{A}$ содержит один единичный вектор $\overline{a}_3$ = (1; 0; 0), то при формулировке ВЗ достаточно ввести лишь две искусственные переменные U_1; U_2 во второе и третье уравнения системы (3.89).

Итак, ВЗ имеет вид

$$\varphi\left(\overline{X}_M\right) = -(U_1+U_2) \to \max$$

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + X_3 &= 10 \\ -2X_1 - X_2 - 2X_4 - X_5 + U_1 &= 18 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 - X_6 + U_2 &= 36 \end{aligned} \qquad (3.90)$$

$$X_j \geq 0;\ j = \overline{1,6};\ U_1, U_2 \geq 0$$

Решение ВЗ приведено в табл. 3.7.

Таблица 3.7

S	i	$\overline{N}^{(s)}$	$C_{\overline{N}}^{(s)}$	$X_{\overline{N}}^{(s)}$	0 $\overline{a}_1$	0 $\overline{a}_2$	0 $\overline{a}_3$	0 $\overline{a}_4$	0 $\overline{a}_5$	0 $\overline{a}_6$	-1 $\overline{a}_7$	-1 $\overline{a}_8$	$\theta^{(s)}$
	1	3	0	10	-1	-2	1	0	0	0	0	0	-
0	2	7	-1	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0	-
	3	8	-1	36	3	2	0	1	0	-1	0	1	18
	4	$\Delta_j^{(0)}$		-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0	
	1	3	0	46	2	0	1	1	0	-1	0	1	
1	2	7	-1	36	-0,5	0	0	-1,5	-1	-0,5	1	0,5	
	3	2	0	18	1,5	1	0	0,5	0	-0,5	0	0,5	
	4	$\Delta_j^{(1)}$		-36	0,5	0	0	1,5	1	0,5	0	0,5	

На первой итерации получен оптимальный план.

$$\overline{X}^*_M = (0; 18; 46; 0; 0; 36; 0).$$

Т.к. вектор имеет отличную от нуля искусственную переменную U_1 = 36, то множество планов ЗЛП (3.88) пусто в силу несовместности системы уравнений (3.89).

Контрольные вопросы

1. Запишите ЗЛП в форме ОЗЛП.
2. Запишите ЗЛП в форме ОснЗЛП.
3. Запишите ЗЛП в форме КЗЛП.
4. Приведите ОЗЛП к каноническому виду.
5. Приведите ОснЗЛП к каноническому виду.
6. Дайте определение плана КЗЛП.
7. Перечислите свойства множества планов Р.
8. Дайте определение оптимального плана КЗЛП.
9. Какая ЗЛП называется разрешимой?
10. Дайте определение выпуклого множества.
11. Дайте определение гиперплоскости.
12. Дайте определение полупространства.
13. Что называется крайней, или угловой, точкой множества Р?
14. Дайте определение градиента функции.
15. Запишите градиент функции $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$.

16. Что называется линией уровня целевой функции?
17. В каких случаях при решении ЗЛП графическим методом можно убедиться в ее неразрешимости?
18. Что означает разрешимость ЗЛП при графическом методе ее решения?
19. Запишите КЗЛП в алгебраической форме.
20. Запишите КЗЛП в векторно-матричной форме.
21. Дайте определение опорного плана КЗЛП.
22. Дайте определение К-матрицы КЗЛП.
23. Сформулируйте связь между опорным планом и К-матрицей.
24. Число опорных планов конечно или нет?
25. Какого числа не превышает количество опорных планов КЗЛП?
26. Сформулируйте связь между опорным планом и крайней точкой.
27. Сформулируйте утверждение о существовании оптимального опорного плана.
28. Дайте определение симплекс-разности.
29. Сформулируйте критерий оптимальности в алгоритме симплекс-метода.
30. Сформулируйте критерий отсутствия решений в алгоритме симплекс-метода.
31. Сформулируйте основные моменты, которые должен содержать любой конечный алгоритм решения ЗЛП.
32. Где в алгоритме симплекс-метода используется метод Гаусса?
33. Дайте определение Р-матрицы КЗЛП.
34. Дайте определение псевдоплана КЗЛП.
35. Сформулируйте критерий отсутствия решения в алгоритме Р-метода.
36. В каком случае к решению ЗЛП необходимо применять двухэтапный симплекс-метод?
37. Какие ЗЛП не могут быть решены симплекс-методом?
38. Из чего состоит отчет по результатам поиска решения MS Excel?
39. Из чего состоит отчет по устойчивости поиска решения MS Excel?
40. Из чего состоит отчет по пределам поиска решения MS Excel?

Задание №7

1. Решить графическим методом задачу №1 из темы 1.

Задание №8

2. Решить графическим методом задачу.

Из трех сортов бензина образуются две смеси. Первая состоит из A_1 % бензина первого сорта, B_1 % бензина 2-го сорта, C_1 % бензина 3-го сорта; вторая: A_2 % – 1-го, B_2 % – 2-го, C_2 % – 3-го сорта. Цена 1-й смеси – 305 у.е., второй – 200 у.е. за тонну. Сколько смеси первого и второго вида можно изготовить из "a" тонн 1-го сорта, "b" тонн 2-го сорта и "c" тонн 3-го сорта, чтобы получить максимальный доход?

№ задач	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	a	в	c
1	80	10	10	20	30	50	16	13	21
2	70	20	10	20	40	40	28	32	30
3	70	10	20	30	40	30	26	18	16
4	60	20	20	30	20	50	24	10	16
5	60	10	30	30	50	20	39	20	21
6	60	30	10	30	30	40	27	15	8
7	60	-	40	10	80	10	18	48	14
8	60	40	-	20	10	70	24	14	42
9	70	30	-	10	60	30	14	45	21
10	70	-	30	20	60	20	28	42	20
11	50	10	40	10	20	70	14	45	21
12	60	20	20	20	40	40	16	40	18
13	50	10	40	25	45	30	18	35	27
14	50	15	35	30	35	35	22	30	24
15	40	20	40	35	30	35	24	25	21
16	45	30	25	40	45	5	26	20	27
17	45	25	30	45	10	45	28	15	30
18	50	-	50	50	15	35	30	55	33
19	50	15	35	55	-	45	36	50	21
20	60	20	20	10	20	70	38	45	27
21	45	-	55	15	25	60	40	40	18
22	40	30	30	20	30	50	42	35	15
23	40	40	20	25	35	40	44	30	21
24	50	10	40	30	40	30	46	25	27
25	60	10	30	35	45	20	48	20	30

Задание №9

Решить задачу графическим методом и провести анализ на чувствительность, ответив на вопросы 1–5.

Для приготовления двух видов продукции (А, В) используют три вида сырья. Ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в соответствующей таблице.

1. Определить план выпуска продукции из условия максимизации его стоимости.
2. Определить интервал изменения цены на продукцию А, при котором структура оптимального решения останется неизменной.
3. Определить интервал изменения цены на продукцию В, при котором структура оптимального решения останется неизменной.
4. Определить статус, ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.
5. Определить максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, то есть номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменения.

1.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2400
II	1	5	1800
III	3	-	2000
Цена ($\bar{c}$)	7,5	3	

2.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	1	1	4500
II	2	3	1200
III	3	-	2300
Цена ($\bar{c}$)	7,5	3	

3.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	4,5	1	2400
II	1	5	820
III	-	10	2000
Цена ($\bar{c}$)	10,5	3	

4.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2600
II	1,5	5	2200
III	3	2	1000
Цена ($\bar{c}$)	9	3	

5.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2700
II	1	5	3200
III	3	-	1500
Цена ($\bar{c}$)	13	3	

6.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2000
II	1	7	1400
III	4	-	2000
Цена ($\bar{c}$)	8	3	

7.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	1	1	2500
II	2	5	1500
III	5	-	2000
Цена ($\bar{c}$)	9	4	

8.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	6	1	2400
II	1	8	800
III	-	10	2000
Цена ($\bar{c}$)	10	4	

9.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	2	2400
II	3	5	2100
III	3	2	1200
Цена ($\bar{c}$)	7	5	

10.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	3	1	2700
II	1	8	3200
III	5	-	1500
Цена ($\bar{c}$)	11	3	

11.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	4	3	2400
II	1	5	1800
III	4	-	2000
Цена ($\bar{c}$)	6	2	

12.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	5	1500
II	2	3	1200
III	4	-	2400
Цена ($\bar{c}$)	8	3	

13.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	4	1	2400
II	1	5	600
III	-	7	2100
Цена ($\bar{c}$)	12	8	

14.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2200
II	3	5	2500
III	3	2	1200
Цена ($\bar{c}$)	9	5	

15.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2400
II	1	5	3000
III	3	-	1500
Цена ($\bar{c}$)	10	3	

16.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2400
II	1	5	1500
III	3	-	1800
Цена ($\bar{c}$)	7,5	3,5	

17.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	1	1	4500
II	2	6	1200
III	4	-	2400
Цена ($\bar{c}$)	5	3	

18.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	4,5	1	2400
II	1	6	720
III	-	10	2000
Цена ($\bar{c}$)	10	3	

19.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2000
II	1,5	5	1200
III	3	2	600
Цена ($\bar{c}$)	9	3	

20.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	1700
II	1	5	3000
III	3	-	1500
Цена ($\bar{c}$)	7	5	

21.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2400
II	1	5	1500
III	3	-	2100
Цена ($\bar{c}$)	9	4	

22.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	1	1	2200
II	2	3	1200
III	3	-	2100
Цена ($\bar{c}$)	8	7	

23.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	4,5	1	2400
II	1	5	1000
III	-	9	2700
Цена ($\bar{c}$)	10	6	

24.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2600
II	1,5	5	2200
III	3	2	1400
Цена ($\bar{c}$)	9	5	

25.

Сырье	Норма расходов		Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	
I	2	1	2700
II	1	8	3200
III	5	-	1500
Цена ($\bar{c}$)	12	4	

Задание №10

Предприятие производит 3 вида продукции: A_1, A_2, A_3, используя сырье двух видов: B_1 и B_2. Известны затраты сырья i-го вида на единицу изделия j-го вида a_{ij} , количество сырья каждого вида b_i (i = 1, 2), а также прибыль, полученная от единицы изделия j-го вида c_j (j = 1, 2, 3).

Сколько изделий каждого вида необходимо произвести, чтобы получить

1) максимум прибыли;

2) максимум товарной продукции?

Обозначения: в таблице приведена матрица затрат: $A = (a_{ij})$, справа от таблицы значение b_i (i = 1, 2) и внизу c_j (j = 1, 2, 3).

$$1.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1100\\1500\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 3\end{array}$$

$$2.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1200\\1600\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 3\end{array}$$

$$3.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&5&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1000\\1500\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 3\end{array}$$

$$4.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}1600\\1800\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 3\end{array}$$

$$5.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}4&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1500\\2000\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 3\end{array}$$

$$6.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}800\\1200\end{matrix}\\\hline 3\quad 3\quad 3\end{array}$$

$$7.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}900\\1000\end{matrix}\\\hline 3\quad 3\quad 2\end{array}$$

$$8.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1800\\2400\end{matrix}\\\hline 3\quad 3\quad 2\end{array}$$

$$9.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1300\\900\end{matrix}\\\hline 3\quad 3\quad 2\end{array}$$

$$10.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}2100\\1200\end{matrix}\\\hline 3\quad 3\quad 2\end{array}$$

$$11.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&3&2\\3&4&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1200\\1700\end{matrix}\\\hline 2\quad 4\quad 3\end{array}$$

$$12.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&4&4\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1600\\1600\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 5\end{array}$$

$$13.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&5&1\\1&5&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1000\\1500\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 4\end{array}$$

$$14.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&2&4\\6&1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}1600\\1800\end{matrix}\\\hline 2\quad 1\quad 5\end{array}$$

$$15.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}4&1&3\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1500\\2000\end{matrix}\\\hline 2\quad 5\quad 3\end{array}$$

$$16.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}4&1&1\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}800\\1400\end{matrix}\\\hline 3\quad 4\quad 3\end{array}$$

$$17.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&3\end{pmatrix}\begin{matrix}900\\1000\end{matrix}\\\hline 5\quad 3\quad 2\end{array}$$

$$18.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}3&6&1\\2&8&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1800\\2400\end{matrix}\\\hline 3\quad 5\quad 2\end{array}$$

$$19.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}1600\\1200\end{matrix}\\\hline 3\quad 4\quad 2\end{array}$$

$$20.\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&1&2\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}2100\\1200\end{matrix}\\\hline 3\quad 5\quad 2\end{array}$$

21 . $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2100 \\ 1600 \end{matrix}$
$\quad 5 \quad 4 \quad 3$

22 . $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1800 \\ 1600 \end{matrix}$
$\quad 2 \quad 1 \quad 4$

23 . $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1200 \\ 1500 \end{matrix}$
$\quad 2 \quad 1 \quad 5$

24 . $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1600 \\ 1800 \end{matrix}$
$\quad 2 \quad 1 \quad 7$

25 . $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1500 \\ 2000 \end{matrix}$
$\quad 2 \quad 7 \quad 3$

26 . $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 800 \\ 1500 \end{matrix}$
$\quad 2 \quad 4 \quad 1$

27 . $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1200 \\ 1000 \end{matrix}$
$\quad 5 \quad 3 \quad 2$

28 . $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1800 \\ 2500 \end{matrix}$
$\quad 6 \quad 5 \quad 2$

29 . $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1400 \\ 1200 \end{matrix}$
$\quad 3 \quad 3 \quad 2$

30 . $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2100 \\ 1200 \end{matrix}$
$\quad 3 \quad 5 \quad 4$

3) Решить задачу при дополнительных условиях: предприятие платит за хранение единицы сырья B_1 и B_2 соответственно 0,1 и 0,3 денежных единицы.

4) Решить задачу при условии, что задан план выпуска изделий. При решении учитывать возможность перевыполнения плана.

1. (100, 100, 300)
2. (200, 100, 50)
3. (100, 100, 200)
4. (200, 100, 250)
5. (100, 100, 200)
6. (200, 100, 100)
7. (100, 300, 100)
8. (100, 200, 500)
9. (100, 100, 200)
10. (200, 100, 600)
11. (100, 100, 300)
12. (200, 100, 50)
13. (100, 100, 200)
14. (200, 100, 250)
15. (100, 100, 200)
16. (200, 100, 100)
17. (100, 300, 100)
18. (100, 200, 500)
19. (100, 100, 200)
20. (200, 100, 600)
21. (100, 100, 300)
22. (200, 100, 50)
23. (100, 100, 200)
24. (200, 100, 250)
25. (100, 100, 200)
26. (200, 100, 100)
27. (100, 300, 100)
28. (100, 200, 500)
29. (100, 100, 200)
30. (200, 100, 600)

Задание №11

Предприятию необходимо выпустить по плану продукции, не менее чем: A_1 – 500 единиц, A_2 – 300 единиц, A_3 – 450 единиц. Каждый вид изделия может производиться на двух машинах. Как распределить работу машин, чтобы общие затраты времени на выполнение плана были минимальными, если задана матрица затрат? Ресурс времени каждой машины приведен справа от таблицы. Предусмотреть возможность перевыполнения плана.

Решить задачу с помощью Р-метода.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1500 \\ 1000 \end{matrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3800 \\ 1500 \end{matrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2000 \\ 1700 \end{matrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & 2{,}5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 950 \\ 1100 \end{matrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1700 \\ 1500 \end{matrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2{,}5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1500 \\ 800 \end{matrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1000 \\ 1000 \end{matrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2{,}5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2000 \\ 1200 \end{matrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2{,}5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1200 \\ 2000 \end{matrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4500 \\ 4000 \end{matrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2800 \\ 4000 \end{matrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 3600 \end{matrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3600 \\ 2800 \end{matrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 6000 \end{matrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4000 \\ 4200 \end{matrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2700 \\ 4800 \end{matrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2100 \\ 4000 \end{matrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4000 \\ 2800 \end{matrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 5000 \\ 4000 \end{matrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 2000 \end{matrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2400 \\ 3000 \end{matrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$

Задание №12

Предприятию необходимо выпустить по плану продукции A_1 – ровно 500 единиц, A_2 – ровно 300 единиц, A_3 – ровно 450 единиц. Каждый вид изделия может производиться на двух машинах. Как распределить работу машин, чтобы общие затраты времени на выполнение плана были минимальными, если задана матрица затрат? Ресурс времени каждой машины приведен справа от таблицы.

Решить задачу двухэтапным симплекс-методом.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1500 \\ 1000 \end{matrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3800 \\ 1500 \end{matrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2000 \\ 1700 \end{matrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & 2{,}5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 950 \\ 1100 \end{matrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1700 \\ 1500 \end{matrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2{,}5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1500 \\ 800 \end{matrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1000 \\ 1000 \end{matrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2{,}5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2000 \\ 1200 \end{matrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2{,}5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1200 \\ 2000 \end{matrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4500 \\ 4000 \end{matrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2800 \\ 4000 \end{matrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 3600 \end{matrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3600 \\ 2800 \end{matrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 6000 \end{matrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4000 \\ 4200 \end{matrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2700 \\ 4800 \end{matrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2100 \\ 4000 \end{matrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4000 \\ 2800 \end{matrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 5000 \\ 4000 \end{matrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 2000 \end{matrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2400 \\ 3000 \end{matrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3000 \\ 4000 \end{matrix}$

ТЕМА 4.

Теория двойственности в линейном программировании

Для изучения данного раздела дисциплины необходимы знания, полученные при изучении темы 3.

Изучив данную тему, студент должен:

- знать основные положения теории двойственности;
- уметь записывать двойственную задачу для ***любых*** постановок исходной задачи;
- иметь общие представления об анализе решения ЗЛП с помощью теории двойственности и анализе решения ЗЛП на основе отчетов MS EXCEL;
- использовать отчеты, полученные с помощью MS Excel, для анализа на чувствительность.

Цель изучения – получить представление о теории двойственности и осознать ее экономическую значимость.

В данном разделе вводится важное понятие теории линейного программирования – понятие двойственности. **Двойственная задача** – это вспомогательная задача линейного программирования (ЛП), формулируемая с помощью определённых правил непосредственно из условий исходной (прямой) задачи. Часто рассматриваются формулировки двойственной задачи, соответствующие различным формам записи прямой задачи. Однако опыт показывает, что на начальной стадии изучения ЛП детали различных формулировок двойственной задачи нередко затрудняют восприятие материала. Кроме того, практическое использование теории двойственности не требует знания деталей различных формулировок двойственной задачи. Здесь даётся обобщённая формулировка двойственной задачи ЛП, которая применима к любой форме представления прямой задачи. Это объясняется тем, что использование симплексного и других методов решения задач ЛП требует приведения ограничений любой задачи ЛП к стандартной (канонической) форме, поэтому двойственная задача будет сформулирована в соответствии со стандартной формой ограничений прямой задачи.

4.1. Определение и экономический смысл двойственной ЗЛП

Пусть прямая задача записана с ограничениями в каноническом виде:

$$max(min) f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\,; \qquad (4.1)$$

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,,\ i = 1 \ldots m\,; \qquad (4.2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \ldots n\,. \qquad (4.3)$$

Задачей, двойственной к ЗЛП (4.1)–(4.3), называется следующая ЗЛП:

$$\min(\max) g(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \,; \qquad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \ge (\le) c_j \,, \quad j = 1 \ldots n \,; \qquad (4.5)$$

y_i не ограничены в знаке, $i = 1 \ldots m$. (4.6)

Двойственная ЗЛП строится по следующим правилам:

1) Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, т.е. число переменных двойственной задачи $(y_1, \ldots, y_m)$ равно числу ограничений прямой задачи.
2) Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи, т.е. число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи.
3) Матрица функциональных ограничений двойственной задачи получается путем транспонирования матрицы функциональных ограничений прямой задачи.
4) Вектор $\overline{C}$ целевой функции прямой задачи становится вектором правой части ограничений двойственной задачи, а вектор $\overline{b}$ правой части прямой задачи – вектором целевой функции двойственной задачи.
5) Если ЦФ прямой задачи максимизируется, то ЦФ двойственной задачи минимизируется, а ограничения имеют вид ≥, и наоборот.

Прямая задача	Двойственная задача	
$\max f(\overline{x}) = (\overline{C}, \overline{x})$ $P = \begin{cases} A\overline{x} = \overline{b} \\ \overline{x} \ge \overline{0} \end{cases}$	$\min g(\overline{y}) = (\overline{y}, \overline{b})$ $Q = \begin{cases} \overline{y}A \ge \overline{C} \\ \overline{y} \text{ – не ограничен в знаке} \end{cases}$	(4.7)
$\min f(\overline{x}) = (\overline{C}, \overline{x})$ $P = \begin{cases} A\overline{x} = \overline{b} \\ \overline{x} \ge \overline{0} \end{cases}$	$\max g(\overline{y}) = (\overline{y}, \overline{b})$ $Q = \begin{cases} \overline{y}A \le \overline{C} \\ \overline{y} \text{ не ограничен в знаке} \end{cases}$	(4.8)

Пример 4.1. Пусть прямая задача записана в виде основной ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max(\overline{c}, \overline{x}); \\ &A\overline{x} \le \overline{b}; \\ &\overline{x} \ge \overline{0}. \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Приведем ограничения задачи (4.9) к канонической форме:

$$\begin{aligned} &\max[(\overline{C}, \overline{x}) + (\overline{0}, \overline{S})]; \\ &A\overline{x} + \overline{S} = \overline{b}; \\ &\overline{x} \ge \overline{0}, \quad \overline{S} \ge \overline{0}. \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Тогда двойственная задача (ДЗ) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &\min(\overline{y}, \overline{b}); \\ &\overline{y}A \ge \overline{C}; \\ &\overline{y} \ge \overline{0}. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Пример 4.2.
Прямая задача:

$$\max(5x_1 + 12x_2 + 4x_3);$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10;$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8;$$
$$x_{1,2,3} \ge 0.$$

Прямая задача с ограничениями в канонической форме:

$$\max(5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0S_1);$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 10;$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8;$$
$$x_{1,2,3} \ge 0.$$
$$S_1 \ge 0$$

Двойственная задача:

$$\min(10y_1 + 8y_2);$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 5;$$
$$2y_1 - y_2 \ge 12;$$
$$y_1 + 3y_2 \ge 4;$$
$$y_1 + 0y_2 \ge 0.$$

$y_{1,2}$ не ограничены в знаке.

Ограничение $y_1 + 0y_2 \ge 0$, т.е. $y_1 \ge 0$, является более жестким, чем условие неограниченности y_1 в знаке, поэтому двойственная задача может быть записана в следующем виде:

$$\min(10y_1 + 8y_2);$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 5;$$
$$2y_1 - y_2 \ge 12;$$
$$y_1 + 3y_2 \ge 4;$$
$$y_1 \ge 0.$$

y_2 не ограничена в знаке.

Пример 4.3. Прямая задача:

$$\min(5X_1 - 2X_2);$$
$$-X_1 + X_2 \ge -3;$$
$$2X_1 + 3X_2 \le 5;$$
$$X_{1,2} \ge 0.$$

Прямая задача с ограничениями в канонической форме:

$$\min(5X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2);$$
$$-X_1 + X_2 - S_1 = -3;$$
$$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 5;$$
$$X_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2},\ \ S_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$$

Двойственная задача:

$$\max(-3y_1 + 5y_2);$$
$$-y_1 + 2y_2 \le 5;$$
$$y_1 + 3y_2 \le -2;$$
$$-y_1 + 0y_2 \le 0;$$
$$0y_1 + y_2 \le 0.$$
$$y_{1,2} \text{ не ограничены в знаке.}$$

Отбрасывая избыточные ограничения, получаем:

$$\max(-3y_1 + 5y_2);$$
$$-y_1 + 2y_2 \le 5;$$
$$y_1 + 3y_2 \le -2;$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0.$$

Пример 4.4. Прямая задача:

$$\max(5X_1 + 6X_2);$$
$$X_1 + 2X_2 = 5;$$
$$-X_1 + 5X_2 \ge 3;$$
$$4X_1 + 7X_2 \le 8.$$
$$X_1 \text{ не ограничена в знаке, } X_2 \ge 0.$$

Прямая задача с ограничениями в канонической форме:

$$\max(5X_1' - 5X_1'' + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2);$$
$$X_1' - X_1'' + 2X_2 = 5;$$
$$-X_1' + X_1'' + 5X_2 - S_1 = 3;$$
$$4X_1' - 4X_1'' + 7X_2 + S_2 = 8;$$
$$X_1', X_1'' \ge 0,\ \ X_2 \ge 0,\ \ S_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,2}.$$

Двойственная задача:

$$\min(5y_1 + 3y_2 + 8y_3);$$
$$y_1 - y_2 + 4y_3 \ge 5;$$
$$-y_1 + y_2 - 4y_3 \ge -5;$$
$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 6;$$
$$0y_1 - y_2 + 0y_3 \ge 0;$$
$$0y_1 + 0y_2 + y_3 \ge 0.$$
$$y_{1,2,3} \text{ не ограничены в знаке.}$$

Заметим, что первое и второе ограничения двойственной задачи можно заменить одним ограничением в виде равенства, избыточные ограничения на y_2 и y_3 можно отбросить. В итоге получаем:

$$\min(5y_1 + 3y_2 + 8y_3);$$
$$y_1 - y_2 + 4y_3 = 5;$$
$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 6;$$
$$y_1 \text{ не ограничена в знаке;}$$
$$y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0.$$

Очевидно, что задача, двойственная к двойственной, совпадает с прямой.

4.2. Основные положения теории двойственности

Прямая задача	Двойственная задача
$\max f(\overline{x}) = (\overline{C}, \overline{x})$	$\min g(\overline{y}) = (\overline{y}, \overline{b})$
$A\overline{x} = \overline{b}$	$\overline{y}A \geq \overline{C}$
$\overline{x} \geq \overline{0}$	$\overline{y}$ не ограничен в знаке

Теорема 4.1. Пусть $\overline{x}, \overline{y}$ – планы соответственно прямой и двойственной ЗЛП, тогда:

$$f(\overline{x}) \leq g(\overline{y}). \tag{4.12}$$

Теорема 4.2. Пусть $\overline{x}^*, \overline{y}^*$ – планы соответственно прямой и двойственной ЗЛП и $f(\overline{x}^*) = g(\overline{y}^*)$, тогда $\overline{x}^*, \overline{y}^*$ – решения соответственно прямой и двойственной задач.

Теорема 4.3. Если прямая (двойственная) ЗЛП имеет конечное решение, то и двойственная (прямая) ЗЛП имеет решение, причем

$$\max f(\overline{x}) = \min g(\overline{y}). \tag{4.13}$$

Если прямая (двойственная) ЗЛП не имеет решения, то и двойственная (прямая) ЗЛП не имеет решения.

Теорема 4.4. Планы $\overline{x}^*, \overline{y}^*$ соответственно прямой и двойственной ЗЛП являются оптимальными тогда и только тогда, когда

$$\overline{x}^*(\overline{y}^*\mathrm{A} - \overline{\mathrm{C}}) = \overline{0}. \tag{4.14}$$

Условия (4.14) называются условиями дополнительной нежесткости.

Примечание 1. Для основной ЗЛП и двойственной к ней ЗЛП условия нежесткости имеют вид:

$$\begin{gathered} \overline{y}^*(\mathrm{A}\overline{x}^* - \overline{\mathrm{b}}) = \overline{0} \\ \overline{x}^*(\overline{y}^*\mathrm{A} - \overline{\mathrm{C}}) = \overline{0} \end{gathered}. \tag{4.15}$$

Примечание 2. Если прямая ЗЛП записана не в канонической форме, то условия дополнительной нежесткости для этой ЗЛП и двойственной к ней ЗЛП могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = C_j, \\ &\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^* = 0, \\ &\text{если } y_i^* > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i, \\ &\text{если } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > C_j, \text{ то } x_j^* = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Получение оптимального плана двойственной задачи на основании теоремы 4.4.

Пример 4.5. Рассмотрим задачу:

$$\min(2x_1 + 4x_2);$$
$$3x_1 + x_2 \ge 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 6; \qquad (4.17)$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3;$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Ее решение $\bar{x}^* = (3/2;\ 0)$, $\min f(\bar{x}) = 3$. Найдем решение задачи, двойственной к (4.17), используя теорему 4.4. Запишем двойственную к (4.17) задачу:

$$\max(3y_1 + 6y_2 + 3y_3);$$
$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \le 2;$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 4; \qquad (4.18)$$
$$y_{1,2} \ge 0,\ \ y_3 \le 0.$$

Применяем соотношение (4.16). Так как $x_1^* = 3/2 > 0$, то $3y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 2$. Далее, так как $3x_1^* + x_2^* = 9/2 + 0 > 3$, то $y_1^* = 0$, и так как $x_1^* + 2x_2^* = 3/2 + 0 < 3$, то $y_3^* = 0$. В итоге имеем:

$$3y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 2,\ y_1^* = y_3^* = 0,$$

т.е. вектор $\bar{y}^* = (0;\ 1/2;\ 0)$ является решением задачи (4.18) на основании теоремы 4.4. Вычислим $g(\bar{y}^*) = 6 \times 1/2 = 3 = f(\bar{x})$, что соответствует утверждению теоремы 4.3.

Пример 4.6. Найти решение прямой и двойственной задач.

Прямая задача	Двойственная задача	
$\max f(\bar{x}) = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$	$\min g(\bar{y}) = 10Y_1 + 8Y_2$	
$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 10$	$Y_1 + 2Y_2 = 5$	(а)
$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 8$	$2Y_1 - Y_2 \ge 12$	(б)
$X_{2,3} \ge 0$	$Y_1 + 3Y_2 \ge 4$	(в)
	$Y_1 \ge 0$	(г)
X_1 не ограничена в знаке	Y_2 не ограничена в знаке	

Двойственная задача содержит две переменные, т.е. ее можно решать графически (рис. 4.1).

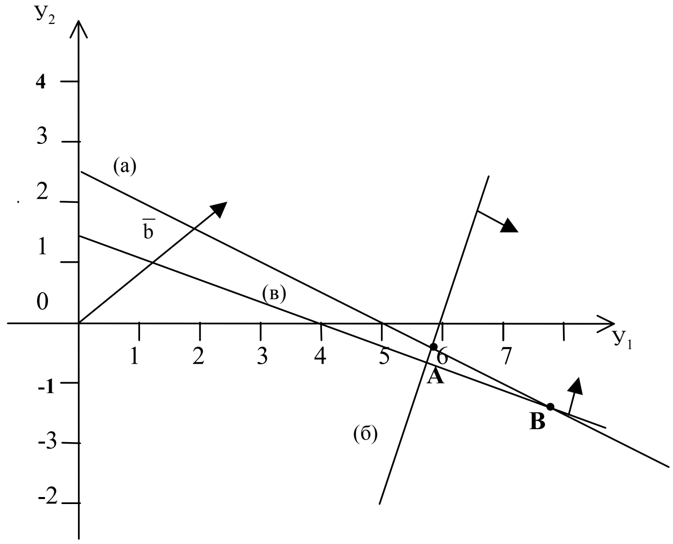


Рис. 4.1

Как видно из рис. 4.1, область допустимых решений – планов двойственной ЗЛП – Q представляет собой отрезок AB, лежащий на прямой $Y_1 + 2Y_2 = 5$, так как первое ограничение задается в виде равенства. Передвигая линию уровня функции $10Y_1 + 8Y_2 = const$ в направлении, противоположном вектору $\overline{b} = (10; 8)$, получаем точку A, в которой достигается минимум функции $g(\overline{y})$. Находим координаты точки A, которая является пересечением двух прямых:

$$Y_1 + 2Y_2 = 5,$$
$$2Y_1 - Y_2 = 12,$$

откуда

$$Y_1^* = 29/5;\ Y_2^* = -2/5 \text{ и } g(\overline{Y}^*) = 54\,\frac{4}{5}.$$

Ипользуя теорему 4.4, находим решение исходной задачи. Так как $Y_1^* > 0$ и $Y_2^* < 0$, то оба ограничения прямой задачи имеют вид строгих равенств:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 10; \\ 2X_1 - X_2 + 3X_3 &= 8. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Так как третье ограничение двойственной задачи выполняется в виде строгого неравенства (29/5 – 6/5 = 24/5 > 4), то $X_3^* = 0$. Решая систему (4.19), получаем

$$X_1^* = 26/5;\ X_2^* = 12/5;\ X_3^* = 0;\ f(\overline{X}^*) = 54{,}8.$$

Получение оптимального решения двойственной задачи из симплекс-таблицы решения прямой задачи

Пусть прямая задача имеет вид основной ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max f(\overline{x}) = (\overline{C}, \overline{x}); \\ &A\overline{x} \le \overline{b}; \\ &\overline{x} \ge \overline{0},\ \overline{b} \ge \overline{0}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Двойственная к ней ЗЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} &\min g(\overline{y}) = (\overline{y}, \overline{b}); \\ &\overline{y}A \ge \overline{C}; \\ &\overline{y} \ge \overline{0}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Предположим, что ЗЛП (4.20) имеет решение. Решения обеих задач могут быть записаны в виде:

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(s)}} = B_S^{-1}\,\overline{b};\ \overline{y}^* = \overline{C}_{\overline{N}^{(S)}}\,B_S^{-1},$$

где
$$B_S^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1n+1}^{(S)} & \dots & a_{1n+m}^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{mn+1}^{(S)} & \dots & a_{mn+m}^{(S)} \end{pmatrix} = (\overline{a}_{n+1}^{(S)}, \dots, \overline{a}_{n+m}^{(S)})$$

матрица, обратная для базисной подматрицы B_S. Матрица B_S^{-1} подматрицы $K^{(S)}$ расположена на месте единичной подматрицы в исходной матрице $K^{(0)}$.

Кроме того, можно показать, что

$$\Delta_{n+i}^{(S)} = \overline{y}_i^*,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.22}$$

откуда следует, что i-я компонента $\overline{y}_i^*$ решения двойственной ЗЛП есть (n + i)-я симплекс-разность матрицы $K^{(S)}$, определяющей оптимальный план исходной ЗЛП, а j-я симплекс-разность матрицы $K^{(S)}$ ($j = \overline{1,n}$) равна разности между левой и правой частями ограничений двойственной ЗЛП:

$$\Delta_j^{(S)} = (\overline{y}^*, \overline{a}_j) - C_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* - C_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{4.23}$$

Пример 4.7. Решить следующую ЗЛП:

$$\max(4X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4);$$
$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_5 + X_7 = 50;$$
$$-3X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 + 4X_7 = 10;$$
$$4X_2 + X_5 + X_6 - 1/2\ X_7 = 24;$$
$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}. \tag{4.24}$$

Найти решение задачи, двойственной к ЗЛП (4.24).

Так как расширенная матрица

$$K^{(0)} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 24 \end{array}\right)$$

системы линейных уравнений (4.24) является K-матрицей, то ЗЛП (4.24) можно решить симплекс-методом. Результаты решения приведены в таблице:

$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}^{(s)}}$	$\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$	4 $\overline{a}_1^{(s)}$	1 $\overline{a}_2^{(s)}$	2 $\overline{a}_3^{(s)}$	3 $\overline{a}_4^{(s)}$	0 $\overline{a}_5^{(s)}$	0 $\overline{a}_6^{(s)}$	0 $a_7^{(5)}$	$\theta^{(s)}$
1	4	50	1	2	3	0	–1	0	1	25
4	3	10	0	–3	1	1	2	0	4	–
6	0	24	0	4	0	0	1	1	–1/2	6
$\Delta i^{(0)}$	$f(\overline{x}) = 230$		0	–2	13	0	2	0	16	
1	4	38	1	0	3	0	–3/2	–1/2	5/4	
4	3	28	0	0	1	1	11/4	3/4	29/8	
2	1	6	0	1	0	0	1/4	1/4	–1/8	
$\Delta_j^{(1)}$	$f(\overline{x}) = 242$		0	0	13	0	5/2	1/2	63/4	

На первой итерации получен оптимальный план ЗЛП (4.24).

$$\overline{N}^{(1)} = (1, 4, 2);\ \overline{X}_{\overline{N}^{(1)}} = (38, 28, 6),$$
$$\overline{X}^* = (38, 6, 0, 28, 0, 0, 0);\ f(\overline{X}^*) = 242.$$

Запишем задачу, двойственную к (4.24):

$$\min(50Y_1 + 10Y_2 + 24Y_3);$$

$$Y_1 \ge 4; \quad (4.25)$$

$$2Y_1 - 3Y_2 + 4Y_3 \ge 1;$$

$$3Y_1 + Y_2 + \ge 2.$$

$$Y_2 \ge 3; \quad (4.26)$$

$$-Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \ge 0;$$

$$Y_3 \ge 0;$$

$$Y_1 + 4Y_2 - 1/2\, Y_3 \ge 0.$$

$$Y_{1-3} \text{ не ограничены в знаке.} \quad (4.27)$$

Ограничения (4.27) являются избыточными, следовательно, их можно отбросить. Находим решение ЗЛП (4.25) по формуле

$$\bar{y}^* = \bar{C}_{\bar{N}^{(1)}} B_1^{-1} = (4, 3, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = (4, 3, 1/2)$$

или (4.22):

$$\bar{y}^* = \left(\Delta_1^{(1)} + C_1, \Delta_4^{(1)} + C_4, \Delta_6^{(1)} + C_6\right) = (0 + 4,\ 0 + 3,\ \frac{1}{2} + 0) = (4,\ 3,\ \frac{1}{2});$$

$$g(\bar{y}^*) = 50\times 4 + 10\times 3 + 24 \times \frac{1}{2} = 242.$$

4.3. Решение ЗЛП с помощью Ms Excel

Для решения задач оптимизации в MS Excel используют надстройку Поиск решения, которая вызывается из пункта главного меню «Сервис»:

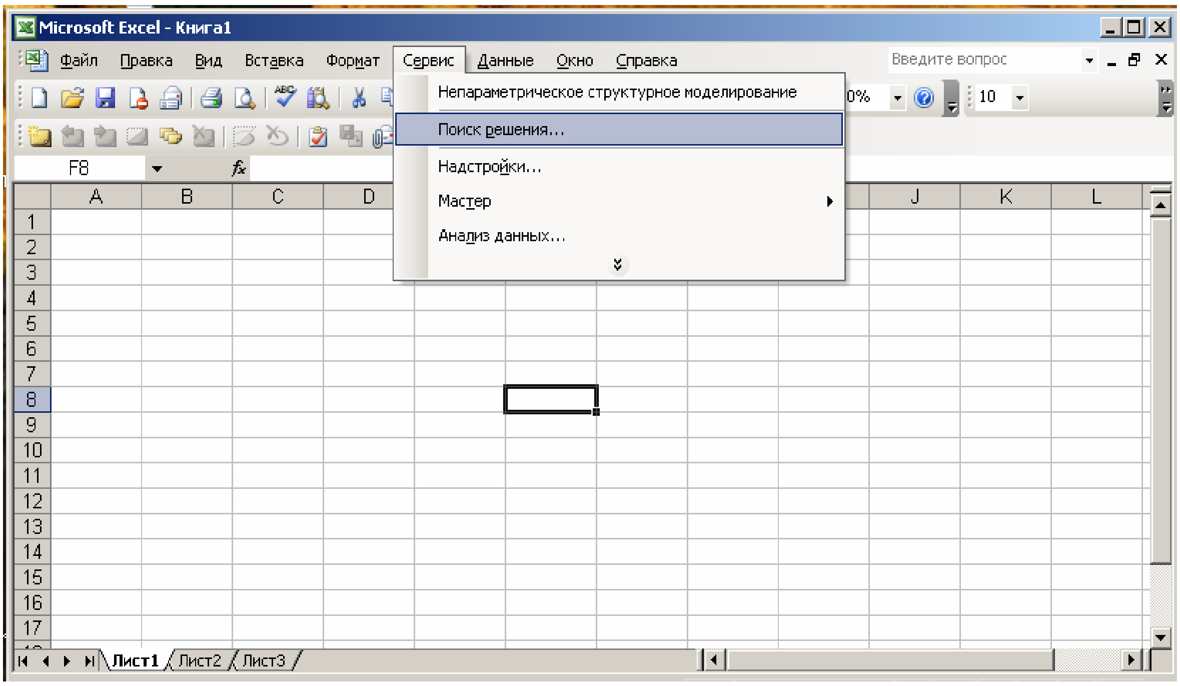


Рис. 4.2

Если в версии Excel, установленной на вашем компьютере, отсутствует данный подпункт меню «Сервис», необходимо вызвать пункт меню «Надстройки» и в предложенном списке дополнительных модулей выбрать «Поиск решения» (рис. 4.3).

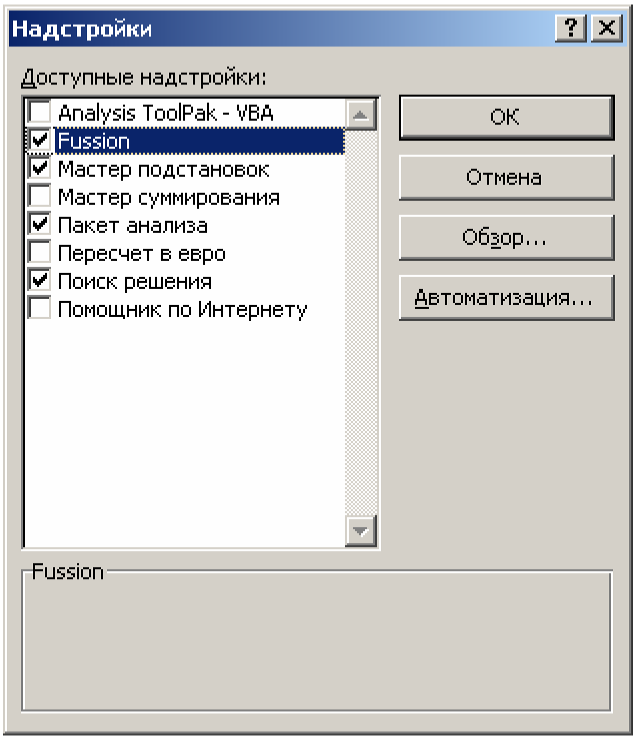


Рис. 4.3

Рассмотрим на примере использование данной надстройки. Решим с ее помощью задачу производственного планирования – выпуск продуктов А, В, С, Д из трёх типов ресурсов, математическая модель которой имеет вид:

max $f(\overline{X})=7{,}5X_1+3X_2+6X_3+12X_4$ (целевая функция – суммарная стоимость выпуска) при

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + X_2 + 0{,}5X_3 + 4X_4 \le 2400 \\ X_1 + 5X_2 + 3X_3 \le 1200 \\ 3X_1 + 6X_3 + X_4 \le 2000 \\ X_{1,2,3,4} \ge 0 \end{array}\right\}$$

Ограничения по запасам ресурсов и неотрицательности переменных

Составим шаблон в редакторе Excel, как показано на рис. 4.4.

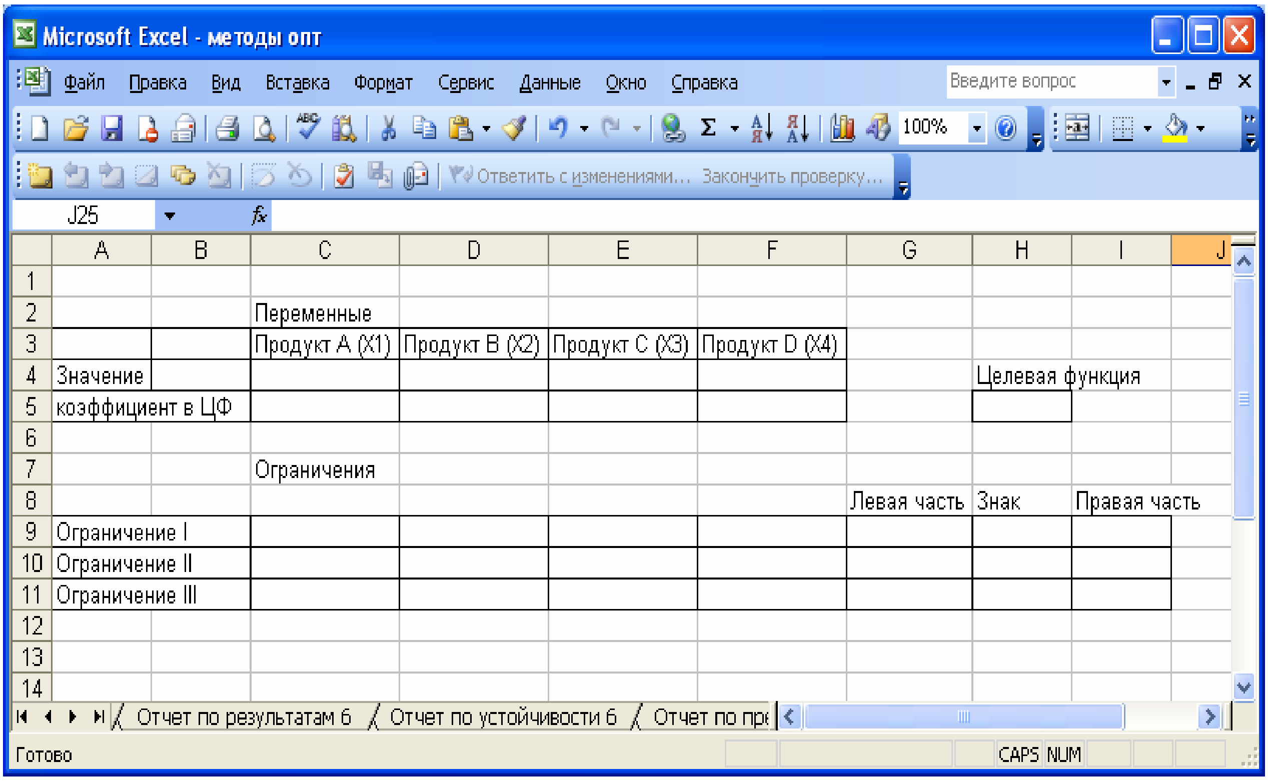


Рис. 4.4. **Шаблон оформления задачи**

Теперь занесем в данную задачу числовую информацию (рис. 4.5).

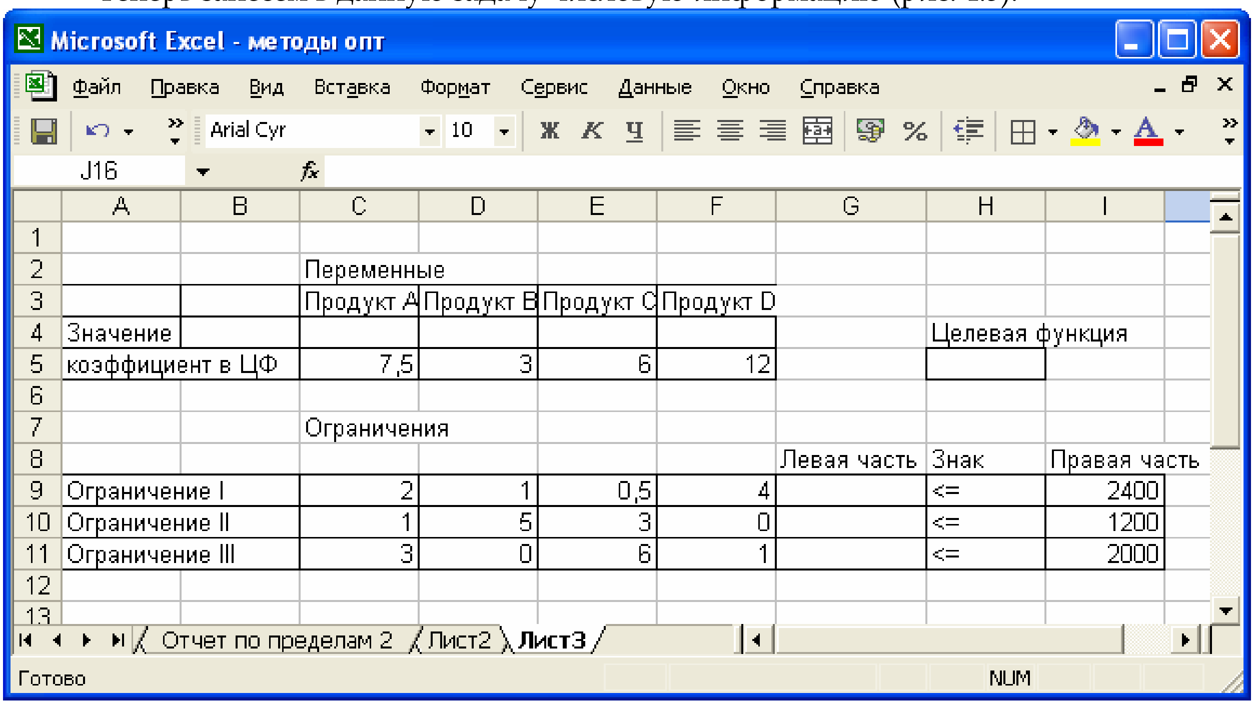


Рис. 4.5. **Исходные данные задачи**

В выделенные пустые ячейки (значения целевой функции и левых частей неравенств) необходимо занести формулы, отображающие связи и отношения между числами на рабочем столе.

Ячейки C4 – F4 называются в Excel изменяемыми (в нашей модели это неизвестные переменные), т.е., изменяя их, **Поиск решения** будет находить оптимальное значение целевой функции. Значения, которые первоначально вводят в эти ячейки, обычно нули (незаполненные клетки трактуются по умолчанию как содержащие нулевые значения).

Теперь необходимо ввести формулы. В нашей математической модели целевая функция представляет собой произведение вектора коэффициентов на вектор неизвестных. Действительно, выражение $7{,}5X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 12X_4$ можно рассматривать как произведение вектора (7, 5, 3, 6, 12) на вектор (X_1, X_2, X_3, X_4).

В Excel существует функция СУММПРОИЗВ, которая позволяет найти скалярное произведение векторов. В ячейку H5 необходимо вызвать данную функцию, а в качестве перемножаемых векторов задать адреса ячеек, содержащих коэффициенты уравнений (в данном случае, это C5:F5), и ячеек, в которые в результате решения будут помещены значения X_1, X_2, X_3, X_4 (ячейки C4:F4) (рис. 4.6).

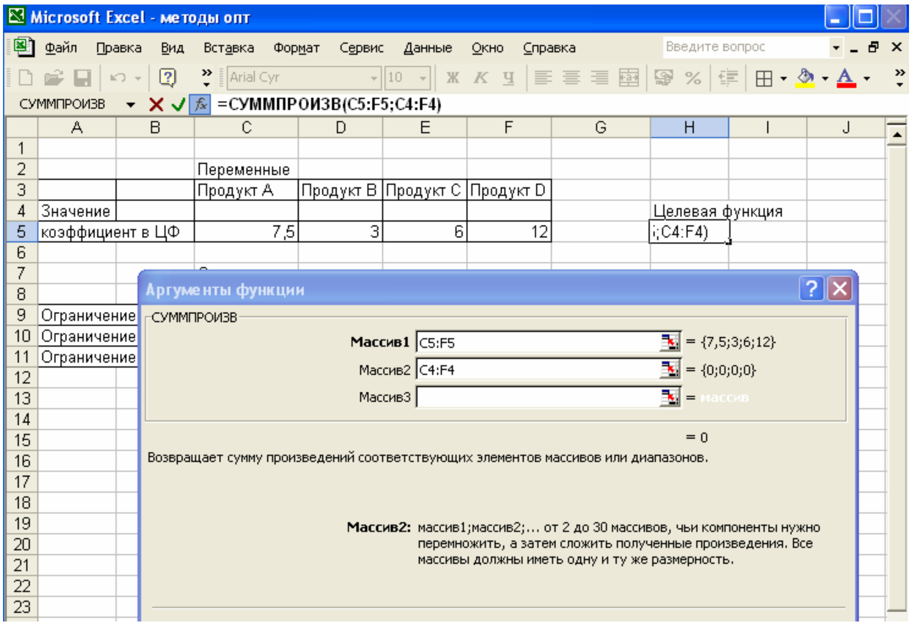


Рис. 4.6. **Вызов функции СУММПРОИЗВ**

Каждая левая часть ограничения тоже представляет собой произведение двух векторов: соответствующей строки матрицы затрат и вектора неизвестных. То есть, выражение $2X_1 + X_2 + 0{,}5X_3 + 4X_4$ (для первого ограничения $2X_1 + X_2 + 0{,}5X_3 + 4X_4 \leq 2400$) будем рассматривать как произведение вектора коэффициентов (2, 1, 0,5, 4) и вектора переменных (X_1, X_2, X_3, X_4).

В ячейке, отведенной для формулы левой части первого ограничения (G9), вызовем функцию СУММПРОИЗВ. В качестве адресов перемножаемых векторов занесем адрес строки коэффициентов C9:F9 и адрес значений переменных C4:F4 (рис. 4.7).

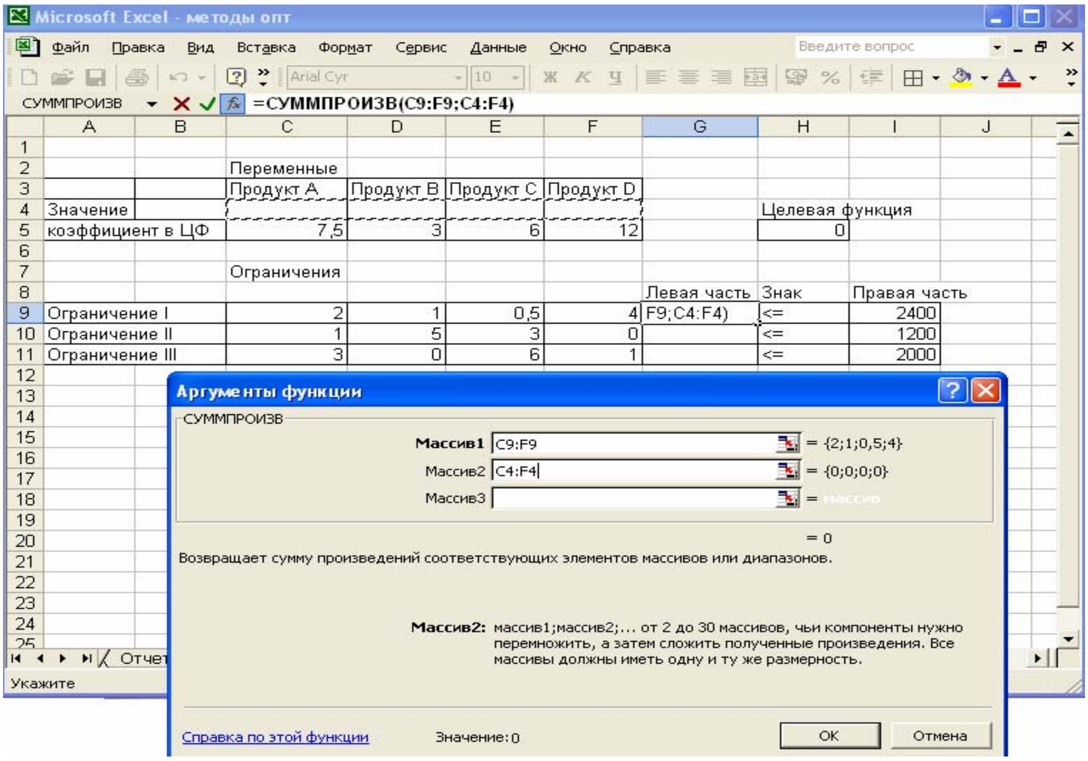


Рис. 4.7

В четыре оставшиеся ячейки графы «Левая часть» вводим аналогичные формулы, используя соответствующую строку матрицы затрат. Фрагмент экрана с введенными формулами показан на рис. 4.8.

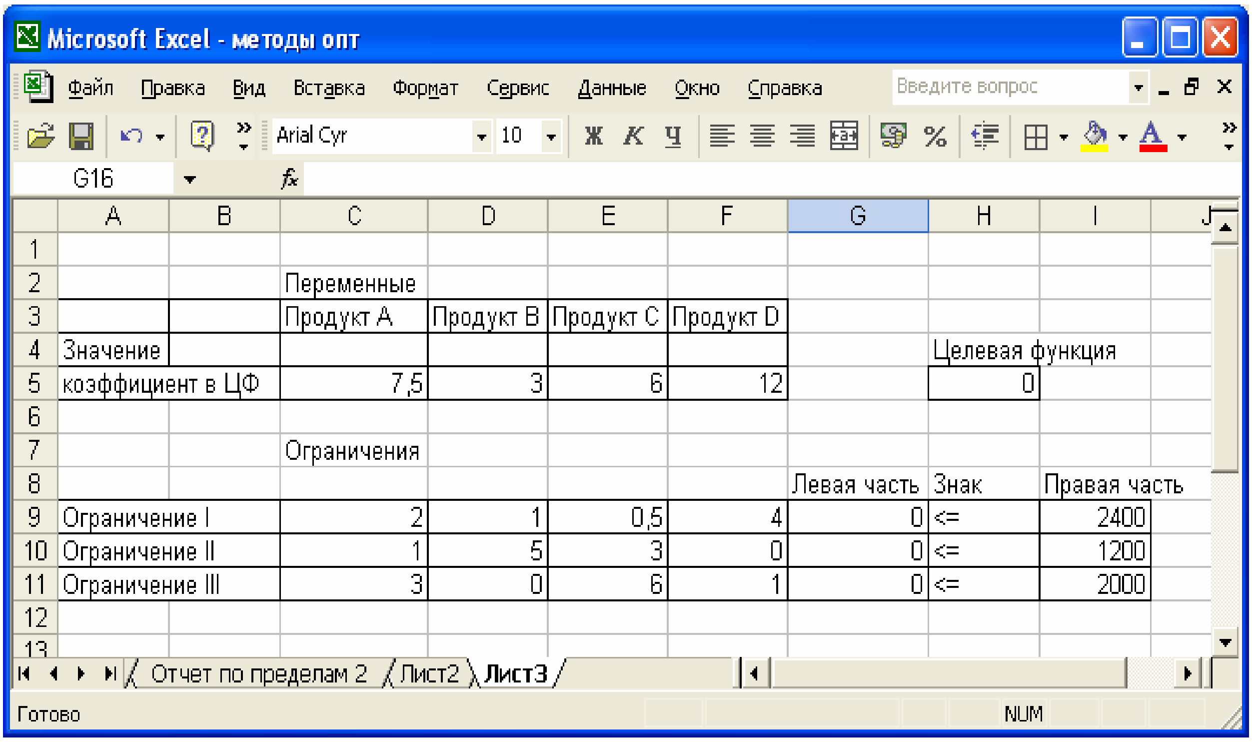


Рис. 4.8

К моменту вызова сервиса «Поиск решения» на рабочем столе с задачей должны быть занесены формулы для левых частей ограничений и формула для значения целевой функции.

В меню «Сервис» выбираем «Поиск решения». В появившемся окне задаем следующую информацию:

а) в качестве целевой ячейки устанавливаем адрес ячейки для значения целевой функции H5;

б) «флажок» устанавливаем на вариант «максимальному значению», т.к. в данном случае целевая функция дохода подлежит максимизации;

в) в качестве изменяемых ячеек заносится адрес строки значений переменных C4:F4;

г) справа от окна, предназначенного для занесения ограничений, нажимаем кнопку «Добавить», появится форма для занесения ограничения (рис. 4.9);

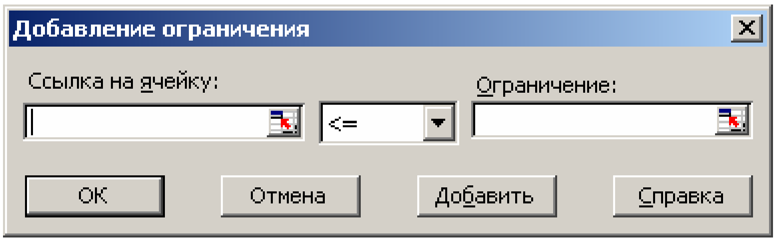


Рис. 4.9

д) в левой части формы «Ссылка на ячейку» заносится адрес формулы для левой части первого ограничения G9, выбирается требуемый знак неравенства (в нашем случае, <=), в поле «Ограничение» заносится ссылка на правую часть ограничения I9 (рис. 4.10);

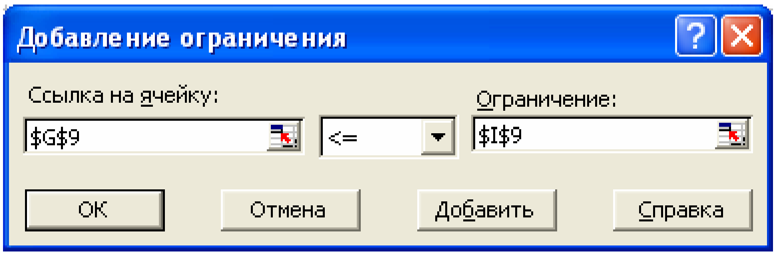


Рис. 4.10

е) аналогично заносятся все ограничения задачи, после чего нажимается кнопка «ОК».

Таким образом, окно «Поиск решения» с занесенной информацией выглядит следующим образом (рис. 4.11).

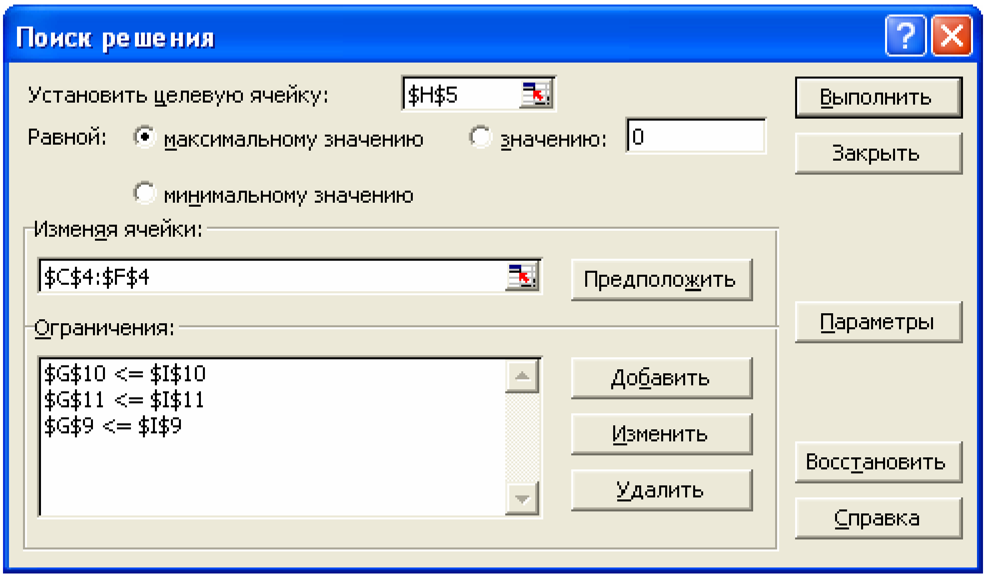


Рис. 4.11

Далее необходимо нажать кнопку **Параметры**, установить «флажки» «**Линейная модель**» и «**Неотрицательные значения**», поскольку в данном случае задача является ЗЛП, а ограничение 6) требует неотрицательности значений (рис. 4.12).

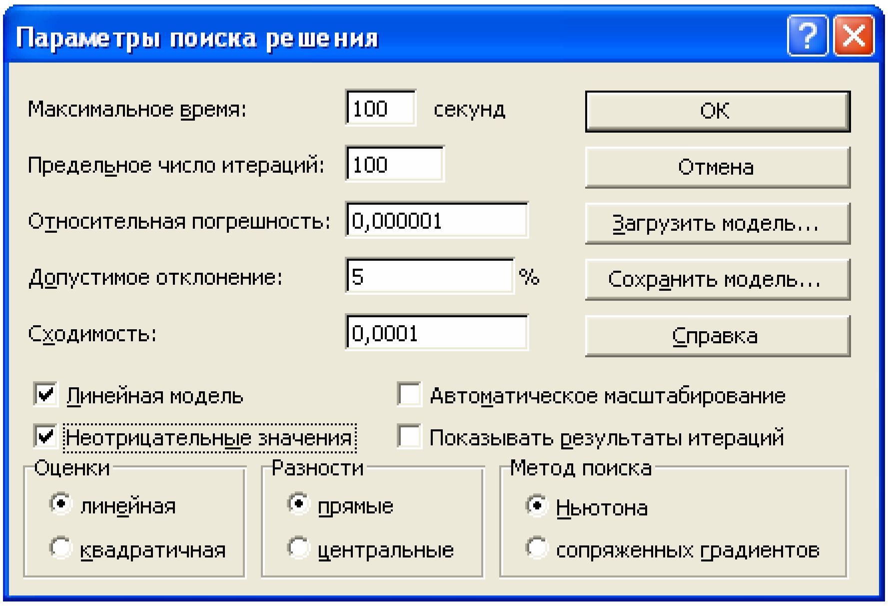


Рис. 4.12. **Установка параметров**

Затем следует нажать «ОК», «Выполнить», после чего появляется окно результата решения (рис. 4.13).

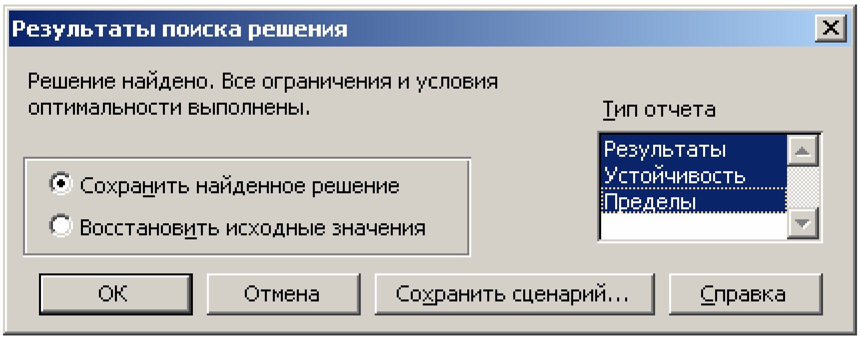


Рис. 4.13. **Окно результата решения**

Если в результате всех действий получено окно с сообщением «Решение найдено», то вам предоставляется возможность получения трех типов отчета, которые полезны при анализе модели на чувствительность. В данном примере достаточно сохранить найденное решение, нажав «ОК». В результате получено решение задачи (рис. 4.14).

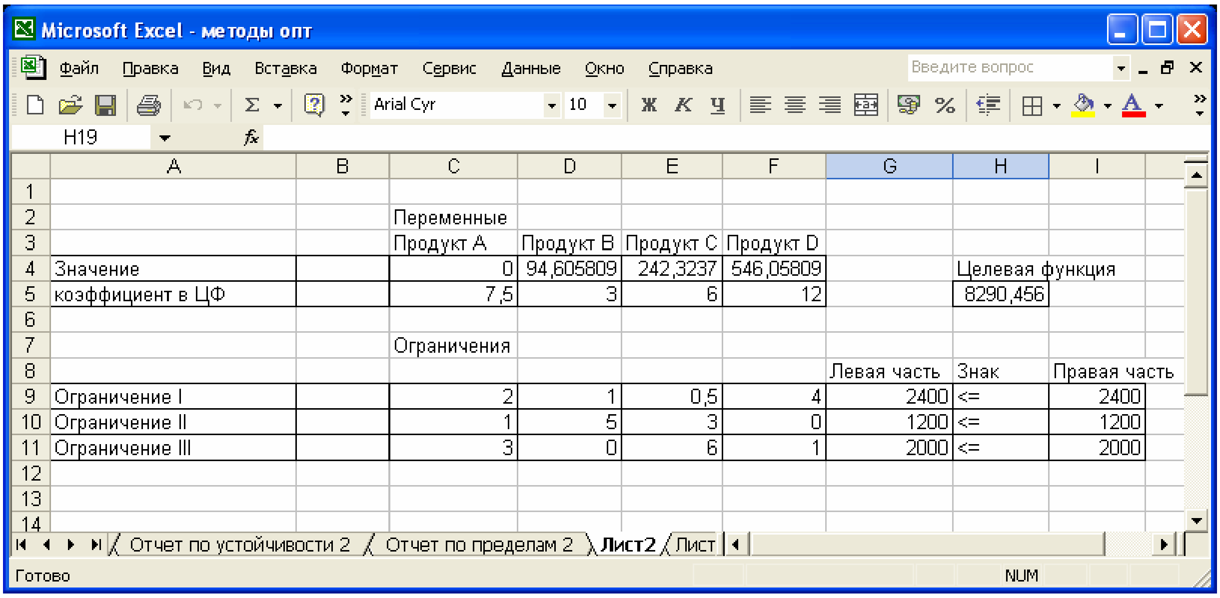


Рис. 4.14. **Результат применения «Поиска решения»**

Если в результате решения задачи выдано окно с сообщением о невозможности нахождения решения (рис. 4.15), это означает, что при оформлении задачи была допущена ошибка (не заполнены формулы для ограничений, неправильно установлен «флажок», максимизации/минимизации и т.д.).

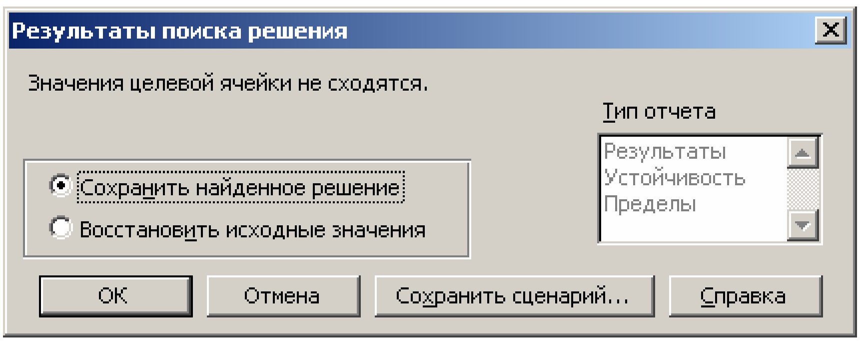


Рис. 4.15. **Сообщение об ошибке**

В окне «Поиск решения» имеется кнопка «Параметры»:

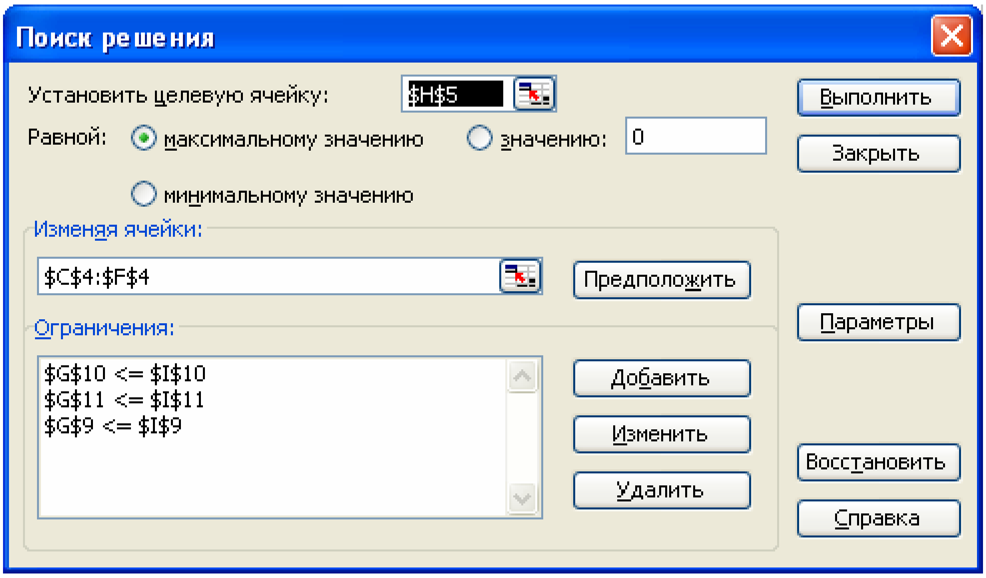


Рис. 4.16

Установим флажок «Показывать результаты итераций», после нажимаем «ОК»:

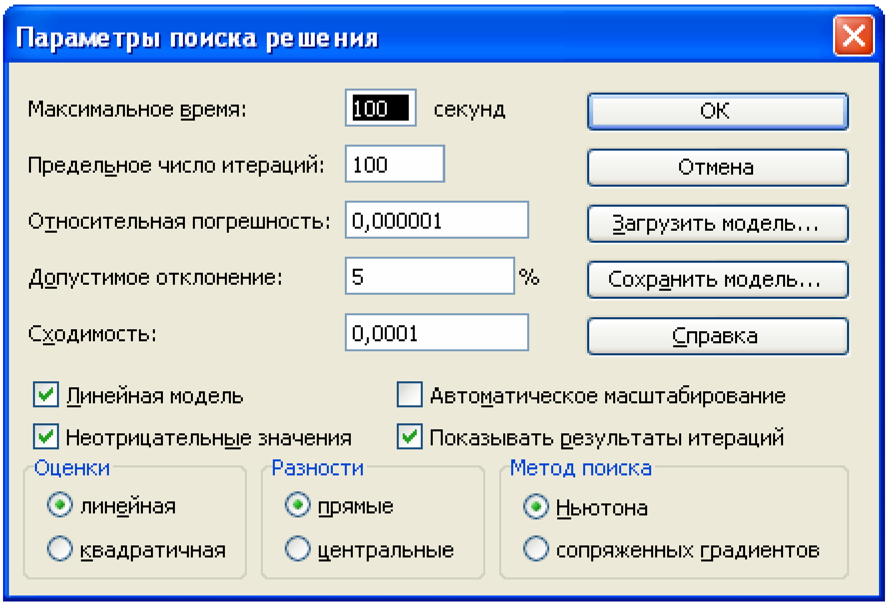


Рис. 4.17

Затем нажать кнопку «Выполнить»:

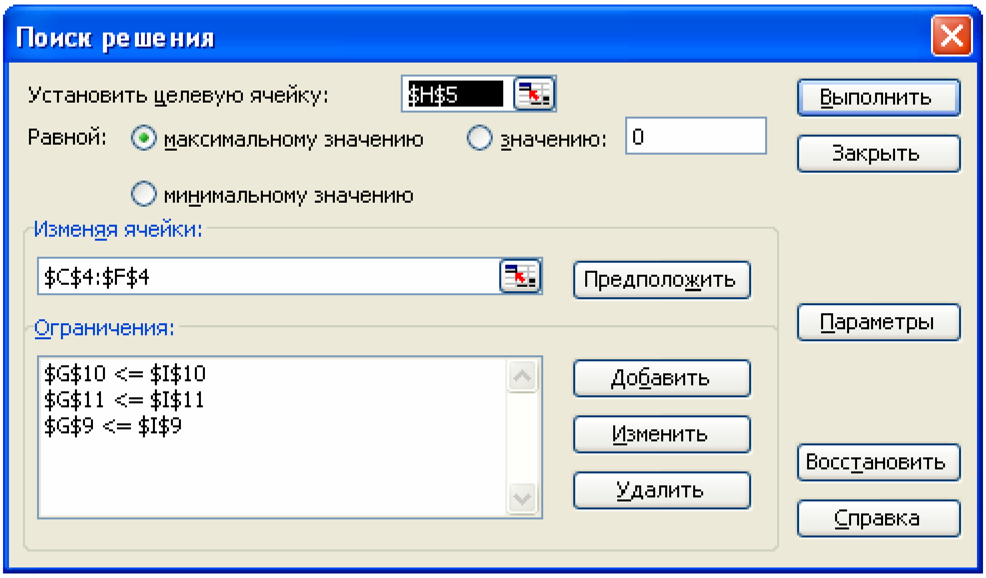


Рис. 4.18

Ms Excel выдаст следующее окно:

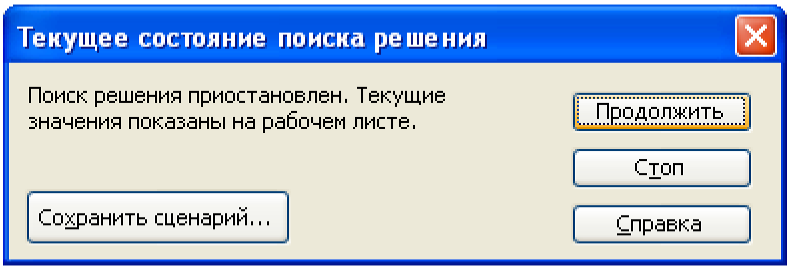


Рис. 4.19

На рабочем листе будут показаны результаты первой итерации:

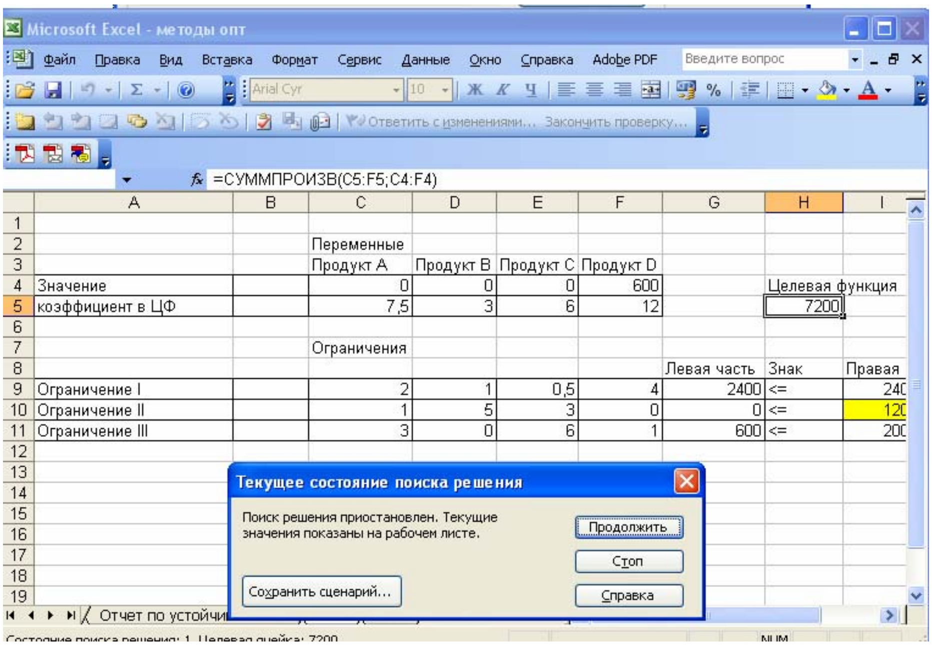


Рис. 4.20

После чего нажимаем кнопку «Продолжить», на рабочем листе отображаются результаты второй итерации:

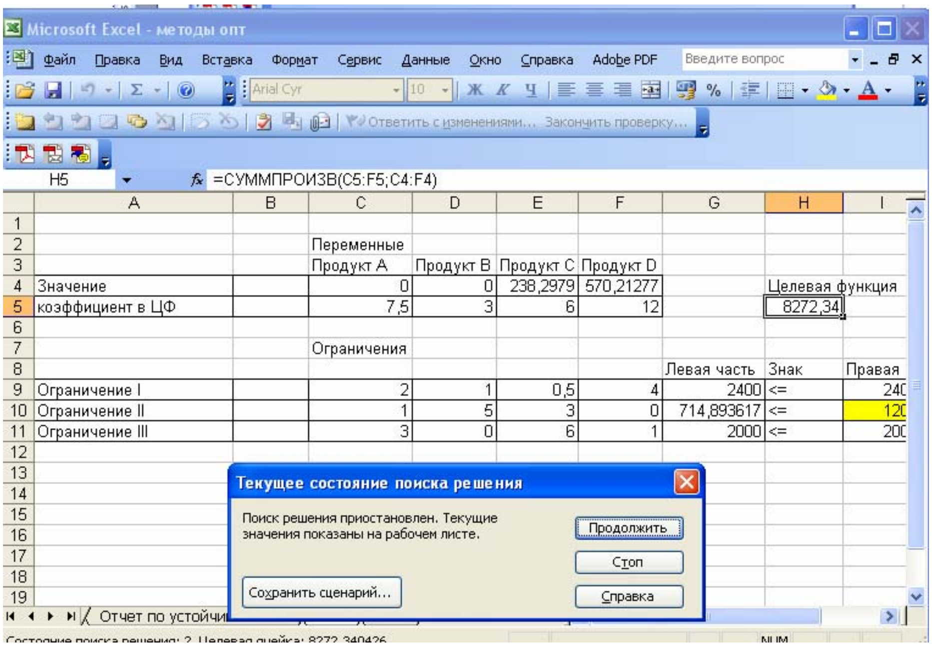


Рис. 4.21

Затем снова нажимаем кнопку «Продолжить», на рабочем листе отображаются результаты третьей итерации:

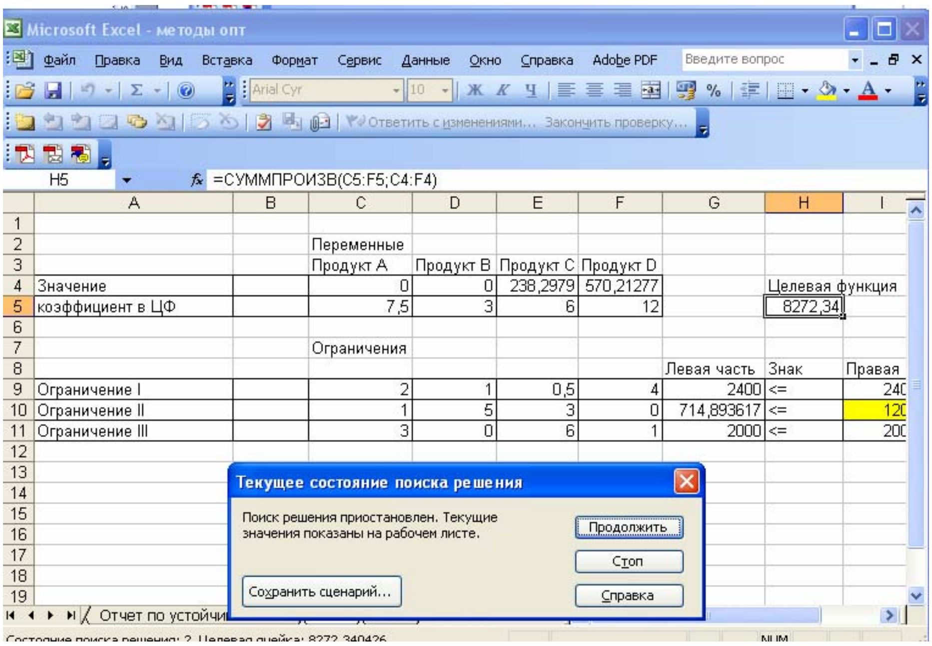


Рис. 4.22

При следующем нажатии кнопки «Продолжить», программа выдает окно «Результаты поиска решения», где необходимо сохранить найденное решение и выбрать тип отчета.

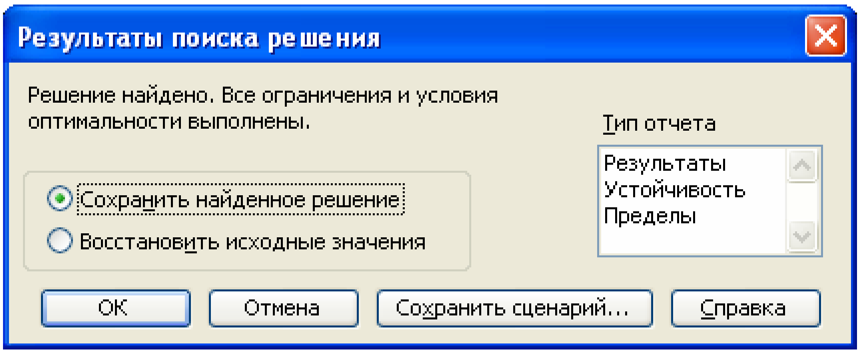
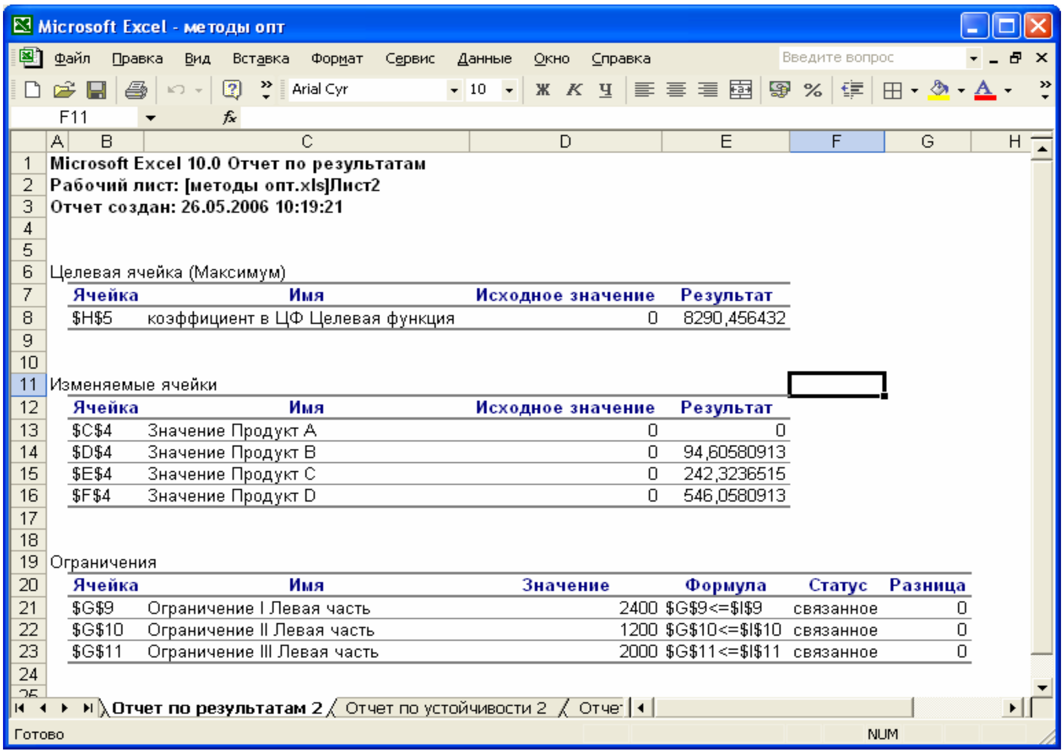


Рис. 4.23

В данном разделе рассмотрен общий формат решения задач оптимизации в Excel. В зависимости от экономических моделей, выполняют его соответствующие модификации.

Отчеты выглядят следующим образом:

1. Отчет по результатам



Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8290,456432

Изменяемые ячейки

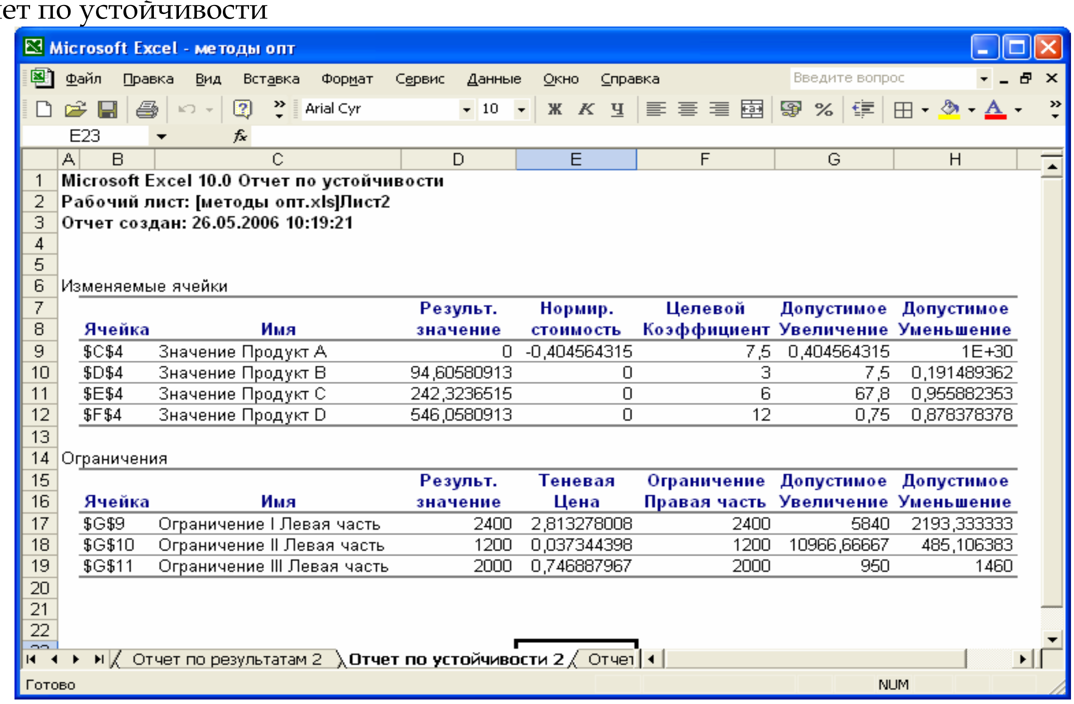
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	94,60580913
$E$4	Значение Продукт C	0	242,3236515
$F$4	Значение Продукт D	0	546,0580913

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	$G$10<=$I$10	связанное	0
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11<=$I$11	связанное	0

Рис. 4.24

2. Отчет по устойчивости



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

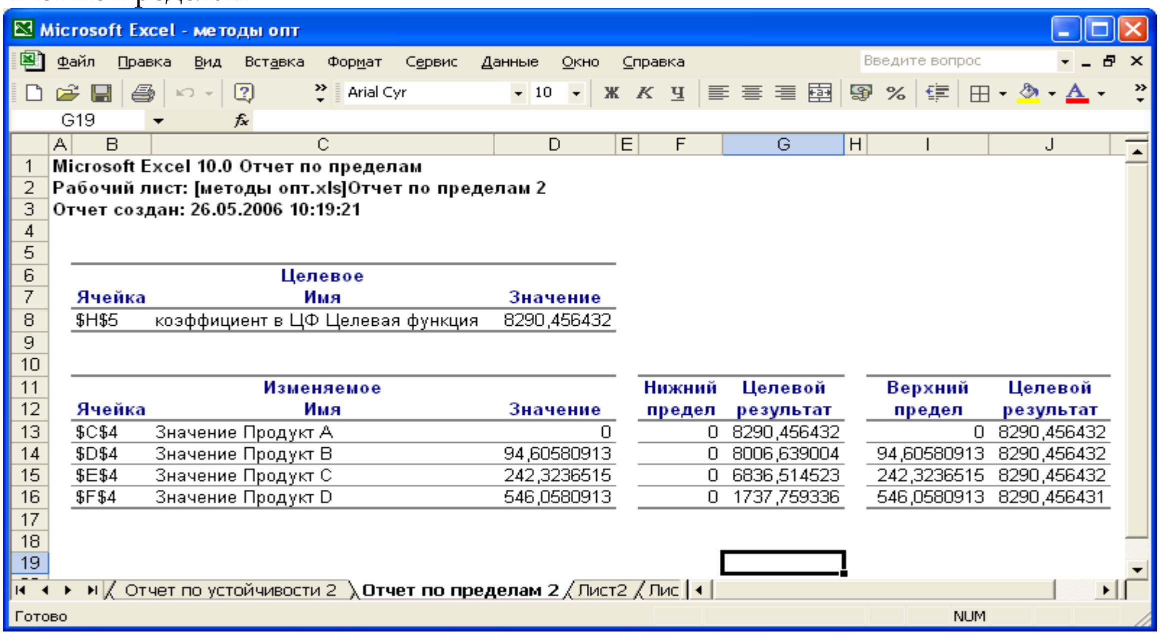
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.25

3. Отчет по пределам



Microsoft Excel 10.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	8290,456432

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0	8290,456432	0	8290,456432
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	8006,639004	94,60580913	8290,456432
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6836,514523	242,3236515	8290,456432
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	1737,759336	546,0580913	8290,456431

Рис. 4.26

Теперь решим задачу, у которой математическая модель имеет тот же вид, но ограничения имеют разные знаки.

а) Допустим, математическая модель имеет следующие ограничения:

max $f(\bar{X}) = 7{,}5X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 12X_4$ (целевая функция)

при

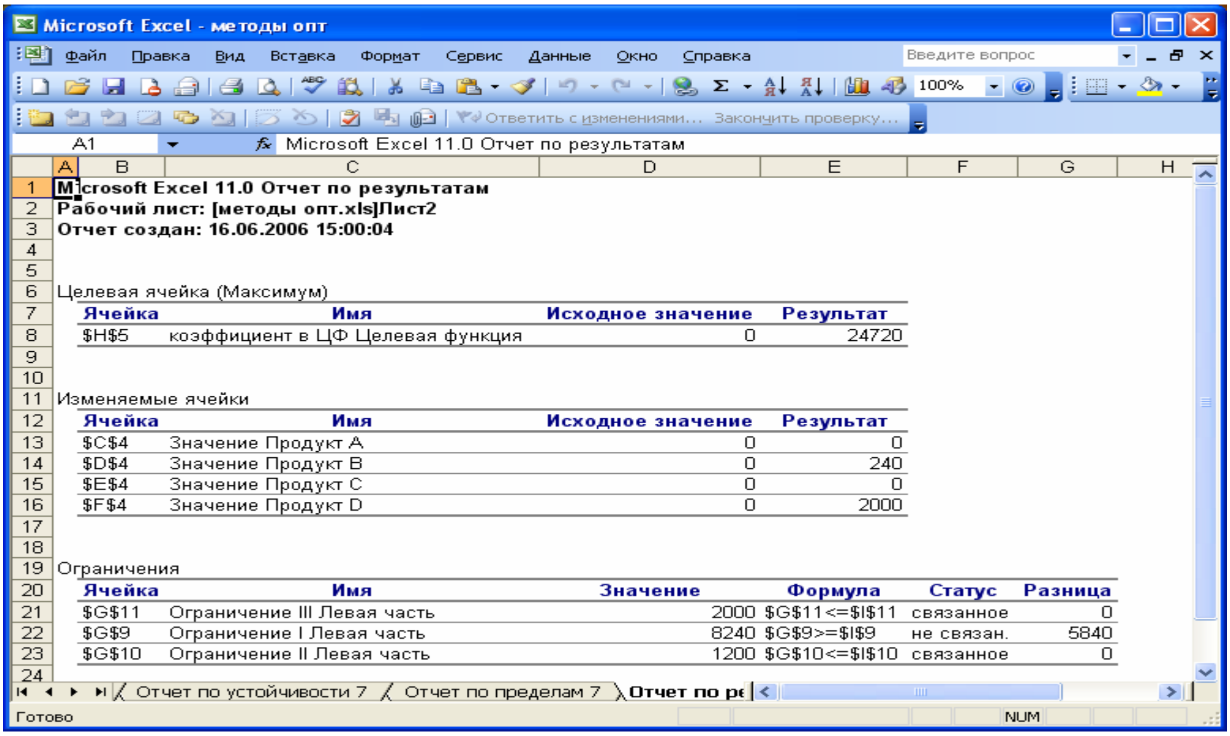
$2X_1 + X_2 + 0{,}5X_3 + 4X_4 \geq 2400$ ограничения

$X_1+5X_2+3X_3 \leq 1200$

$3X_1+6X_3+X_4 \leq 2000$

$X_{1,\,2,\,3,\,4} \geq 0$

В итоге имеем следующие результаты по отчетам:



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 16.06.2006 15:00:04

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	24720

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	240
$E$4	Значение Продукт C	0	0
$F$4	Значение Продукт D	0	2000

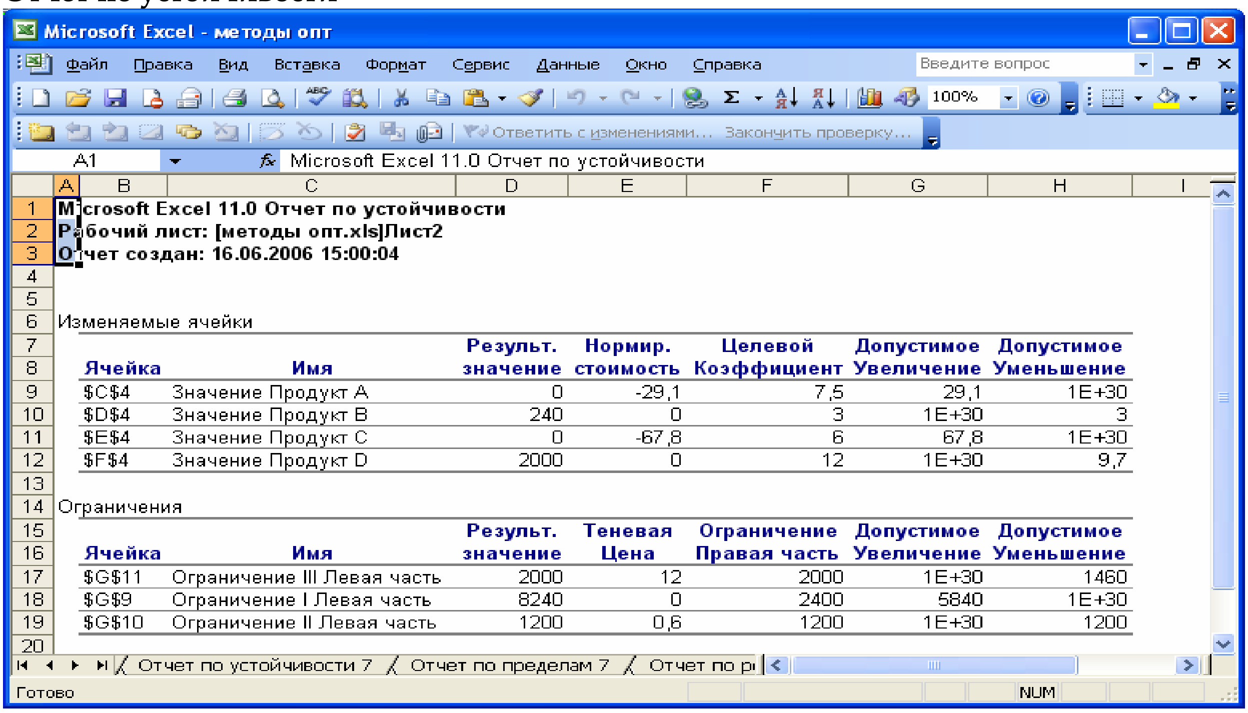
Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11<=$I$11	связанное	0
$G$9	Ограничение I Левая часть	8240	$G$9>=$I$9	не связан.	5840
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	$G$10<=$I$10	связанное	0

Отчет по результатам

Рис. 4.27

Отчет по устойчивости



Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 16.06.2006 15:00:04

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-29,1	7,5	29,1	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	240	0	3	1E+30	3
$E$4	Значение Продукт C	0	-67,8	6	67,8	1E+30
$F$4	Значение Продукт D	2000	0	12	1E+30	9,7

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	12	2000	1E+30	1460
$G$9	Ограничение I Левая часть	8240	0	2400	5840	1E+30
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,6	1200	1E+30	1200

Рис. 4.28

б) Теперь предположим, что математическая модель имеет другие ограничения:

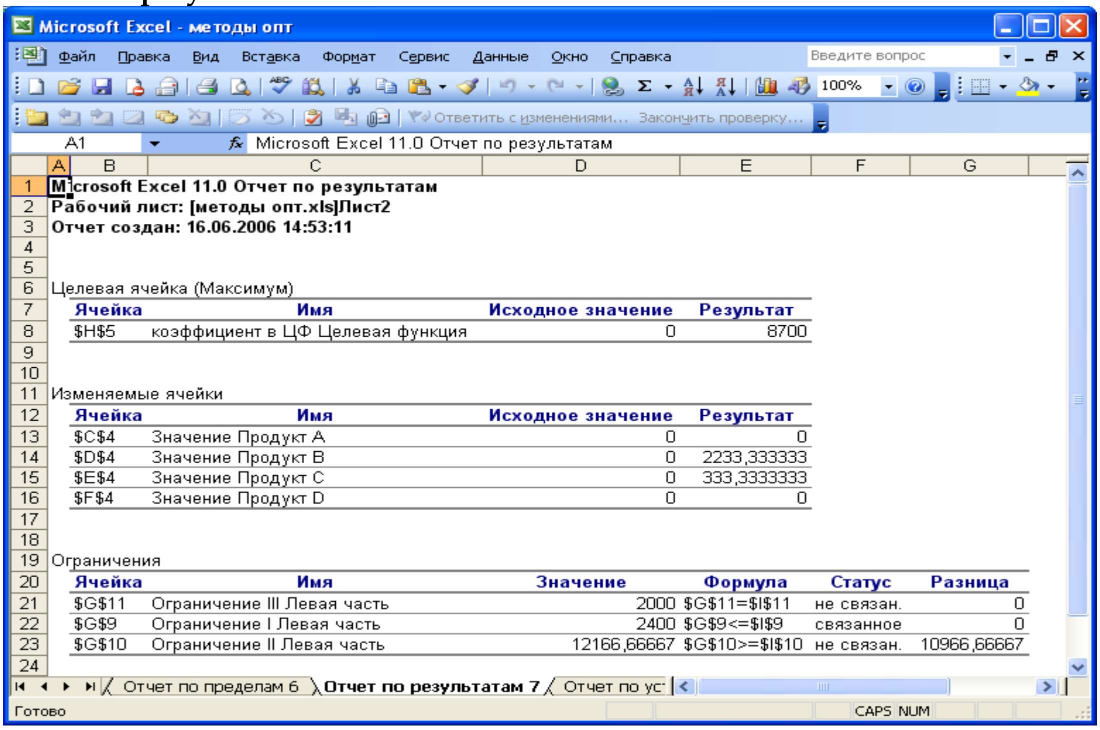
$$\max f(\overline{X}) = 7{,}5X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 12X_4 \text{ (целевая функция)}$$

при

$$2X_1 + X_2 + 0{,}5X_3 + 4X_4 \le 2400 \text{ ограничения}$$
$$X_1 + 5X_2 + 3X_3 \ge 1200$$
$$3X_1 + 6X_3 + X_4 = 2000$$
$$X_{1,\ 2,\ 3,\ 4} \ge 0$$

В итоге имеем следующие результаты по отчетам:

Отчет по результатам



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 16.06.2006 14:53:11

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8700

Изменяемые ячейки

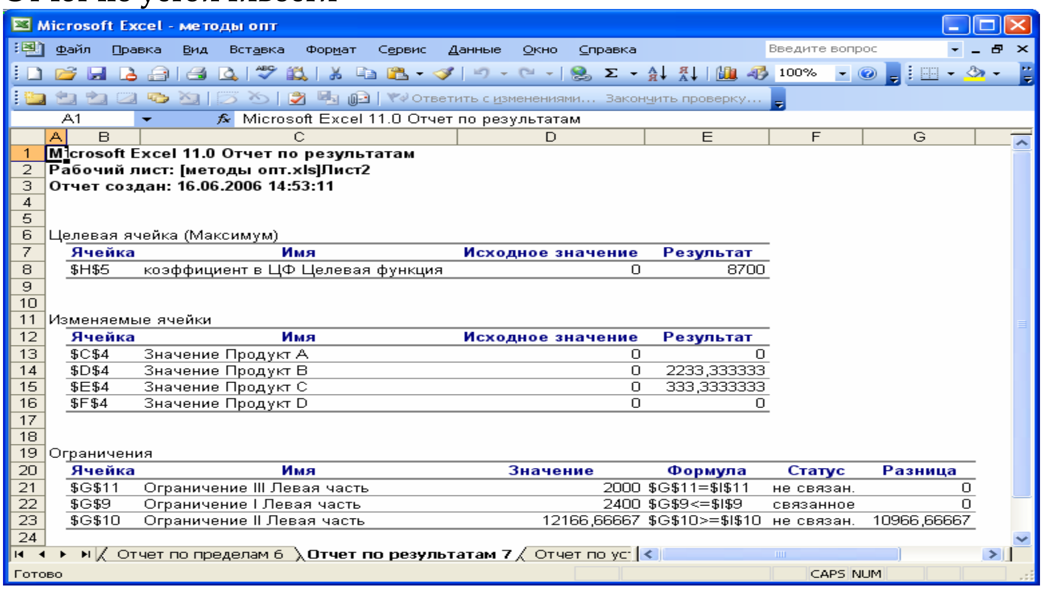
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	2233,333333
$E$4	Значение Продукт C	0	333,3333333
$F$4	Значение Продукт D	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11=$I$11	не связан.	0
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	12166,66667	$G$10>=$I$10	не связан.	10966,66667

Рис. 4.29

Отчет по устойчивости



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 16.06.2006 14:53:11

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8700

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	2233,333333
$E$4	Значение Продукт C	0	333,3333333
$F$4	Значение Продукт D	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11=$I$11	не связан.	0
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	12166,66667	$G$10>=$I$10	не связан.	10966,66667

Рис. 4.30

4.4. Анализ решения ЗЛП на основе отчетов MS EXCEL

Для изготовления четырех видов продукции (A, B, C, D) используют три вида сырья. Заданы ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции. Определить план выпуска продукции из условия максимизации его стоимости.

Решить с помощью MS EXCEL следующие задачи:

1. Найти решения исходной задачи и двойственной задачи.

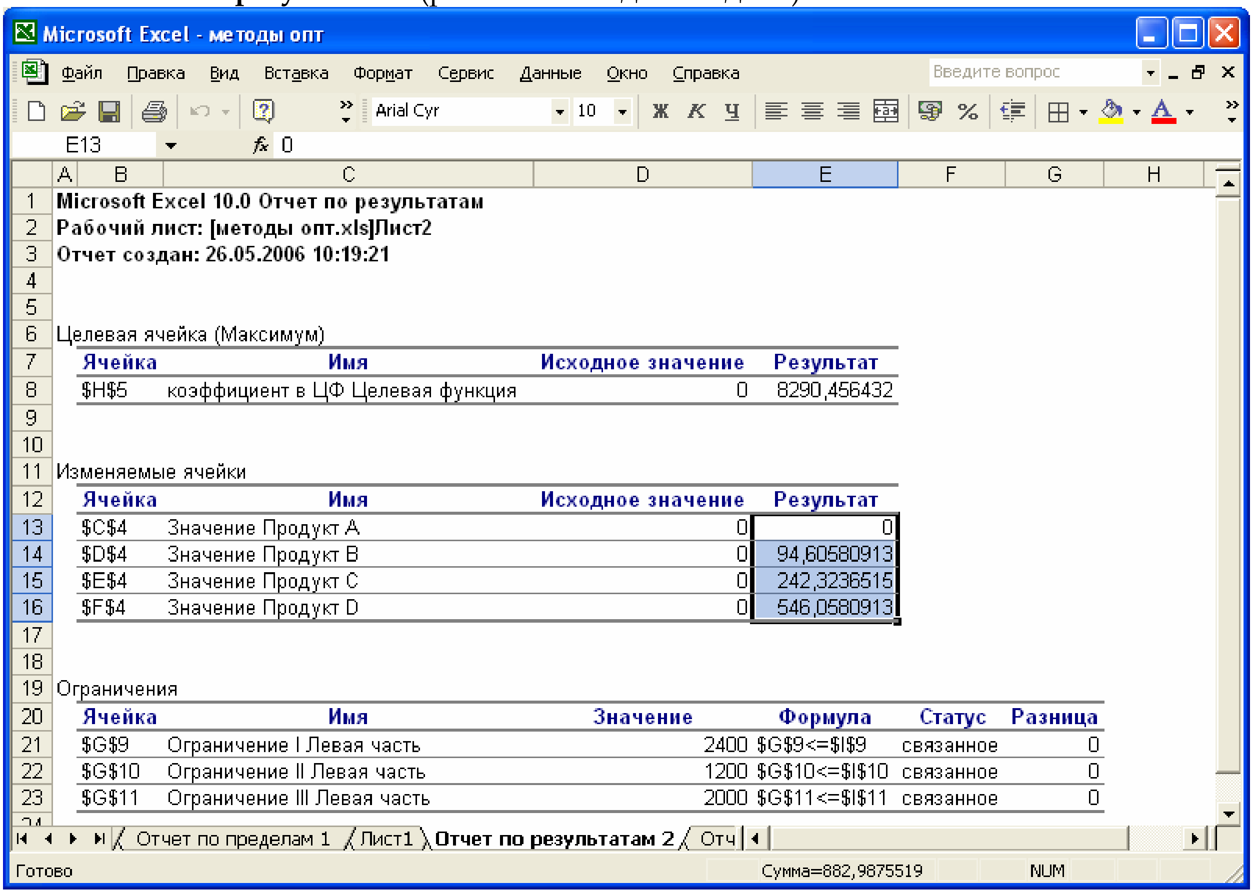
Двойственная задача имеет вид:

$$\max g(\overline{X}) = 2400Y_1 + 1200Y_2 + 2000Y_3$$

при

$$\left.\begin{array}{l} 2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \geq 7{,}5 \\ Y_1 + 5Y_2 \geq 3 \\ 0{,}5Y_1 + 3Y_2 + 6Y_3 \geq 6 \\ 4Y_1 + Y_3 \geq 12 \\ Y_{1,2,3,4} \geq 0 \end{array}\right\} \text{ограничения}$$

Отчет по результатам (решение исходной задачи):



Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8290,456432

Изменяемые ячейки

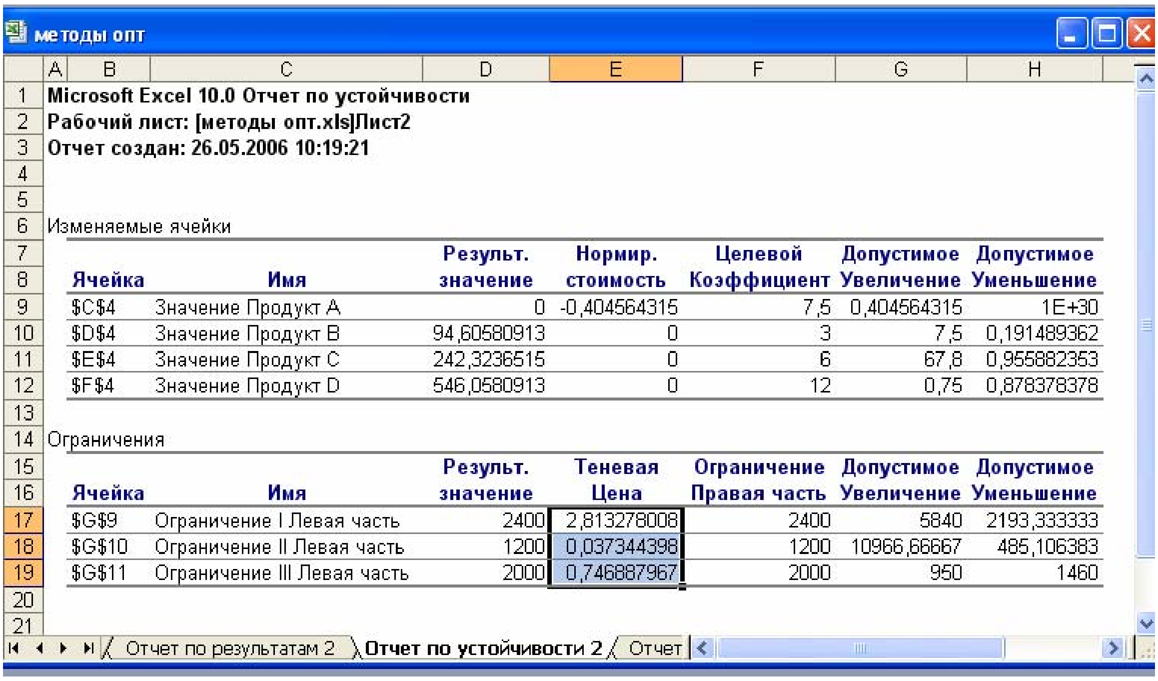
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	94,60580913
$E$4	Значение Продукт C	0	242,3236515
$F$4	Значение Продукт D	0	546,0580913

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	$G$10<=$I$10	связанное	0
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11<=$I$11	связанное	0

Рис. 4.31

Отчет по устойчивости (решение двойственной задачи):



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

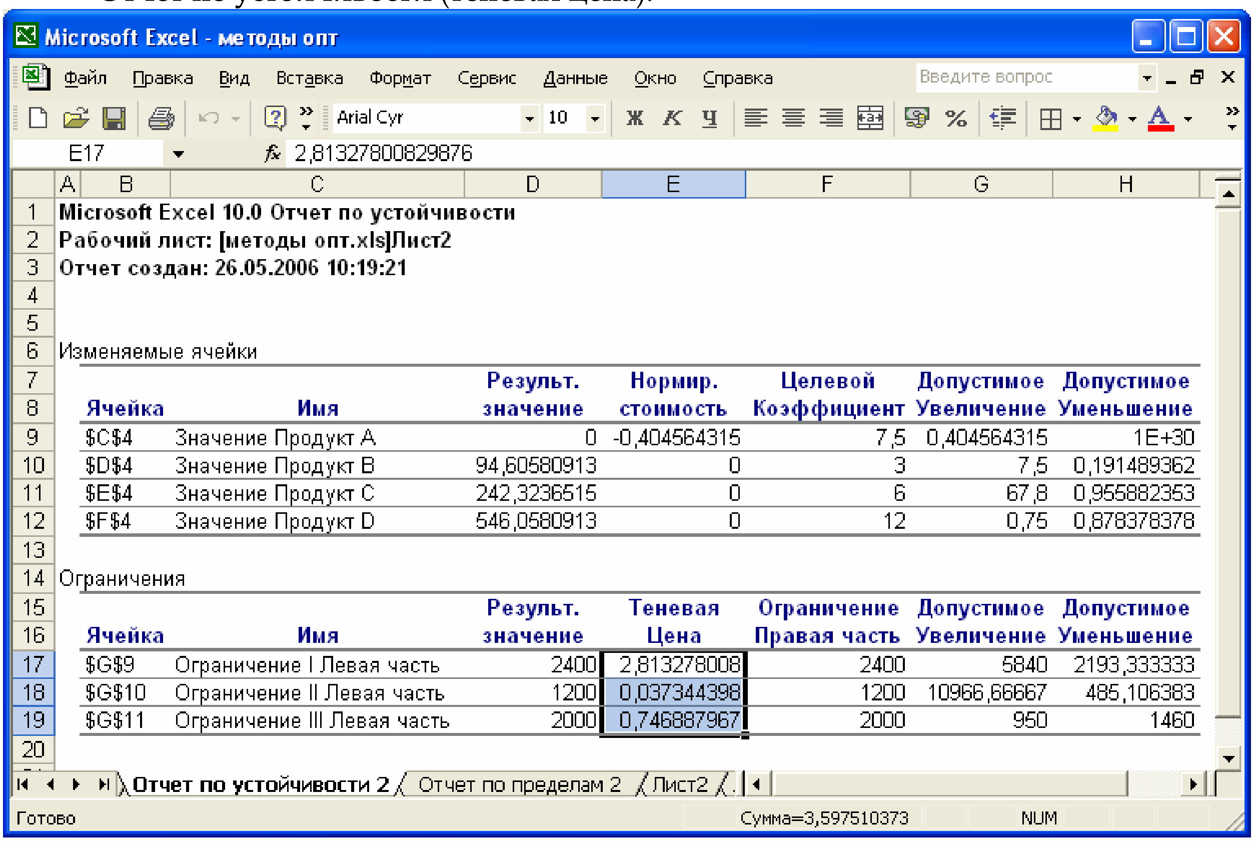
Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.32

2. Определить статус, ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

Отчет по устойчивости (теневая цена):



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

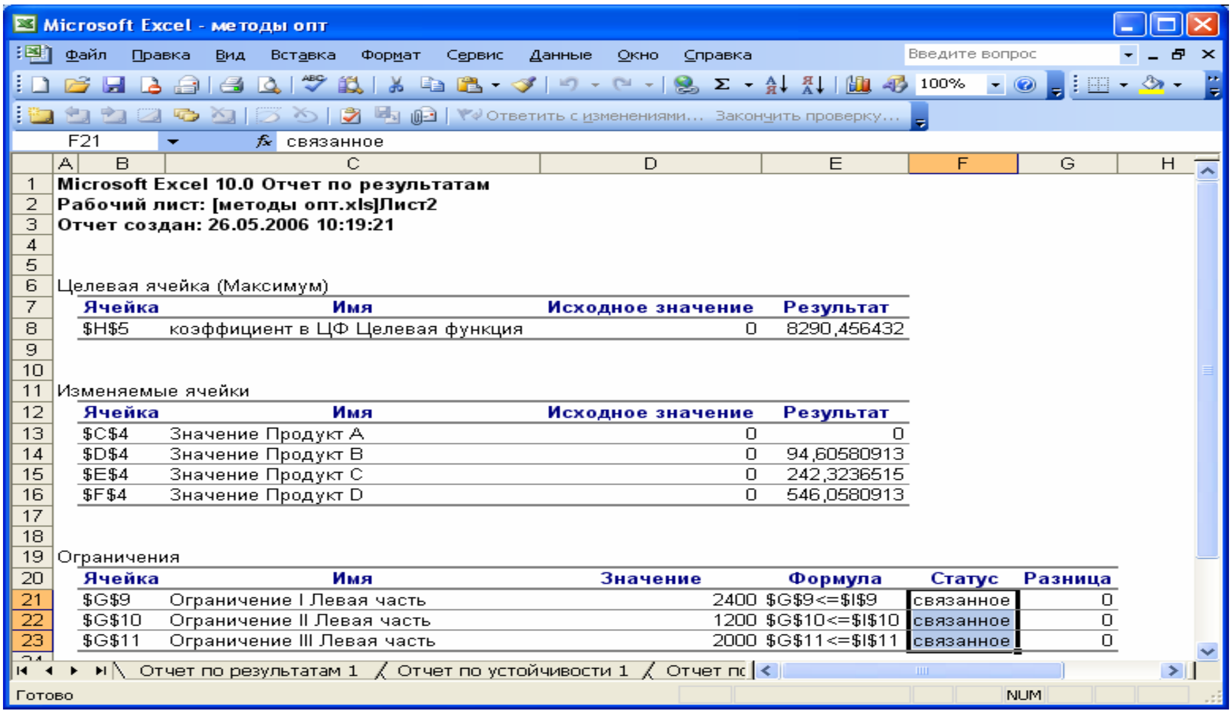
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.33

Отчет по результатам (статус):



Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8290,456432

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	94,60580913
$E$4	Значение Продукт C	0	242,3236515
$F$4	Значение Продукт D	0	546,0580913

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	$G$10<=$I$10	связанное	0
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11<=$I$11	связанное	0

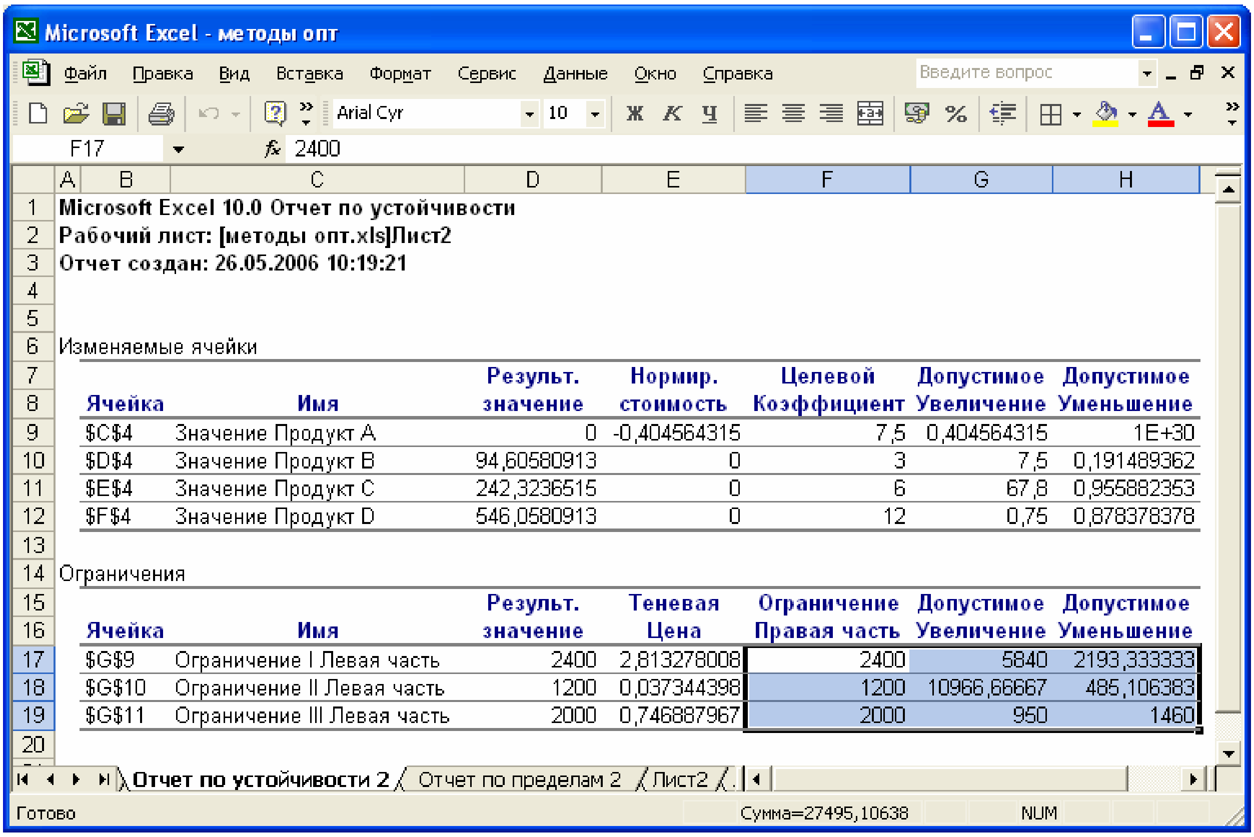
Рис. 4.34

Так как все ограничения являются связанными, то это говорит о том, что все ресурсы были использованы. Другими словами, все ресурсы являются дефицитными. Поэтому любое снижение запаса ресурса будет приводить к уменьшению прибыли, например, если уменьшить запас первого ресурса на единицу, то прибыль уменьшится на величину Y1 = 2,813 (из отчета по устойчивости).

Теневая цена в отчетах Excel представляет собой двойственные переменные. Они показывают, как изменится целевая функция при изменении запаса ресурса на единицу. Если теневая цена равна нулю, то ресурс находится в избытке и его запас можно уменьшить. Если теневая цена положительна, то ресурс является дефицитным (связанным). Чем больше теневая цена, тем ресурс приоритетней и тем больше его вклад в образование прибыли.

3. Определить максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального плана, то есть номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменения.

Отчет по устойчивости:



Microsoft Excel - методы опт

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.35

Максимальный интервал изменения запасов:

$2400 - 2193{,}33 \le \bar{b}_1 \le 2400 + 5840$

$1200 - 485{,}106 \le \bar{b}_2 \le 1200 + 10966{,}66$

$2000 - 1460 \le \bar{b}_3 \le 2000 + 950$

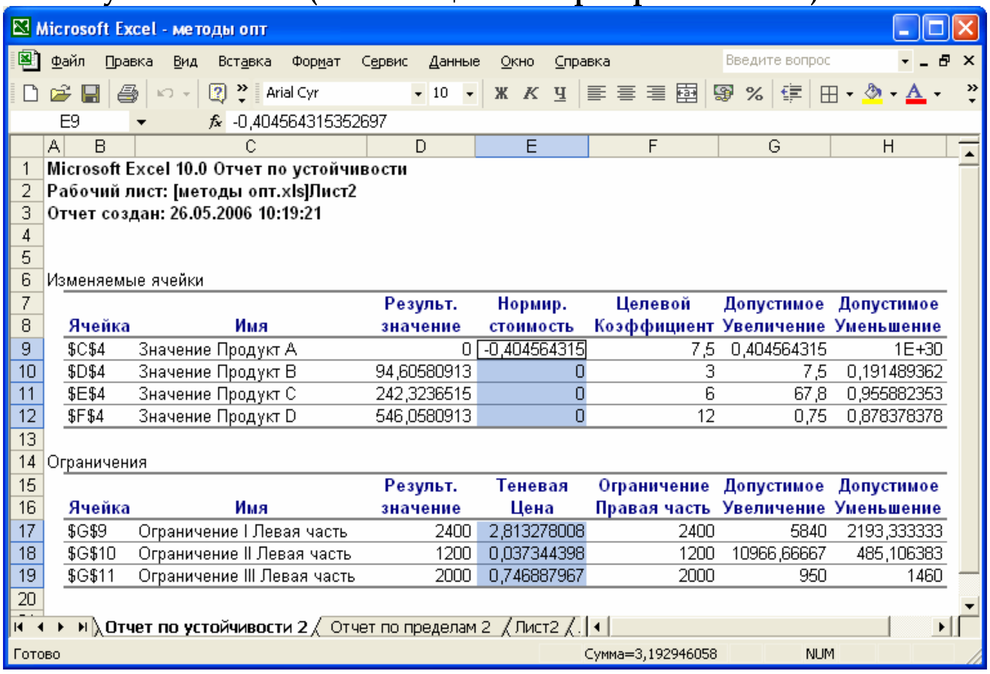
$206{,}67 \le \bar{b}_1 \le 8240$

$714{,}894 \le \bar{b}_2 \le 12166{,}66$

$540 \le \bar{b}_3 \le 2950$

4. Определить суммарную стоимостную оценку ресурсов (себестоимость), используемых при производстве единицы каждого изделия. Производство какой продукции нерентабельно?

Отчет по устойчивости (теневая цена и нормир. стоимость):



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.36

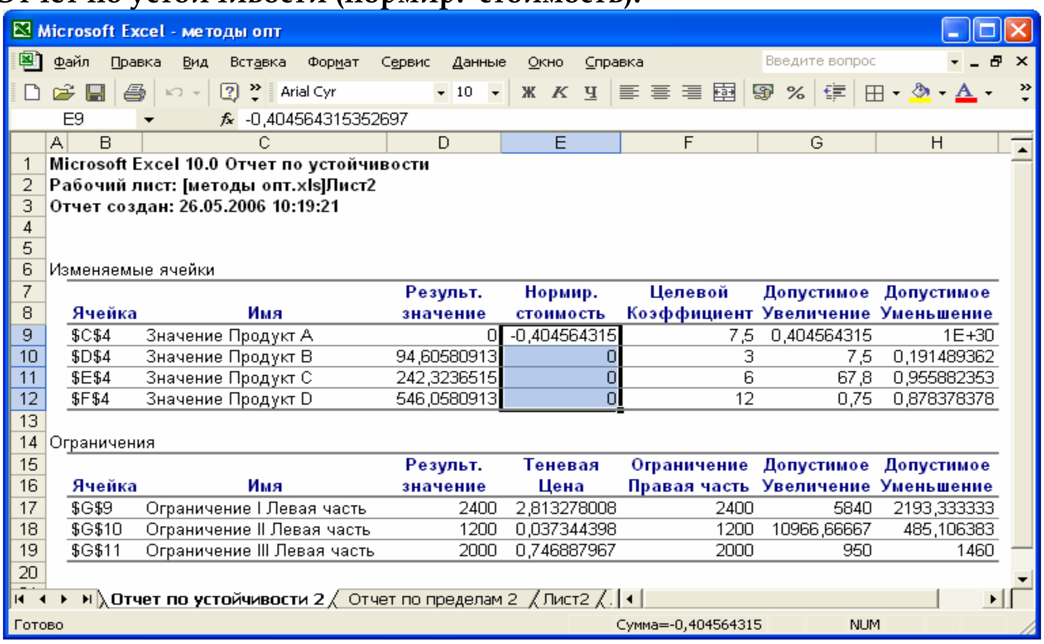
Y1 = 2,813, Y2 = 0,037 Y3 = 0,747 (двойственная задача)

Себестоимость продукта А равна: 2 × 2,813 + 1 × 0,037 + 3 × 0,747 = 7,904564315352, она больше цены (7,5) на 0,404564315352, что равно нормированной стоимости из отчета по устойчивости (с точностью до знака). Поэтому производство продукта А является нерентабельным.

Если нормированная стоимость равна нулю, то выпуск данного продукта является рентабельным; если >0, то нерентабельным.

5. На сколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

Отчет по устойчивости (нормир. стоимость):



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.37

Величина нормированной стоимости (по модулю) представляет собой значение соответствующей дополнительной двойственной переменной, которая показывает, на сколько уменьшится целевая функция при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции.

В нашем примере нормированная стоимость по продукту А не равна нулю. Следовательно, если мы будем принудительно выпускать единицу продукта А, то целевая функция уменьшится на 0,404564315352.

6. На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

Отчет по результатам (статус):

Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8290,456432

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	94,60580913
$E$4	Значение Продукт C	0	242,3236515
$F$4	Значение Продукт D	0	546,0580913

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	$G$10<=$I$10	связанное	0
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11<=$I$11	связанное	0

Рис. 4.38

Снизить можно только запас недефицитного ресурса (несвязанное ограничение).

Так как все ограничения являются связанными, то это говорит о том, что все ресурсы были использованы. Другими словами, все ресурсы являются дефицитными. Поэтому любое снижение запаса ресурса будет приводить к уменьшению прибыли, например, если уменьшить запас первого ресурса на единицу, то прибыль уменьшится на величину Y1 = 2,813.

Также ответ на этот вопрос может содержаться в отчете по устойчивости. Если теневая цена равна нулю, то ресурс находится в избытке и его запас можно уменьшить. Если теневая цена положительна, то ресурс является дефицитным (связанным).

Запас каждого из ресурсов можно снизить на величину, указанную в столбце «разница» отчета по результатам.

7. Определить изменение стоимости продукции и количество выпускаемых изделий при увеличении второго вида сырья на Z единиц.

а) изменение стоимости продукции

Для ответа рассмотрим целевую функцию двойственной задачи с измененным количеством второго вида сырья:

$$g\,(y_1{}^*) = 2400\,\bar{y}_1{}^* + (1200 + 100)\ \bar{y}_2{}^* + 2000\ \bar{y}_3{}^* = g\,(\bar{y}\ {}^*) + 100\,\bar{y}_2{}^* =$$

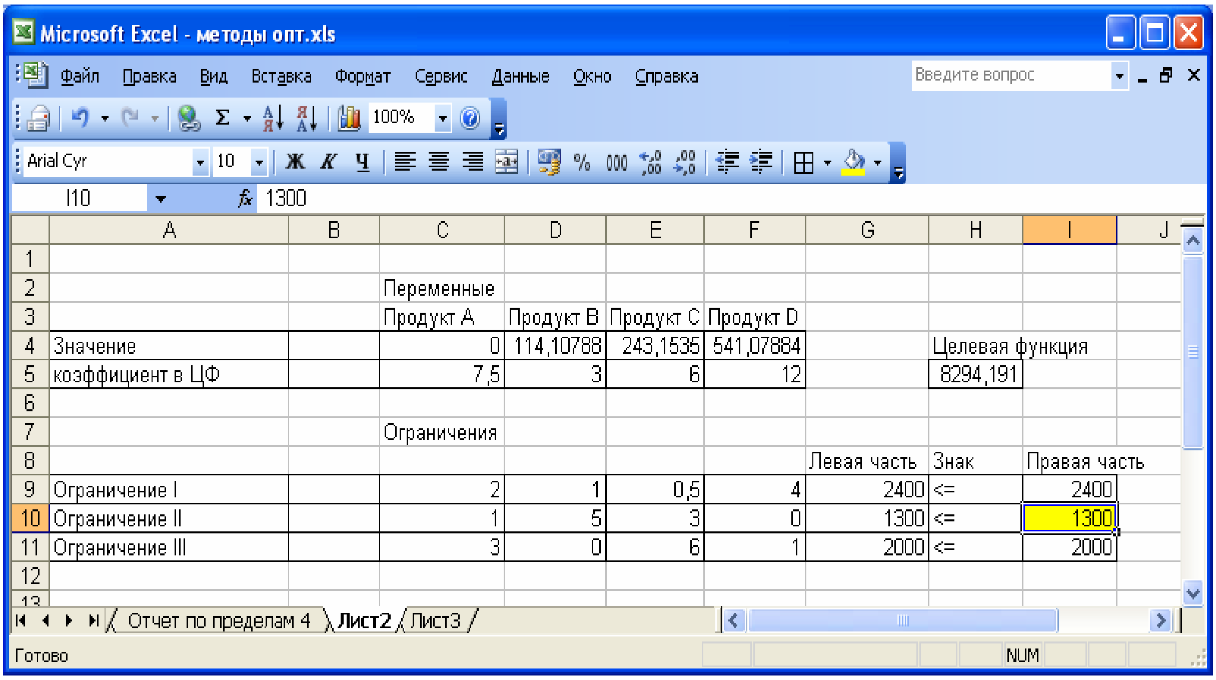
$$= g\,(\bar{y}\ {}^*) + 0{,}037344 \times 100 = 8290{,}456 + 3{,}7344 = 8294{,}19087.$$

б) изменение количества выпускаемых изделий

Для ответа на этот вопрос необходимо внести изменения в исходную таблицу:
– при решении задачи Симплекс-методом («вручную»):

$$X_1^* = B^{-1}\,b = \begin{pmatrix} 0{,}248963 & -0{,}04979 & 0{,}004149 \\ 0{,}024896 & 0{,}195021 & -0{,}09959 \\ -0{,}04149 & 0{,}008299 & 0{,}165975 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2400 \\ 1300 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 541{,}0788382 \\ 114{,}1078838 \\ 243{,}153527 \end{pmatrix};$$

– при решении задачи в Ms Excel необходимо внести изменения в исходную таблицу:

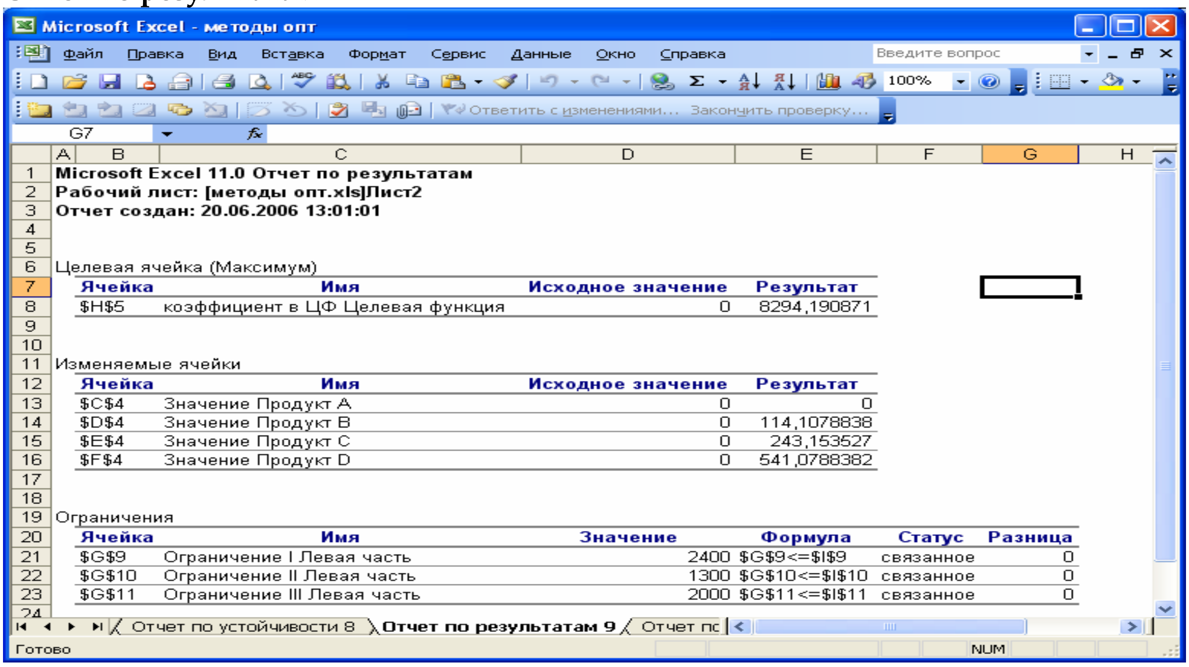


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2			Переменные						
3			Продукт A	Продукт B	Продукт C	Продукт D			
4	Значение		0	114,10788	243,1535	541,07884		Целевая функция	
5	коэффициент в ЦФ		7,5	3	6	12		8294,191	
7			Ограничения						
8							Левая часть	Знак	Правая часть
9	Ограничение I		2	1	0,5	4	2400	<=	2400
10	Ограничение II		1	5	3	0	1300	<=	1300
11	Ограничение III		3	0	6	1	2000	<=	2000

Рис. 4.41

В итоге получим следующие результаты:

Отчет по результатам



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 20.06.2006 13:01:01

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	8294,190871

Изменяемые ячейки

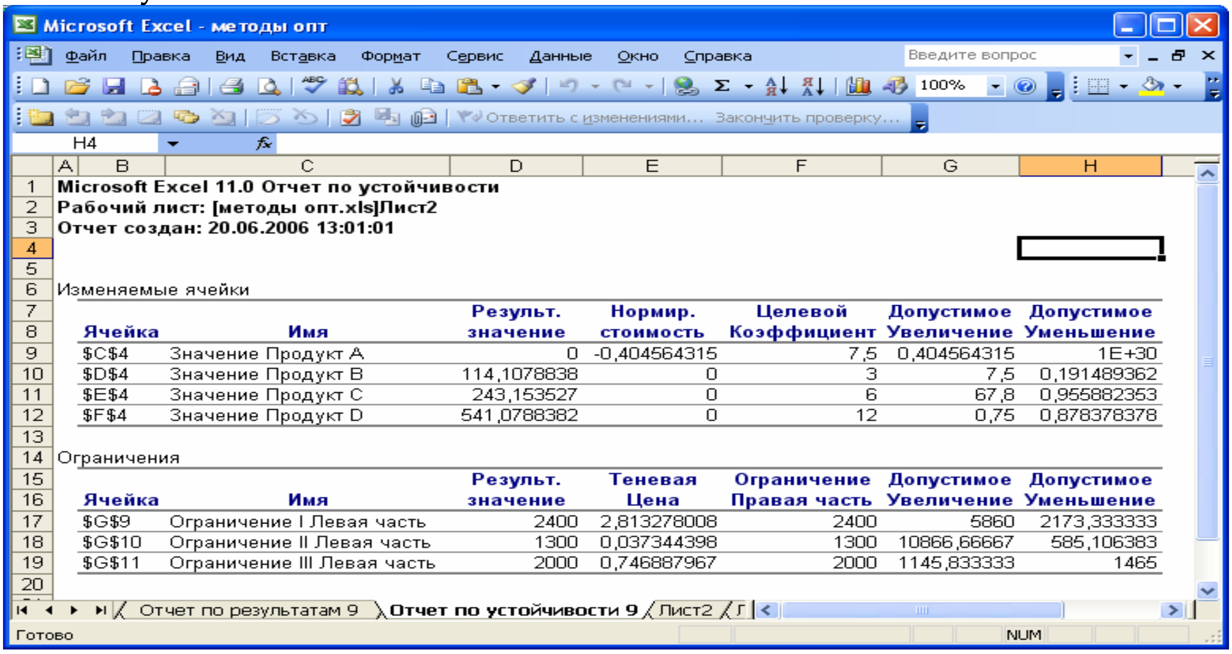
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	114,1078838
$E$4	Значение Продукт C	0	243,153527
$F$4	Значение Продукт D	0	541,0788382

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	1300	$G$10<=$I$10	связанное	0
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	$G$11<=$I$11	связанное	0

Рис. 4.42

Отчет по устойчивости



Microsoft Excel - методы опт

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 20.06.2006 13:01:01

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	114,1078838	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	243,153527	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	541,0788382	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5860	2173,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1300	0,037344398	1300	10866,66667	585,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	1145,833333	1465

Отчет по результатам 9 | Отчет по устойчивости 9 | Лист2

Готово NUM

Рис. 4.43

8. Определить оптимальное решение задачи для случая, когда вектор ресурсов задан в виде $\overline{в}$*–строки*.

а) случай, при котором b находится в допустимом интервале

Максимальный интервал изменения запасов:

$206{,}67 \le \overline{b_1} \le 8240$

$714{,}894 \le \overline{b_2} \le 12166{,}66$

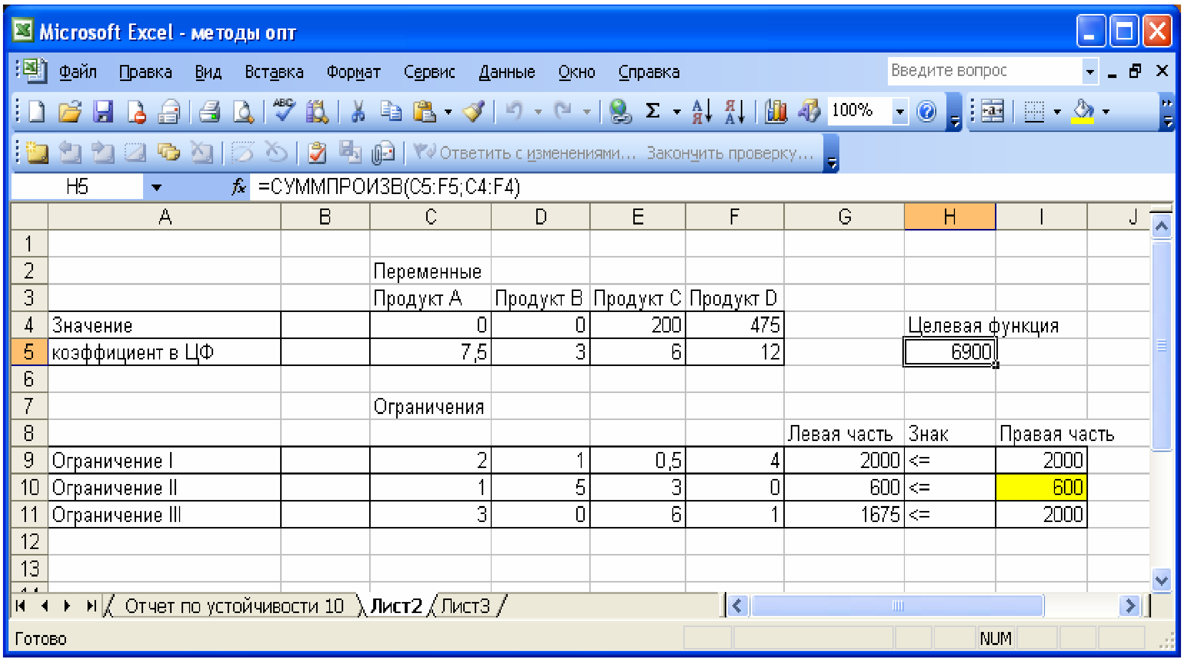
$540 \le \overline{b_3} \le 2950$

$\Delta f = \Delta b_1 y_1 * + \Delta b_2 y * + \Delta b_3 y *$

Допустим, $\overline{в} = (2000, 1500, 2000)$, тогда

$\Delta f = (2000 - 2400) y_1 * + (1500 - 1200) y_2 * + (2000 - 2000) y_3 * = -400 y_1 + 300 y_2 + 0 \cdot y_3 *$

б) случай, при котором не входит в допустимый интервал. В этом случае пользоваться вышеприведенной формулой нельзя. Допустим, $\overline{в} = (2000, 600, 2000)$, тогда, внеся изменения в таблицу, получим:

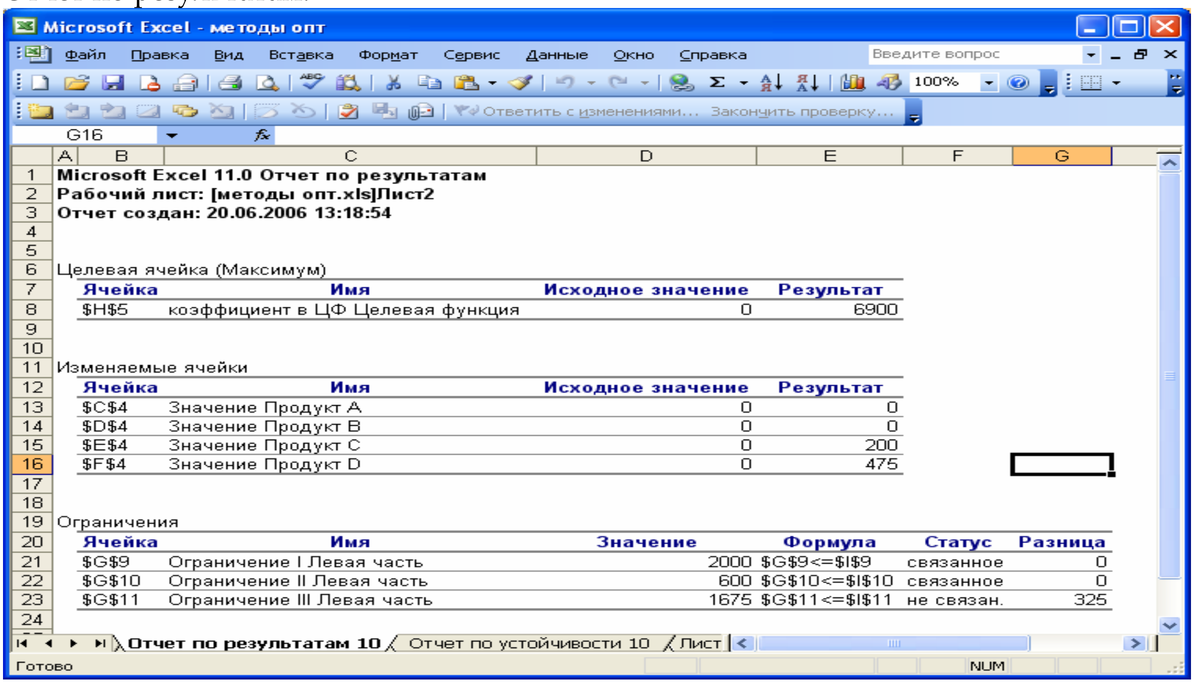


H5 =СУММПРОИЗВ(C5:F5;C4:F4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Переменные						
3			Продукт A	Продукт B	Продукт C	Продукт D			
4	Значение		0	0	200	475		Целевая функция	
5	коэффициент в ЦФ		7,5	3	6	12		6900	
6									
7			Ограничения						
8							Левая часть	Знак	Правая часть
9	Ограничение I		2	1	0,5	4	2000	<=	2000
10	Ограничение II		1	5	3	0	600	<=	600
11	Ограничение III		3	0	6	1	1675	<=	2000

Рис. 4.42

Отчет по результатам:



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 20.06.2006 13:18:54

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$H$5	коэффициент в ЦФ Целевая функция	0	6900

Изменяемые ячейки

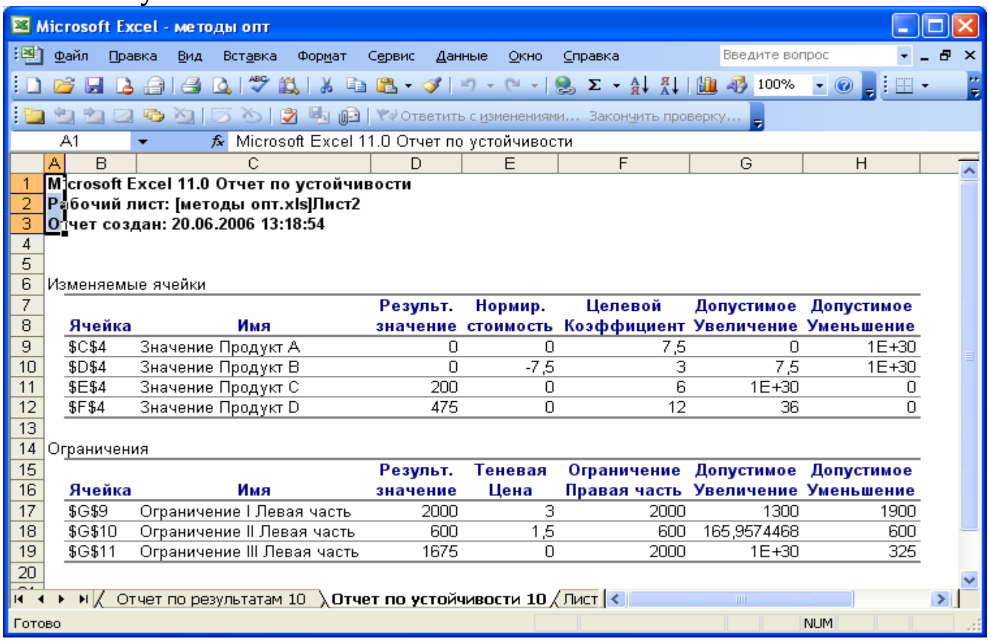
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$4	Значение Продукт A	0	0
$D$4	Значение Продукт B	0	0
$E$4	Значение Продукт C	0	200
$F$4	Значение Продукт D	0	475

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$9	Ограничение I Левая часть	2000	$G$9<=$I$9	связанное	0
$G$10	Ограничение II Левая часть	600	$G$10<=$I$10	связанное	0
$G$11	Ограничение III Левая часть	1675	$G$11<=$I$11	не связан.	325

Рис. 4.43

Отчет по устойчивости:



Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 20.06.2006 13:18:54

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	0	7,5	0	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	0	-7,5	3	7,5	1E+30
$E$4	Значение Продукт C	200	0	6	1E+30	0
$F$4	Значение Продукт D	475	0	12	36	0

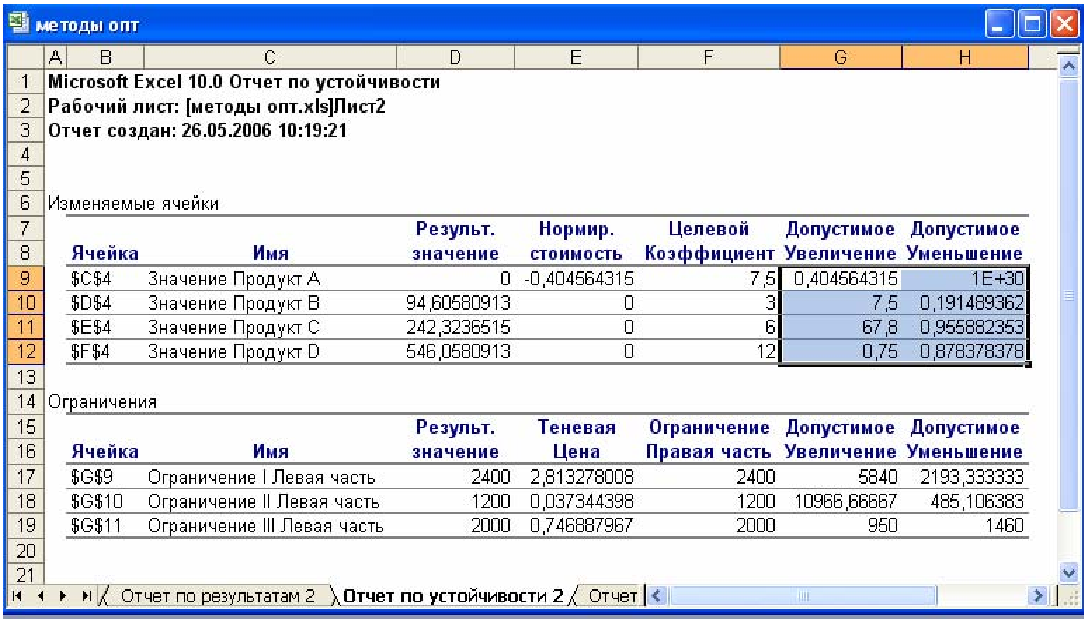
Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2000	3	2000	1300	1900
$G$10	Ограничение II Левая часть	600	1,5	600	165,9574468	600
$G$11	Ограничение III Левая часть	1675	0	2000	1E+30	325

Рис. 4.44

9. Определить интервалы изменения цен на каждую продукцию, при которых сохраняется оптимальный план.

Отчет по устойчивости:



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Рис. 4.45

$0 \le c_1 \le 0{,}405$
$0{,}191 \le c_2 \le 7{,}5$
$0{,}956 \le c_3 \le 67{,}8$
$0{,}878 \le c_4 \le 0{,}75$

Поскольку продукт А не производится, то уменьшение его цены не скажется на решении (продукт А по-прежнему не будет выпускаться), а если цена превысит величину 7,905, то продукт А станет рентабельным.

10. На сколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

В нашем случае нерентабельным (неприбыльным) является выпуск продукта А.

Ограничение по двойственной задаче по первому ресурсу имеет вид:

$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \geq 7{,}5$.

Отчет по устойчивости:

методы опт

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт А	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт В	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт С	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Отчет по результатам 2 | Отчет по устойчивости 2 | Отчет

Рис. 4.46

Продукт А станет рентабельным, если его цена возрастет с 7,5 до 7,905.

Продукт А можно сделать рентабельным, снизив его себестоимость, что можно сделать, снизив затраты сырья на единицу продукции.

Ограничение по двойственной задаче по первому ресурсу имеет вид:

$2Y1 + Y2 + 3Y3 \geq 7{,}5$.

С учетом этого уравнение рентабельности имеет вид:

$(2 - \Delta 1)\cdot 2{,}813 + (1 - \Delta 2)\cdot 0{,}037 + (3 - \Delta 3)\cdot 0{,}747 = 7{,}5$.

В данном случае существует большое количество решений.

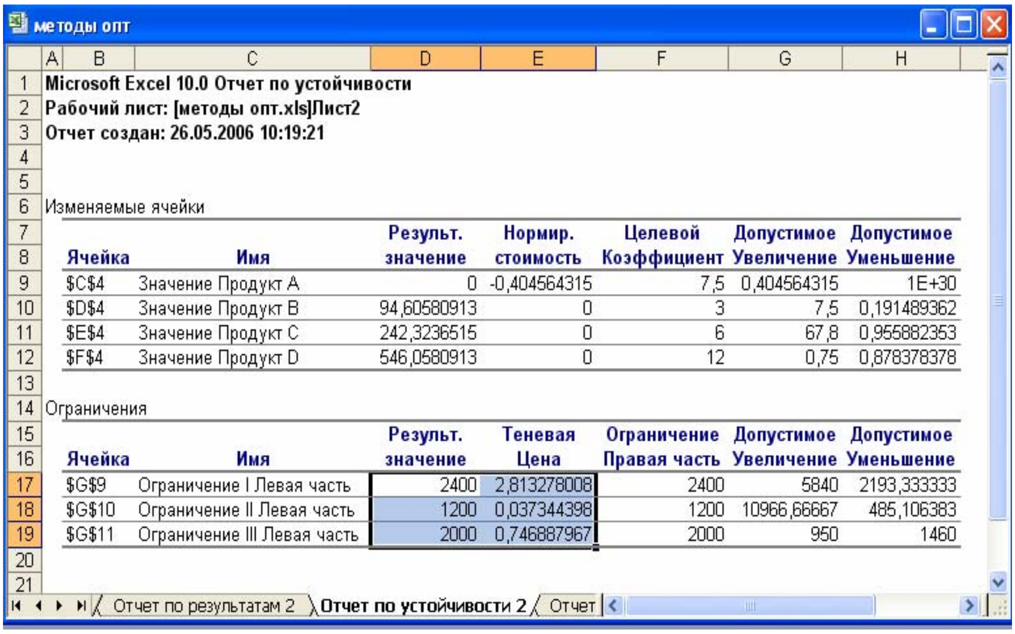
Например, если $\Delta 2 = \Delta 3 = 0$, тогда уравнение примет вид:

$2 - \Delta 1 = 7{,}5/2{,}813$

$\Delta 1 = -0{,}6661$ – одно из возможных решений, т.е. если потребление первого ресурса на единицу продукции А снизится с 2 единиц до $2 - 0{,}6661 = 1{,}339$, то продукция А станет рентабельной.

11. На сколько нужно изменить запас каждого из дефицитных ресурсов, чтобы прибыль возросла на 20%?

Отчет по устойчивости:



методы опт

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [методы опт.xls]Лист2
Отчет создан: 26.05.2006 10:19:21

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4	Значение Продукт A	0	-0,404564315	7,5	0,404564315	1E+30
$D$4	Значение Продукт B	94,60580913	0	3	7,5	0,191489362
$E$4	Значение Продукт C	242,3236515	0	6	67,8	0,955882353
$F$4	Значение Продукт D	546,0580913	0	12	0,75	0,878378378

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$9	Ограничение I Левая часть	2400	2,813278008	2400	5840	2193,333333
$G$10	Ограничение II Левая часть	1200	0,037344398	1200	10966,66667	485,106383
$G$11	Ограничение III Левая часть	2000	0,746887967	2000	950	1460

Отчет по результатам 2 / Отчет по устойчивости 2 / Отчет

Рис. 4.47

Поскольку двойственные переменные (теневые цены) показывают на сколько изменится прибыль при изменении ресурса на единицу, то общее изменение прибыли можно записать в виде:

$\Delta f = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y + \Delta b_3 y$,

8290,456*0,2= $\Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y + \Delta b_3 y$.

В данном случае существует большое количество решений.

Пусть $\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3 = 1658{,}091/(y_1 + y_2 + y_3)$

$\Delta b_1 = \Delta b_2 = \Delta b_3$ =1658,091 / (2,813 + 0,037 + 0,747) = 460,965

b1 = 2400 + 460,965 = 2860,965

b2 = 1200 + 460,965 = 1660,965

b3 = 2000 + 460,965 = 2460,965

Контрольные вопросы

1. Запишите двойственную задачу линейного программирования для КЗЛП, ОснЗЛП, ОбщЗЛП.
2. Сформулируйте основные теоремы теории двойственности.
3. Как получить решение двойственной задачи из симплекс-таблицы решения исходной задачи?
4. Поясните экономический смысл условий теоремы 4 (условий дополнительной нежесткости)?

Задание №13

Решить с помощью MS Excel следующие задачи (варианты 1–5, 6–10).

1–5. Для изготовления четырех видов продукции (A, B, C, D) используют три вида сырья. Ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в соответствующей таблице.

Определите план выпуска продукции из условия максимизации его стоимости.

Определите статус, ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

Определите максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального плана, то есть номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменения.

Определите суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Производство какой продукции нерентабельно?

На сколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

Определите изменение стоимости продукции и количество выпускаемых изделий при увеличении второго вида сырья на Z единиц.

Определите оптимальное решение задачи для случая, когда вектор ресурсов задан в виде $\bar{в}$-строки.

Определите интервалы изменения цен на каждую продукцию, при которых сохраняется оптимальный план.

На сколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

На сколько нужно изменить запас каждого из дефицитных ресурсов, чтобы прибыль возросла на 20%?

1.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1800
III	3	-	6	3	2000
Цена ($\bar{c}$)	7,5	3	6	12	

Z = 500, $\bar{в}$ = (2000, 1500, 2000)

2.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	C	D	
I	1	1	0,5	4	4500
II	2	3	3	0	1200
III	3	-	5	1	2300
Цена ($\bar{c}$)	7,5	3	4	12	

Z = 300, $\bar{в}$ = (1500, 2000, 2000)

3.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	C	D	
I	4,5	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	2,6	820
III	-	10	6	1	2000
Цена ($\bar{c}$)	10,5	3	6	12	

Z = 700, $\bar{в}$ = (2000, 2880, 1500)

4.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	C	D	
I	2	1	3,5	4	2600
II	1,5	5	3	7	2200
III	3	2	6	1	1000
Цена ($\bar{c}$)	9	3	5,6	12	

Z = 450, $\bar{в}$ = (2000, 1500, 700)

5.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{в}$
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	2700
II	1	5	3	0	3200
III	3	-	6	1	1500
Цена ($\bar{c}$)	13	3	11	8,5	

Z = 500, $\bar{в}$ = (1000, 2500, 500)

6–10. Из четырех видов кормов необходимо составить рацион, в состав которого должно входить не менее $в_1$ ед. вещества А, $в_2$ ед. вещества В и $в_3$ ед. вещества С. Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида, указано в соответствующей таблице. В ней же приведена цена 1 кг корма каждого вида.

Составить рацион, содержащий не менее нужного количества указанных питательных веществ и имеющий минимальную стоимость.

Определите, все ли виды кормов входят в рацион, ценность дополнительной единицы каждого питательного вещества и его приоритет при решении задач уменьшения стоимости рациона.

Определите суммарную стоимостную оценку питательных веществ в единице каждого корма. Использование какого вида корма нерентабельно.

Содержание какого из питательных веществ превышает заданный минимальный уровень и на сколько?

Определите максимально возможное уменьшение содержания каждого из питательных веществ в рационе, при котором структура рациона остается без изменений.

На сколько уменьшится стоимость рациона и используемое количество кормов при снижении минимального уровня потребления питательного вещества В до Z ед.?

Определите интервал изменения цен на каждый вид корма, при котором сохраняется структура рациона.

Возможно ли сделать выгодным использование корма, не вошедшего в рацион.

На сколько увеличится стоимость рациона при принудительном включении в рацион 1 кг нерентабельного вида корма?

На сколько нужно снизить минимальный уровень потребления каждого из питательных веществ, чтобы уменьшить стоимость рациона на 10%?

6.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10	5	7	4
B	-	10	13	-
C	20	7	12	5
Цена 1 кг корма (руб)	9	11	12	10

$\vec{B}$ = (400, 180, 200); Z = 70

7.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	12	5	8	3
B	-	4	13	-
C	22	7	17	4,5
Цена 1 кг корма (руб)	11	9	12	10

$\vec{B}$ = (400, 180, 200); Z = 30

8.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10	-	7	4,5
B	20	14	15	6
C	-	7	12	5
Цена 1 кг корма (руб)	9	11	12	17

$\vec{B}$ = (400, 180, 200); Z = 110

9.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10,5	5	7	4
B	-	10	13	-
C	20	-	12	5
Цена 1 кг корма (руб)	16	15	12	20

$\vec{B}$ = (400, 180, 200); Z = 60

10.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10	5	7	6
B	-	7	8	9
C	20	7	12	-
Цена 1 кг корма (руб)	9	11	12	10

$\vec{B}$ = (400, 180, 200); Z = 30

ТЕМА 5.

Целочисленные модели исследования операций

Для изучения данного раздела дисциплины необходимо умение решать задачи графическим и симплекс-методом.

Изучив данную тему, студент должен:

– знать методы решения ЗЦЛП;
– уметь решать ЗЦЛП методом ветвей и границ;
– уметь решать задачу коммивояжера

Цель изучения – получить представление о специальных задачах линейного программирования, об особенностях решения ЗЦЛП.

Целочисленное программирование ориентировано на решение задач математического программирования, в которых все или некоторые переменные должны принимать только целочисленные значения.

Задача называется полностью целочисленной, если условие целочисленности наложено на все ее переменные; когда это условие относится лишь к некоторым переменным, задача называется частично целочисленной. Если при этом ЦФ и функции, входящие в ограничения, линейные, то задача является линейной целочисленной.

Несмотря на то, что к настоящему времени разработан ряд методов решения целочисленных задач, ни один из них не обеспечивает желаемой эффективности соответствующих вычислительных процедур, что особенно проявляется при увеличении размерности задачи. Таким образом, в отличие от ЗЛП, время решения которых относительно невелико, реализация целочисленных алгоритмов в ряде случаев весьма затруднительна.

Одна из основных трудностей в целочисленном программировании связана с эффектом ошибки округления, возникающим при использовании цифровых ЭВМ. Даже наличие алгоритмов, применимых для решения задач с целочисленными коэффициентами и позволяющих обойтись без оперирования дробями (и, следовательно, избежать влияния ошибок округления), не упрощает ситуации, поскольку такие алгоритмы (в ряде случаев) сходятся чрезвычайно медленно.

Методы решения задач целочисленного линейного (ЗЦЛП) программирования можно классифицировать как (1) методы отсечений и (2) комбинаторные методы.

Исходной задачей для демонстрации возможностей методов отсечений, используемых при решении линейных целочисленных задач, является задача с ослабленными ограничениями, которая возникает в результате исключения требования целочисленности переменных. По мере введения специальных дополнительных ограничений, учитывающих требование целочисленности, многогранник допустимых решений ослабленной задачи постепенно деформируется, до тех пор пока координаты оптимального решения не станут целочисленными. Название «методы отсечений» связано с тем обстоятельством, что вводимые дополнительные ограничения отсекают (исключают) некоторые области многогранника допустимых решений, в которых отсутствуют точки с целочисленными координатами.

В основе комбинаторных методов лежит идея перебора всех допустимых целочисленных решений. Разумеется, на первый план здесь выдвигается проблема разработки тестовых процедур, позволяющих непосредственно рассматривать лишь часть (относительно небольшую) указанных решений, а остальные допустимые решения учитывать некоторым косвенным образом.

5.1. Метод ветвей и границ решения целочисленных задач линейного программирования (ЦЗЛП)

Пример 5.1:

$$F(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \le 3{,}5;$$
$$x_1 \le 2;$$
$$x_2 \le 2;$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0,\ \text{целые}.$$

Начальный шаг решения этой задачи состоит в нахождении решения задачи ЛП, получаемой при отбрасывании условия целочисленности x_1 и x_2. Обозначим эту задачу через ЛП-1. На рис. 5.1 представлено графическое решение задачи ЛП-1.

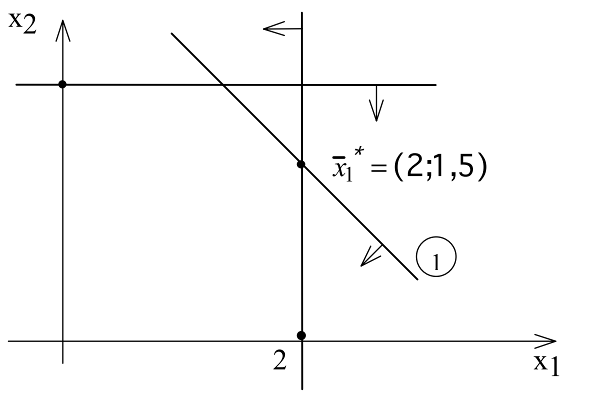


Рис. 5.1. **Решение задачи ЛП-1**

Оптимальное решение задачи ЛП-1 имеет вид: $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$, оптимальное значение целевой функции $F(\bar{X}_1^*) = 9$. Поскольку x_2 принимает дробное значение, найденное решение не может быть оптимальным решением исходной задачи ЦЛП. Но найденное значение $F(\bar{X}_1^*)$ представляет собой верхнюю границу истинного оптимального целочисленного значения, поскольку при выполнении требования целочисленности x_2 значение $F(\bar{X})$ может лишь уменьшиться.

Следующий шаг метода ветвей и границ состоит в просмотре целочисленных значений x_2, больших или меньших 1,5. Это делается путем добавления к задаче ЛП-1 либо ограничения $x_2 \le 1$, $x_2 \ge 2$. Таким образом, из задачи ЛП-1 получаются две задачи следующего вида (ЛП-2 и ЛП-3):

ЛП-2	ЛП-3
$F(\overline{X}) = 3*x_1 + 2*x_2 \to \max$	$F(\overline{X}) = 3*x_1 + 2*x_2 \to \max$
при ограничениях	при ограничениях
$x_1 + x_2 \le 3{,}5$	$x_1 + x_2 \le 3{,}5$
$x_1 \le 2$	$x_1 \le 2$
$x_2 \le 2$	$x_2 \le 2$
$x_2 \le 1$	$x_2 \ge 2$
$x_1, x_2 \ge 0.$	$x_1, x_2 \ge 0.$

На рис. 5.2 и 5.3 изображены допустимые области задач ЛП-2 и ЛП-3 соответственно. (Заметим, что допустимая область задачи ЛП-3 представляет собой просто отрезок AB).

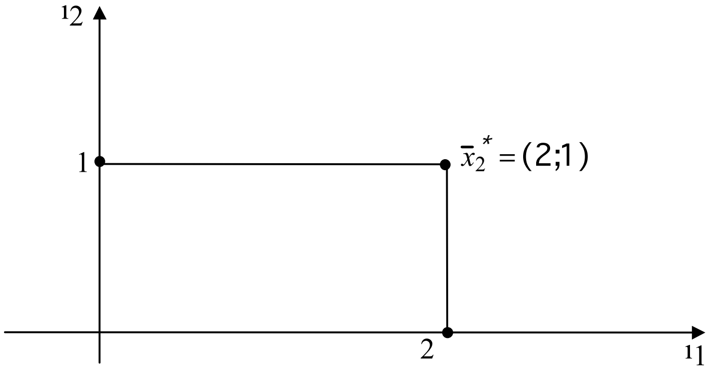


Рис. 5.2. **Решение задачи ЛП-2**

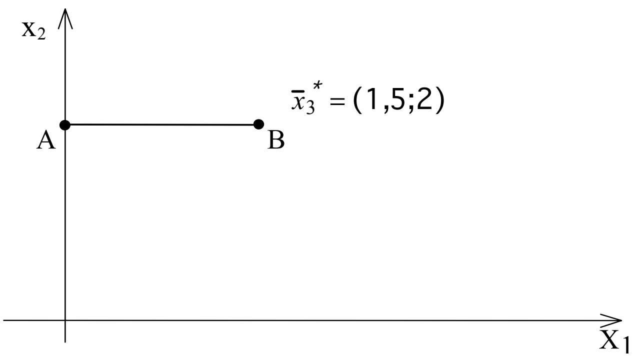


Рис. 5.3. **Решение задачи ЛП-3**

Оптимальное решение задачи ЛП-2 (рис. 5.2) – точка $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, где $F(\overline{X}_2^*) = 8$. Таким образом, получено допустимое (целочисленное) решение исходной задачи ЦЛП. Зафиксируем это целочисленное решение. Пусть $Z_0 = 8$. Даже если ЛП-2 имеет другие целочисленные решения, значение целевой функции в них не может быть больше 8. Таким образом, значение $Z_0 = 8$ представляет собой текущую нижнюю границу максимального значения $F(\overline{X})$. Поскольку ранее была получена верхняя граница, равная 9, нельзя утверждать, что решение ЛП-2 оптимально для исходной задачи. Следовательно, необходимо также рассмотреть задачу ЛП-3.

Оптимальное решение задачи ЛП-3 (рис. 5.3): $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 2$; $F(\overline{X}_3^*) = 8{,}5$. Для исходной задачи ЦЛП это решение недопустимо, поскольку x_1 принимает дробное значение. Оптимальное значение F($\overline{X}_3^*$) = 8,5 задачи ЛП-3 больше ранее полученной нижней границы Z_0 = 8, поэтому необходимо проверить существование в допустимой области задачи ЛП-3 целочисленного решения, дающего значение целевой функции $F(\overline{X}) > 8$. Для этого рассматриваются задачи ЛП-4 и ЛП-5, получающиеся при добавлении к ЛП-3 ограничений $x_1 \le 1$ и $x_1 \ge 2$ соответственно.

ЛП-4	ЛП-5
$F(\overline{X}) = 3*x_1 + 2*x_2 \to \max$	$F(\overline{X}) = 3*x_1 + 2*x_2 \to \max$
при ограничениях	при ограничениях
$x_1 + x_2 \le 3{,}5$	$x_1 + x_2 \le 3{,}5$
$x_1 \le 2$	$x_1 \le 2$
$x_2 \le 2$	$x_2 \le 2$
$x_2 \ge 2$	$x_2 \ge 2$
$x_1 \le 1$	$x_1 \ge 2$
$x_1, x_2 \ge 0.$	$x_1, x_2 \ge 0.$

Допустимая область задачи ЛП-4 состоит из отрезка ДЕ, показанного на рис. 5.4; задача ЛП-5 не имеет допустимых решений.

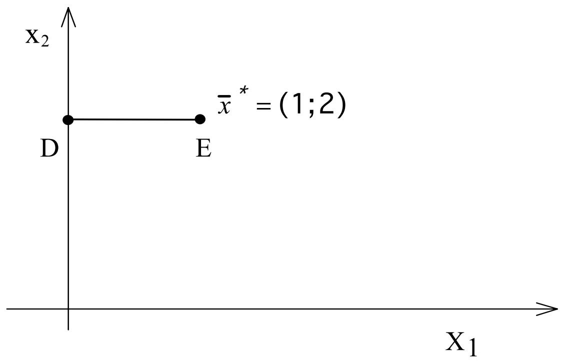


Рис. 5.4. **Решение задачи ЛП-4**

Оптимальное решение задачи ЛП-4 имеет вид: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; F($\overline{X}_4^*$) = 7, следовательно, для любого целочисленного решения в допустимой области ЛП-3 значение целевой функции не превосходит 7. Так как F($\overline{X}_4^*$) меньше ранее полученной нижней границы, то Z_0 = 8 не изменяется. Таким образом, точка $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ (решение задачи ЛП-2) представляет собой оптимальное целочисленное решение исходной задачи; оптимальное значение целевой функции в этой точке равно Z_0 = 8.

Удобно представить последовательность задач ЛП, возникающих при использовании процедуры метода ветвей и границ, в виде сети или дерева, изображенного на рис. 5.5 – сеть или дерево состоит из множества вершин и соединяющих их дуг или ветвей.

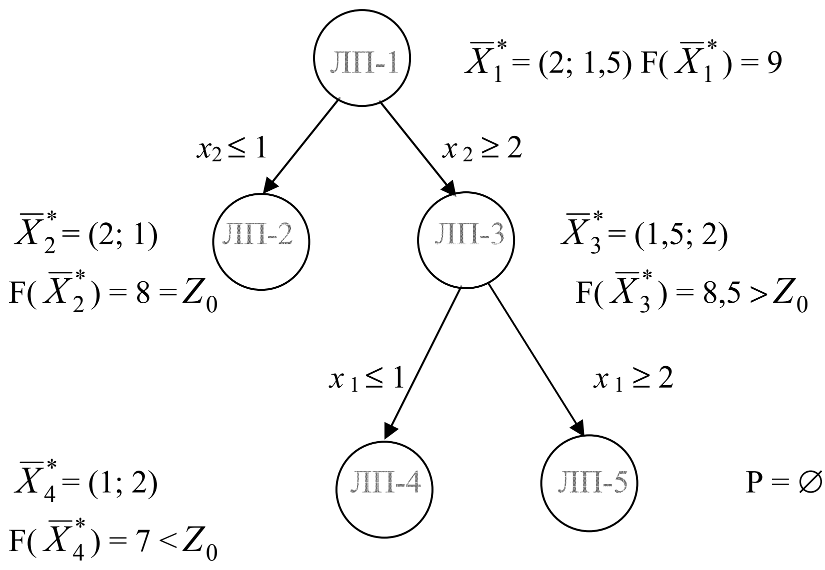


Рис. 5.5

Каждая вершина представляет собой либо начальную, либо конечную точку некоторой ветви. Вершина 1 на рис. 5.5 соответствует задаче ЛП-1, получаемой при отбрасывании требования целочисленности переменных. Ветвление в вершине 1, определяемое целочисленной переменной x_2 с помощью ограничения $x_2 \le 1$, приводит к вершине 2 (ЛП-2). Поскольку задача ЛП-2 имеет оптимальное целочисленное решение, нет необходимости производить ветвление в вершине 2. В этом случае говорят, что рассматриваемая вершина прозондирована. Ветвление в вершине 1 по ограничению $x_2 \ge 2$ дает ЛП-3 (вершина 3). Поскольку оптимальное решение ЛП-3 является дробным и $F(\overline{X}_3^*) > Z_0$, происходит дальнейшее ветвление в вершине 3 по целочисленной переменной x_1. Таким образом, появляются вершины 4 и 5. Эти вершины являются прозондированными, поскольку ЛП-4 обладает целочисленным решением, а задача ЛП-5 не имеет допустимых решений. Наилучшее решение из полученных в прозондированных вершинах представляет собой оптимальное решение исходной задачи.

ПОДРОБНОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим частично целочисленную задачу следующего вида:

$$F(\overline{X}) = (\overline{C}, \overline{X}) \to \max;$$

$$A\overline{X} = \overline{b}, \ \overline{b} \ge \overline{0};$$

$$\overline{X} \ge \overline{0};$$

x_j – целочисленная переменная при $j \in I$,

где I – множество индексов целочисленных переменных задачи.

В качестве первого шага необходимо решить сформулированную задачу как задачу ЛП, рассматривая все ее переменные как непрерывные. Получаемая таким образом задача ЛП обозначается через ЛП-1, оптимальное значение ее целевой функции – через $F(\overline{X}_1^*)$. Пусть в оптимальном решении задачи ЛП-1 некоторые целочисленные переменные принимают дробные значения; тогда оптимальное решение исходной задачи не совпадает с оптимальным решением ЛП-1. В этом случае величина F($\overline{X}_1^*$) представляет собой верхнюю границу оптимального значения исходной задачи.

На следующем шаге производится ветвление по одной из целочисленных переменных, имеющих дробное значение в оптимальном решении задачи ЛП-1. Часто выбирают переменную, которая имеет наибольшее дробное значение.

Пусть ветвление происходит по целочисленной переменной x_j, значение которой в оптимальном решении ЛП-1 равно x_j^*. Далее рассматриваются две новые задачи ЛП, обозначаемые через ЛП-2 и ЛП-3. Они получаются путем введения ограничений $x_j \le [x_j^*]$ и $x_j \ge [x_j^*] + 1$ соответственно. Условия задач ЛП-2 и ЛП-3 можно записать следующим образом:

ЛП-2	ЛП-3
$F(\overline{X}) = (\overline{C}, \overline{X}) \to \max$	$F(\overline{X}) = (\overline{C}, \overline{X}) \to \max$
$A\overline{X} = \overline{b},\ \overline{b} \ge \overline{0}$	$A\overline{X} = \overline{b},\ \overline{b} \ge \overline{0}$
$x_j \le [x_j^*]$	$x_j \ge [x_j^*] + 1$
$\overline{X} \ge \overline{0}$	$\overline{X} \ge \overline{0}$

Допустим, что оптимальные решения задач ЛП-2 и ЛП-3 также содержат дробные значения целочисленных переменных и поэтому не являются допустимыми для исходной задачи.

На следующем шаге необходимо выбрать задачу ЛП-2 или ЛП-3 и произвести ветвление в соответствующей вершине, вводя новое ограничение. Выбор вершины (задачи ЛП) для дальнейшего ветвления часто осуществляется с использованием оптимального значения целевой функции, т.е. выбирается вершина, соответствующая наибольшему оптимальному значению целевой функции задачи ЛП.

После выбора вершины для дальнейшего ветвления выбирается целочисленная переменная, которая имеет в оптимальном решении соответствующей задачи ЛП дробное значение, и производится ветвление по этой переменной. Процесс ветвления и решения задач ЛП продолжается до получения целочисленного оптимального решения одной из задач ЛП. Значение Z_0 в полученной точке представляет собой текущую нижнюю границу оптимального значения целевой функции исходной задачи ЦЛП. На этом этапе отбрасываются все вершины (задачи ЛП), для которых оптимальное значение F($\overline{X}^*$) не превосходит полученной нижней границы. Про такие вершины также говорят, что они являются прозондированными, поскольку в соответствующих им допустимых областях нет целочисленных решений, лучших, чем уже полученное, следовательно, промежуточная вершина (задача ЛП) является прозондированной (явным или неявным образом) в том случае, если она удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий.

1. Оптимальное решение, соответствующее данной вершине, целочисленно.
2. Задача ЛП, соответствующая рассматриваемой вершине, не имеет допустимых решений.
3. Оптимальное значение F($\overline{X}^*$) соответствующей задачи ЛП не превосходит текущей нижней границы Z_0.

Дальнейшее ветвление можно производить только в вершинах, для которых F($\overline{X}^*$) > Z_0. Как только полученное допустимое целочисленное решение одной из задач

ЛП окажется лучше имеющегося текущего значения Z_0, оно фиксируется вместо зафиксированного ранее (т.е. меняется значение Z_0).

При использовании метода ветвей и границ выбор вершин для дальнейшего ветвления происходит до тех пор, пока остается хотя бы одна непрозондированная вершина. Прозондированная вершина с наилучшим значением Z_0 дает решение исходной задачи ЦЛП.

Замечание: Получение перед реализацией метода ветвей и границ допустимого целочисленного решения может оказаться весьма полезным, так как сразу дает начальную нижнюю границу.

5.2. Задача коммивояжера

Имеется n городов, пронумерованных числами 1, 2,..., n. Для любой пары городов (*i, j*) задано расстояние (время, путевые расходы) $C(i,j) \geq 0$ между ними. Поэтому в общем случае $C(i, j) \neq C(j, i)$. Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города по одному разу и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы минимальной.

Другая интерпретация этой задачи связана с минимизацией времени переналадок при обработке на одном станке партии из n различных деталей. Здесь $C(i, j)$ – время переналадки при переходе от обработки детали *i* к обработке детали *j*. Требуется найти последовательность обработки деталей, минимизирующую общее время переналадок.

Для записи постановки задачи в терминах целочисленного линейного программирования определим переменные следующим образом: $x_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из *i*-го города в *j*-й; $x_{ij} = 0$ – в противном случае. Тогда задача заключается в отыскании значений переменных x_{ij}, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \tag{5.1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots m \quad \text{(въезд в город j);} \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots n \quad \text{(выезд из города i);} \tag{5.3}$$

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \ (i \neq j); \tag{5.4}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ u_i \geq 0, \text{ целые, } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \tag{5.5}$$

Ограничения (5.4) требуют, чтобы маршрут образовывал контур.

Применение метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера

Допустимый маршрут *x* представим как множество упорядоченных пар городов:

$$x = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}.$$

Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, проходя по которому коммивояжер посещает каждый город ровно один раз и возвращается в исходный город. Каждая упорядоченная пара (i, j) является дугой маршрута. Длина $F(x)$ маршрута x равна сумме соответствующих элементов $C(i, j)$. Заметим, что множество всех допустимых маршрутов X содержит (n-1)! элементов.

Обозначим через $C = (C_{ij})_{n \times n}$ матрицу расстояний. Чтобы запретить переезды вида (i,i), положим $C(i, i) = +\infty$ ($i = 1,\ldots, n$).

Пусть $P_i = \min\{C_{ij}\}, \quad j = (1,\ldots n),\ \mathrm{Q_j} = \min\{\mathrm{C_{ij}} - \mathrm{P_i}\}, \quad \mathrm{i} = (1,\ldots \mathrm{n});$

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - P_i - Q_j.$$

Тогда $\overline{C} = (\overline{C}_{ij})_{n \times n}$ – редуцированная матрица.

Пусть $d(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{j=1}^{n} Q_j$ – сумма констант редуцирования.

Тогда для любого маршрута $x = \{(i_1\, i_2),\ (i_2\, i_3), \ldots, (i_{n-1}\, i_n),\ (i_n\, i_1)\} \in X$

$$F(x) = C(i_1, i_2) + C(i_2, i_3) + \ldots + C(i_n, i_1) =$$

$$= \overline{C}(i_1, i_2) + \overline{C}(i_2, i_3) + \ldots + \overline{C}(i_n, i_1) + d(X) \geq d(X) \qquad (5.6)$$

Неравенство (5.6) показывает, что $d(X)$ является оценкой снизу для множества X. Кроме того, после редукции длины всех маршрутов уменьшаются на одну и ту же величину $d(X)$ и, следовательно, оптимальный маршрут, найденный с использованием редуцированной матрицы, оптимален и для исходной задачи.

Ветвление

Процесс ветвления можно представить в виде дерева, каждая вершина которого соответствует некоторому множеству маршрутов, являющемуся подмножеством множества X. При этом начальная вершина соответствует множеству всех маршрутов X (рис. 5.6).

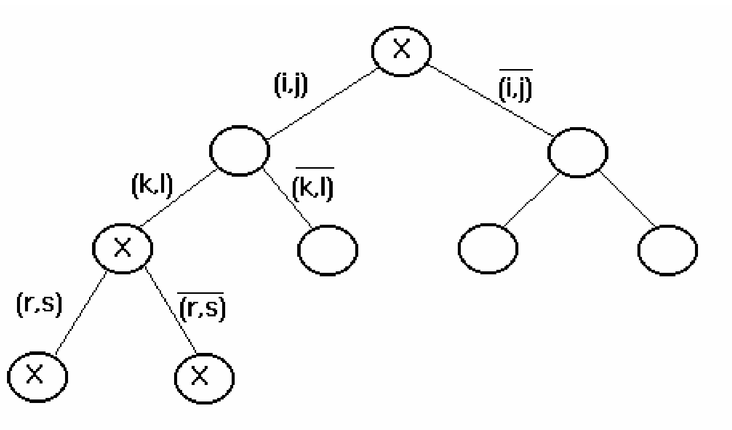


Рис. 5.6. **Ветвление**

На каждом шаге из числа кандидатов на ветвление выбирается множество X^1 с наименьшей оценкой. Оно разветвляется на два подмножества X_1^1 и X_2^1. Подмножество

X_1^1 состоит из всех маршрутов множества X^1, содержащих некоторую выбранную на данном шаге дугу (r, s), подмножество X_2^1 – из всех маршрутов множества X^1, не содержащих дуги (r,s).

Ребро дерева, соединяющее вершины X^1 и X_1^1, помечается (r, s), а ребро дерева, соединяющее X^1 и X_2^1, помечается $\overline{(r,s)}$.

Пусть $\overline{C}^1$ – редуцированная матрица, соответствующая вершине X^1. Опишем способ выбора дуги (r, s). Он основан на стремлении сделать оценку $d(X_1^1)$ поменьше, а оценку $d(X_2^1)$ – больше, для того чтобы увеличить вероятность выбора для дальнейшего ветвления множества X_1^1. Стремление к уменьшению $d(X_1^1)$ приводит к выбору такой дуги (μ,ν), для которой

$$\overline{C}^1(\mu,\nu) = 0, \tag{5.7}$$

поскольку все маршруты множества X_1^1 содержат дугу (μ,ν). Стремление же увеличить $d(X_2^1)$ приводит к выбору среди дуг, удовлетворяющих условию (5.7), той дуги, для которой значение функции

$$\Theta(\mu,\nu) = \min_{\rho:\rho\neq\nu} \overline{C}^1(\mu,\rho) + \min_{\sigma:\sigma\neq\mu} \overline{C}^1(\sigma,\nu)$$

максимально, т.е.

$$\Theta(r,s) = \max_{\mu,\nu:\overline{C}^1(\mu,\nu)=0} \{\Theta(\mu,\nu)\}.$$

Смысл введения функции Θ состоит в том, что величина $\Theta(\mu,\nu)$ является оценкой снизу для длины любого маршрута из X^1, не содержащего дуги (μ,ν), так как величина $\Theta(\mu,\nu)$ выражает дополнительное расстояние, которое коммивояжер проезжает в случае, когда в маршрут не включена дуга (μ,ν).

Построение редуцированных матриц $\overline{C}_2^1$ и $\overline{C}_1^1$ и вычисление оценок снизу

Положим:

$$C_2^1(i,j) = \begin{cases} \overline{C}^1(i,j), & (i,j) \neq (r,s), \\ +\infty & (i,j) = (r,s). \end{cases}$$

Искомая редуцированная матрица $\overline{C}_2^1$ получается из C_2^1 с помощью описанной выше процедуры редуцирования. Сумма констант редуцирования равна при этом $\Theta(r,s)$, а величина

$$d(X_2^1) = d(X^1) + \Theta(r,s)$$

является оценкой снизу для целевой функции $F(x)$ на множестве X_2^1.

Рассмотрим теперь множество X_1^1. Все маршруты из этого множества содержат дугу (r,s). Найдем максимальный связанный путь, который принадлежит всем маршрутам множества X^1 и содержит дугу (r,s). Пусть этот путь начинается в городе m и заканчивается в городе t (может быть, m = r или t = s, или то и другое одновременно). Чтобы запретить подцикл, начинающийся и заканчивающийся в m, положим $C_1^1(t,m) = +\infty$. Остальные элементы матрицы C_1^1 полагаем равными соответствующим элементам матрицы $\overline{C}^1$, при этом строку, соответствующую городу r, и столбец, соответствующий городу s, в матрицу C_1^1 не включаем, поскольку все маршруты из X_1^1 содержат дуги (r,s).

Редуцированная матрица расстояний $\overline{C}_1^1$ для вершины X_1^1 получается из матрицы C_1^1 с помощью операции редуцирования. При этом оценка снизу для функции $F(x)$ на множестве X_1^1 вычисляется по формуле

$$d(X_1^1) = d(X^1) + \tau,$$

где τ – сумма констант редуцирования.

Формирование списка кандидатов на ветвление

После вычисления каждой из оценок $d(X_i^1)$ (i = 1,2) следует проверить, не состоит ли множество X_i^1 из единственного маршрута. Если в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\overline{C}_i^1$ оказалось лишь по одному элементу, отличному от $+\infty$, то множество X_i^1 содержит единственный маршрут, длина которого равна $d(X_i^1)$. В этом случае верхняя граница (наименьшее из уже вычисленных значений $F(x)$) полагается равной минимуму из предыдущего значения Z_0 и $d(X_i^1)$, т.е.

$$Z_0 = \min\{Z_0,\ d(X_i^1)\}.$$

Если X_i^1 содержит более одного маршрута и $d(X_i^1)$ меньше текущего значения Z_0, то множество X_i^1 включается в число кандидатов на ветвление. Остановка производится, если наименьшая из оценок снизу кандидатов на ветвление не меньше текущего значения Z_0.

Пример 5.2. Решить методом ветвей и границ задачу коммивояжера с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & \infty & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & \infty & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & \infty \end{pmatrix}$$

Возьмем в качестве произвольного допустимого маршрута:

$$x_0 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}.$$

Тогда $F(x_0) = 10 + 10 + 20 + 15 + 10 = 65$ – текущее значение Z_0 – (верхняя граница длин всех маршрутов).

Получим редуцированную матрицу $\overline{C}$.

$$C=\left(\begin{array}{ccccc}\infty & 10 & 25 & 25 & 10\\ 1 & \infty & 10 & 15 & 2\\ 8 & 9 & \infty & 20 & 10\\ 14 & 10 & 24 & \infty & 15\\ 10 & 8 & 25 & 27 & \infty\end{array}\right)\begin{array}{|c}10\\1\\8\\10\\8\end{array} \sim \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc}\infty & 0 & 15 & 15 & 0\\ 0 & \infty & 9 & 14 & 1\\ 0 & 1 & \infty & 12 & 2\\ 4 & 0 & 14 & \infty & 5\\ 2 & 0 & 17 & 19 & \infty\end{array}\right)\\ \hline \begin{array}{ccccc}0 & 0 & 9 & 12 & 0\end{array}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc}\infty & 0 & 6 & 3 & 0\\ 0 & \infty & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & \infty & 0 & 2\\ 4 & 0 & 5 & \infty & 5\\ 2 & 0 & 8 & 7 & \infty\end{array}\right) = \overline{C}$$

Нижняя граница $d(x) = 10 + 1 + 8 + 10 + 8 + 9 + 12 = 58$. Данное значение является нижней границей длин всех маршрутов. Заметим, что в идеальном случае поиск решения заключался бы в выборе ровно одного нулевого элемента в каждой строке и каждом столбце. Другими словами, если бы такой маршрут нулевой длины мог быть найден, то длина оптимального маршрута равнялась бы 58. Исходя из верхней и нижней границ, можно заключить, что $58 \le F(x^*) \le 65$.

Выберем дугу (r,s) с помощью вычисления значений функции $\Theta(\mu,\nu)$.

$$\Theta(1,2) = 0,\ \Theta(2,1) = 0,\ \Theta(3,1) = 0,\ \Theta(4,2) = 4,\ \Theta(1,5) = 1,\ \Theta(2,3) = 5,\ \Theta(3,4) = 2,\ \Theta(5,2) = 2.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = \Theta(2,3)$. Осуществим разбиение (ветвление). Правое подмножество X_2 будет содержать все маршруты, которые исключают дугу (2,3). Поэтому $C_2\,(2,3) = +\infty$.

$$C_2 = \left(\begin{array}{ccccc}\infty & 0 & 6 & 3 & 0\\ 0 & \infty & \infty & 2 & 1\\ 0 & 1 & \infty & 0 & 2\\ 4 & 0 & 5 & \infty & 5\\ 2 & 0 & 8 & 7 & \infty\end{array}\right)\begin{array}{|c}0\\0\\0\\0\\0\end{array} \sim \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc}\infty & 0 & 6 & 3 & 0\\ 0 & \infty & \infty & 2 & 1\\ 0 & 1 & \infty & 0 & 2\\ 4 & 0 & 5 & \infty & 5\\ 2 & 0 & 8 & 7 & \infty\end{array}\right)\\ \hline \begin{array}{ccccc}0 & 0 & 5 & 0 & 0\end{array}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc}\infty & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & \infty & \infty & 2 & 1\\ 0 & 1 & \infty & 0 & 2\\ 4 & 0 & 0 & \infty & 5\\ 2 & 0 & 3 & 7 & \infty\end{array}\right) = \overline{C}_2 .$$

Оценка снизу для правого подмножества X_2 определяется следующим образом:

$$d(X_2) = d(X) + \Theta(2,3) = 58 + 5 = 63 < Z_0.$$

Левое подмножество X_1 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (2,3), и поэтому вторая строка и третий столбец в матрицу C_1 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_1\,(3,2) = +\infty$, чтобы запретить подцикл $\{(2,3),(3,2)\}$. В результате получим матрицу

$$C_1 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5\\ \hline 1 & \infty & 0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & \infty & 0 & 2\\ 4 & 4 & 0 & \infty & 5\\ 5 & 2 & 0 & 7 & \infty\end{array} = \overline{C}_1 .$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_1) = d(X) + \tau = 58 + 0 = 58 < Z_0,$$

где τ – константа приведения матрицы C_1

В списке кандидатов на ветвление множества X_1 и X_2. Так как $d(X_1) < d(X_2)$, будем производить ветвление множества X_1. Выберем дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы.

$$\Theta(1,2) = 0,\ \Theta(1,5) = 2,\ \Theta(3,1) = 2,\ \Theta(3,4) = 3,\ \Theta(4,2) = 4,\ \Theta(5,2) = 2.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = 4$, $(r,s) = (4,2)$.

Правая подматрица:

$$C_4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & \infty & 5 \\ 2 & 0 & 7 & \infty \end{pmatrix} \end{array}\left|\begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{array}\right. \sim \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 7 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} = \overline{C}_4 .$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_4) = d(X_1) + \Theta(4,2) = 58 + 4 = 62 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_3 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (4,2), и поэтому четвертая строка и второй столбец в матрицу C_3 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_3(3,4) = +\infty$, чтобы запретить подцикл {(4,2),(2,3),(3,4)}. В результате получим матрицу

$$C_3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ 2 & 7 & \infty \end{pmatrix} \end{array}\left|\begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right. \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ 0 & 5 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 0 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ 0 & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{array} = \overline{C}_3 .$$

$$d(X_3) = d(X_1) + \tau = 58 + 5 = 63 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_3, X_4, X_2.

Минимальная нижняя оценка оказалась у множества X_4, следовательно, для дальнейшего разбиения выбираем множество X_4.

Определим дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы $\overline{C}_4$.

$$\Theta(1,2) = 0,\ \Theta(1,5) = 1,\ \Theta(3,1) = 0,\ \Theta(3,4) = 3,\ \Theta(4,1) = 1,\ \Theta(5,2) = 2.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = 3$, $(r,s) = (3,4)$.

Правая подматрица:

$$C_6 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & \infty \end{array} \sim \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & \infty \end{array} = \overline{C}_6.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_6) = d(X_4) + \Theta(3,4) = 62 + 3 = 65 = Z_0.$$

Следовательно, множество X_6 исключаем из списка.

Левая подматрица. Левое подмножество X_5 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (3,4), и поэтому третья строка и четвертый столбец в матрицу C_5 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить C_5 (4,2) = $+\infty$, чтобы запретить подцикл {(2,3), (3,4), (4,2)}, однако это условие оказалось уже выполненным. В результате получим матрицу

$$C_5 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \infty & 1 \\ 5 & 2 & 0 & \infty \end{array} = \overline{C}_5.$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_5) = d(X_4) + \tau = 62 + 0 = 62 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_3, X_5, X_2.

Минимальная нижняя оценка оказалась у множества X_5, следовательно, для дальнейшего разбиения выбираем множество X_5. Определим дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы $\overline{C}_5$.

$$\Theta(1,2) = 0,\ \Theta(1,5) = 1,\ \Theta(4,1) = 3,\ \Theta(5,2) = 2.$$

Следовательно, Θ(r,s) = 3, (r,s) = (4,1).

Правая подматрица:

$$C_8 = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 5 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \infty & \infty & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc} \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \\ 2 & 0 & \infty \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 0 & \infty \end{array} = \overline{C}_8.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d\,(X_8) = d(X_5) + \Theta(4,1) = 62 + 3 = 65 = Z_0.$$

Следовательно, множество X_8 исключаем из списка.

Левая подматрица. Левое подмножество X_7 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (4,1), и поэтому четвертая строка и первый столбец в матрицу C_7 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_7(1,2) = +\infty$, чтобы запретить подцикл {(2,3), (3,4), (4,1), (1,2)}.

$$C_7 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array} = \overline{C}_7 .$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_7) = d(X_5) + \tau = 62 + 0 = 62 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_3, X_7, X_2. Множество X_7 содержит единственный маршрут с минимальной нижней оценкой, поэтому задача решена. $X_1 = \{(1,5)(5,2)(2,3),(3,4),(4,1)\} = X^*$;

$$Z_0 = F(x^*) = 10 + 8 + 10 + 20 + 14 = 62.$$

Представим процесс решения в виде дерева (см. рис. 5.7).

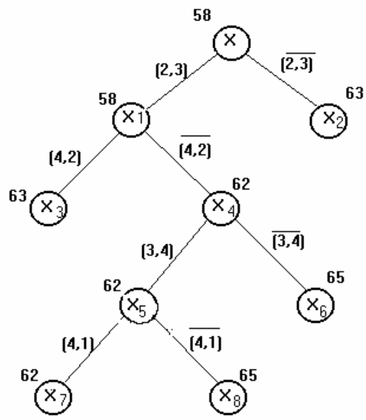


Рис. 5.7.

Контрольные вопросы

1. Запишите задачу целочисленного линейного программирования.
2. Сформулируйте алгоритм метода ветвей и границ.
3. Перечислите область применения ЗЦЛП.
4. С какими трудностями приходится сталкиваться при алгоритмизации методов решения ЗЦЛП?
5. Приведите классификацию методов решения ЗЦЛП.
6. Какая задача называется задачей с ослабленными ограничениями?
7. Сформулируйте принцип ветвления в методе ветвей и границ.
8. Какую задачу решает понятие границы в методе ветвей и границ?

9. Сформулируйте постановку задачи коммивояжера.
10. Сформулируйте алгоритм метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера.

Задание №14

Решите ЗЦЛП методом ветвей и границ.

1. $\max(3x_1 + 4x_2)$
$4x_1 + 5x_2 \leq 20$
$x_1 + 6x_2 \leq 12$
$0 \leq x_1 \leq 5$
$0 \leq x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

2. $\max(3x_1 + 4x_2)$
$x_1 + 7x_2 \leq 21$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$0 \leq x_1 \leq 4$
$0 \leq x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

3. $\max(x_1 + x_2)$
$3x_1 + 4x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 9$
$0 \leq x_1 \leq 4$
$0 \leq x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

4. $\max(4x_1 + x_2)$
$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$4x_1 + 9x_2 \leq 18$
$0 \leq x_1 \leq 2$
$0 \leq x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

5. $\max(3x_1 + x_2)$
$4x_1 + 3x_2 \leq 18$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$
$0 \leq x_1 \leq 5$
$0 \leq x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

6. $\max(x_1 + 2x_2)$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$3x_1 + 8x_2 \leq 24$
$0 \leq x_1 \leq 5$
$0 \leq x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

7. $\max(2x_1 + x_2)$
$5x_1 + 2x_2 \leq 30$
$3x_1 + 8x_2 \leq 48$
$0 \leq x_1 \leq 6$
$0 \leq x_2 \leq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

8. $\max(3x_1 - 2x_2)$
$2x_1 + 3x_2 \leq 6$
$x_1 - x_2 \leq 2$
$0 \leq x_1 \leq 3$
$0 \leq x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

9. $\max(3x_1 + 2x_2)$
$2x_1 + x_2 \leq 7$
$4x_1 + 3x_2 \leq 18$
$0 \leq x_1 \leq 3$
$0 \leq x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

10. $\max(x_1 + 2x_2)$
$5x_1 + 9x_2 \leq 45$
$x_1 + 3x_2 \leq 12$
$0 \leq x_1 \leq 9$
$0 \leq x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 – целые.

11. $\max(2x_1 + 5x_2)$
$4x_1 + 5x_2 \le 20$
$x_1 + 6x_2 \le 12$
$0 \le x_1 \le 6$
$0 \le x_2 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

12. $\max(4x_1 + 6x_2)$
$3x_1 + 7x_2 \le 21$
$x_1 + x_2 \le 4$
$0 \le x_1 \le 5$
$0 \le x_2 \le 4$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

13. $\max(2x_1 + 3x_2)$
$3x_1 + 4x_2 \le 12$
$3x_1 + 2x_2 \le 9$
$0 \le x_1 \le 6$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

14. $\max(5x_1 + 2x_2)$
$2x_1 - 3x_2 \le 6$
$4x_1 + 9x_2 \le 18$
$0 \le x_1 \le 3$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

15. $\max(4x_1 + 2x_2)$
$4x_1 + 3x_2 \le 18$
$x_1 + 2x_2 \le 6$
$0 \le x_1 \le 6$
$0 \le x_2 \le 4$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

16. $\max(2x_1 + 5x_2)$
$x_1 + x_2 \le 5$
$3x_1 + 8x_2 \le 24$
$0 \le x_1 \le 4$
$0 \le x_2 \le 4$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

17. $\max(3x_1 + 2x_2)$
$5x_1 + 2x_2 \le 30$
$3x_1 + 8x_2 \le 48$
$0 \le x_1 \le 7$
$0 \le x_2 \le 6$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

18. $\max(5x_1 - 3x_2)$
$2x_1 + 3x_2 \le 6$
$x_1 - x_2 \le 2$
$0 \le x_1 \le 3$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

19. $\max(4x_1 + 3x_2)$
$2x_1 + x_2 \le 7$
$4x_1 + 3x_2 \le 18$
$0 \le x_1 \le 4$
$0 \le x_2 \le 4$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

20. $\max(x_1 + 3x_2)$
$5x_1 + 9x_2 \le 45$
$x_1 + 3x_2 \le 12$
$0 \le x_1 \le 8$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

21. $\max(4x_1 + 4x_2)$
$4x_1 + 5x_2 \le 20$
$x_1 + 6x_2 \le 12$
$0 \le x_1 \le 6$
$0 \le x_2 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

22. $\max(3x_1 + 3x_2)$
$3x_1 + 7x_2 \le 21$
$x_1 + x_2 \le 4$
$0 \le x_1 \le 4$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

23. $\max(2x_1 + 3x_2)$
$3x_1 + 4x_2 \le 12$
$3x_1 + 2x_2 \le 9$
$0 \le x_1 \le 4$
$0 \le x_2 \le 2$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

24. $\max(5x_1 + x_2)$
$2x_1 - 3x_2 \le 6$
$4x_1 + 9x_2 \le 18$
$0 \le x_1 \le 2$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

25. $\max(4x_1 + x_2)$
$4x_1 + 3x_2 \le 18$
$x_1 + 2x_2 \le 6$
$0 \le x_1 \le 5$
$0 \le x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 – целые.

Задание №15

Решите методом ветвей и границ следующую задачу коммивояжера:

1. $$\begin{pmatrix} \infty & 31 & 15 & 19 & 8 & 55 \\ 19 & \infty & 22 & 31 & 7 & 35 \\ 25 & 43 & \infty & 53 & 57 & 16 \\ 5 & 50 & 49 & \infty & 39 & 9 \\ 24 & 24 & 33 & 5 & \infty & 14 \\ 34 & 26 & 6 & 3 & 36 & \infty \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \infty & 19 & 25 & 11 & 2 & 55 \\ 37 & \infty & 26 & 58 & 21 & 43 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 38 & 39 & 24 & \infty & 38 & 45 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 33 & 48 & 60 & 53 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \infty & 16 & 13 & 35 & 41 & 52 \\ 19 & \infty & 29 & 31 & 26 & 18 \\ 57 & 51 & \infty & 44 & 51 & 7 \\ 5 & 40 & 32 & \infty & 14 & 16 \\ 33 & 41 & 28 & 3 & \infty & 53 \\ 19 & 54 & 24 & 10 & 41 & \infty \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} \infty & 39 & 45 & 2 & 51 & 33 \\ 30 & \infty & 20 & 33 & 40 & 35 \\ 54 & 16 & \infty & 55 & 22 & 56 \\ 19 & 36 & 25 & \infty & 18 & 43 \\ 29 & 8 & 8 & 12 & \infty & 25 \\ 16 & 47 & 31 & 14 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} \infty & 41 & 27 & 54 & 46 & 5 \\ 42 & \infty & 11 & 32 & 58 & 21 \\ 36 & 5 & \infty & 33 & 22 & 33 \\ 46 & 24 & 59 & \infty & 49 & 59 \\ 48 & 58 & 11 & 44 & \infty & 47 \\ 26 & 50 & 35 & 19 & 27 & \infty \end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} \infty & 21 & 40 & 28 & 60 & 52 \\ 58 & \infty & 11 & 39 & 22 & 56 \\ 22 & 12 & \infty & 23 & 14 & 19 \\ 25 & 47 & 51 & \infty & 20 & 54 \\ 47 & 43 & 18 & 42 & \infty & 52 \\ 44 & 49 & 50 & 29 & 52 & \infty \end{pmatrix}$$

$$7.\ \begin{pmatrix} \infty & 6 & 56 & 35 & 48 & 29 \\ 34 & \infty & 46 & 46 & 55 & 26 \\ 29 & 31 & \infty & 32 & 13 & 42 \\ 26 & 34 & 12 & \infty & 17 & 7 \\ 38 & 35 & 40 & 13 & \infty & 47 \\ 60 & 25 & 59 & 36 & 31 & \infty \end{pmatrix}$$

$$8.\ \begin{pmatrix} \infty & 22 & 26 & 56 & 38 & 60 \\ 34 & \infty & 12 & 51 & 37 & 27 \\ 45 & 33 & \infty & 44 & 47 & 37 \\ 39 & 7 & 16 & \infty & 57 & 8 \\ 35 & 56 & 40 & 58 & \infty & 27 \\ 9 & 20 & 36 & 31 & 18 & \infty \end{pmatrix}$$

$$9.\ \begin{pmatrix} \infty & 4 & 39 & 22 & 10 & 47 \\ 58 & \infty & 56 & 18 & 4 & 35 \\ 34 & 29 & \infty & 17 & 57 & 18 \\ 52 & 4 & 22 & \infty & 15 & 37 \\ 41 & 44 & 25 & 11 & \infty & 32 \\ 11 & 6 & 19 & 2 & 58 & \infty \end{pmatrix}$$

$$10.\ \begin{pmatrix} \infty & 14 & 40 & 33 & 16 & 51 \\ 48 & \infty & 34 & 4 & 11 & 24 \\ 57 & 85 & \infty & 24 & 38 & 52 \\ 30 & 50 & 44 & \infty & 9 & 31 \\ 18 & 42 & 24 & 31 & \infty & 30 \\ 1 & 38 & 31 & 19 & 32 & \infty \end{pmatrix}$$

$$11.\ \begin{pmatrix} \infty & 21 & 15 & 19 & 8 & 55 \\ 9 & \infty & 12 & 31 & 7 & 35 \\ 25 & 43 & \infty & 43 & 47 & 16 \\ 5 & 50 & 49 & \infty & 29 & 9 \\ 14 & 24 & 33 & 5 & \infty & 14 \\ 34 & 26 & 6 & 3 & 26 & \infty \end{pmatrix}$$

$$12.\ \begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 2 & 55 \\ 17 & \infty & 16 & 18 & 21 & 13 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 28 & 29 & 24 & \infty & 28 & 25 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 43 & 48 & 40 & 43 & 21 & \infty \end{pmatrix}$$

$$13.\ \begin{pmatrix} \infty & 16 & 13 & 35 & 41 & 52 \\ 19 & \infty & 29 & 31 & 26 & 18 \\ 57 & 51 & \infty & 44 & 51 & 7 \\ 5 & 40 & 32 & \infty & 14 & 16 \\ 33 & 41 & 28 & 3 & \infty & 53 \\ 19 & 54 & 24 & 10 & 41 & \infty \end{pmatrix}$$

$$14.\ \begin{pmatrix} \infty & 49 & 45 & 42 & 41 & 43 \\ 30 & \infty & 20 & 33 & 40 & 35 \\ 24 & 26 & \infty & 25 & 22 & 26 \\ 19 & 36 & 25 & \infty & 18 & 43 \\ 19 & 18 & 18 & 12 & \infty & 25 \\ 16 & 47 & 31 & 14 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

$$15.\ \begin{pmatrix} \infty & 31 & 37 & 34 & 36 & 35 \\ 42 & \infty & 11 & 32 & 58 & 21 \\ 36 & 5 & \infty & 33 & 22 & 33 \\ 46 & 24 & 59 & \infty & 49 & 59 \\ 28 & 28 & 21 & 24 & \infty & 27 \\ 26 & 50 & 35 & 19 & 27 & \infty \end{pmatrix}$$

$$16.\ \begin{pmatrix} \infty & 41 & 40 & 48 & 40 & 42 \\ 48 & \infty & 41 & 49 & 42 & 46 \\ 22 & 22 & \infty & 23 & 24 & 19 \\ 15 & 17 & 11 & \infty & 10 & 14 \\ 47 & 43 & 18 & 42 & \infty & 52 \\ 34 & 39 & 30 & 39 & 32 & \infty \end{pmatrix}$$

17. $\begin{pmatrix} \infty & 16 & 16 & 15 & 18 & 19 \\ 34 & \infty & 46 & 46 & 55 & 26 \\ 29 & 31 & \infty & 32 & 13 & 42 \\ 26 & 34 & 12 & \infty & 17 & 7 \\ 38 & 35 & 40 & 13 & \infty & 47 \\ 40 & 45 & 49 & 46 & 41 & \infty \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} \infty & 22 & 26 & 26 & 28 & 30 \\ 34 & \infty & 12 & 51 & 37 & 27 \\ 45 & 33 & \infty & 44 & 47 & 37 \\ 39 & 37 & 36 & \infty & 37 & 38 \\ 35 & 56 & 40 & 58 & \infty & 27 \\ 29 & 20 & 36 & 31 & 18 & \infty \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \infty & 24 & 29 & 22 & 20 & 27 \\ 58 & \infty & 56 & 18 & 4 & 35 \\ 34 & 29 & \infty & 17 & 57 & 18 \\ 52 & 54 & 52 & \infty & 55 & 37 \\ 41 & 44 & 25 & 11 & \infty & 32 \\ 11 & 26 & 29 & 22 & 28 & \infty \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} \infty & 14 & 40 & 33 & 16 & 51 \\ 38 & \infty & 34 & 34 & 31 & 34 \\ 57 & 85 & \infty & 24 & 38 & 52 \\ 30 & 40 & 44 & \infty & 49 & 41 \\ 18 & 42 & 24 & 31 & \infty & 30 \\ 21 & 38 & 31 & 19 & 32 & \infty \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} \infty & 31 & 15 & 19 & 8 & 55 \\ 19 & \infty & 22 & 31 & 37 & 35 \\ 25 & 43 & \infty & 53 & 57 & 16 \\ 35 & 50 & 49 & \infty & 39 & 9 \\ 24 & 24 & 33 & 35 & \infty & 14 \\ 34 & 26 & 36 & 33 & 36 & \infty \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} \infty & 9 & 5 & 11 & 2 & 5 \\ 37 & \infty & 26 & 58 & 21 & 43 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 8 & 9 & 14 & \infty & 18 & 15 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 33 & 48 & 60 & 53 & 21 & \infty \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} \infty & 36 & 33 & 35 & 41 & 32 \\ 19 & \infty & 29 & 31 & 26 & 18 \\ 57 & 51 & \infty & 44 & 51 & 7 \\ 25 & 20 & 22 & \infty & 24 & 26 \\ 33 & 41 & 28 & 23 & \infty & 53 \\ 19 & 54 & 24 & 10 & 41 & \infty \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} \infty & 19 & 15 & 12 & 11 & 13 \\ 30 & \infty & 20 & 33 & 40 & 35 \\ 54 & 16 & \infty & 55 & 22 & 56 \\ 19 & 36 & 25 & \infty & 18 & 43 \\ 29 & 28 & 28 & 22 & \infty & 25 \\ 16 & 17 & 11 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} \infty & 51 & 57 & 54 & 46 & 55 \\ 42 & \infty & 11 & 32 & 58 & 21 \\ 36 & 35 & \infty & 33 & 32 & 33 \\ 46 & 24 & 59 & \infty & 49 & 59 \\ 48 & 58 & 11 & 44 & \infty & 47 \\ 26 & 20 & 35 & 29 & 27 & \infty \end{pmatrix}$

ТЕМА 6.

Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели

Для изучения данного раздела дисциплины необходимы знания, полученные при изучении тем 3 и 4.

Изучив данную тему, студент должен:

- уметь решать транспортную задачу;
- иметь общие представления о экономических задачах, сводящихся к транспортной модели.

Цель изучения – получить представление об особенностях решения транспортной задачи и задачи о назначении.

В данной теме рассматриваются транспортная модель и ее варианты. Такая модель используется для составления наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов (например, заводов) в пункты доставки (например, склады). Транспортную модель можно применять при рассмотрении ряда практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, назначением служащих на рабочие места, оборотом наличного капитала, регулированием расхода воды в водохранилищах и многими другими. Кроме того, модель можно видоизменить, с тем чтобы она учитывала перевозку нескольких видов продукции.

Транспортная задача представляет собой ЗЛП, однако ее специфическая структура позволяет так модифицировать симплекс-метод, что вычислительные процедуры становятся более эффективными. При разработке метода решения транспортной задачи существенную роль играет теория двойственности.

В классической транспортной задаче рассматриваются перевозки (прямые или с промежуточными пунктами) одного или нескольких видов продукции из исходных пунктов в пункты назначения. Эту задачу можно видоизменить, включив в нее ограничения сверху на пропускные способности транспортных коммуникаций. Задачу о назначениях и задачу управления запасами можно рассматривать как задачи транспортного типа.

6.1. Транспортная задача линейного программирования

Постановка задачи

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве $a_i(i = 1, ..., m)$ единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве $b_j(j = 1,..., n)$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывести все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий минимальную стоимость.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Так как от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Стоимость всего плана выразится двойной суммой:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1 \ldots m,$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \quad j = 1..n \ .$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид: найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ ; \qquad (6.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \quad i = 1 \ldots m; \qquad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \quad j = 1 \ldots n \qquad (6.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n. \qquad (6.4)$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (6.5)$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (6.5), называется закрытой моделью; в противном случае – открытой. Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \ ;$$

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

Найти минимальное значение линейной функции:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ , \quad i = 1..m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \quad j = 1..n \ , \ x_{ij} \ge 0 \qquad \text{(случай «а»)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \quad i = 1..m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \ , \quad j = 1..n \ , \ x_{ij} \ge 0 \qquad \text{(случай «б»)}$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае «а», когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребность которого:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

В случае «б», когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \ .$$

Как стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, поскольку груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет n + m уравнений с mn неизвестными.

Матрицу $X = (x_{ij})_{m,n}$, удовлетворяющую условиям (6.2) – (6.4), называют планом перевозок транспортной задачи (x_{ij}-перевозками).

План X*, при котором целевая функция (6.1) обращается в минимум, называется **оптимальным**.

Теорема 6.1. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

План транспортной задачи называется опорным, если положительным перевозкам соответствует система линейно независимых векторов $\overline{P_{ij}}$ (i = 1... m, j = 1… n), где $\overline{P_{ij}}$ – векторы при переменных x_{ij} (i = 1… m, j = 1… n) в матрице системы ограничений (6.2) – (6.4).

Теорема 6.2. Существует план, содержащий не более m + n – 1 положительных перевозок, при этом система векторов $\overline{P_{ij}}$, соответствующая таким перевозкам ($x_{ij} > 0$), линейно независима.

Таким образом, опорный план транспортной задачи содержит m + n – 1 положительных перевозок. Если менее (m + n – 1) компонент оперного плана положительны, то он называется вырожденным. Дадим другое определение опорного плана.

План транспортной задачи называется **опорным**, если из его основных коммуникаций невозможно составить замкнутый маршрут.

Методы составления первоначальных опорных планов

Метод северо-западного угла используют для нахождения произвольного опорного плана транспортной задачи.

Схема метода:

1) Полагают верхний левый элемент матрицы X

$$x_{11} = \min (a_1, b_1).$$

Возможны три случая:

а) если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и всю первую строку, начиная со второго элемента, заполняют нулями;

б) если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца заполняют нулями;

в) если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, а все оставшиеся элементы первых столбца и строки заполняют нулями.

2) Пусть проделано k шагов, (k_μ)-й шаг состоит в следующем.

Определяют верхний левый элемент незаполненной части матрицы X. Пусть это элемент $x_{\lambda\mu}(\lambda + \mu = k + \lambda)$.

Тогда полагают $x_{\lambda\mu} = \min(a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)})$, где

$$a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j} \text{ и } b_\mu^{(k)} = b_\mu - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}.$$

Если $a_\lambda^{(k)} < b_\mu^{(k)}$, то заполняют нулями λ-ю строку начиная с $(\mu + 1)$-го элемента. В противном случае заполняют нулями оставшуюся часть μ-го столбца.

Метод минимального элемента позволяет построить начальный опорный план транспортной задачи и является вариантом метода северо-западного угла, учитывающим специфику матрицы $C = (c_{ij})_{m,n}$. В отличие от метода северо-западного угла данный метод позволяет сразу получить достаточно экономичный план и сокращает общее количество итераций по его оптимизации.

Схема метода: элементы матрицы C нумеруют, начиная от минимального в порядке возрастания, а затем в этом же порядке заполняют матрицу X^0.

Пусть элементом с минимальным порядковым номером оказался элемент x_{ij}^0.

Тогда полагают $x_{ij}^0 = \min(a_i, b_j)$.

Возможны три случая:

а) если $\min(a_i, b_j) = a_i$, то оставшуюся часть i-й строки заполняют нулями;

б) если $\min(a_i, b_j) = b_j$, то оставшуюся часть j-го столбца заполняют нулями;

в) если $a_i = b_j$, то оставшуюся часть строки и столбца заполняют нулями.

Далее этот процесс повторяют с незаполненной частью матрицы.

Пусть элементом с k-ым порядковым номером оказался $x_{\lambda\mu}^{(k)}$.

Тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = \min(a_{\lambda}^{(k)}, b_{\mu}^{(k)})$, где

$$a_{\lambda}^{(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}^{(g)} \quad g = 1..k-1$$

$$b_{\mu}^{(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}^{(u)} \quad u = 1..k-1.$$

Возможны три случая:

а) $a_{\lambda}^{(k)} < b_{\mu}^{(k)}$, тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = a_{\lambda}^{(k)}$ и оставшуюся часть строки λ заполняют нулями;

б) $a_{\lambda}^{(k)} > b_{\mu}^{(k)}$, тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$ и остаток столбца μ заполняют нулями;

в) $a_{\lambda}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$, тогда оставшуюся часть строки λ и столбца μ заполняют нулями.

Метод потенциалов решения транспортной задачи

Для транспортной задачи (ТЗ), как и для любой ЗЛП, существует двойственная к ней задача.

Исходная задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}; \tag{6.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m}; \tag{6.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n}; \tag{6.8}$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{6.9}$$

Обозначим двойственные переменные для каждого ограничения вида (6.7) через U_i (i = 1,..., m) и вида (6.8) – V_j (j = 1,..., n), тогда двойственная задача имеет вид

$$\max\left[\sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j\right]; \tag{6.10}$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{6.11}$$

Переменные задачи, двойственной к транспортной, U_i и V_j называют потенциалами.

Теорема 6.3. Для оптимальности плана $X = (X_{ij})_{m*n}$ ТЗ необходимо и достаточно существования чисел (потенциалов) $V_1, V_2,..., V_n$ и $U_1, U_2,..., U_m$, таких, что:

$U_i + V_j \leq C_j$ для i = 1,..., m, j = 1,..., n;

$U_i + V_j = C_j$, если $X_{ij} > 0$.

Из теоремы следует: для того чтобы опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки (отличного от нуля элемента матрицы X) сумма потенциалов должна быть равна стоимости перевозки единицы груза

$$U_i + V_j = C_j; \qquad (6.12)$$

б) для каждой незанятой клетки ($X_{ij} = 0$) сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости перевозки единицы груза

$$U_i + V_j \le C_{ij}. \qquad (6.13)$$

Таким образом, для проверки плана на оптимальность необходимо сначала построить систему потенциалов. Для построения системы потенциалов используем условие

$$U_i + V_j = C_j,\ X_{ij} > 0.$$

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Такой план содержит m + n – 1 занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из m + n – 1 линейно-независимых уравнений вида (6.12) с неизвестными U_i и V_j. Уравнений на одно меньше, чем переменных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно U_i) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно.

Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток

Просматриваем строки и для каждой незанятой клетки проверяем выполнения условия (6.13), т.е. суммируем потенциалы тех строк и столбцов, на пересечении которых стоит незанятая клетка. Если для всех незанятых клеток $U_i + V_j \le C_{ij}$, то по теореме (6.3) проверяемый план является оптимальным. Если для некоторых клеток $U_i + V_j > C_{ij}$, то план является неоптимальным. Тогда для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину $(U_i + V_j) – C_{ij} > 0$.

Выбор клетки, в которую необходимо поместить перевозку

Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует

$$\max((U_i + V_j) – C_{ij}).$$

Построение цикла и определение величины перераспределения груза

Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+» незанятую клетку, которую надо загрузить. Это означает, что клетка присоединяется к занятым клеткам. Занятых клеток стало m + n, поэтому появляется цикл, все вершины которого за исключением клетки, отмеченной знаком «+», находятся в занятых клетках, причем этот цикл единственный. Отыскиваем цикл и, начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+», поочередно проставляем знаки «–» и «+». Затем находим $\theta_0 = \min X_{ij}$, где X_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком «–». Величина θ_0 определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Значение θ_0 записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком «+». Двигаясь по циклу, вычитаем θ_0 из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые отмечены знаком «–», и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Если θ_0 соответствует несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было m + n – 1.

Проверка нового плана на оптимальность

Для проверки на оптимальность опорного плана нужно вновь построить систему потенциалов и проверить выполнение условия оптимальности для каждой незанятой клетки. Если полученный план снова окажется неоптимальным, то следует выполнить вычисления, приведенные в предыдущем пункте. Процесс повторяют до тех пор, пока все незанятые клетки не будут удовлетворять условию (6.13).

Пример 6.1. Решить ТЗ:

5	4	6	3	200
1	10	2	1	300
2	3	3	1	100
150	150	250	50	600 / 600

Условие баланса выполнено. Следовательно, имеем ТЗ закрытого типа.

Предварительный этап: находим исходный опорный план X° методом «минимального элемента».

Таблица 6.1

	100	100		200
150		150		300
	50		50	100
150	150	250	50	

Число занятых клеток равно 6 и совпадает с рангом матрицы ограничений ТЗ:

$$r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Итерация 1. Для проверки полученного опорного плана на оптимальность находим систему потенциалов для занятых клеток ($x_{ij} > 0$).

Для этого, например, полагаем $U_1 = 0$ (записываем $U_1 = 0$ слева в табл. 6.2).

Таблица 6.2

U_i \ V_j	$V_1 = 5$	$V_2 = 4$	$V_3 = 6$	$V_4 = 2$	
$U_1 = 0$	5 $\boxed{5}$	100+ $\boxed{4}$	100– $\boxed{6}$	2 $\boxed{3}$	200
$U_2 = -4$	150– $\boxed{1}$	0 $\boxed{10}$	150+ $\boxed{2}$	–2 $\boxed{1}$	300
$U_3 = -1$	4 θ_1 $\boxed{2}$	50– $\boxed{3}$	5 $\boxed{3}$	50 $\boxed{1}$	100
	150	150	250	50	

Далее, исходя из занятых клеток (1,2) и (1,3), находим $V_2 = 4 - 0 = 4$, $V_3 = 6 - 0 = 6$ (записываем сверху в таблице). На основе базисной клетки (2,3) получаем $U_2 = 2 - 6 = -4$, затем $V_1 = 1 - (-4) = 5$; $U_3 = 3 - 4 = -1$; $V_4 = 2$.

Далее вычисляем сумму потенциалов для каждой из свободных клеток и записываем их в верхнем левом углу. Так как для клеток (3,1) и (3,3) критерий оптимальности не выполняется:

$$U_3 + V_1 = 4 > 2,$$
$$U_3 + V_3 = 5 > 3,$$

то полученный опорный план не оптимальный. Так как

$$\Delta_{31} = U_3 + V_1 - C_{ij} = 2 = \Delta_{33},$$

то в любую из клеток, например, в (3,1), проставляем некоторое число θ_1.

Для того чтобы не нарушился баланс в 3-й строке, вычитаем θ_1 из величины перевозки, стоящей в клетке (3,2), прибавляем к $X_{12} = 100$, вычитаем от X_{13}, прибавляем к X_{23} и вычитаем от X_{21}, т.е. составляем цикл:

$$\mathbf{(3,1) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,3) \to (2,3) \to (2,1) \to (3,1).}$$

Знаки «+» и «–» в клетках чередуются.

Заметим, что движение от одной клетки к другой происходит только по занятым, кроме первой, в которую θ_1 проставляется. Максимальное значение θ_1 равно наименьшему уменьшаемому: $\theta_1 = 50$. Если θ_1 взять больше, то получаем отрицательную величину в плане перевозок, а если меньше, то нарушается опорность плана.

Новый опорный план приведен в табл. 6.3

Таблица 6.3

U_i \ V_j	5	4	6	4
0	5 $\boxed{5}$	150 $\boxed{4}$	50- $\boxed{6}$	4 θ_2 $\boxed{3}$
–4	100- $\boxed{1}$	0 $\boxed{10}$	200+ $\boxed{2}$	0 $\boxed{1}$
–3	50+ $\boxed{2}$	1 $\boxed{3}$	3 $\boxed{3}$	50- $\boxed{1}$

Итерация 2. Проверяем полученный план $X^{(1)}$ на оптимальность. Находим систему потенциалов (они записаны в таблице слева и сверху). Вычисляем сумму потенциалов для свободных клеток (записаны в левом верхнем углу клетки). Так как

$$U_1 + V_4 = 4 > 3,$$

то план $X^{(1)}$ не является оптимальным. Для построения нового опорного плана проставляем величину θ_2 в клетку (1,4) и составляем цикл:

$$(1,4) \to (3,4) \to (3,1) \to (2,1) \to (2,3) \to (1,3) \to (1,4).$$

Определяем значение $\theta_2 = 50$, при этом две клетки (1,3) и (3,4) обращаются в нулевые. Следовательно, план $X^{(2)}$ будет вырожденным. Для дальнейшего решения необходимо оставить нуль в одной из клеток и считать ее за базисную. Целесообразнее нуль оставить в клетке с меньшей стоимостью перевозок, т.е. в клетке (3,4). Новый опорный план приведен в табл. 6.4.

Таблица 6.4

U_i \ V_j	$V_1=4$	$V_2=4$	$V_3=5$	$V_4=3$
$U_1 = 0$	4 $\boxed{5}$	4 $\boxed{4}$ 150	5 $\boxed{6}$	3 $\boxed{3}$ 50
$U_2 = -3$	$\boxed{1}$ 50	1 $\boxed{10}$	$\boxed{2}$ 250	0 $\boxed{1}$
$U_3 = -2$	$\boxed{2}$ 100	2 $\boxed{3}$	3 $\boxed{3}$	1 $\boxed{1}$

Итерация 3. Число занятых клеток равно 6. Находим значения потенциалов и их сумму для свободных клеток. Критерий оптимальности выполняется:

$$U_i + V_j \le C_{ij} \text{ для } X_{ij} = 0;\ i = 1, m;\ j = 1, n,$$

поэтому полученный план является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} ... & 150 & ... & 50 \\ 50 & ... & 250 & ... \\ 100 & ... & ... & ... \end{pmatrix} \text{ и } f(x^*) = 1500.$$

Пример 6.2. Решить задачу:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 7 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 \end{matrix}} \begin{matrix} 80 \\ 60 \\ 60 \end{matrix} \\ 30\ 70\ 60 \end{array}$$

Решение. Объем ресурсов: 80 + 60 + 60 = 200 – превышает общие потребности 30 + 70 + + 60 = 160 на 40 ед., следовательно, ТЗ является задачей открытого типа. Вводим дополнительный (балансовый) пункт потребления с объемом потребностей $b_4 = 40$ и полагаем $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$. В результате получаем ТЗ закрытого типа.

Предварительный этап. Находим исходный опорный план $x^{(0)}$ методом «минимального элемента» (табл. 6.5).

Таблица 6.5

U_i \ V_j	7	3	4	2
0	$\boxed{7}$ 10–	$\boxed{3}$ 70	4 $\boxed{4}$	2 $\boxed{0}$ Θ_1
–2	$\boxed{5}$ 20+	1 $\boxed{7}$	2 $\boxed{8}$	$\boxed{0}$ 40–
–2	5 $\boxed{3}$	1 $\boxed{8}$	$\boxed{2}$ 60	$\boxed{0}$ 0

Данный план является вырожденным, поэтому ставим «0» – перевозку в клетку с минимальным значением c_{ij}, но так, чтобы не образовалось замкнутого маршрута (цикла). В нашем примере $c_{14} = c_{34} = 0$, но занять клетку (1,4) нельзя, так как образуется цикл:

$$(1,4) \to (2,4) \to (2,1) \to (1,1) \to (1,4).$$

Поэтому ставим «0» в клетку (3,4).

Итерация 1. Проверяем план $x^{(0)}$ на оптимальность. Положив $u_1 = 0$, находим потенциалы (см. табл. 6.5). Далее находим сумму потенциалов для свободных клеток (они записаны в левом верхнем углу клетки). Так как

$$u_1 + v_4 = 2 > 0;$$
$$u_3 + v_1 = 5 > 3,$$

то полученный опорный план x^0 неоптимальный. Для клеток (1,4) и (3,1) оценки одинаковы: $\Delta_{14} = 2 - 0 = 2$ и $\Delta_{31} = 5 - 3 = 2$, поэтому выбираем любую, например, (1,4). Проставляем в эту клетку Θ_1 и составляем цикл, чередуя знаки «+» и «–»; получим $\Theta_1 = 10$. Новый опорный план представлен в табл. 6.6.

Таблица 6.6

U_i \ V_j	5	3	2	0
0	5 7	3 70	2 4	0 10
0	5 30–	3 7	2 8	0 30+
0	5 3 Θ_2	3 8	2 60	0 0–

Итерация 2. Находим систему потенциалов (см. слева и сверху табл. 6.6). Сумма потенциалов для небазисных клеток записана в левом верхнем углу. Критерий оптимальности не выполняется для клетки (3,1):

$$\Delta_{31} = 5 - 3 = 2 > 0.$$

Проставим в эту клетку Θ_2 и составим замкнутую цепочку, в результате получаем $\Theta_2 = 0$. Опорный план $x^{(2)}$ представлен в таблице 6.7.

Итерация 3. Найдя систему потенциалов, убеждаемся в оптимальности плана $x^{(2)}$ (табл. 6.7).

Таблица 6.7

U_i \ V_j	5	3	4	0
0	5 $\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 70	4 $\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 10
0	$\boxed{5}$ 30	3 $\boxed{7}$	4 $\boxed{8}$	$\boxed{0}$ 30
–2	$\boxed{3}$ 0	1 $\boxed{8}$	$\boxed{2}$ 60	-2 $\boxed{0}$

Транспортные издержки составляют 480 и $\overline{x}^* = (0,\ 70,\ 0,\ 30,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 60)$. Так как четвертый потребитель фиктивный, то 10 ед. груза останутся у первого поставщика, 30 ед. – у второго.

Пример 6.3. Методом потенциалов решите следующую ТЗ:

6	6	1	4	80
12	–	6	5	320
5	4	3	–	150
250	100	150	50	

Прочерк между пунктами A_2 и B_2, A_3 и B_4 означает, что перевозки между указанными пунктами запрещены.

Проверяем условие баланса:

$$80 + 320 + 150 = 550 = 250 + 100 + 150 + 50.$$

Для решения задачи полагаем, что стоимости перевозки единицы груза по запрещенным маршрутам равны достаточно большому числу M > 0. Далее эта M-задача решается обычным методом потенциалов, но потенциалы будут зависеть от коэффициента M. Если оптимальный план M-задачи содержит положительные перевозки по запрещенным маршрутам, то исходная ТЗ неразрешима (множество ее планов пусто). В противном случае получаем решение исходной ТЗ.

Предварительный этап. Составляем методом «минимального элемента» исходный опорный план $\overline{x}^0$ (табл. 6.8).

Итерация 1. Вычисляем потенциалы и проверяем план на оптимальность (см. табл. 6.8).

Таблица 6.8

V_j / U_i	10 – M	2	1	7 – M
0	10-M [6]	2 [6]	[1] 80	7-M [4]
M – 2	[8] 250	[M] 20–	M-1 [6] Θ_1	[5] 50
2	12-M [5]	[4] 80+	[3] 70–	9-M [M]

В клетке (2,3) имеем

$$u_2 + v_3 = M - 2 + 1 > 6\,,$$

т.е. план $\overline{x}^{(0)}$ не является оптимальным. Проставляем в эту клетку Θ_1 и составляем замкнутый маршрут. Получаем $\Theta_1 = 20$. Опорный план $\overline{x}^1$ приведен в табл. 6.9.

Итерация 2. Проверяем план $\overline{x}^1$ на оптимальность. Так как для всех свободных клеток

$$u_i + v_j \le c_{ij}\,,$$

то план $\overline{x}^1$ – оптимальный и не содержит положительных перевозок по запрещенным маршрутам.

Таблица 6.9

V_j / U_i	$v_1 = 3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	3 [6]	2 [6]	[1] 80	0 [4]
$u_2 = 5$	[8] 250	7 [M]	[6] 20	[5] 50
$u_3 = 2$	5 [5]	[4] 100	[3] 50	2 [M]

Минимальные транспортные расходы составляют 3000.

Определение оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые усложнения в их постановке

1. При некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M и при этом условии известными методами находят решение ТЗ. Такой подход к нахождению решения ТЗ называется запрещением перевозок.

2. В отдельных ТЗ дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из A_i в

B_j требуется обязательно перевезти α_{ij} единиц груза. Тогда в соответствующую клетку таблицы, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j, записывают указанное число α_{ij} и в дальнейшем считают эту клетку свободной со сколь угодно большой стоимостью перевозки М. Для полученной таким образом новой ТЗ находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

3. Иногда требуется найти решение ТЗ, при котором из A_i в B_j должно быть перевезено не менее заданного количества груза α_{ij}. Для определения оптимального плана такой задачи считают, что запасы A_i и потребности B_j меньше фактических на α_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план новой ТЗ, на основании которого и определяют решение исходной задачи.

Примечание: При целых a_i (i = 1,..., m) и b_j (j = 1,..., n), в силу специфики ограничений ТЗ, любое базисное допустимое решение является целочисленным.

6.2. Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели

В этом разделе будет рассмотрено несколько примеров экономических задач, решение которых может быть найдено с помощью транспортной модели.

Оптимальное распределение оборудования

Оборудование m различных видов нужно распределить между n рабочими участками. Производительность единицы оборудования i-го вида на j-ом рабочем участке равна p_{ij}; $i = 1,\dots, m$; $j = 1,\dots, n$. Потребность j-го участка в оборудовании составляет b_j, $j = 1,\dots, n$. Запас оборудования i-го вида равен a_i, $i = 1,\dots, m$. Найти распределение оборудования по рабочим участкам, при котором суммарная производительность максимальна.

Данная задача относится к классу ТЗ при условии, что производительность линейно зависит от количества используемого оборудования. Поставщиками в задаче являются различные виды оборудования, потребителями – рабочие участки.

Обозначим через x_{ij} число единиц оборудования i-го вида, выделенное на j-й рабочий участок, $i = 1,\dots, m$; $j = 1,\dots, n$. Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$P = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij} \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,\dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,\dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ ;$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots, n.$$

Построенная модель является сбалансированной. Если запас оборудования и потребность в нем не равны, то переход к сбалансированной модели осуществляется с помощью преобразований, изложенных в пункте 6.1.

В данной задаче требуется максимизировать целевую функцию P, представляющую суммарную производительность. Для перехода к стандартной транспортной модели надо заменить функцию P на противоположную функцию, $-P$ которую нужно будет минимизировать.

При решении в матрице вместо стоимостей перевозок единицы груза будут стоять производительности, взятые с противоположным знаком. Далее задача решается методом потенциалов.

Формирование оптимального штата фирмы

Фирма набирает штат сотрудников. Она располагает n группами различных должностей по b_j вакантных единиц в каждой группе, $j = 1,\dots, n$. Кандидаты для занятия должностей проходят тестирование, по результатам которого их разделяют на m групп по a_i кандидатов в каждой группе, $i = 1,\dots, m$. Для каждого кандидата из i-й группы требуются определенные затраты c_{ij} на обучение для занятия j-й должности, $i = 1,\dots, m$; $j = 1,\dots, n$. (В частности, некоторые $c_{ij} = 0$, т.е. кандидат полностью соответствует должности, или $c_{ij} = \infty$, т.е. кандидат вообще не может занять данную должность). Требуется распределить кандидатов на должности, затратив минимальные средства на их обучение.

Предположим, что общее число кандидатов соответствует числу вакантных должностей. (Если это не так, то следует просто проделать преобразование раздела 6.1). Тогда данная задача соответствует транспортной модели. В роли поставщиков выступают группы кандидатов, а в роли потребителей – группы должностей. В качестве тарифов на перевозки рассматриваются затраты на переобучение.

Математическая модель записывается в виде:

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ ;$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\dots, m;\ j = 1,\dots, n.$$

Задача календарного планирования производства

Рассмотрим задачу календарного планирования производства на N последовательных этапах. Спрос изменяется во времени, но детерминирован. Его можно удовлетворить либо путем изменения уровня запаса при постоянном объеме производства, либо за счет изменения объема производства при постоянном уровне запаса, либо путем изменения и уровня запаса, и выпуска. Изменения объема производства можно добиться, проводя сверхурочные работы, а изменения уровня запаса можно обеспечить за счет создания постоянного положительного запаса либо за счет неудовлетворенного спроса.

Нужно отыскать календарный план производства на N этапов, минимизирующий суммарные затраты. В модели предполагаются нулевые затраты на оформление заказа для любого этапа. В общем случае допускается дефицит при условии, что весь задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу этапа N. Эти условия можно записать в виде транспортной задачи.

Введем следующие обозначения для этапа i; $i = 1,2,\ldots, N$:

c_i – производственные затраты на единицу продукции при обычном режиме работы;

d_i – производственные затраты на единицу продукции при работе в сверхурочное время ($d_i > c_i$);

h_i – затраты на хранение единицы продукции, переходящей из этапа i в этап $i + 1$;

p_i – потери от дефицита на единицу продукции, требуемой на этапе i, но поставляемой на этапе $i + 1$;

$a_{r\,i}$– производственная мощность (в единицах продукции) при обычном режиме работы;

a_{ti} – производственная мощность (в единицах продукции) при работе в сверхурочное время;

b_i – спрос (в единицах продукции).

Модель без дефицита

В соответствии с терминологией транспортной модели поставщики представлены обычным и сверхурочным производством для различных этапов. Потребители задаются спросом соответствующих этапов. Затраты на «транспортировку» единицы продукции от любого поставщика к любому потребителю представляются суммой соответствующих производственных затрат и затрат на хранение единицы продукции.

Матрица полных затрат для эквивалентной транспортной задачи приведена в следующей табл. 6.10:

Таблица 6.10

	спрос на этапе j				избыток		
	1	2	3	...	N		
R_1	C_1	$C_1 + h_1$	$C_1 + h_1 + h_2$		$C_1 + h_1 + \ldots + h_{N-1}$	0	a_{R1}
T_1	d_1	$d_1 + h_1$	$d_1 + h_1 + h_2$		$d_1 + h_1 + \ldots + h_{N-1}$	0	a_{T1}
R_2		C_2	$C_2 + h_2$		$C_2 + h_2 + \ldots + h_{N-1}$	0	a_{R2}
T_2		d_2	$d_2 + h_2$		$d_2 + h_2 + \ldots + h_{N-1}$	0	a_{T2}
...							...
RN					C_N	0	a_{RN}
TN					d_N	0	a_{TN}
	b_1	b_2	b_3	...	b_N	S	

Дополнительный столбец используется для балансировки транспортной задачи, т.е. S = $\sum_i a_i - \sum_j b_j$. Затраты на единицу продукции в дополнительном столбце равны нулю. Так как дефицит не допускается, то продукцию, выпускаемую на рассматриваемом этапе, нельзя использовать для удовлетворения спроса предыдущих этапов. В таблице это ограничение представлено заштрихованными ячейками, что, в сущности, эквивалентно очень большим затратам на единицу продукции.

Так как задолженность в модели не допускается, то для каждого этапа k в нее необходимо включить ограничение, состоящее в том, что накопленный спрос не должен превышать соответствующий общий объем произведенной продукции, т.е.

$$\sum_{i=1}^{k}\left(a_{Ri}+a_{Ti}\right) \geq \sum_{j=1}^{k} b_j,\ k = 1, 2,..., N.$$

Так как спрос на этапе i должен быть удовлетворен прежде, чем спрос на этапах $i + 1$, $i + 2$,..., N, и поскольку на функцию производственных затрат наложены специальные требования, нет необходимости применять общий алгоритм решения транспортной задачи. Сначала путем последовательного назначения максимально возможных поставок по наиболее дешевым элементам первого столбца удовлетворяется спрос на этапе 1. Затем корректируются значения a_i, которые после этого определяют оставшиеся мощности для различных этапов. Далее рассматривается этап 2, и его спрос удовлетворяется наиболее дешевыми поставками в пределах новых ограничений на производственные мощности. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет удовлетворен спрос этапа N.

Пример 6.6.

Период I	Мощность (в единицах продукции)		Спрос b_i (в единицах продукции)
	a_{Ri}	a_{Ti}	
1	100	50	120
2	150	80	200
3	100	100	250
4	200	50	200
Всего	550	280	770

Производственные затраты на всех этапах одинаковы, т.е. $c_i = 2$ и $d_i = 3$ при всех i. Издержки на хранение также постоянны на всех этапах и равны $h_i = 0{,}1$ для любого i. Условия эквивалентной транспортной задачи приведены в таблице:

	1	2	3	4	Избыток	
R_1	2 100	2,1 –	2,2 –	2,3 –	0 –	100
T_1	3 20	3,1 –	3,2 20	3,3 –	0 10	50; 30; 10
R_2		2 150	2,1 –	2,2 –	0 –	150
T_2		3 50	3,1 30	3,2 –	0 –	80; 30
R_3			2 100	2,1 –	0 –	100
T_3			3 100	3,1 –	0 –	100
R_4				2 200	0 –	200
T_4				3 –	0 50	50
	120 20	200 50	250 150 50 20	200	60 10	

В оптимальности решения можно убедиться, воспользовавшись условием оптимальности алгоритма транспортной задачи. Заметим, что полученное оптимальное решение является вырожденным.

Упражнение:

а) Определите следующие величины:

- объем производства на этапе 1 для этого же этапа (120 единиц);
- объем производства на этапе 1 для этапа 2 (нулевой);
- объем производства на этапе 1 для этапа 3 (20 единиц);
- объем производства при обычном режиме работы и в сверхурочное время на этапе 1 (100 и 40 единиц соответственно);
- запас, переходящий из этапа 1 в этап 3 (20 единиц);
- запас, переходящий из этапа 2 в этап 3 (50 единиц);
- запас, переходящий из этапа 3 в этап 4 (нулевой);

б) Предположив, что на этапе 4 требуется 55 дополнительных единиц продукции, определите, каким образом эту продукцию нужно выпустить (50 единиц в сверхурочное время на этапе 4 и 5 единиц в сверхурочное время на этапе 1).

Модель с дефицитом

Рассмотрим обобщение описанной выше модели при условии, что допускается дефицит. Предполагается, что задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу N-этапного горизонта планирования. Табл. 6.10 можно легко модифицировать, чтобы учесть влияние задолженности, введя соответствующие удельные издержки в заблокированные маршруты.

Так, например, если p_i – удельные потери от дефицита (на единицу продукции) в случае, когда продукция требуется на этапе i, а поставляется на этапе $i + 1$, то удельные расходы, соответствующие ячейкам ($R_{N,1}$) и ($T_{N,1}$), составляют: $\{c_N + p_1 + p_2 + \ldots + p_{N-1}\}$ и $\{d_N + p_1 + p_2 + \ldots + p_{N-1}\}$ соответственно.

Заметим, что в общем случае описанный выше алгоритм может не привести к оптимальному решению.

Пример 6.5. Рассмотрим трехэтапную модель, в которой используется обычное и сверхурочное производство. Производственные мощности для трех этапов следующие:

Период	Мощность	
	обычная	сверхурочная
1	15	10
2	15	0
3	20	15

Удельные производственные затраты составляют 5 при обычном режиме работы и 10 при сверхурочной работе. Затраты на хранение и потери от дефицита равны 1 и 2 соответственно. Для трех этапов требуется 20, 35 и 15 единиц продукции соответственно. Исходные данные соответствующей транспортной модели приведены в таблице. На этапе 2 сверхурочные работы не проводятся, так как соответствующая мощность равна нулю.

	1	2	3	Избыток	
R_1	5 15	6 –	7 –	0 –	15
T_1	10 5	11 5	12 –	0 5	10
R_2	7 5	5 10	6 –	0 –	15
R_3	9 –	7 20	5 –	0 –	20
T_3	14 –	12 10	10 –	0 5	15
	20	35	15	5	

В таблице приведено решение задачи, полученное с использованием описанного выше алгоритма. Суммарные затраты составляют:

$$15\times5+5\times7+5\times11+10\times5+20\times7+15\times10 = 505 \text{ (денежных единиц).}$$

Данное решение не является оптимальным и, следовательно, необходимо применять общий алгоритм решения транспортной задачи. В результате использования метода минимальной стоимости сразу получим оптимальный план:

		1 $V_1 = -1$	2 $V_2 = 0$	3 $V_3 = -2$	Избыток $V_4 = -12$	
$U_1 = 6$	R_1	5 15	6 –	7 –	0 –	15
$U_2 = 11$	T_1	10 5	11 5	12 –	0 5	10
$U_3 = 5$	R_2	7 –	5 15	6 –	0 –	15
$U_4 = 7$	R_3	9 –	7 5	5 15	0 –	20
$U_5 = 12$	T_3	14 –	12 10	10 –	0 5	15
		20	35	15	5	

Суммарные затраты в этом случае составят:

$$15\times5+5\times10+5\times11+15\times5+5\times7+10\times12+15\times5 = 485 \text{ (денежных единиц).}$$

Пример 6.6. Модель производства с запасами.

Некоторая фирма переводит свой главный завод на производство определенного вида изделий, которые будут выпускаться в течение четырех месяцев. Величины спроса в течение этих четырех месяцев составляют 100, 200, 180 и 300 изделий соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет:

1) избытка произведенных в прошлом месяце изделий, сохраняющихся для реализации в будущем;
2) производства изделий в течение текущего месяца;
3) избытка производства изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов.

Затраты на одно изделие в каждый месяц составляют 4 долл. Изделие, произведенное для более поздней реализации, влечет за собой дополнительные издержки на хранение в 0,5 долл. в месяц. С другой стороны, каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом 2 долл. в месяц.

Объем производства изделий меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре месяца предполагается выпуск 50, 180, 280 и 270 изделий соответственно.

Требуется составить план, имеющий минимальную стоимость производства и хранения изделий.

Задачу можно сформулировать как ТЗ. Эквивалентность между элементами производственной и транспортной систем устанавливается следующим образом.

Транспортная система	Производственная система
1. Исходный пункт i 2. Пункт назначения j 3. Предложение в пункте i 4. Спрос в пункте j 5. Стоимость перевозки из i в j	1. Период производства i 2. Период потребления j 3 Объем производства за период j 4. Реализация за период j 5. Стоимость производства и хранения за период от i до j

Таблица 6.11 иллюстрирует структуру транспортной модели. Для рассматриваемой задачи стоимость «перевозки» изделия из периода i в период j выражается как:

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{стоимость производства в } i\text{-й период, } i = j; \\ \text{стоимость производства в } i\text{-й период + стоимость задержки от } i \text{ до } j,\ i < j; \\ \text{стоимость производства в } i\text{-й период + штраф за нарушение срока, } i > j. \end{cases}$$

Из определения c_{ij} следует, что затраты в период i при реализации продукции в тот же период i ($i = j$) оцениваются только стоимостью производства. Если в период i производится продукция, которая будет потребляться позже ($i < j$), то имеют место дополнительные издержки, связанные с хранением. Аналогично производство в 1-й период в счет невыполненных заказов $\{i>j\}$ влечет за собой дополнительные расходы в виде штрафа. Например,

$c_{11} = 4$ долл.,

$c_{24} = 4 + (0{,}5 + 0{,}5) = 5$ долл.,

$c_{41} = 4 + (2 + 2 + 2) = 10$ долл.

Таблица 6.11

		Период				Объем производства
		1	2	3	4	
Период	1	4	4,5	5	5,5	50
	2	6	4	4,5	5	180
	3	8	6	4	4,5	280
	4	10	8	6	4	270
Спрос		100	200	180	300	

6.3. Задача о назначениях

Рассмотрим ситуацию, когда требуется распределить m работ (или исполнителей) по n станкам. Работа i (i = 1, ..., m), выполняемая на станке j (j = 1, ..., n), связана с затратами c_{ij}. Задача состоит в таком распределении работ по станкам (одна работа выполняется на одном станке), которое соответствует минимизации суммарных затрат.

Эту задачу можно рассматривать как частный случай транспортной задачи. Здесь работы представляют «исходные пункты», а станки – «пункты назначения». Предложение в каждом исходном пункте равно 1, т.е. $a_i = 1$ для всех i. Аналогично спрос в каждом пункте назначения равен 1, т.е. $b_j = 1$ для всех j. Стоимость «перевозки» (прикрепления) работы i к станку j равна c_{ij}. Если какую-либо работу нельзя выполнять на некотором станке, то соответствующая стоимость c_{ij} берется равной очень большому числу. Матрица стоимостей C определяется следующим образом:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{станки} \\
 & \begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & \ldots & n & a_i \\
\end{array} \\
\text{виды работ} & \begin{array}{c}1\\2\\\ldots\\m\end{array}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{c}1\\1\\\ldots\\1\end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc} b_j & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{array}
\end{array}
$$

Прежде чем решать такую задачу, необходимо ликвидировать дисбаланс, добавив фиктивные работы или станки в зависимости от начальных условий. Поэтому без потери общности можно положить $m = n$.

Пусть $x_{ij} = 0$, если j-я работа не выполняется на i-ом станке,

$x_{ij} = 1$, если j-я работа выполняется на i-ом станке.

Таким образом, решение задачи может быть записано в виде двумерного массива $X = (x_{ij})$. Допустимое решение называется назначением. Допустимое решение строится путем выбора одного элемента в каждой строке матрицы $X = (x_{ij})$ и одного элемента в каждом столбце этой матрицы. Для заданного значения n существует $n!$ допустимых решений.

Теперь задача будет формулироваться следующим образом:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots,n;$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Ограничения первой группы необходимы для того, чтобы каждая работа выполнялась один раз. Ограничения второй группы гарантируют, что каждому станку будет приписана одна работа.

Для иллюстрации задачи о назначениях рассмотрим таблицу с тремя работами и тремя станками.

		Станки 1	2	3
Виды работ	1	5	7	9
	2	14	10	12
	3	15	13	16

Специфическая структура задачи о назначениях позволяет использовать эффективный метод для ее решения.

Примечание. Оптимальное решение задачи не изменится, если из любой строки или столбца матрицы стоимостей вычесть произвольную постоянную величину.

Приведенное замечание показывает, что если можно построить новую матрицу $\overline{C}$ с нулевыми элементами и эти нулевые элементы или их подмножество соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным:

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 14 & 10 & 12 \\ 15 & 13 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \;\;0 & \;\;2 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (0) & 2 & 2 \\ 4 & 0 & (0) \\ 2 & (0) & 1 \end{pmatrix} = \overline{C}\ .$$

Оптимальное назначение:

$x_{11}^* = 1,\ x_{23}^* = 1,\ x_{32}^* = 1,$ остальные $x_{ij}^* = 0$,

$F(X^*) = 5 + 12 + 13 = 30.$

К сожалению, не всегда удается определить решение так просто.

Венгерский алгоритм

Шаг 1. Редукция строк и столбцов.

Цель данного шага состоит в получении максимально возможного числа нулевых элементов в матрице стоимостей. Для этого из всех элементов каждой строки вычитают минимальный элемент соответствующей строки, а затем из всех элементов каждого столбца полученной матрицы вычитают минимальный элемент соответствующего столбца. В результате получают редуцированную матрицу стоимостей и переходят к поиску назначений.

Шаг 2. Определение назначений.

а) Найти строки, содержащие ровно один невычеркнутый нулевой элемент. В каждой такой строке произвести назначение, соответствующее невычеркнутому нулевому элементу. В каждом столбце, в котором было произведено назначение, вычеркнуть все невычеркнутые ранее нулевые элементы. Строки рассматриваются в порядке возрастания их номеров.

б) Найти столбцы, содержащие ровно один невычеркнутый нулевой элемент. В каждом таком столбце произвести назначение, соответствующее невычеркнутому нулевому элементу. В каждой строке, в которой было произведено назначение, вычеркнуть все невычеркнутые ранее нулевые элементы. Столбцы рассматриваются в порядке возрастания их номеров.

в) Выполнять пункты а) и б) до тех пор, пока не будет вычеркнуто максимально возможное число нулевых элементов. Если построенное назначение полное, то оно является оптимальным.

Если некоторые нули остались невычеркнутыми, то можно попытаться найти полное назначение.

Если нельзя найти полного назначения, то необходимо провести дальнейшую модификацию матрицы стоимостей, т.е. перейти к шагу 3.

Шаг 3. Модификация редуцированной матрицы.

Для редуцированной матрицы стоимостей:

а) вычислить число нулей в каждой невычеркнутой строке и каждом невычеркнутом столбце;

б) вычеркнуть строку или столбец с максимальным числом нулей;

в) выполнять пункты а) и б) до тех пор, пока не будут вычеркнуты все нули;

г) из всех невычеркнутых элементов вычесть минимальный невычеркнутый элемент и прибавить его к каждому элементу, расположенному на пересечении двух линий.

Перейти к шагу 2.

Примечания

1) Если число линий, необходимое для того, чтобы вычеркнуть нулевые элементы, равно числу строк (столбцов), то существует полное назначение.

2) Если исходная задача является задачей максимизации, то все элементы матрицы стоимостей следует умножить на (–1) и сложить их с достаточно большим числом так, чтобы матрица не содержала отрицательных элементов. Затем задачу следует решать как задачу минимизации.

Пример 6.7. Покажем работу венгерского алгоритма на примере задачи о назначениях со следующей матрицей стоимостей:

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Итерация 1.

Шаг 1. Редукция строк и столбцов.

Значения минимальных элементов строк 1, 2, 3 и 4 равны 2, 4, 11 и 4 соответственно. Вычитая из элементов каждой строки соответствующее минимальное значение, получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Значения минимальных элементов столбцов 1, 2, 3 и 4 равны 0, 0, 5 и 0 соответственно. Вычитая из элементов каждого столбца соответствующее минимальное значение, получим следующую матрицу:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

а) Строки 1, 2 и 4 содержат по одному невычеркнутому нулю. Рассматривая эти строки в порядке возрастания их номеров, произведем вначале назначение, соответствующее элементу (1,1), и вычеркнем нулевой элемент (4,1). Затем произведем назначение, соответствующее элементу (2,2). Строка 4 не может быть использована, поскольку нулевой элемент (4,1) был вычеркнут.

б) Столбцы 3 и 4 содержат по одному невычеркнутому нулю. Рассматривая эти столбцы в порядке возрастания их номеров, мы можем произвести третье назначение, соответствующее элементу (3,3). В столбце 4 назначение невозможно, так как мы произвели назначение, соответствующее элементу (3,3). После выполнения данного шага матрица стоимостей имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} (0) & 8 & 2 & 5 \\ 11 & (0) & 5 & 4 \\ 2 & 3 & (0) & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ни одно полное назначение не может быть получено, и необходимо провести дальнейшую модификацию редуцированной матрицы стоимостей.

Шаг 3. Модификация редуцированной матрицы.

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

а) Число нулей в строках 1, 2, 3 и 4 равно 1, 1, 2 и 1 соответственно. Для столбцов соответствующие величины равны 2, 1, 1 и 1.

б) Максимальное число нулей, по два, содержат строка 3 и столбец 1. Выбираем строку 3 и вычеркиваем все ее элементы горизонтальной линией.

в) Число невычеркнутых нулей в строках 1, 2 и 4 равно 1, 1 и 1 соответственно. Для столбцов соответствующие значения равны 2, 1, 0, и 0. Поэтому мы должны выбрать столбец 1 и вычеркнуть его вертикальной линией. После этого останется только один невычеркнутый нуль – элемент (2,2). Поэтому можно вычеркнуть либо строку 2, либо столбец 2. Вычеркивая строку 2 горизонтальной линией, получаем следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 8 & 2 & 5 \\ \cancel{11} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{array}\right).$$

г) Значение минимального невычеркнутого элемента равно 2. Вычитая его из всех невычеркнутых элементов и складывая его со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получаем новую матрицу стоимостей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Итерация 2.

Шаг 2. Выполняя вновь процедуру построения допустимого решения нулевой стоимости, получаем следующее оптимальное решение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & (0) & 3 \\ 13 & (0) & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & (0) \\ (0) & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное назначение:

$x_{13}^* = 1,\ x_{22}^* = 1,\ x_{34}^* = 1,\ x_{41}^* = 1$, остальные $x_{ij}^* = 0$,

$F(X^*) =$ 9 + 4 + 11 + 4 = 28.

Пример 6.8. Задача размещения производства.

Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции. Предположим, что компания владеет пятью предприятиями и что на трех из них должны производиться новые виды продукции – по одному виду на одно предприятие. Ниже указаны издержки производства и сбыта единицы продукции.

1. Издержки производства единицы продукции (руб.):

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	23	38	15	5
2	8	29	6	35	5
3	5	8	3	4	7

2. Издержки сбыта единицы продукции (руб.):

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	50	20	10	13
2	7	90	8	35	60
3	5	5	4	15	6

Плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос, и плановая стоимость единицы продукции каждого вида следующие:

Вид продукции	Плановый объем производства	Плановая стоимость (руб.)
1	35000	55
2	160000	50
3	54000	30

Общие издержки на единицу продукции складываются из издержек производства и издержек сбыта. Поскольку продажная цена единицы каждого вида продукции известна, то можно вычислить прибыль на единицу продукции:

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	15	–18	–3	30	7
2	35	–69	36	–20	–45
3	20	17	23	11	17

Умножая прибыль, приходящуюся на единицу продукции, на годовой объем сбыта, можно получить общую годовую прибыль, соответствующую каждой паре «вид продукции-предприятие». Данные величины (в тыс. руб.) приведены в следующей таблице:

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	525	–630	–105	1050	245
2	5600	–11040	5760	–3200	–7200
3	1080	918	1242	594	918

Если прибыль рассматривать как отрицательные затраты, то исходная задача максимизации может быть сведена к минимизационной задаче о назначениях. Для того чтобы матрица стоимостей не содержала отрицательных элементов, сложим каждый элемент матрицы с числом 5760 и введем два вида фиктивной продукции (4 и 5), которой соответствует нулевая прибыль. В результате будет получена следующая матрица:

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	–525	630	105	–1050	–245
2	–5600	11040	–5760	3200	7200
3	–1080	–918	–1242	–594	–918

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	5235	6390	5865	4710	5515
2	160	16800	0	8960	12960
3	4680	4842	4518	5166	4842
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

$\Rightarrow C =$

5235	6390	5865	4710	5515
160	16800	0	8960	12960
4680	4842	4518	5166	4842
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Итерация 1.
Шаг 1.

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 525 & 1680 & 1155 & 0 & 805 \\ 160 & 16800 & 0 & 8960 & 12960 \\ 162 & 324 & 0 & 648 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2.

$$\begin{pmatrix} 525 & 1680 & 1155 & (0) & 805 \\ 160 & 16800 & (0) & 8960 & 12960 \\ 162 & 324 & 0 & 648 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3.

$$\begin{pmatrix} 525 & 1680 & 1155 & 0 & 805 \\ 160 & 16800 & 0 & 8960 & 12960 \\ 162 & 324 & 0 & 648 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итерация 2.

Шаг 2. Воспользуемся замечанием 1. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} 365 & 1520 & 1155 & (0) & 645 \\ (0) & 16640 & 0 & 8960 & 12800 \\ 2 & 164 & (0) & 648 & 164 \\ 0 & (0) & 160 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & 160 & (0) \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение данной задачи следующее: производство первого вида продукции назначается предприятию 4, второго вида – предприятию 1, третьего вида – предприятию 3, четвертого вида – предприятию 2, пятого вида – предприятию 5. Очевидно, что 2 последних назначения являются фиктивными. Суммарная годовая прибыль, соответствующая данному решению, равна 1050 + 5600 + 1242 = 7892 (тыс. руб).

Оптимальное исследование рынка

Группе, исследующей рынок, требуется получить данные из n различных мест. В ее распоряжении имеется n дней, и она предполагает провести по одному дню в каждом месте, проведя по a_j опросов, $j = 1, \ldots, n$. Вероятность успешного опроса в каждом месте задается матрицей P. Элемент матрицы p_{ij} характеризует вероятность успешного опроса в течении i-го дня в j-ом месте, $i = 1, \ldots, n$.

Определить время проведения опросов, при котором общее число опросов максимально.

Сведем данную задачу к задаче о назначениях.

Введем величину $r_{ij} = p_{ij}a_j$, показывающую число успешных опросов в j-ом месте в течение i-го дня.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в } i\text{-й день опрос проводится в } j\text{-ом месте;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots n; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots n; \\ x_{ij} \in \{0;1\},\ i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, n. \end{cases}$$

Функция F характеризует суммарное число успешных опросов. Ее нужно максимизировать. Первое и второе ограничения соответствуют тому, что в течение одного дня можно находиться только в одном месте. Для расчета модели венгерским методом надо перейти к противоположной функции

$$F' = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij}$$

и в соответствующей таблице записывать значения r_{ij} с противоположным знаком.

Оптимальное использование торговых агентов

Торговая фирма продает товары в n различных городах, покупательная способность жителей которых оценивается b_j усл. ед., $j = 1,\ldots, n$. Для реализации товаров фирма располагает n торговыми агентами, каждого из которых она направляет в один из городов. Профессиональный уровень агентов различен; доля реализуемых i-ым торговым агентом покупательных способностей составляет a_i, $i = 1,\ldots, n$. Как следует распределить торговых агентов по городам, чтобы фирма получила максимальную выручку от продажи товаров?

Решение этой проблемы может быть найдено с помощью задачи о назначениях. В качестве кандидатов выступают торговые агенты, в качестве работ – города.

Введем параметр $c_{ij} = a_i\, b_j$, характеризующий величину покупательных способностей, реализуемых i-ом торговым агентом в j-ым городе.

Управляющие переменные x_{ij}, $i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots,$ n определяются по формуле

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если i-й агент направлен в j-й город;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель запишется в следующей форме:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots n; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots n; \\ x_{ij} \in \{0;1\},\ i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, n. \end{cases}$$

Первое и второе ограничения формализуют соответственно условию о том, что в каждый город направляется один торговый агент и один торговый агент не может работать в двух городах. Целевая функция F – это сумма реализованных покупательных способностей всеми торговыми агентами во всех городах. Она должна подлежать максимизации. Для решения задачи венгерским методом надо, как и в предыдущем примере, перейти к противоположной функции.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте транспортную задачу закрытого типа.
2. Запишите задачу, двойственную к транспортной.
3. Сформулируйте алгоритм метода северо-западного угла.
4. Сформулируйте теоремы двойственности применительно к транспортной задаче.
5. Сформулируйте алгоритм решения задачи о назначениях.

Задание №16

Решить транспортную задачу. С – матрица стоимостей. Прочерк означает невозможность перевозки по данному маршруту.

a_i – *запасы поставщиков*, b_j – *заявки потребителей*.

1. $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & - \\ 8 & 8 & 2 & 6 \\ 9 & - & 7 & 6 \end{pmatrix}$ $a_1 = 500$; $a_2 = 300$; $a_3 = 100$;

   $b_1 = 400$; $b_2 = 200$; $b_3 = 150$; $b_4 = 250$.

2. $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & - & 3 \\ - & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 92$; $a_2 = 45$; $a_3 = 63$;

   $b_1 = 60$; $b_2 = 40$; $b_3 = 36$; $b_4 = 14$.

3. $C = \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & - & 3 \\ 3 & 2 & - & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 30$; $a_2 = 50$; $a_3 = 120$;

   $b_1 = 40$; $b_2 = 30$; $b_3 = 20$; $b_4 = 10$.

4. $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & - & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & - \end{pmatrix}$ $a_1 = 80$; $a_2 = 320$; $a_3 = 100$;

   $b_1 = 250$; $b_2 = 100$; $b_3 = 150$; $b_4 = 50$.

5. $C = \begin{pmatrix} 3 & - & - & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $a_1 = 140$; $a_2 = 160$; $a_3 = 150$;

   $b_1 = 50$; $b_2 = 70$; $b_3 = 130$; $b_4 = 150$.

6. $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 1 \\ 5 & - & 3 & 4 \\ 3 & - & 2 & 8 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 50$; $a_3 = 70$;

   $b_1 = 10$; $b_2 = 80$; $b_3 = 90$; $b_4 = 20$.

7. $C = \begin{pmatrix} 3 & - & 2 & 1 \\ 2 & 3 & - & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ $a_1 = 200$; $a_2 = 70$; $a_3 = 80$;

   $b_1 = 20$; $b_2 = 40$; $b_3 = 80$; $b_4 = 60$.

8. $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & - \\ 10 & 10 & 4 & 7 \\ 12 & - & 11 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 400$; $a_2 = 200$; $a_3 = 100$;

$b_1 = 300$; $b_2 = 150$; $b_3 = 100$; $b_4 = 200$.

9. $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & - & 4 \\ - & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 200$; $a_3 = 150$;

$b_1 = 40$; $b_2 = 60$; $b_3 = 100$; $b_4 = 50$.

10. $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & - & 3 \\ - & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 92$; $a_2 = 45$; $a_3 = 63$;

$b_1 = 60$; $b_2 = 40$; $b_3 = 36$; $b_4 = 14$.

11. $C = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & - \\ 10 & - & 8 & 7 \end{pmatrix}$ $a_1 = 1500$; $a_2 = 1100$; $a_3 = 1000$;

$b_1 = 800$; $b_2 = 300$; $b_3 = 1500$; $b_4 = 400$.

12. $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 3 \\ 8 & - & 10 & 15 \\ 7 & 6 & - & 10 \end{pmatrix}$ $a_1 = 30$; $a_2 = 40$; $a_3 = 50$;

$b_1 = 10$; $b_2 = 20$; $b_3 = 80$; $b_4 = 40$.

13. $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & - & 10 & 15 \\ 8 & 3 & 5 & - \end{pmatrix}$ $a_1 = 30$; $a_2 = 320$; $a_3 = 100$;

$b_1 = 150$; $b_2 = 40$; $b_3 = 80$; $b_4 = 60$.

14. $C = \begin{pmatrix} 8 & - & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & - \\ 6 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $a_1 = 3200$; $a_2 = 1000$; $a_3 = 800$;

$b_1 = 2500$; $b_2 = 1000$; $b_3 = 1500$; $b_4 = 500$.

15. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & - & 6 \\ - & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ $a_1 = 30$; $a_2 = 50$; $a_3 = 140$;

$b_1 = 40$; $b_2 = 30$; $b_3 = 20$; $b_4 = 50$.

16. $C = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 14 & 10 \\ 16 & 13 & - & 15 \\ - & 8 & 17 & 17 \end{pmatrix}$ $a_1 = 10$; $a_2 = 30$; $a_3 = 40$;

$b_1 = 50$; $b_2 = 10$; $b_3 = 20$; $b_4 = 30$.

17. $C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 14 & 10 \\ - & 8 & 7 & 3 \\ 10 & 18 & - & 12 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 200$; $a_3 = 150$;

$b_1 = 100$; $b_2 = 100$; $b_3 = 200$; $b_4 = 100$.

18. $C = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 15 & 13 \\ - & - & 7 & 6 \\ 8 & 10 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ $a_1 = 400$; $a_2 = 500$; $a_3 = 300$;

$b_1 = 200$; $b_2 = 400$; $b_3 = 150$; $b_4 = 600$.

19. $C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 2 & 10 \\ - & 10 & 18 & 13 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 300$; $a_3 = 150$;

$b_1 = 200$; $b_2 = 50$; $b_3 = 50$; $b_4 = 200$.

20. $C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & - & 10 \\ - & 18 & 17 & 14 \\ 11 & - & 13 & 8 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 510$; $a_3 = 300$;

$b_1 = 100$; $b_2 = 50$; $b_3 = 50$; $b_4 = 400$.

21. $C = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 5 & 7 \\ - & - & 20 & 14 \\ 30 & 15 & 18 & 3 \end{pmatrix}$ $a_1 = 50$; $a_2 = 50$; $a_3 = 60$;

$b_1 = 100$; $b_2 = 10$; $b_3 = 20$; $b_4 = 40$.

22. $C = \begin{pmatrix} - & - & 18 & 20 \\ 30 & 25 & 14 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 200$; $a_3 = 300$;

$b_1 = 30$; $b_2 = 40$; $b_3 = 100$; $b_4 = 50$.

23. $C = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 20 & 6 \\ 10 & 8 & 7 & 5 \\ - & - & 13 & 2 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 50$; $a_3 = 150$;

$b_1 = 40$; $b_2 = 60$; $b_3 = 100$; $b_4 = 150$.

24. $C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 20 & 25 \\ 14 & 8 & - & - \\ 13 & 15 & 18 & 10 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 300$; $a_3 = 200$;

$b_1 = 100$; $b_2 = 400$; $b_3 = 100$; $b_4 = 100$.

25. $C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & - & 10 \\ - & 18 & 17 & 14 \\ 11 & - & 13 & 8 \end{pmatrix}$ $a_1 = 100$; $a_2 = 510$; $a_3 = 300$;

$b_1 = 100$; $b_2 = 50$; $b_3 = 50$; $b_4 = 400$.

26. $C = \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 2 & 8 \\ 6 & - & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $a_1 = 500$; $a_2 = 300$; $a_3 = 100$;

$b_1 = 250$; $b_2 = 200$; $b_3 = 150$; $b_4 = 400$.

27. $C = \begin{pmatrix} 1 & - & 2 & 3 \\ 4 & 3 & - & 2 \\ 3 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $a_1 = 200$; $a_2 = 70$; $a_3 = 80$;

$b_1 = 60$; $b_2 = 40$; $b_3 = 80$; $b_4 = 20$.

28. $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & - & 2 \\ 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$ $a_1 = 92$; $a_2 = 45$; $a_3 = 63$;

$b_1 = 14$; $b_2 = 40$; $b_3 = 36$; $b_4 = 60$.

29. $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & - \\ 3 & 5 & - & 2 \\ 5 & 2 & - & 3 \end{pmatrix}$ $a_1 = 30$; $a_2 = 50$; $a_3 = 120$;

$b_1 = 10$; $b_2 = 30$; $b_3 = 20$; $b_4 = 40$.

30. $C = \begin{pmatrix} 6 & - & - & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $a_1 = 140$; $a_2 = 160$; $a_3 = 150$;

$b_1 = 150$; $b_2 = 70$; $b_3 = 130$; $b_4 = 50$.

Задание №17

1. Составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющихся в количествах 60, 30, 45, 25 между пятью видами работ, потребности в специалистах для каждой работы соответственно равны 20, 40, 25, 45, 30 и матрица

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе.

2. Выпуск продукции на трех заводах составляет 500 , 700 и 600 , причем затраты на производство единицы равны 9 , 8 и 2 соответственно. Потребности четырех потребителей на эту продукцию составляют 350 , 200, 450 и 100. Матрица C транспортных расходов на доставку единицы продукции с i-го завода j-му потребителю :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам при условии минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку .

3. Строительный песок добывается в трех карьерах с производительностью за день 46, 34 и 40 т. и затратами на добычу одной тонны 1, 2 и 3 руб. соответственно; песок доставляется на четыре строительные площадки, потребность которых составляет 40, 35, 30, 45 т. Транспортные расходы на перевозку одной тонны песка заданы матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Недостающее количество песка - 30 т. в день можно обеспечить двумя путями: увеличением производительности а) 1 - го карьера, что повлечет дополнительные затраты в 3 руб. на добычу 1 т.; б) 2 - го с дополнительными затратами в 2 руб. / т.

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами и оптимальный вариант расширения поставок песка.

4. Имеется три сорта бумаги в количествах 10, 8 и 5 т., которую необходимо использовать на издание четырех книг тиражом в 8000, 6000, 15000 и 10000 экз. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,6; 0,8; 0,4 и 0,5 кг ,а себестоимость (в коп.) печатания книги при использовании i-го сорта бумаги задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 8 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов.

5. Четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 700, 500, 450 и 550 машин при себестоимости ремонта одной машины в 500, 700, 650 и 600 рублей. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 350, 350, 300, 300 и 200 машин.

Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ.

Дана матрица

$$C_{ijj} = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 & 10 & 20 \\ 10 & 80 & 30 & 40 & 30 \\ 70 & 30 & 30 & 50 & 10 \\ 50 & 10 & 40 & 50 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризующая транспортные расходы на доставку машины с j-й автобазы в i-ю ремонтную мастерскую. Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объема ремонтных работ по всем автобазам. Составить программу ремонтных работ, имеющую минимальную стоимость.

6. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А1 в В 2 и из А 3 в В 5 перевозки не могут быть осуществлены, а из А2 в В4 будет завезено 60 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	2	3	1	4	180
А2	6	3	4	5	2	220
А3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

7. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А2 в В4 и из А 3 в В 1 перевозки не могут быть осуществлены, а из А 1 в В 2 будет завезено 40 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	2	3	1	4	160
А2	6	3	4	5	2	220
А3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	140	90	50	

8. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А 3 в В 2 и из А 3 в В 5 перевозки не могут быть осуществлены, а из А1 в В 3 будет завезено 35 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	2	3	1	4	160
А2	6	3	4	5	2	220
А3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	

9. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из A1 в B 2 и из A2 в B5 перевозки не могут быть осуществлены, а из A2 в B4 будет завезено 45 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	2	3	1	4	180
A2	6	3	4	5	2	230
A3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	

10. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл., при дополнительных условиях: из A1 и B1 и из A2 и B5 перевозки не могут быть осуществлены, а из A2 и B1 будет завезено 60 единиц груза.

Пункты отправления	Пункты назначения	Запасы
	B1 B2 B3 B4 B5	
A1	1 2 3 1 4	180
A2	6 3 4 5 2	220
A3	8 2 1 9 3	100
Потребности	120 80 160 90 50	500

11. Составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющихся в количествах 50, 40, 45, 35 между пятью видами работ, потребности в специалистах для каждой работы соответственно равны 30, 30, 45, 25, 30 и матрица

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 7 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 0 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе.

12. Выпуск продукции на трех заводах составляет 600 , 700 и 500 , причем затраты на производство единицы равны 8 , 6 и 3 соответственно. Потребности четырех потребителей на эту продукцию составляют 450 , 300, 150 и 100. Матрица С транспортных расходов на доставку единицы продукции с i-го завода j-му потребителю:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам при условии минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку .

13. Строительный песок добывается в трех карьерах с производительностью за день 36, 44 и 50 т. и затратами на добычу одной тонны 1 , 2 и 3 руб. соответственно; песок доставляется на четыре строительные площадки, потребность которых составляет 60, 35, 20, 25 т. Транспортные расходы на перевозку одной тонны песка заданы матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Недостающее количество песка можно обеспечить двумя путями : увеличением производительности а) 1 - го карьера , что повлечет дополнительные затраты в 2 руб. на добычу 1 т.; б) 2 - го с дополнительными затратами в 1 руб. / т.

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами и оптимальный вариант расширения поставок песка.

14. Имеется три сорта бумаги в количествах 10 , 9 и 6 т., которую необходимо использовать на издание четырех книг тиражом в 6000, 5000, 13000 и 11000 экз. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,5; 0,8; 0,7 и 0,5 кг ,а себестоимость (в коп.) печатания книги при использовании i - го сорта бумаги задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 26 & 32 & 25 \\ 8 & 34 & 24 & 20 \\ 20 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов.

15. Четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 800, 600, 350 и 450 машин при себестоимости ремонта одной машины в 600, 700, 650 и 500 рублей. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 350, 450, 100, 400 и 200 машин.

Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ.

Дана матрица

$$C_{ijj} = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 60 & 10 & 20 \\ 10 & 70 & 30 & 40 & 10 \\ 70 & 30 & 30 & 50 & 10 \\ 50 & 10 & 20 & 50 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризующая транспортные расходы на доставку машины с j-й автобазы в i-ю ремонтную мастерскую. Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объема ремонтных работ по всем автобазам. Составить программу ремонтных работ, имеющую минимальную стоимость.

16. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А1 в В 2 и из А 3 в В 5 перевозки не могут быть осуществлены, а из А2 в В4 будет завезено 50 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	3	3	1	4	180
А2	7	3	5	5	2	210
А3	8	2	1	7	3	110
Потребности	100	90	170	90	50	500

17. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А2 в В4 и из А 3 в В 1 перевозки не могут быть осуществлены, а из А 1 в В 3 будет завезено 40 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	3	3	3	4	150
А2	7	3	5	5	2	220
А3	8	2	1	9	3	110
Потребности	120	90	130	90	50	

18. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А3 в В2 и из А3 в В5 перевозки не могут быть осуществлены, а из А1 в В3 будет завезено 45 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	4	3	2	5	150
А2	6	3	4	6	2	220
А3	7	2	1	9	1	110
Потребности	120	80	150	90	60	

19. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из А1 в В2 и из А2 в В5 перевозки не могут быть осуществлены, а из А2 в В4 будет завезено 40 единиц груза.

Пункты	Пункты назначения					Запасы
Отправления	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	4	3	1	4	170
А2	6	3	5	5	3	240
А3	7	2	1	9	3	100
Потребности	110	90	160	90	50	

20. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл., при дополнительных условиях: из А1 и В1 и из А2 и В5 перевозки не могут быть осуществлены, а из А2 и В1 будет завезено 50 единиц груза.

Пункты отправления	Пункты назначения	Запасы
	В1 В2 В3 В4 В5	
А1	2 3 3 1 4	180
А2	6 3 4 5 2	200
А3	8 2 1 9 4	120
Потребности	110 80 160 90 60	500

21. Составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющихся в количествах 360, 40, 45, 35 между пятью видами работ, потребности в специалистах для каждой работы соответственно равны 20, 40, 35, 35, 30 и матрица

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе.

22. Выпуск продукции на трех заводах составляет 600 , 500 и 600 , причем затраты на производство единицы равны 11 , 7 и 4 соответственно. Потребности четырех потребителей на эту продукцию составляют 450 , 100, 450 и 100. Матрица С транспортных расходов на доставку единицы продукции с i-го завода j-му потребителю:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам при условии минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку.

23. Строительный песок добывается в трех карьерах с производительностью за день 47, 35 и 50 т. и затратами на добычу одной тонны 1, 2 и 3 руб. соответственно; песок доставляется на четыре строительные площадки, потребность которых составляет 50, 25, 30, 45 т. Транспортные расходы на перевозку одной тонны песка заданы матрицей:

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Недостающее количество песка можно обеспечить двумя путями: увеличением производительности а) 1 - го карьера , что повлечет дополнительные затраты в 3 руб. на добычу 1 т.; б) 2 - го с дополнительными затратами в 2 руб. / т.

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами и оптимальный вариант расширения поставок песка.

24.Имеется три сорта бумаги в количествах 11 , 9 и 5 т., которую необходимо использовать на издание четырех книг тиражом в 9000, 5000, 10000 и 12000 экз. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,5; 0,8; 0,3 и 0,5 кг ,а себестоимость (в коп.) печатания книги при использовании i - го сорта бумаги задается матрицей:

$$C=\begin{pmatrix} 20 & 16 & 30 & 25 \\ 15 & 25 & 24 & 30 \\ 30 & 20 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов.

25. Четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 600, 500, 350 и 550 машин при себестоимости ремонта одной машины в 300, 600, 650 и 500 рублей. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 450, 350, 200, 300 и 200 машин.

Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ.

Дана матрица

$$C_{ijj} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 50 & 10 & 20 \\ 10 & 70 & 30 & 40 & 30 \\ 50 & 30 & 20 & 50 & 10 \\ 50 & 20 & 40 & 50 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризующая транспортные расходы на доставку машины с j-й автобазы в i-ю ремонтную мастерскую. Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объема ремонтных работ по всем автобазам. Составить программу ремонтных работ, имеющую минимальную стоимость.

Глоссарий

1. *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка – его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

2. *ЗЛП* – задача линейного программирования.

3. *ЗМП* – задача математического программирования.

4. *ЗЦЛП* – задача целочисленного линейного программирования.

5. *ИО* – исследование операций.

6. *Исследование операций* — научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

7. *КЗЛП* – каноническая задача линейного программирования

8. *К-матрица КЗЛП* – расширенная матрица системы линейных уравнений, равносильной системе $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{b}$, содержащая единичную подматрицу на месте первых n своих столбцов и все элементы (n+1)-го столбца которой неотрицательны.

9. *Линейное программирование* – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

10. *Матрица* $A=(a_{ij})$ размера $m \times n$ – прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

11. *Минора* M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка – определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученный из матрицы А вычёркиванием i-й строки и j-го столбца

12. ***n****-мерным вектор* $\overline{x}$ – упорядоченная совокупность n действительных чисел (x_1, x_2,…, x_n).

13. *ОЗЛП* – основная задача линейного программирования.

14. *Операция* — любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели. Результат операции зависит от способа её проведения, организации, иначе — от выбора некоторых параметров.

15. *Определитель* — это число, характеризующее квадратную матрицу.

16. *Оптимальные* решения, – решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других. Поэтому основной задачей исследования операций является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

17. *План* или допустимое решение задачи линейного программирования – вектор $\overline{X}$ пространства E_n, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи.

18. *Р-матрицей* КЗЛП – расширенная матрица системы линейных уравнений, равносильной исходной системе, содержащая единичную подматрицу порядка m на месте n первых столбцов, все симплекс-разности которой неотрицательны.

19. *Формулы Крамера* – применяются при решении системы n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля.

20. *ЦФ* – целевая функция.

21. *Экономико-математическая модель* — достаточно точное описание исследуемого экономического процесса или объекта с помощью математического аппарата (различного рода функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.)

22. *Эффективность операции* — степень её приспособленности к выполнению задачи — количественно выражается в виде критерия эффективности — целевой функции.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Бутов М.Я., Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Исследование нелинейных моделей в экономике. – М.: МЭСИ, 2004.
2. Горбовцов Г.Я., Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Исследование операций в экономике. – М.: МЭСИ, 2006.
3. Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Математические методы исследования операций. – М.: МЭСИ, 2005.
4. Исследование операций в экономике / Под ред. Кремера Н.Ш. – М.: Юнити, 1997.
5. Мастяева И. Н. Математические методы и модели в логистике: Учебное пособие. М.: МЭСИ, 2005.
6. Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Методы оптимизации: Учебное пособие. – М.: МЭСИ, 2005.
7. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel: Практикум. – М.: Финстатинформ, 2000.
8. Романников А.Н. Линейная алгебра. – М.: МЭСИ, 2003.

Дополнительная

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 1999.
2. Мастяева И.Н., Горбовцов Г.Я., Семенихина О.Н., Турундаевский В.Б Прикладная математика. – М.: МЭСИ, 2000.
3. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: ИД «Вильямс», 2001.
4. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Юнити, 1997.