

A thick black L-shaped frame is positioned on the left and bottom edges of the slide, framing the content.

METODA NEWTON

Proiect realizat de Sajina Arina
Clasa a12-a T

Cuprins:

1. Scurt istoric despre Newton Isaac
2. Istoricul metodei
3. Esenta metodei
4. Utilizarea matematica a metodei Newton
5. Metoda Newton in informatica
6. Constructia si analiza graficului
7. Eroarea metodei
8. Algoritmul de calcul pentru un număr dat de aproximări successive
9. Exemplu privind algoritmul
10. Algoritmul de calcul pentru o exactitate ε dată
11. Exemplu privind algoritmul dat
12. Avantaje si dezavantaje
13. Concluzie
14. Bibliografie

Objective:

- ✓ Explicarea si analiza graficului ce prezinta metoda coardelor.
- ✓ Alcatuirea algoritmului de rezolvare a problemelor prin aceasta metoda.
- ✓ Prezentarea exemplelor privind metoda data.
- ✓ Analiza avantajelor si dezavantajelor.

- Metoda Newton poarta numele savantului **Isaac Newton**. El a fost un renumit om de știință englez, alchimist, teolog, mistic, matematician, fizician și astronom, președinte al Royal Society. Isaac Newton este savantul aflat la originea teoriilor științifice care vor revoluționa știința, în domeniul opticii, matematicii și în special al mecanicii.



Istoricul metodei

- Numele "Metoda lui Newton" este derivat din faptul că Isaac Newton a descris un caz special al metodei în *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (scris în 1669, publicat în 1711 de către William Jones) și în *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* (scrisă în 1671, tradus și publicat ca *Metoda fluctuațiilor* în 1736 de către John Colson).
- Metoda lui Newton a fost publicată prima dată în 1685, în *Tratat istoric și practic de algebră* de John Wallis. În 1690, Joseph Raphson a publicat o descriere simplificată în *Analysis aequationum universalis*. Raphson prezenta metoda lui Newton ca o metodă pur algebrică și limita utilizarea sa la funcții polinomiale, dar el descrie metoda în termeni de aproximări succesive în loc de mai complicata secvență de polinoame utilizate de Newton.
- Arthur Cayley în 1879, în *Problema imaginar Newton-Fourier* a fost primul care a observat dificultăți în generalizarea metodei lui Newton la rădăcinile complexe de polinoame cu un grad mai mare de 2 și valorile inițiale complexe. Acest lucru a deschis calea pentru studiul teoriei iterațiilor funcțiilor raționale.

Esenta metodei

- Metoda lui Newton sau metoda tangentei este o metoda aplicata în practica pentru rezolvarea ecuatiilor si sistemelor neliniare. Aceasta metoda este importanta deoarece cu ajutorul ei se pot trage concluzii privind existenta, unicitatea si domeniul în care se gaseste solutia fara a o gasi în mod explicit.
- Având o funcție reală f , iar derivata ei, f' , vom începe cu stabilirea unei valori inițiale pentru x_0 pentru o rădăcină a funcției f . O aproximare mai bună pentru rădăcina funcției este $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
- Geometric, $(x_1, 0)$ este la intersecția cu axa x a tangentei funcției f în punctul (x_0) . Procesul se repeat până se atinge o valoare suficient de precisă. Vom începe procesul cu o valoare initială arbitrară x_0 .

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Utilizarea matematica a metodei Newton

- Metoda Newton se foloseste la rezolvarea numerica a ecuatiilor algebrice si transcendente, in cazul cind nu putem obtine solutiile ecuatiei $f(x)=0$ in forma analitica.
- Se considera ecuatia $f(x)=0$.
- Functia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (functia definita pe $[a, b]$) , continua, $f'(x) \neq 0$ in acest interval si $f''(x)$ isi pastreaza semnul pe acest interval. Presupunem ca in urma unui proces de separare a radacinilor ecuatia $f(x)=0$ are o singura radacina ξ pe $[a, b]$.

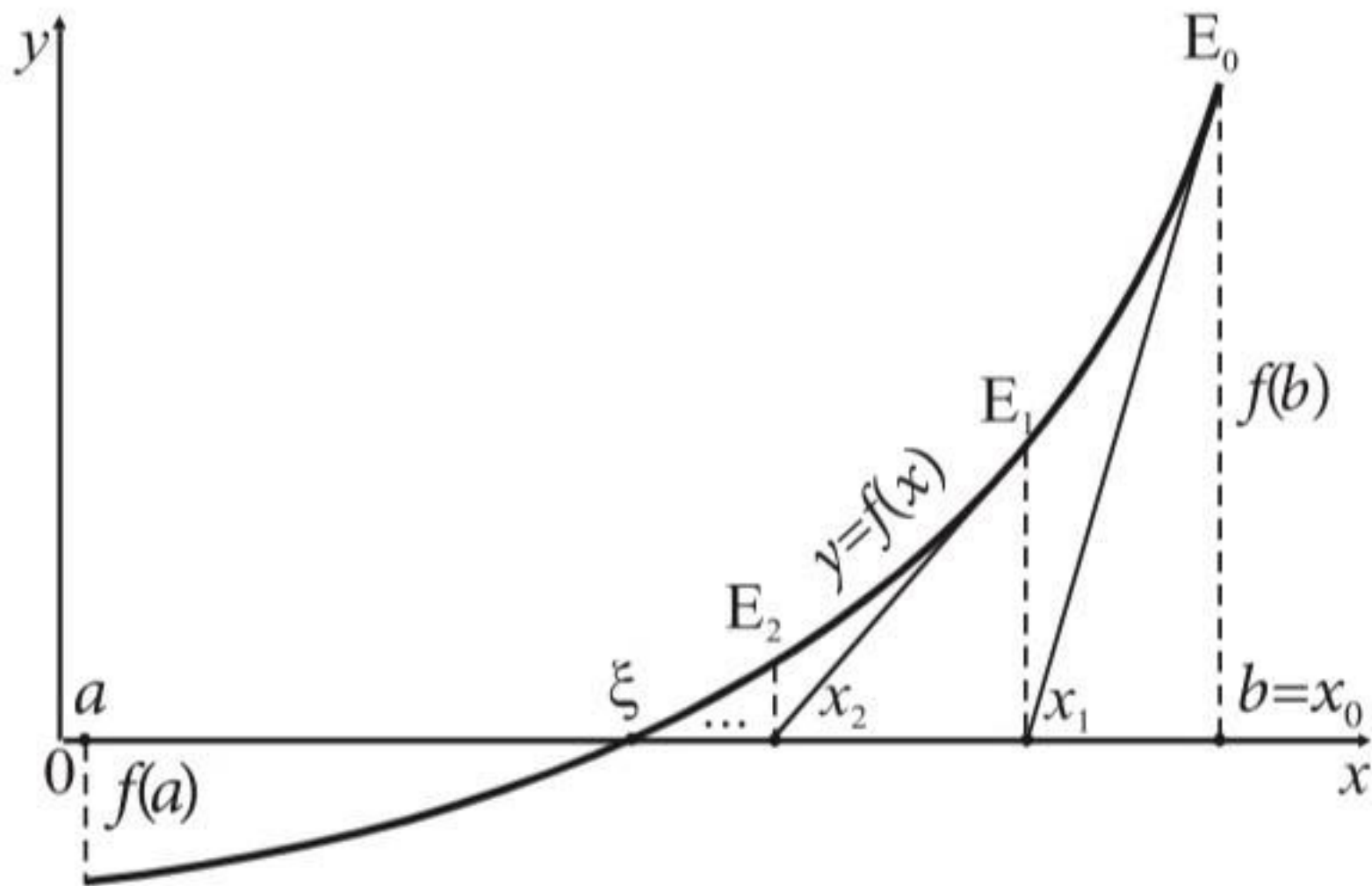
Metoda Newton in informatica

■ Fie dată funcția $f(x)$, care posedă următoarele proprietăți:

1. $f(x)$, continuă, pe segmentul $[a, b]$ și $f(a)f(b) < 0$.
2. Pe segmentul $[a, b]$ există $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, continui, și semnul lor pe $[a, b]$ este constant.

■ Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$ pentru $x \in [a, b]$.

■ Se va încerca rezolvarea problemei prin trasarea consecutivă a unor tangente la graficul funcției, prima dintre ele fiind construită prin extremitatea $E_0(x_0, y_0)$ a segmentului $[a, b]$, extremitate pentru care se respectă condiția: $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$.



Analiza graficului:

Fie că tangenta cu numărul i intersectează axa Ox în punctul x_i .
Următoarea tangentă ($i+1$) va fi trasată prin punctul E_{i+1} cu coordonatele $(x_i, f(x_i))$ și va intersecta axa absciselor în punctul x_{i+1} .
Șirul de valori $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots$ va converge către soluția ecuației $f(x) = 0$.

Această metodă de calcul al soluției ecuației $f(x)=0$ este numită metoda tangentelor sau Newton, după numele matematicianului care a introdus-o. Pentru a calcula valorile $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, se va folosi ecuația tangentei la funcția ce trece printr-un punct dat:

$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$. În $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, ecuația reprezintă tangenta la funcția $f(x)$, care trece prin punctul $(x_i, f(x_i))$. Ea va intersecta axa absciselor în punctul cu coordonatele $(x_{i+1}, 0)$. În consecință se obține:

Eroarea metodei

- Procesul iterativ de calcul poate fi oprit fie după repetarea unui număr prestabilit de ori, fie după atingerea unei exactități cerute.

Eroarea se va estima conform formulei:

$$\varepsilon = |\xi - x_{i+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{i+1} - x_i)^2,$$

- x_i, x_{i+1} – două aproximări succesive ale soluției calculate,
- M_2 – supremul $f''(x)$ pe $[a, b]$,
- m_1 – infimul $f'(x)$ pe $[a, b]$.

Algoritmizarea metodei

- Numărul de aproximări succesive în procesul de calcul poate fi stabilit apriori sau determinat de o condiție.
- Mai întâi se stabilește extremitatea segmentului care va servi drept aproximare inițială.
- Calculul aproximării următoare se realizează în ambele cazuri conform formulei.
- Condiția de oprire a calculelor va fi în primul caz generarea aproximării cu indicele cerut; în cel de al doilea – îndeplinirea condiției din formula de calcul a erorii.

Algoritmul de calcul pentru un număr dat de aproximări succesive:

Pentru a realiza acest algoritm, este suficient să fie cunoscute descrierile analitice pentru $f(x)$ și $f'(x)$ (daca nu este indicată în enunț, urmează să fie calculată).

$$c \leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a);$$

Pasul 1. Determinarea aproximării inițiale.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Pasul 2. Se calculează x_{i+1} conform formulei :

dacă $f(c) \times f(a) < 0$, atunci $x_0 \leftarrow a$, altfel $x_0 \leftarrow b$; $i \leftarrow 0$.

Pasul 3. Dacă $i+1 = n$, atunci soluția calculată $x \leftarrow x_{i+1}$. SFÎRȘIT. În caz contrar, $i \leftarrow i+1$, apoi se revine la pasul 2.

Exemplu:

- ❖ Fie dată funcția $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$. Să se scrie un program care va calcula soluția ecuației $f(x) = 0$ pe segmentul $[2; 15]$ pentru 10 aproximări successive.
- ❖ 1. Calculam $f'(x)$: $f'(x)$
- ❖ 2. Alcatuim programul

```
program cn09;
var a, b, x, c : real;
    i, n: integer;
function f(z:real):real;
begin f:=z*z*z-2*z*z+z-3; end;
function fd1(z:real):real;
begin fd1:=3*z*z-4*z+1; end;
begin  a:=2.1; b:=15; n:=10; i:=0;
      c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
      if f(c)*f(a)<0 then x:=a else x:=b;
      while i<n do
      begin  i:=i+1;
            x:=x-f(x)/fd1(x);
            writeln('i=',i:2,' x=',x:15:12, ' f=',f(x):15:12);
            end;
      end.
```

Rezultate:

```
i= 1 x= 10.23214285700  f=869.11072454000
i= 2 x=  7.06207637180  f=256.52261987000
...
i= 9 x=  2.17455942470  f= 0.00000009329
i=10 x=  2.17455941030  f= 0.00000000001
```

Algoritmul de calcul pentru o exactitate ε dată:

■ Este necesar să cunoaștem $M_2, m_1, f(x), f'(x)$.

$$c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a);$$

Pasul 1. Determinarea aproximării inițiale x_0 .

dacă $f(c) \times f(a) < 0$, atunci $x_0 \Leftarrow a$, altfel $x_0 \Leftarrow b$; $i \Leftarrow 0$.

Pasul 2. Se calculează x_{i+1} conform formulei $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Pasul 3. Dacă $\frac{M_2}{2m_1}(x_{i+1} - x_i)^2 \leq \varepsilon$, atunci soluția calculată $x \Leftarrow x_{i+1}$. SFÎRȘIT.

În caz contrar, $i \Leftarrow i+1$ și se revine la pasul 2.

Exemplu:

- Fie dată funcția $f(x)$. Să se scrie un program care va calcula soluția aproximativă a ecuației $f(x) = 0$ pe segmentul $[2,4; 3]$ cu exactitatea $\varepsilon = 0,0001$. Pentru funcția dată pe segmentul $[2,4; 3]$ $M2$ și $m1$ sînt,

resp $f(x) = \cos^2(x) - \frac{x}{4}$; e cu 2 și $f'(x) = -\sin(2x) - \frac{1}{4}$.

- 1.

- 2. Programul:

```
program cn10;
var a, b, xn, xv, M2, m1, e, c : real;
function f(z:real):real;
begin f:=cos(z)*cos(z)-z/4; end;

function fd1(z:real):real;
begin fd1:=-sin(2*z)-1/4; end;
begin a:=2.4; b:=3; M2:=2; m1:=0.03; e:=0.0001;
c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
if f(c)*f(a)<0 then begin
xn:=a; xv:=b;
end
else begin xn:=b; xv:=a; end;
while M2*sqr(xn-xv)/(2*m1)>e do
begin xv:=xn;
xn:=xv-f(xv)/fd1(xv);
writeln(' x=',xn:15:12, ' f=',f(xn):15:12);

end;
end.
```

Rezultate:

```
x= 2.47538619170 f= -0.00078052066
x= 2.47646766320 f= -0.00000027700
x= 2.47646804730 f= 0.00000000000
```


Avantaje si Dezavantaje

- Avantajul metodei lui Newton este faptul e o metoda rapid convergenta.
- Dezavantajul metodei lui Newton este faptul ca e o metoda locala, adica punctul initial de plecare x_0 trebuie sa fie suficient de aproape de radacina cautata x^* .
- Un alt **dezavantaj** al metodei este faptul ca necesita derivata de ordin I.



Concluzie

- Metoda lui Newton sau metoda tangentei este o metoda aplicata în practica pentru rezolvarea ecuatiilor si sistemelor neliniare. Aceasta metoda este importanta deoarece cu ajutorul ei se pot trage concluzii privind existenta, unicitatea si domeniul în care se gaseste solutia fara a o gasi în mod explicit.

Bibliografie

- [file:///C:/Users/User/Downloads/XII_Informatica%20\(in%20limba%20romana\)%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/User/Downloads/XII_Informatica%20(in%20limba%20romana)%20(1).pdf)
- <http://www.creeaza.com/referate/matematica/Metoda-Newton487.php>
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_tangentei
- <http://www.hoinareala.eu/hoinar/lucrari/newton/cap2.htm>

**Mulumesc
pentru atentie!**