Metoda Newton

Proiect realizat de Sajina Arina(cl.12T IPLT,,Mircea Eliade'')

Cuprins:

Obiective:

- ✓ Explicarea si analiza graficului ce prezinta metoda coardelor.
- ✓ Alcatuirea algoritmului de rezolvare a problemelor prin aceasta metoda.
- ✓ Prezentarea exemplelor privind metoda data.
- ✓ Analiza avantajelor si dezavantajelor.

Isaac Newton

- Metoda Newton poarta numele savantului Isaac Newton. El a fost un renumit om de știință englez, alchimist, teolog, mistic, matematician, fizician și astronom, președinte al Royal Society. Isaac Newton este savantul aflat la originea teoriilor științifice care vor revoluționa știința, în domeniul opticii, matematicii și în special al mecanicii.

Istoricul metodei

- Numele "Metoda lui Newton" este derivat din faptul că Isaac Newton a descris un caz special al metodei în De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (scris în 1669, publicat în 1711 de către William Jones) și în De metodis fluxionum et serierum infinitarum (scrisă în 1671, tradus și publicat ca Metoda fluctuațiilor în 1736 de către John Colson).
- Metoda lui Newton a fost publicată prima dată în 1685, înTratat istoric și practic de algebră de John Wallis. În 1690, Joseph Raphson a publicat o descriere simplificată în Analysis aequationum universalis. Raphson prezenta metoda lui Newton ca o metodă pur algebrică și limita utilizarea sa la funcții polinomiale, dar el descrie metoda în termeni de aproximări succesivexn în loc de mai complicata secvență de polinoame utilizate de Newton.
- Arthur Cayley în 1879, în Problema imaginar Newton-Fourier a fost primul care a observat dificultăți în generalizarea metodei lui Newton la rădăcinile complexe de polinoame cu un grad mai mare de 2 și valorile inițiale complexe. Acest lucru a deschis calea pentru studiul teoriei iterațiilor funcțiilor raționale.

Esenta metodei

- Metoda lui Newton sau metoda tangentei este o metoda aplicata în practica pentru rezolvarea ecuatiilor si sistemelor neliniare. Aceasta metoda este importanta deoarece cu ajutorul ei se pot trage concluzii privind existenta, unicitatea si domeniul în care se gaseste solutia fara a o gasi în mod explicit.
- Având o funcție reală ƒ, iar derivata ei, ƒ ', vom începe cu stabilirea unei valori inițiale pentru x0 pentru o rădăcină a funcției f. O aproximare mai bună pentru rădăcina funcției este x1=x0-f(xo)/f'(x0)
- Geometric, (x1, 0) este la intersecția cu axa x a tangentei funcției f în punctul (x0). Procesul se repeat până se atinge o valoare suficient de precisă.Vom începe procesul cu o valoare inițială arbitrară x0.

Utilizarea matematica a metodei Newton

- Metoda Newton se foloseste la rezolvarea numerica a ecuatiilor algebrice si transcendente, in cazul cind nu putem obtine solutiile ecuatiei f(x)=0 in forma analitica.
- Se considera ecuatia f(x)=0.
- Functia f:[a,b]->R (functia definita pe [a, b]) , continua, f¢(x)¹0 in acest interval si f²(x) isi pastreaza semnul pe acest interval. Presupunem ca in urma

unui proces de separare a radacinilor ecuatia f(x)=0 are o singura radacina **x** pe [a, b].

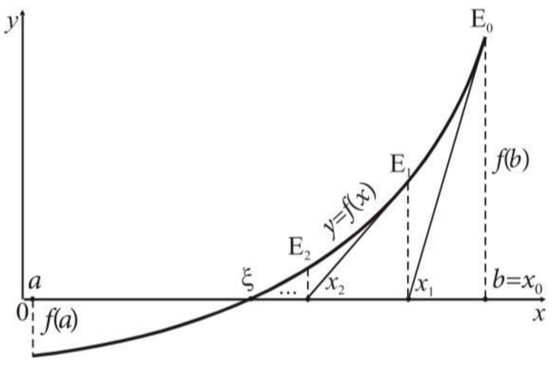
Metoda Newton in informatica

- Fie dată funcţia f (x), care posedă următoarele proprietăţi:

1. f (x), continuă, pe segmentul [a, b] şi f (a)f (b) < 0 .

2. Pe segmentul [a, b] există f ′(x) ≠0, f ′′(x) ≠ 0, continui, şi semnul lor pe [a, b] este constant.

- Rezolvam ecuaţia f (x) = 0 pentru x ∈ [a, b].
- Se va încerca rezolvarea problemei prin trasarea consecutivă a unor tangente la graficul funcţiei, prima dintre ele fiind construită prin extremitatea E0 (x0 , y0) a segmentului [a, b], extremitate pentru care se respectă condiţia: f (x0) × f ″(x0) > 0.



Analiza graficului:

Fie că tangenta cu numărul i intersectează axa 0x în punctul xi . Următoarea tangentă (i+1) va fi trasată prin punctul Ei+1 cu coordonatele (xi, f (xi)) şi va intersecta axa absciselor în punctul xi+1. Şirul de valori x0, x1, x2, ..., xi, xi+1, ... va converge către soluţia ecuaţiei f (x) = 0.

Această metodă de calcul al soluţiei ecuaţiei f (x)=0 este numită metoda tangentelor sau Newton, după numele matematicianului care a introdus-o. Pentru a calcula valorile x1, x2, ... xi, ..., se va folosi ecuaţia tangentei la funcţia ce trece printr-un punct dat:

y – f(xi) = f´(xi)(x – xi). În caz general ecuaţia reprezintă tangenta la funcţia f (x), care trece prin punctul (xi , f (xi)). Ea va intersecta axa absciselor în punctul cu coordonatele (xi+1,0). În consecinţă se obţine:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Eroarea metodei

- Procesul iterativ de calcul poate fi oprit fie după repetarea unui număr prestabilit de ori, fie după atingerea unei exactităţi cerute.

Eroarea se va estima conform formulei:

- xi , xi+1 – două aproximări succesive ale soluţiei calculate,
- M2 – supremul f ′′(x) pe [a, b],
- m1 – infimul f′(x) pe [a, b].

$$\varepsilon = \left|\xi - x_{i+1}\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{i+1} - x_i)^2,$$

Algoritmizarea metodei

- Numărul de aproximări succesive în procesul de calcul poate fi stabilit apriori sau determinat de o condiţie.
- Mai întîi se stabileşte extremitatea segmentului care va servi drept aproximare iniţială.
- Calculul aproximării următoare se realizează în ambele cazuri conform formulei.
- Condiţia de oprire a calculelor va fi în primul caz generarea aproximării cu indicele cerut; în cel de al doilea – îndeplinirea condiţiei din formula de calcul a erorii.

Algoritmul de calcul pentru un număr dat de aproximări succesive:

Pentru a realiza acest algoritm, este suficient să fie cunoscute descrierile analitice pentru f (x) şi f ′(x)(daca nu este indicată în enunţ, urmează să fie calculată).

Pasul 1. Determinarea aproximării iniţiale x0 :

Pasul 2. Se calculează xi+1 conform formulei :

dacă f(c) × f(a) < 0, atunci x0 ⇐ a, altfel x0 ⇐ b; i ⇐ 0.

Pasul 3. Dacă i+1 = n, atunci soluţia calculată x ⇐ xi+1. SFÎRŞIT. În caz contrar, i ⇐ i+1, apoi se revine la pasul 2.

$$c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a); \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

.

Exemplu:

- Fie dată funcţia f(x) = x^3 – 2*x^2 + x – 3. Să se scrie un program care va calcula soluţia ecuaţiei f(x) = 0 pe segmentul [2; 15] pentru 10 aproximări successive.
- 1. Calculam f'(x) : f'(x)=3*x^2-4*x+1
- 2. Alcatuim programul:

```
program cn09;
var a, b, x, c : real;
   i, n: integer;
function f(z:real):real;
     begin f:=z*z*z-2*z*z+z-3; end;
function fd1(z:real):real;
     begin fd1:=3*z*z-4*z+1; end;
begin   a:=2.1; b:=15; n:=10; i:=0;
        c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
        if f(c)*f(a)<0 then x:=a else x:=b;
        while i<n do
        begin  i:=i+1;
               x:=x-f(x)/fd1(x);
        writeln('i=',i:2,' x=',x:15:12, ' f=',f(x):15:12);
        end;
end.
```

Rezultate:

```
i= 1 x= 10.23214285700  f=869.11072454000
i= 2 x= 7.06207637180   f=256.52261987000
...
i= 9 x= 2.17455942470   f= 0.00000009329
i=10 x= 2.17455941030   f= 0.00000000001
```

Algoritmul de calcul pentru o exactitate ε dată:

- Este necesar să cunoastem M2, m1, f(x),f’(x).

Pasul 1. Determinarea aproximării iniţiale x0:

dacă f(c) × f(a) < 0, atunci x0 ⇐ a, altfel x0 ⇐ b; i ⇐ 0.

Pasul 2. Se calculează xi+1 conform formulei:

Pasul 3. Dacă ,atunci soluţia calculată x ⇐ xi+1. SFÎRŞIT.

În caz contrar, i ⇐ i+1 şi se revine la pasul 2.

$$c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a);\ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_{i+1}-x_i)^2 \le \varepsilon$$

Exemplu:

- Fie dată funcţia f(x). Să se scrie un program care va calcula soluţia aproximativă a ecuaţiei f(x) = 0 pe segmentul [2,4; 3] cu exactitatea ε = 0,0001. Pentru funcţia dată pe segmentul [2,4; 3] M2 şi m1 sînt, respectiv, egale cu 2 şi 0,03.

- 1. $f(x) = \cos^2(x) - \frac{x}{4};$ atunci, $f'(x) = -\sin(2x) - \frac{1}{4}.$

- 2. Programul:

```
program cn10;
var a, b, xn, xv, M2, m1, e, c : real;
function f(z:real):real;
   begin f:=cos(z)*cos(z)-z/4;  end;
```

```
function fd1(z:real):real;
   begin fd1:=-sin(2*z)-1/4;  end;
begin    a:=2.4; b:=3; M2:=2; m1:=0.03; e:=0.0001;
         c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
         if f(c)*f(a)<0 then begin
         xn:=a; xv:=b;
         end
         else begin xn:=b; xv:=a; end;
   while M2*sqr(xn-xv)/(2*m1)>e do
   begin   xv:=xn;
           xn:=xv-f(xv)/fd1(xv);
           writeln(' x=',xn:15:12, ' f=',f(xn):15:12);
   end;
end.
```

Rezultate:

```
x= 2.47538619170 f= -0.00078052066
x= 2.47646766320 f= -0.00000027700
x= 2.47646804730 f= 0.00000000000
```

Avantaje si Dezavantaje

- **<u>Avantajul</u> metodei lui Newton este faptul e o metoda rapid convergenta.**
- **<u>Dezavantajul</u> metodei lui Newton este faptul ca e o metoda locala, adica punctul initial de plecare x_0 trebuie sa fie suficient de aproape de radacina cautata x^*.**
- **Un alt dezavantaj al metodei este faptul ca necesita derivata de ordin I.**

Concluzie

- **Metoda lui Newton sau metoda tangentei este o metoda aplicata în practica pentru rezolvarea ecuatiilor si sistemelor neliniare. Aceasta metoda este importanta deoarece cu ajutorul ei se pot trage concluzii privind existenta, unicitatea si domeniul în care se gaseste solutia fara a o gasi în mod explicit.**

Bibliografie

- file:///C:/Users/User/Downloads/XII_Informatica%20(in%20limba%20romana)%20(1).pdf
- http://www.creeaza.com/referate/matematica/Metoda-Newton487.php
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_tangentei
- http://www.hoinareala.eu/hoinar/lucrari/newton/cap2.htm