Barem Examen AA

2 Februarie 2021

Contents

1 Algoritmi Nedeterminiști

Scrieți un algoritm nedeterminist polinomial pentru următoarea problemă și calculați complexitatea sa angelică?

Se dă o matrice de dimensiune nxm cu elemente numere întregi. Se poate obține o submatrice de sumă S interschimbând maxim k coloane și/sau linii?

1.1 Rezolvare

```
function SOLVE(A[1..n][1..m], S, k)
    for i = 0; i < k; i++ do
        onLines = choice({false, true})
        if onLines then
            l1 = choice({1..n})
            l2 = choice({1..n})
            for j = 1; j <= m; j++ do
                swap(A[l1][j], A[l2][j])
            end for
        else
            c1 = choice({1..m})
            c2 = choice({1..m})
            for j = 1; j <= n; j++ do
                swap(A[j][c1], A[j][c2])
            end for
        end if
        for l1 = 1; l1 < n; l1++ do
            for c1 = 1; c1 < m; c1++ do
                for l2 = l1 + 1; l2 <= n; l2++ do
                    for c2 = c1 + 1; c2 <= m; c2++ do
                        sum = 0
                        for l = l1; l <= l2; l++ do
                            for c = c1; c <= c2; c++ do
                                sum += A[l][c]
                            end for
                        end for
                        if sum==S then
                            Success
                        end if
                    end for
                end for
            end for
        end for
    end for
    Fail
end function
```

Algoritmul face k interschimbări, încercând pe ramuri diferite toate combinațiile de linii și coloane. Indecșii aleși pot fi și egali, astfel încât pot fi făcute și mai puțin de k interschimbări.

Verificarea nu este cea mai eficientă posibil, însă este polinomială, for-urile interioare având complexitatea $\Theta(n^3 * m^3)$. Tot algoritmul va avea o complexitate angelică de $\Theta(k * n^3 * m^3)$.

1.2 Barem

- **(2p)** Generarea soluției.
- **(2p)** Verificarea constrângerilor.
- **(1p)** Identificarea complexitatății.

2 Teorema Master

$T(n) = 3 * T(\frac{3*n}{10}) + n * \sqrt{n} - O(n)$

2.1 Barem

- **(0.5p)** identificare corectă: $a = 3, b = \frac{10}{3}$
- **(1p)** identificare corectă: $f(n) = n * \sqrt{n} - O(n) = O(n^{1.5})$
- **(1p)** stabilit că: $n^{log_b(a)} = O(n^{1.5-\epsilon})$ cu $\epsilon > 0$ (depinde cum este făcută discuția, cel mai simplu ar fi să arate că $3 < \frac{10}{3}^{\frac{3}{2}}$)
- **(0.25p+0.25p)** discutat + demonstrat condiția de regularizare pentru $f(n)$
- **(1p)** concluzionat că putem aplica cazul 3 din Teorema Master și trasa concluzia ca $T(n) = \theta(n * \sqrt{n}) = \theta(n^{1.5})$

3 Inducție Structurală

List 1: Constructori

- $[] :\rightarrow ListT$
- $(x : xs) : T \rightarrow ListT \rightarrow ListT$

List 2: $member : T \rightarrow ListT \rightarrow Bool$

M1: $member(e, []) = False$

M2: $member(e, x : xs) = (x == e) \vee member(e, xs)$

List 3: $unique : ListT \rightarrow Bool$

U1: $unique([]) = True$

U2: $unique(x : xs) = !member(x, xs) \wedge unique(xs)$

List 4: $intersection : ListT \to ListT \to ListT$

INT1: $intersection([], y) = []$

INT2: $intersection(x : xs, y)$
$= x : intersection(xs, y)$, **if** $member(x, y)$

INT3: $intersection(x : xs, y)$
$= intersection(xs, y)$, **if** $!member(x, y)$

De demonstrat P1

$unique(l1) \land unique(l2) \implies unique(intersection(l1, l2))$.

3.1 Barem

- **(2p)** Demonstrația pentru cazul de bază.
- **(2p)** Specificarea ipotezei inductive și a pasului de inducție.
- **(3p)** Demonstrația pasului de inducție.
- **(1p)** Identificarea proprietății adiționale.
- **(2p)** Demonstrația proprietății adiționale.

3.2 Rezolvare

- **Cazul de bază**: $l1 == []$

  Ne propunem să demonstrăm:
  $unique([]) \land unique(l2) \implies unique(intersection([], l2))$.

  $unique(intersection([], l2)) =^{INT1} unique([]) =^{M1} True$.

- **Ipoteza inductivă**: P(xs)
  $unique(xs) \land unique(l2) \implies unique(intersection(xs, l2))$.

- **Pasul de inducție**: $P(xs) \implies P(x : xs)$.

  Ne propunem să demonstrăm:
  $unique(x : xs) \land unique(l2) \implies unique(intersection(x : xs, l2))$.

  Presupunem $unique(x : xs)$, respectiv $unique(l2)$ adevărate, în caz contrar, implicația este trivial adevărată. Cum $unique(x : xs)$ este adevărat, putem folosi din ipoteza inductivă faptul că $unique(intersection(xs, l2))$ este adevărat.

(O1) $unique(x : xs) \implies^{U2} !member(x, xs) \wedge unique(xs)$

Fie $E = unique(intersection(x : xs, l2))$.

Avem de analizat două cazuri:

1. $member(x, l2)$

   $E =^{INT2} unique(x : intersection(xs, l2))$.

   $E =^{U2} !member(x, intersection(xs, l2)) \wedge unique(intersection(xs, l2))$.

   Pentru a demonstra că expresia E este adevărată avem nevoie de o proprietate adițională PA(xs):
   $!member(e, xs) \implies !member(e, intersection(xs, L)), \forall L : ListT$

   $E =^{O1,PA,II} True$
2. $!member(x, l2)$
   $E =^{INT3} unique(intersection(xs, l2)) =^{II} True$.

Mai avem de demonstrat proprietatea adițională PA(xs):
$!member(e, xs) \implies !member(e, intersection(xs, L)), \forall L : ListT$.

- **Cazul de bază** $xs == []$.

  Ne propunem să demonstrăm:
  $!member(e, []) \implies !member(e, intersection([], L)), \forall L : ListT$.

  $E = !member(x, intersection([], L)) =^{(INT1)} !member(x, []) =^{(M1)} True$.

- **Ipoteza inductivă** $P(xs)$.
  $!member(e, xs) \implies !member(e, intersection(xs, L)), \forall L : ListT$

- **Pasul de inducție** $P(xs) \implies P(x : xs)$.

  Ne propunem să demonstrăm că:
  $!member(e, x : xs) \implies !member(e, intersection(x : xs, L)), \forall L : ListT$.

  Presupunem $!member(e, x : xs) = True$.

  (O1) $!member(e, x : xs) = (e \neq x) \wedge !member(e, xs)$.

  Fie $E = !member(e, intersection(x : xs, L))$

  Avem de analizat două cazuri:

1. $member(x, L)$

   $E =^{INT2} !member(e, x : intersection(xs, L))$
   $E =^{M2} (e \neq x) \wedge !member(e, intersection(xs, L)) =^{O1,II} True.$

2. $!member(x, L)$

   $E =^{INT3}\ \ !member(e, intersection(xs, L)) =^{II} True.$