

ДЗ 1

(5,2)-код с набором кодовых слов (КС):

ИС	КС
00	00000
01	10110
10	01011
11	11101

ИС = информационные символы

1. Найти вероятность ошибки при передаче по ДСК с переходной вероятностью $p=10^{-3}$.
2. Найти порождающую и проверочную матрицы

РЕШЕНИЕ:

Посчитаем расстояния Хэмминга между разными кодовыми словами:

$d(00000, 10110) = 3$, $d(00000, 01011) = 3$, $d(00000, 11101) = 4$ и т.д.

$$d_{\min} = 3$$

То есть код исправляет $t = \frac{d_{\min}-1}{2} = 1$ ошибку.

Если декодер исправляет любую одну ошибку, то ошибка декодирования возникает, когда в слове длины 5 произошло 2 и более ошибок.

Вероятность того, что произошло ровно i ошибок:

$$P\{x = i\} = \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}$$

Тогда:

$$P = \sum_{i=2}^5 \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i} = 1 - ((1-p)^5 + 5p(1-p)^4)$$

Подставим $p = 10^{-3}$:

$$P \sim 1 * 10^{-5}$$

Проверим линейность: $10110 + 01011 = 11101$ (по mod 2) и т.д.

Выберем в качестве базисных кодовых слов:

- для $m=10$: $c=01011$,
- для $m=01$: $c=10110$.

Тогда $m = (m_1, m_2)$, где m_1 соответствует “10”, m_2 соответствует “01”

$$c = mG, G = \begin{pmatrix} 01011 \\ 10110 \end{pmatrix}$$

Проверим: $m = 11 \Rightarrow c = (01011) + (10110) = 11101$ — совпадает.

Нужна матрица H размера $(n-k) \times n = 3 \times 5$, такая что:

$$GH^T = 0$$

Идея: найти все векторы $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$, ортогональные строкам G :

$$0 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2 + 0 \cdot h_3 + 1 \cdot h_4 + 1 \cdot h_5 = 0 \Rightarrow h_2 + h_4 + h_5 = 0$$

$$1 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + 1 \cdot h_3 + 1 \cdot h_4 + 0 \cdot h_5 = 0 \Rightarrow h_1 + h_3 + h_4 = 0$$

Из уравнений:

$$h_2 = h_4 + h_5, h_1 = h_3 + h_4$$

Возьмем $(h_3, h_4, h_5) = (1, 0, 0)$, $(h_3, h_4, h_5) = (0, 1, 0)$, $(h_3, h_4, h_5) = (0, 0, 1)$

$$H = \begin{pmatrix} 10100 \\ 11010 \\ 01001 \end{pmatrix}$$

ДЗ 2

Показать, что расстояние Хемминга удовлетворяет аксиомам расстояния и может использоваться как метрика.

РЕШЕНИЕ:

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$.

Определим $d(x, y)$ - кол-во элементов слова, которые отличаются друг от друга.

Докажем аксиомы метрики:

1. Неотрицательность: $d(x, y) \geq 0$, так как это количество позиций.

2. Тожественность нулю:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \text{нет позиций, где } x_i \neq y_i \Leftrightarrow x = y$$

3. Симметрия:

множество позиций, где $x_i \neq y_i$, совпадает с множеством позиций, где $y_i \neq x_i$. Значит $d(x, y) = d(y, x)$.

4. Неравенство треугольника: нужно $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Рассмотрим любую позицию i . Если $x_i \neq z_i$, то не может одновременно быть $x_i = y_i$ и $y_i = z_i$. Значит в позиции i выполнено хотя бы одно из: $x_i \neq y_i$ или $y_i \neq z_i$.

То есть множество отличий $\{i: x_i \neq z_i\}$ содержится в объединении

$$\{i: x_i \neq y_i\} \cup \{i: y_i \neq z_i\}.$$

Следовательно: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Итак, $d(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики.

ДЗ 3

Доказать теорему

Код с минимальным расстоянием d_{\min} исправляет любые комбинации ошибок кратности $t \leq \lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$ где $\lfloor x \rfloor$ - наибольшее целое, не превышающее x .

Доказательство:

Рассмотрим “шары Хэмминга” радиуса t вокруг кодовых слов:

$$B_t(c) = \{y: d(y, c) \leq t\}$$

Если два разных кодовых слова $c_1 \neq c_2$ имели бы общее слово y в их шарах, то существовал бы y такой, что

$$d(y, c_1) \leq t, d(y, c_2) \leq t$$

По неравенству треугольника:

$$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, y) + d(y, c_2) \leq t + t = 2t$$

Но $d(c_1, c_2) \geq d_{\min}$. Значит необходимо

$$d_{\min} \leq 2t$$

Чтобы пересечений не было, нужно противоположное:

$$d_{\min} > 2t$$

Это эквивалентно

$$t \leq \frac{d_{\min}-1}{2}$$

Так как t — целое, получаем

$$t \leq \lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor$$

Если шары не пересекаются, то любое слово, полученное из c не более чем t ошибками, принадлежит только шару $B_t(c)$, и ближайшее (по расстоянию Хэмминга) кодовое слово единственно — значит декодирование однозначно исправляет эти ошибки.

Теорема доказана.

ДЗ 4

Найти порождающую и проверочную матрицы для кода

ИС	КС
000	000000
100	110100
010	011010
110	101110
001	101001
101	011101
011	110011
111	000111

РЕШЕНИЕ:

Видно, что:

$$c(110) = c(100) + c(010), c(101) = c(100) + c(001), c(011) = c(010) + c(001),$$

то есть код линейный.

1) Порождающая матрица G

Берём базисные кодовые слова для 100, 010, 001:

- 100 → 110100
- 010 → 011010
- 001 → 101001

Тогда

$$G = \begin{pmatrix} 110100 \\ 011010 \\ 101001 \end{pmatrix}, c = mG$$

2) Проверочная матрица H

Нужна H размера $(n-k) \times n = 3 \times 6$, такая что $Gh^T = 0$.

Идея: найти все векторы $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$, ортогональные строкам G :

$$h_1 + h_2 + h_4 = 0, h_2 + h_3 + h_5 = 0, h_1 + h_3 + h_6 = 0$$

Получим:

$$h = (h_2 + h_4, h_2, h_2 + h_5, h_4, h_5, h_4 + h_5)$$

Выберем 3 независимых решения:

$$(h_2, h_4, h_5) = (1, 0, 0), (h_2, h_4, h_5) = (0, 1, 0), (h_2, h_4, h_5) = (0, 0, 1)$$

$$H = \begin{pmatrix} 111000 \\ 100101 \\ 001011 \end{pmatrix}$$