

### ДЗ 1

(5,2)-код с набором кодовых слов (КС):

ИС	КС
00	00000
01	10110
10	01011
11	11101

ИС = информационные символы

- Найти вероятность ошибки при передаче по ДСК с переходной вероятностью  $p=10^{-3}$ .
- Найти порождающую и проверочную матрицы

#### РЕШЕНИЕ:

Посчитаем расстояния Хэмминга между разными кодовыми словами:

$$d(00000,10110) = 3, d(00000,01011) = 3, d(00000,11101) = 4 \text{ и т.д.}$$

$$d_{\min} = 3$$

То есть код исправляет  $t = \frac{d_{\min}-1}{2} = 1$  ошибку.

Если декодер исправляет любую одну ошибку, то ошибка декодирования возникает, когда в слове длины 5 произошло 2 и более ошибок.

Вероятность того, что произошло ровно  $i$  ошибок:

$$P\{X = i\} = \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}$$

Тогда:

$$P = \sum_2^5 \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i} = 1 - ((1-p)^5 + 5p(1-p)^4)$$

Подставим  $p = 10^{-3}$ :

$$P \sim 1 * 10^{-5}$$

Проверим линейность:  $10110+01011=11101$  (по  $\text{mod } 2$ ) и т.д.

Выберем в качестве базисных кодовых слов:

- для  $m=10$ :  $c=01011$ ,
- для  $m=01$ :  $c=10110$ .

Тогда  $m = (m_1, m_2)$ , где  $m_1$  соответствует “10”,  $m_2$  соответствует “01”

$$c = mG, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим:  $m = 11 \Rightarrow c = (01011) + (10110) = 11101$  — совпадает.

Нужна матрица  $H$  размера  $(n-k) \times n = 3 \times 5$ , такая что:

$$GH^T = 0$$

Идея: найти все векторы  $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ , ортогональные строкам  $G$ :

$$0*h_1+1*h_2+0*h_3+1*h_4+1*h_5=0 \Rightarrow h_2+h_4+h_5=0$$

$$1*h_1+0*h_2+1*h_3+1*h_4+0*h_5=0 \Rightarrow h_1+h_3+h_4=0$$

Из уравнений:

$$h_2 = h_4 + h_5, h_1 = h_3 + h_4$$

Возьмем  $(h_3, h_4, h_5) = (1, 0, 0)$ ,  $(h_3, h_4, h_5) = (0, 1, 0)$ ,  $(h_3, h_4, h_5) = (0, 0, 1)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## ДЗ 2

Показать, что расстояние Хемминга удовлетворяет аксиомам расстояния и может использоваться как метрика.

### РЕШЕНИЕ:

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ .

Определим  $d(x, y)$  - кол-во элементов слова, которые отличаются друг от друга.

Докажем аксиомы метрики:

1. Неотрицательность:  $d(x, y) \geq 0$ , так как это количество позиций.

2. Тождественность нулю:

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow$  нет позиций, где  $x_i \neq y_i \Leftrightarrow x = y$

3. Симметрия:

множество позиций, где  $x_i \neq y_i$ , совпадает с множеством позиций, где  $y_i \neq x_i$ . Значит  $d(x, y) = d(y, x)$ .

4. Неравенство треугольника: нужно  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Рассмотрим любую позицию  $i$ . Если  $x_i \neq z_i$ , то не может одновременно быть  $x_i = y_i$  и  $y_i = z_i$ . Значит в позиции  $i$  выполнено хотя бы одно из:  $x_i \neq y_i$  или  $y_i \neq z_i$ .

То есть множество отличий  $\{i: x_i \neq z_i\}$  содержится в объединении

$$\{i: x_i \neq y_i\} \cup \{i: y_i \neq z_i\}.$$

Следовательно:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Итак,  $d(x, y)$  удовлетворяет всем аксиомам метрики.

### ДЗ 3

Доказать теорему

Код с минимальным расстоянием  $d_{min}$  исправляет любые комбинации ошибок кратности  $t \leq \left[\frac{d_{min}-1}{2}\right]$  где  $[x]$  - наибольшее целое, не превышающее  $x$ .

**Доказательство:**

Рассмотрим “шары Хэмминга” радиуса  $t$  вокруг кодовых слов:

$$B_t(c) = \{y: d(y, c) \leq t\}$$

Если два разных кодовых слова  $c_1 \neq c_2$  имели бы общее слово  $y$  в их шарах, то существовал бы  $y$  такой, что

$$d(y, c_1) \leq t, d(y, c_2) \leq t$$

По неравенству треугольника:

$$d(c_1, c_2) \leq d(c_1, y) + d(y, c_2) \leq t + t = 2t$$

Но  $d(c_1, c_2) \geq d_{min}$ . Значит необходимо

$$d_{min} \leq 2t$$

Чтобы пересечений не было, нужно противоположное:

$$d_{min} > 2t$$

Это эквивалентно

$$t \leq \frac{d_{min}-1}{2}$$

Так как  $t$  — целое, получаем

$$t \leq \left[\frac{d_{min}-1}{2}\right]$$

Если шары не пересекаются, то любое слово, полученное из с не более чем t ошибками, принадлежит только шару  $B_t(c)$ , и ближайшее (по расстоянию Хэмминга) кодовое слово единственno — значит декодирование однозначно исправляет эти ошибки.

Теорема доказана.

### ДЗ 4

Найти порождающую и проверочную матрицы для кода

ИС	КС
000	000000
100	110100
010	011010
110	101110
001	101001
101	011101
011	110011
111	000111

### РЕШЕНИЕ:

Видно, что:

$$c(110) = c(100) + c(010), c(101) = c(100) + c(001), c(011) = c(010) + c(001),$$

то есть код линейный.

#### 1) Порождающая матрица G

Берём базисные кодовые слова для 100, 010, 001:

- 100 → 110100
- 010 → 011010
- 001 → 101001

Тогда

$$G = \begin{pmatrix} 110100 \\ 011010 \\ 101001 \end{pmatrix}, c = mG$$

#### 2) Проверочная матрица H

Нужна H размера  $(n-k) \times n = 3 \times 6$ , такая что  $Gh^T = 0$ .

Идея: найти все векторы  $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$ , ортогональные строкам G:

$$h_1 + h_2 + h_4 = 0, h_2 + h_3 + h_5 = 0, h_1 + h_3 + h_6 = 0$$

Получим:

$$h = (h_2 + h_4, h_2, h_2 + h_5, h_4, h_5, h_4 + h_5)$$

Выберем 3 независимых решения:

$$(h_2, h_4, h_5) = (1, 0, 0), (h_2, h_4, h_5) = (0, 1, 0), (h_2, h_4, h_5) = (0, 0, 1)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$