



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Стохастический анализ и моделирование»

*Студент 415 группы*  
А. А. Пилюшенок

*Руководитель практикума*  
д.ф.-м.н., профессор С. Н. Смирнов

Москва, 2024

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Первая часть практикума</b>	<b>4</b>
1.1	Задание 1 . . . . .	4
1.1.1	Условие . . . . .	4
1.1.2	Генераторы схемы Бернулли и биномиального распределения . . . . .	4
1.1.3	Генератор геометрического распределения . . . . .	6
1.1.4	Игра в орлянку . . . . .	8
1.2	Задание 2 . . . . .	10
1.2.1	Условие . . . . .	10
1.2.2	Генератор канторового распределения . . . . .	10
1.2.3	Свойства канторового распределения . . . . .	12
1.2.4	Численные характеристики канторового распределения . . . . .	14
1.3	Задание 3 . . . . .	15
1.3.1	Условие . . . . .	15
1.3.2	Генератор экспоненциального распределения . . . . .	16
1.3.3	Распределение $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . . . . .	17
1.3.4	Г-р пуассоновского р-я (через г-р экспоненциального р-я) . . . . .	18
1.3.5	Г-р пуассоновского р-я (через г-р биномиального р-я) . . . . .	19
1.3.6	Г-р стандартного нормального р-я (полярный метод) . . . . .	21
1.4	Задание 4 . . . . .	23
1.4.1	Условие . . . . .	23
1.4.2	Генератор распределения Коши . . . . .	24
1.4.3	Г-р стандартного нормального р-я (через г-р р-я Коши) . . . . .	24
1.4.4	Сравнение скорости сходимости . . . . .	25
1.5	Задание 5 . . . . .	26
1.5.1	Условие . . . . .	26
1.5.2	Справедливость теоремы о ЗБЧ и ЦПТ . . . . .	26
1.5.3	Доверительные интервалы для среднего и дисперсии . . . . .	28
1.5.4	Распределение суммы элементов распределения Коши . . . . .	29
1.6	Задание 6 . . . . .	31
1.6.1	Условие . . . . .	31
1.6.2	Вычисление интеграла . . . . .	31
1.6.3	Оценка точности вычисления . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Вторая часть практикума</b>	<b>34</b>
2.1	Задание 7 . . . . .	34
2.1.1	Условие . . . . .	34
2.1.2	Метод случайного поиска . . . . .	34

2.1.3	Метод имитации отжига . . . . .	37
2.1.4	Сравнение с методами минимизации . . . . .	38
2.2	Задание 8 . . . . .	38
2.2.1	Условие . . . . .	38
2.2.2	Метод Монте-Карло для уравнения Лапласа . . . . .	38
2.2.3	Сравнение численного результата с аналитическим решением . . . . .	40
2.3	Задание 9 . . . . .	41
2.3.1	Условие . . . . .	41
2.3.2	Теоретические выкладки . . . . .	41
2.3.3	Решение для винеровского процесса . . . . .	43
2.3.4	Решение для процесса Орнштейна-Уленбека . . . . .	44
2.4	Задание 10 . . . . .	46
2.4.1	Условие . . . . .	46
2.4.2	Теоретические выкладки . . . . .	47
2.5	Задание 11 . . . . .	50
2.5.1	Условие . . . . .	50
2.5.2	Система массового обслуживания (СМО) . . . . .	50
2.5.3	СМО с циклической интенсивностью . . . . .	52
2.5.4	Моделирование страховой компании . . . . .	54

# Глава 1

## Первая часть практикума

### 1.1 Задание 1

#### 1.1.1 Условие

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха  $p$ . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения; проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Промоделировать игру в орлянку: бесконечную последовательность независимых испытаний Бернулли с бросанием “правильной” (честной,  $p = 0.5$ ) монеты. Величина “выигрыша”  $S_n$  определяется как сумма по  $n$  испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны монеты. Проиллюстрировать в виде ломаной поведение нормированной суммы  $Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$  как функцию от номера испытания  $i$  для отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для значения  $Y(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

#### 1.1.2 Генераторы схемы Бернулли и биномиального распределения

Дадим описание схемы Бернулли на метаязыке.

**Определение 1.** *Схемой Бернулли с вероятностью  $p$  называется эксперимент, состоящий из последовательности испытаний, обладающих следующими свойствами:*

- *воспроизводимость — все испытания проходят в подобных (может, не полностью идентичных) условиях;*
- *отсутствие взаимного влияния;*
- *каждому испытанию сопоставляется численная характеристика, которая реализуется (“успех” с вероятностью  $p$ ) или не реализуется (“неуспех” с вероятностью  $1 - p$ ).*

**Определение 2.** *Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью  $p$ , состоящую из  $n$  последовательных испытаний. Тогда распределение числа “успехов” в такой схеме Бернулли называется биномиальным с числом испытаний  $n$  и вероятностью  $p$ .*

Для моделирования случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром  $p$  (отвечает схеме Бернулли с единственным испытанием), воспользуемся методом обращения функции распределения. Он основан на следующем утверждении.

**Утверждение 1.** Пусть функция распределения  $F(\cdot)$  имеет обратную  $F^{-1}(\cdot)$ . Положим  $\nu \sim U[0, 1]$ . Тогда функцией распределения случайной величины  $\xi = F^{-1}(\nu)$  является  $F(\cdot)$ .

*Доказательство.*

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(F^{-1}(\nu) < x) = \mathbb{P}(\nu < F(x)) = F(x).$$

□

**Утверждение 2.** Биномиальное распределение  $\text{Bin}(n, p)$  можно представить как сумму  $n$  н.о.р.с.в., имеющих распределение  $\text{Be}(p)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\xi_i \sim \text{Be}(p)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\eta \sim \text{Bin}(n, p)$ . Тогда

$$\mathbb{P}(\eta = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Покажем методом математической индукции, что

$$\mathbb{P}(\eta = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^n \xi_l = k\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

- При  $n = 1$ :

$$\mathbb{P}(\eta = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\eta = 1) = p.$$

т.е.,  $\eta \sim \text{Be}(p) \equiv \text{Bin}(1, p)$ .

- Пусть верно для  $n$ , покажем, что верно для  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n+1} \xi_l = k\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^n \xi_l = k \mid \xi_{n+1} = 0\right) \cdot \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 0) + \\ &+ \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^n \xi_l = k - 1 \mid \xi_{n+1} = 1\right) \cdot \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1) = \\ &= (C_n^k p^k (1-p)^{n-k}) \cdot (1-p) + (C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)}) \cdot p = \\ &= (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot p^k (1-p)^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся тождеством Вандермонда  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$  и получим требуемое.

□

На графиках 1.1, 1.2 продемонстрирована работа датчиков. Для биномиального распределения показана справедливость Центральной Предельной Теоремы (формулировка приведена в пункте 1.1.4), где  $\mu = np$ ,  $\sigma^2 = np(1-p)$  — характеристики биномиального распределения.

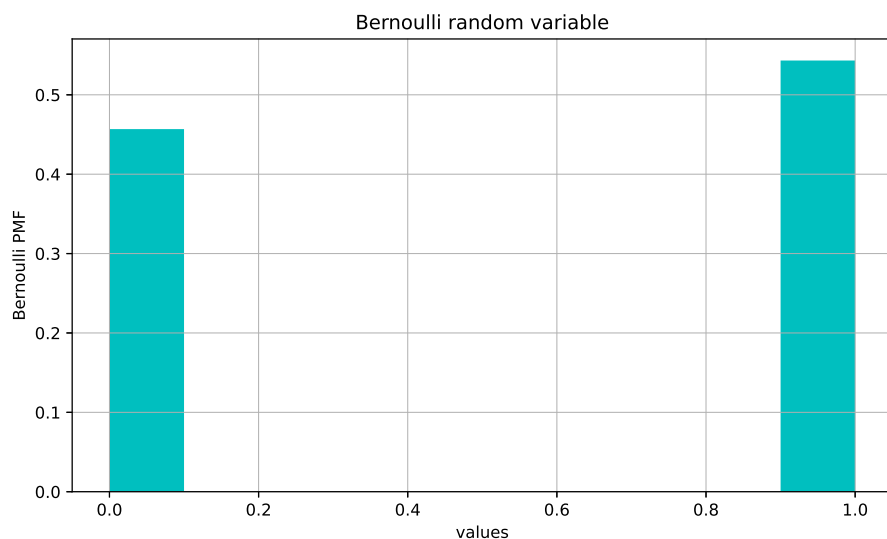


Рис. 1.1: Выборка распределения Бернулли  $p = 0.54321$  размера  $N = 10^7$ .

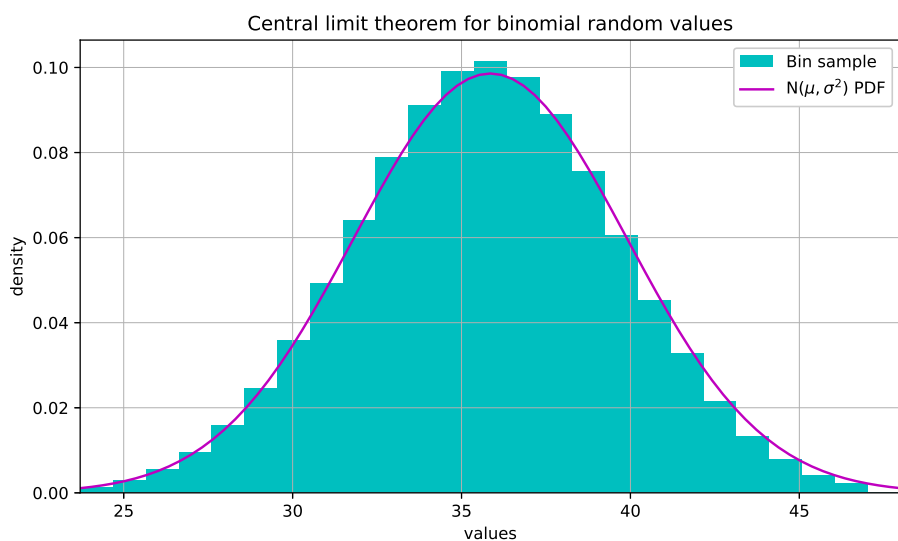


Рис. 1.2: Выборка биномиального распределения  $n = 66, p = 0.54321$  размера  $N = 10^6$ .

### 1.1.3 Генератор геометрического распределения

**Определение 3.** *Геометрическое распределение - это распределение числа неудач до первого успеха в схеме Бернулли с неограниченным числом испытаний.*

Обозначим

$$\xi \sim \text{Geom}(p), \quad \nu \sim \text{U}[0, 1].$$

$$\mathbb{P}(\xi = n) = p(1-p)^n, \quad \sum_{k=0}^n p(1-p)^k = 1 - (1-p)^{n+1} = s_{n+1}.$$

Пользуясь генератором равномерного распределения, реализуем генератор геометрического распределения, исходя из следующих соображений:

$$\mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{P}(s_n < \nu \leq s_{n+1}) = \mathbb{P}((1-p)^{n+1} \leq 1-\nu < (1-p)^n).$$

$$\implies \boxed{\mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{P}\left(n < \frac{\ln(1-\nu)}{\ln(1-p)} \leq n+1\right)}.$$

Отметим, что  $(1-\nu) \sim \text{U}[0, 1]$ .

Таким образом, будем моделировать случайную величину

$$\eta = \left\lfloor \frac{\ln \nu}{\ln(1-p)} \right\rfloor.$$

Можно доказать, что  $\frac{\ln \nu}{\ln(1-p)} \sim \text{Exp}(\ln \frac{1}{1-p})$ :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\ln \nu}{\ln(1-p)} < x\right) = \mathbb{P}(\nu < e^{\ln(1-p)x}) = 1 - e^{\ln(1-p)x}.$$

**Утверждение 3.** Геометрическое распределение с параметром  $p$  обладает свойством отсутствия памяти:

$$\mathbb{P}(\xi > m+n \mid \xi \geq m) = \mathbb{P}(\xi > n), \quad \forall m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > m+n \mid \xi \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(\xi > m+n)}{\mathbb{P}(\xi \geq m)} = \frac{\sum_{k=m+n+1}^{\infty} p(1-p)^k}{\sum_{k=m}^{\infty} p(1-p)^k} = \\ &= \frac{p \frac{(1-p)^{m+n+1}}{p}}{p \frac{(1-p)^m}{p}} = (1-p)^{n+1} = \mathbb{P}(\xi > n). \end{aligned}$$

□

Чтобы проверить этот результат численно, построим две гистограммы для двух выборок (отвечающих левой и правой частям соответственно). Сдвинутые графики должны совпасть. На рисунке 1.3 продемонстрирован теоретический результат.

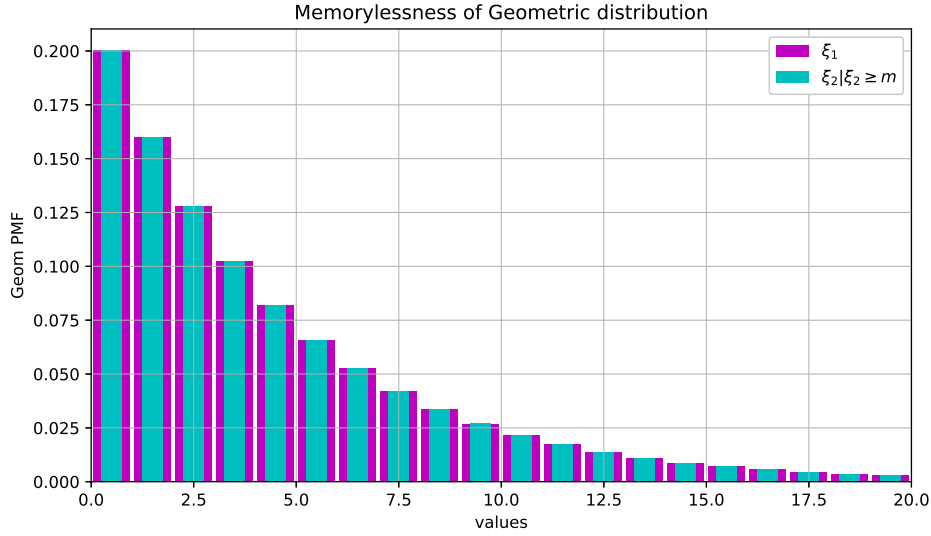


Рис. 1.3: Проверка отсутствия памяти  $\text{Geom}(p), p = 0.2, m = 7$  на выборках размера  $N = 10^7$ .

#### 1.1.4 Игра в орлянку

**Теорема 1** (центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин). Пусть  $X_1, X_2, \dots$  - последовательность н.о.р. (невырожденных) случайных величин с конечным вторым моментом. Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} < x \right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

*Доказательство.* Приведено в [2] с.447-449

□

Рассмотрим

$$S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad \eta_i = 2\xi_i - 1, \quad \xi_i \sim \text{Be}(p) - \text{i.i.d.r.v.} Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Зафиксируем  $p = 1/2$ . В таком случае

$$\mathbb{E}\nu_i \equiv \mu = 2p - 1 = 0. \mathbb{D}\nu_i \equiv \sigma^2 = 4p(1-p) = 1.$$

Воспользуемся ЦПТ.

$$\mathbb{P} \left( \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что нормированная случайная величина внутри функции распределения в левой части выражения совпадает с  $Y_n$ . Также отметим, что третий абсолютный момент



$\mathbb{E}|\eta_i|^3 = 1$ , ведь  $|\eta_i| \equiv 1$ . В таком случае можем воспользоваться неравенством Берри-Эссеена, где  $c_0 \in (0.4, 0.5)$ .

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| < \frac{c_0}{n^{3/2}}.$$

Получили оценку скорости сходимости в ЦПТ. Нас также интересует оценка значений  $Y_n(\omega)$ .

Уже показали, что

$$Y_n \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1).$$

Следовательно, по мере увеличения числа элементов  $n$  нормированная сумма  $Y(n)$  будет распределена нормально.

Также продемонстрируем поведение траектории  $Y_i = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

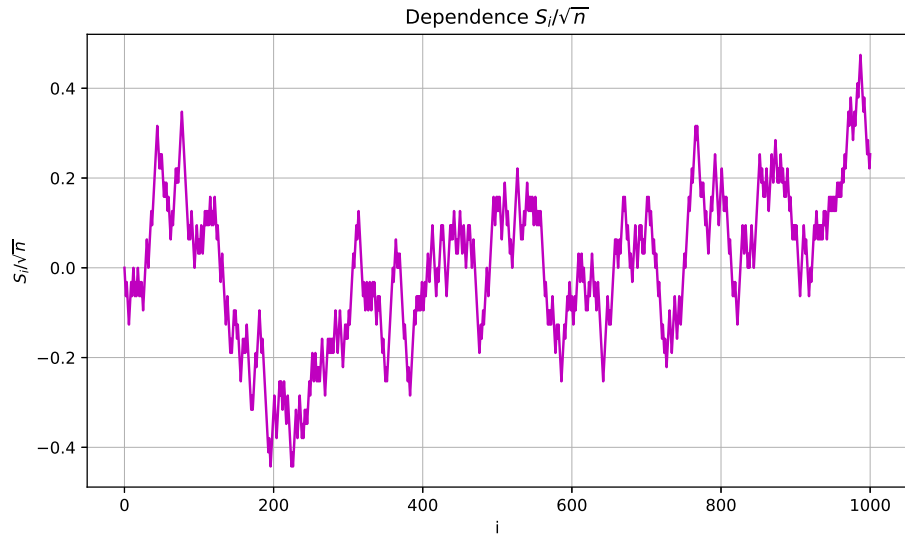


Рис. 1.4: Зависимость  $Y_i = S_i/\sqrt{n}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $n = 1000$ .

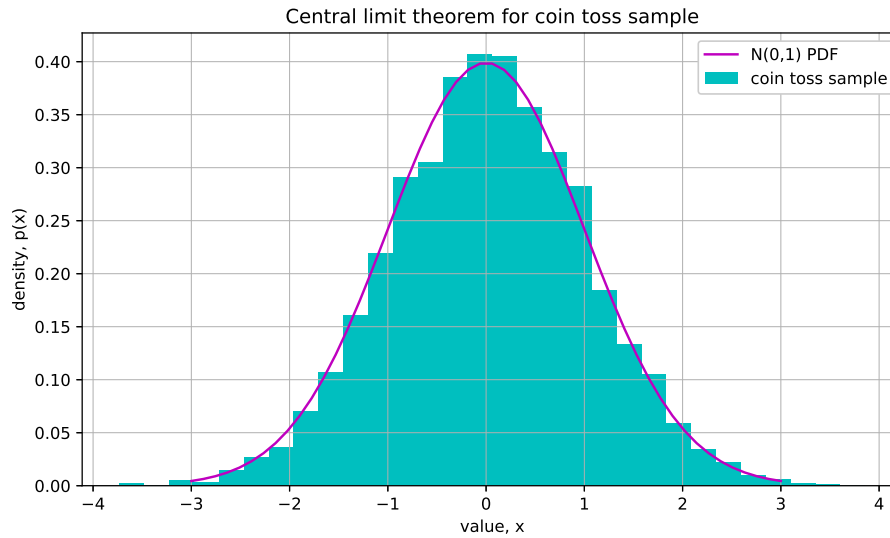


Рис. 1.5: ЦПТ для  $Y_n = S_n/\sqrt{n}$ ,  $n = 1000$  на выборке размера  $N = 10^4$ .

## 1.2 Задание 2

### 1.2.1 Условие

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин с помощью критерия Смирнова проверить свойство симметричности относительно  $\frac{1}{2}$  ( $X$  и  $1 - X$  распределены одинаково) и свойство самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение  $Y$  при условии  $Y \in [0, 1/3]$  совпадает с распределением  $\frac{Y}{3}$ ).
3. Рассчитать значения математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими (для различных объемов выборок), проиллюстрировать сходимость эмпирических значений к теоретическим.

### 1.2.2 Генератор канторового распределения

Канторовская лестница задаётся на множестве Кантора (которое имеет нулевую меру Лебега) отрезка  $[0, 1]$ , доопределяется по непрерывности в оставшихся точках. Канторовское распределение имеет функцию распределения, являющейся канторовской лестницей.

Есть два способа моделирования такого распределения:

1. По заданному  $x \in [0, 1]$ . Канторовское множество состоит из тех точек, у которых нет единицы в троичной записи. Переведем  $x$  в троичную запись, а затем отбросим все цифры после первой (самой левой) единицы.

2. По заданному размеру выборки  $N$ . Будем  $N$  раз моделировать  $n_{\text{bits}}$  испытаний схемы Бернулли с  $p = \frac{1}{2}$ . Все единицы заменим на двойки, и получим троичную запись числа, в которой отсутствуют единицы.

Значением функции распределения  $F(x)$  будет являться двоичное представление числа  $x$ . Его можно получить, заменив все двойки в троичной записи данного числа на единицы.

Число испытаний схемы Бернулли  $n = n_{\text{bits}}$  можно задавать с учётом заданной погрешности  $\varepsilon$ . В худшем случае отбрасываются двойки в троичной записи числа.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} < \varepsilon. \quad \Rightarrow \quad n + 1 < \log_{\frac{3}{2}} 3\varepsilon.$$

Будем генерировать канторово распределение по заданному размеру выборки  $N$  и точности  $\varepsilon$ .

На рисунке 1.6 продемонстрировано совпадение смоделированной выборки с её эмпирической функцией распределения.

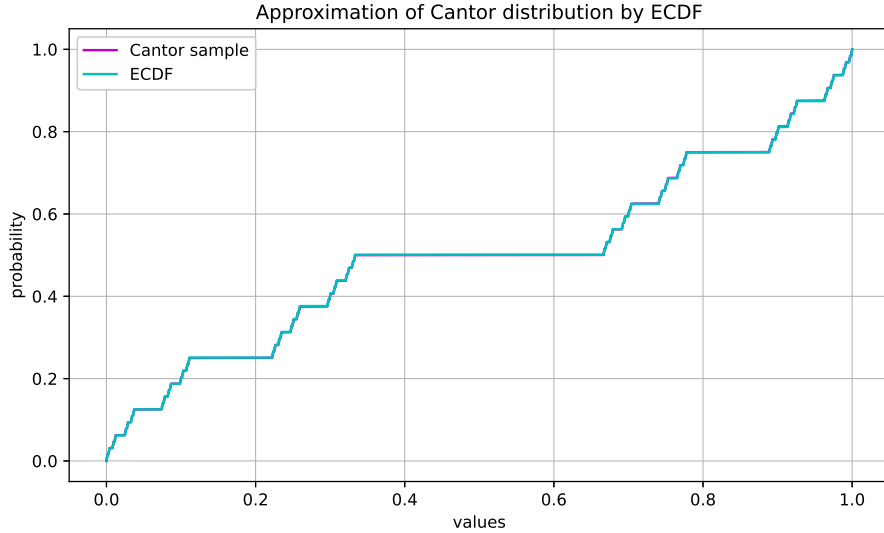


Рис. 1.6: Результат моделирования канторова распределения при  $\varepsilon = 10^{-12}$ , ( $n_{\text{bits}} = 64$ ), сравнение с эмпирической функцией распределения на выборке размера  $N = 10^5$ .

**Теорема 2** (Колмогоров). Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — н.о.р.с.в. с непрерывной функцией распределения  $F(x)$ . Пусть  $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_{(i)} < x\}$  — эмпирическая функция распределения (ECDF). Тогда

$$\forall x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}D_n < x) = F_K(x),$$

где  $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$  — статистика Колмогорова и  $F_K(\cdot)$  — функция распределения Колмогорова, которую можно выразить по формуле

$$F_K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

*Доказательство.* Приведено в [2]. □

Проверяем гипотезу

$$H_0 : F(\cdot) = G(\cdot)$$

с уровнем значимости  $\alpha$ , где  $G = F_C(\cdot)$  — канторово распределение при помощи критерия Колмогорова.

Заметим, что  $D_n$  является случайной величиной, ведь  $F_n(x)$  зависит от реализации выборки. Теорема Колмогорова утверждает, что при истинности  $H_0$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$ ,  $\sqrt{n}D_n \sim F_K$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Будем принимать  $H_0$ , если  $1 - F_K(\sqrt{n}D_n) > \alpha$ .

Число тестов	Размер выборки	$\varepsilon$	% принятия $H_0$
200	$10^4$	$10^{-6}$	95.5
500	$5 \cdot 10^3$	$10^{-7}$	95.6
1000	$10^3$	$10^{-8}$	96.5

Таблица 1.1: Тест Колмогорова о виде функции распределения для канторовой лестницы с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ .

### 1.2.3 Свойства кантороваго распределения

**Теорема 3** (Смирнов). Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ,  $m \leq n$  две независимые выборки, подчиняющиеся одному закону распределения  $F(\cdot) \in C$ , и  $F_n(x), G_m(y)$  — соответствующие эмпирические функции распределения. Тогда

$$\forall x \geq 0 \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} < x \right) = F_K(x),$$

где  $D_{nm} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - G_m(x)|$  — статистика Смирнова и  $F_K(\cdot)$  — функция распределения Колмогорова.

*Доказательство.* Приведено в [2]. □

Проверяем гипотезу  $H_0$  для двух выборок  $X$  и  $Y$  с функциями распределения  $F_X$  и  $F_Y$ :

$$H_0 : F_X(\cdot) = F_Y(\cdot) = F(\cdot)$$

с уровнем значимости  $\alpha$  при помощи критерия Смирнова.

Теорема Смирнова утверждает, что при истинности гипотезы  $H_0$  верно  $D_{nm} \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \sim F_K$  при  $n, m \rightarrow \infty$ .

Будем принимать  $H_0$ , если  $1 - F_K(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_n) > \alpha$ .

Пусть  $X$  выборка, соответствующая канторовому распределению.

1. Для проверки симметричности относительно  $\frac{1}{2}$  выбираем  $Y = 1 - X$ .
2. Для проверки самоподобия относительно деления на 3 выбираем  $\tilde{X} = \frac{X}{3}$ ,  $Y = X$  при условии  $X \in [0, \frac{1}{3}]$ .

Число тестов	Размеры выборок	$\varepsilon$	% принятия, отн. $1/2$	% принятия, $\div 3$
200	$10^3$	$10^{-8}$	94.5	97.0
650	$10^3$	$10^{-8}$	95.1	96.0
1000	$10^3$	$10^{-8}$	95.4	94.8

Таблица 1.2: Тест Смирнова о виде функции распределения для проверки симметричности канторовой лестницы с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ .

На рисунках 1.7, 1.8 продемонстрирована симметричность относительно  $\frac{1}{2}$  и деления на 3 (совпадение ECDF двух выборок на каждом рисунке).

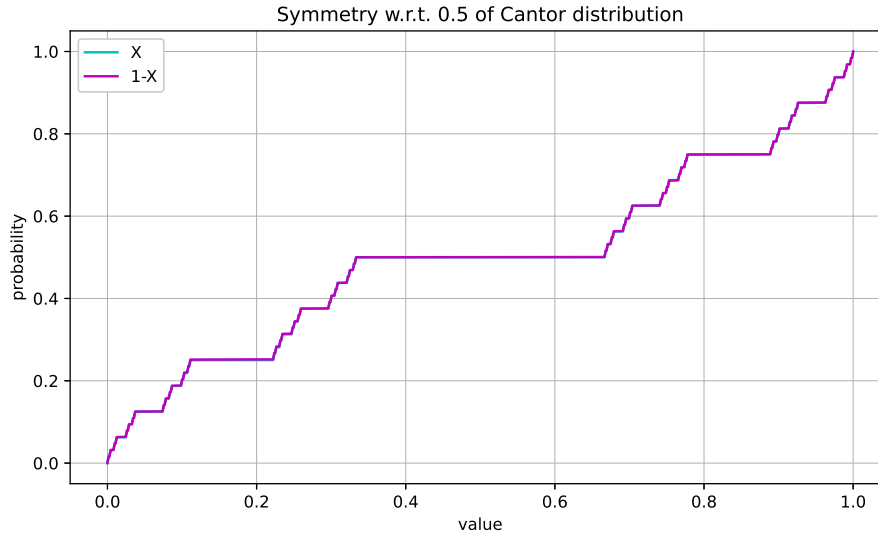


Рис. 1.7: Симметричность канторового распределения относительно  $\frac{1}{2}$  при  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $N = 1000$ .

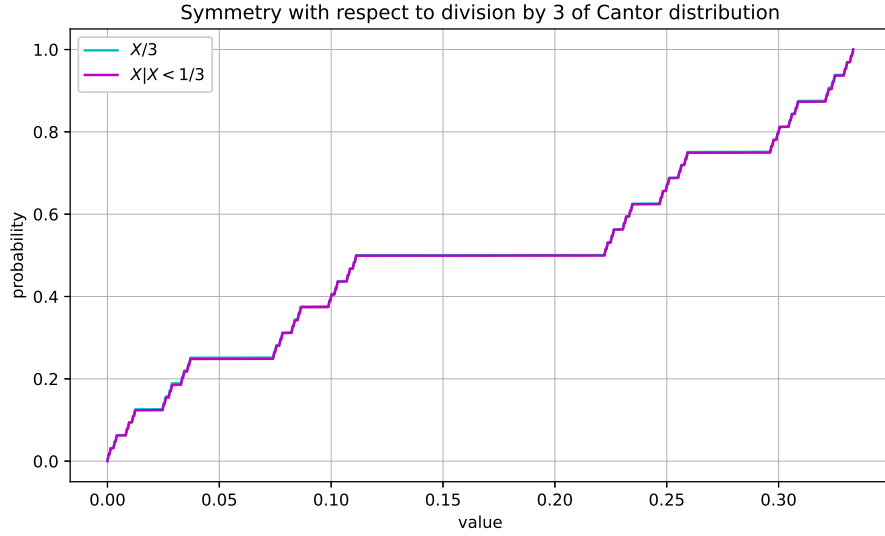


Рис. 1.8: Симметричность канторового распределения относительно деления на 3 при  $\varepsilon = 10^{-12}$ ,  $N = 10^4$ .

#### 1.2.4 Численные характеристики канторового распределения

**Утверждение 4** (закон полной вариации). Пусть  $X, Y$  — случайные величины на одном вероятностном пространстве и  $\mathbb{D}X < \infty$ . Тогда

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y]).$$

*Доказательство.* По телескопическому свойству условного математического ожидания и определению дисперсии имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|Y]] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2 = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y) + (\mathbb{E}[X|Y])^2] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2 = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \underbrace{(\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|Y])^2] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2)}_{=\mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y])} = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y]). \end{aligned}$$

. Свойства условного математического ожидания и их доказательство можно найти в [2].  $\square$

- Математическое ожидание  $X \sim F_C$ ,  $F_C$  - канторово, равно  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \{X \stackrel{d}{=} 1 - X\} = \mathbb{E}[1 - X] \\ \Rightarrow \mathbb{E}X &= 1 - \mathbb{E}X \\ \Rightarrow \mathbb{E}X &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Дисперсия  $X \sim F_C$  равна  $\frac{1}{8}$ :

$$\begin{aligned}
Y &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} \left\{ X \in \left[ \frac{2}{3}, 1 \right] \right\}. \\
\mathbb{D}X &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X | Y)] + \mathbb{D}(\mathbb{E}[X | Y]). \\
\mathbb{E}[\mathbb{D}(X | Y)] &= \frac{1}{9} \mathbb{D}X \text{ (из свойства самоподобия).} \\
\mathbb{E}[X | Y] &= \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{из свойства симметричности}) \\
\mathbb{D}X &= \frac{1}{9} \mathbb{D}X + \frac{1}{9} \\
\Rightarrow \mathbb{D}X &= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

На рисунке 1.9 продемонстрирована зависимость математического ожидания и дисперсии от размера выборки канторового распределения, сходимость эмпирических значений к теоретическим на логарифмической шкале. С увеличением размера выборки разброс относительно теоретических значений уменьшается.

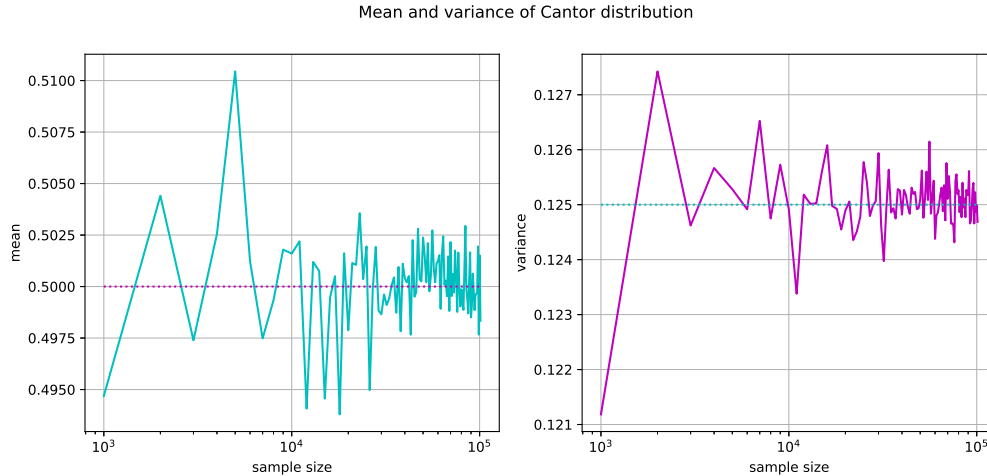


Рис. 1.9: Зависимость математического ожидания и дисперсии от выборки канторового распределения на сетке  $N \in [10^3, 10^5]$  с шагом  $h = 10^3$ .

## 1.3 Задание 3

### 1.3.1 Условие

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
2. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Найти распределение случайной величины  $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

3. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
4. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. Убедиться в корректности построенного датчика при помощи критерия  $\chi^2$  Пирсона.
5. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты (преобразование Бокса-Мюллера). Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера — равенство дисперсий.

### 1.3.2 Генератор экспоненциального распределения

**Определение 4.** *Экспоненциальное распределение — абсолютно непрерывное распределение с плотностью  $\lambda e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0, x \geq 0$ .*

Рассмотрим  $\lambda > 0$ . Будем генерировать случайную величину

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln \nu, \quad \nu \sim U[0, 1].$$

Она имеет экспоненциальное распределение  $\text{Exp}(\lambda)$ , ведь

$$\mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda} \ln \nu < x\right) = \mathbb{P}(\nu > e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

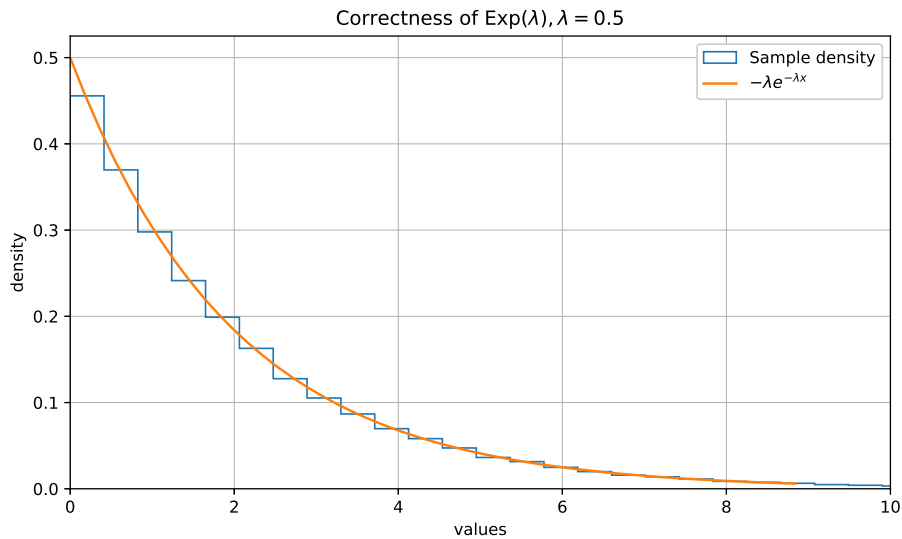


Рис. 1.10: Корректность работы датчика на примере выборки из распределения  $\text{Exp}(0.5)$  размера  $N = 10^5$ .



**Утверждение 5.** Случайная величина  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$  обладает свойством отсутствия памяти:

$$\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t \mid \xi \geq t) = \mathbb{P}(\xi > \Delta t), \quad \forall t, \Delta t \geq 0.$$

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t \mid \xi \geq t) = \frac{\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t)}{\mathbb{P}(\xi \geq t)}.$$

Отдельно вычислим

$$\mathbb{P}(\xi > x) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t \mid \xi \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = \mathbb{P}(\xi > \Delta t).$$

□

На рисунке 1.11 аналогично пункту 1.1.3 численно показали отсутствие памяти экспоненциального распределения.

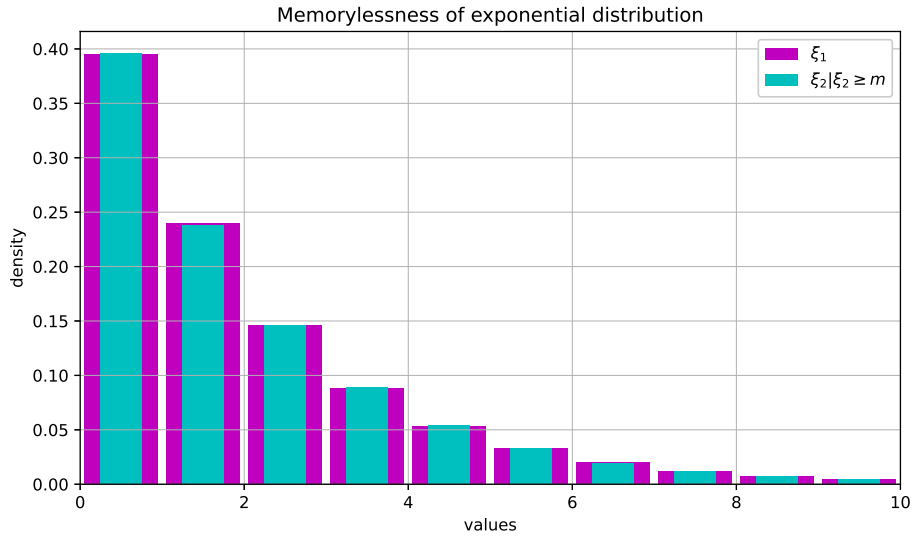


Рис. 1.11: Свойство отсутствия памяти для  $\text{Exp}(0.5)$ ,  $\Delta t = 5$  для выборок размера  $N = 10^6$ .

### 1.3.3 Распределение $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

Положим

$$X_k \sim \text{Exp}(\lambda_k), \quad k \in \overline{1, n} \text{ — н.о.р.с.в.}$$

Генератор строим из следующих соображений.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < x) &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \geq x) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) = \{\text{независимость}\} = \\
&= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \geq x) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X_k < x)) = \\
&= 1 - \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_k x} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x}.
\end{aligned}$$

Получили, что  $Y \sim \text{Exp}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$ .

На рисунке 1.12 продемонстрировано совпадение ECDF для выборки из  $Y$  и выборки из  $\text{Exp}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$ .

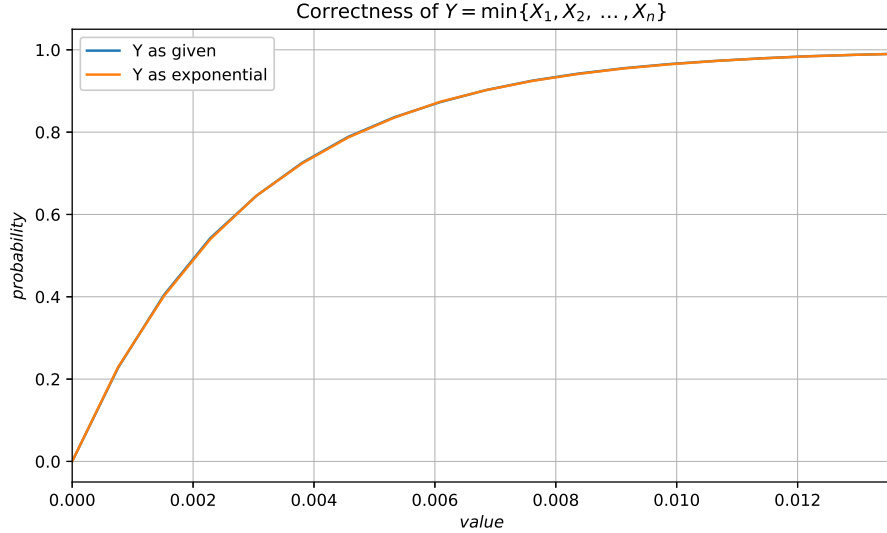


Рис. 1.12: Корректность работы датчика для выборки из  $Y$  размера  $N = 10^5$ , вектор  $\hat{\lambda}$  — выборка равномерного распределения на  $[0, 7]$  размера  $n = 100$

### 1.3.4 Г-р пуассоновского р-я (через г-р экспоненциального р-я)

**Определение 5.** Случайная величина  $\xi \in \mathbb{N}_0$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$  ( $\text{Pois}(\lambda)$ ), если

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \lambda^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 4.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - н.о.р.с.в.,  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$ . Положим  $Y$  — наименьшее неотрицательное целое число такое, что

$$\sum_{k=1}^{Y+1} X_i > 1.$$

Тогда  $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

Доказательство. Приведено в [3], с.501

□

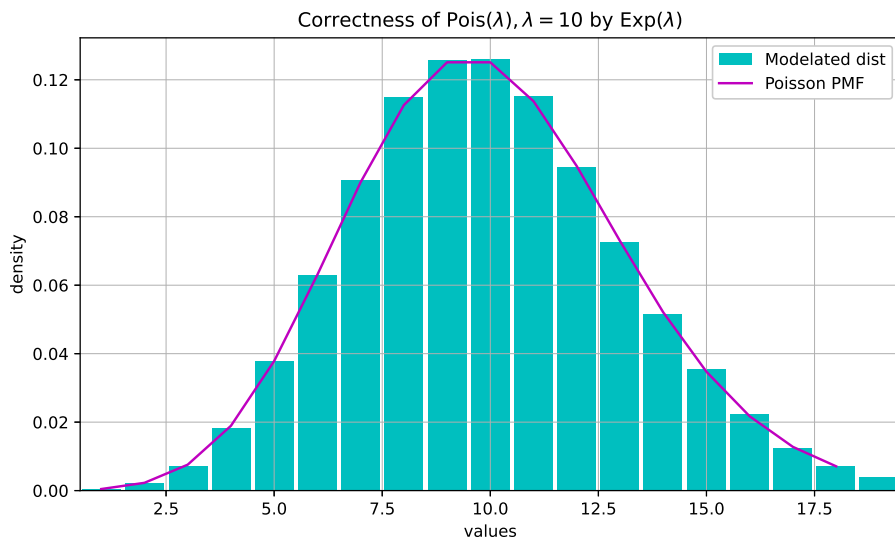


Рис. 1.13: Корректность работы датчика  $\text{Pois}(\lambda)$  при помощи датчика  $\text{Exp}(\lambda)$  при  $\lambda = 10, N = 10^5$ .

### 1.3.5 Г-р пуассоновского р-я (через г-р биномиального р-я)

**Определение 6.** Пусть  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  — независимые стандартно нормально распределенные случайные величины:  $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = \overline{0, n}$ . Тогда распределение случайной величины  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = Y_0^2 + Y_1^2 + \dots + Y_n^2$$

называется распределением  $\chi^2$  (хи-квадрат) с  $n$  степенями свободы:  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ .

**Теорема 5** (Пуассон). Пусть есть последовательность биномиально распределенных случайных величин  $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$  такая, что

1.  $n \rightarrow \infty$ .
2.  $np_n \rightarrow \lambda, n \rightarrow \infty$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ .

Доказательство. Приведено в [2], Гл. I, §6, п.4.

□

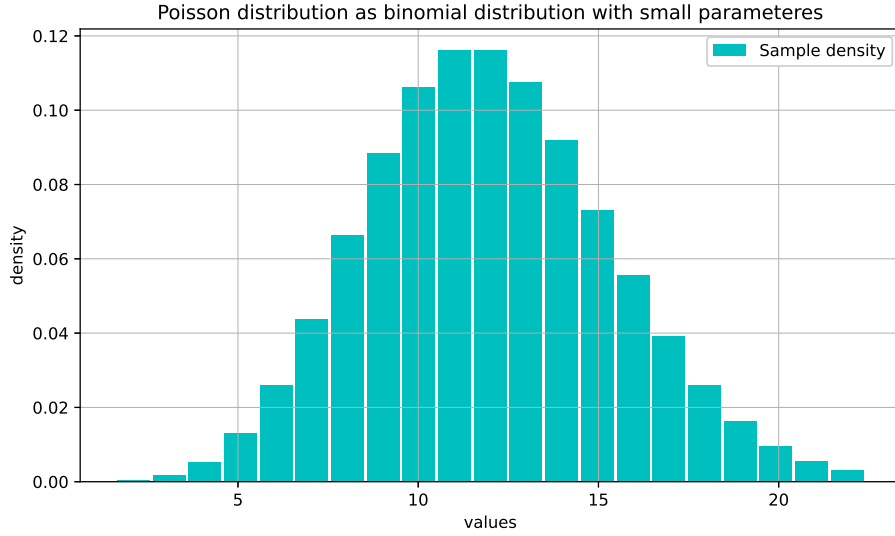


Рис. 1.14: Корректность работы датчика  $\text{Pois}(\lambda)$  при помощи датчика  $\text{Bin}(n, \lambda/n)$  при  $n = 10^4, \lambda = 12, N = 10^6$ .

Проверяем гипотезу о виде функции распределения  $X$  при помощи критерия  $\chi^2$  Пирсона:

$$H_0 : F_X(\cdot) = F_{\text{Pois}}(\cdot)$$

с уровнем значимости  $\alpha$ , где  $F_{\text{Pois}}(\cdot)$  - функция распределения  $\text{Pois}(10)$ .

Выберем разбиение  $T$  размера  $m = 15$  области определения распределения  $(\mathbb{N}_0)$ :

$$T = \bigcup_{k=1}^{15} T_k, \quad T_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad T_k = \{k + 3\}, k = \overline{2, 14}, \quad T_{15} = \{k \geq 18\}.$$

Вычисляем теоретические вероятности  $p_k = \mathbb{P}(X \in T_k)$  при условии истинности  $H_0$ . Вычисляем  $l_k$  - число попаданий значений выборки  $X$  в множество  $T_k$ .

Согласно критерию  $\chi^2$  Пирсона при истинности гипотезы  $H_0$  статистика  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(l_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^m \frac{n}{p_k} \left( \frac{l_k}{n} - p_k \right)^2$$

имеет распределение  $\chi_{m-1}^2$ .

Будем принимать гипотезу, если  $1 - F_{\chi_{m-1}^2}(\chi^2) > \alpha$ .

Число тестов	Размер выборки	$\lambda$	% принятия $H_0$
100	$10^4$	10	94.5
175	$10^4$	10	97.1
250	$10^4$	10	97.2

Таблица 1.3: Тест  $\chi^2$  Пирсона о виде функции распределения для  $\text{Pois}(\lambda)$  с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ .

### 1.3.6 Г-р стандартного нормального р-я (полярный метод)

Существует эффективный способ моделирования пары независимых нормально распределенных случайных величин. Он основан на следующей теореме.

**Теорема 6** (преобразование Бокса-Мюллера). Пусть  $\xi_1, \xi_2$  - независимые стандартно нормально распределенные случайные величины. Тогда их можно представить в виде

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\omega} \cos \nu, \\ \xi_2 = \sqrt{\omega} \sin \nu. \end{cases}$$

где  $\nu \sim U[0, 2\pi]$ ,  $\omega \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$  - независимые.

*Доказательство.* Покажем, что совместные плотности векторов

$$(\xi_1, \xi_2), (\sqrt{\omega} \cos \nu, \sqrt{\omega} \sin \nu)$$

совпадают. Для этого достаточно перейти к полярным координатам под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} dx_2 dx_1 = \\ &= \left| \begin{array}{l} x_1 = r \cos \alpha, \\ x_2 = r \sin \alpha. \end{array} \right| = \iint_{\substack{r \cos \alpha < x \\ r \sin \alpha < y}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\alpha = \\ &= \{\omega = r^2, d\omega = 2r dr\} = \\ &= \iint_{\substack{\sqrt{\omega} \cos \alpha < x \\ \sqrt{\omega} \sin \alpha < y}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{1}{2} d\omega d\alpha = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y). \end{aligned}$$

□

На рисунке 1.15 продемонстрирована корректность работы датчика, основанном на преобразование Бокса-Мюллера, для моделирования выборки из стандартного нормального распределения размера  $N = 10^6$ .

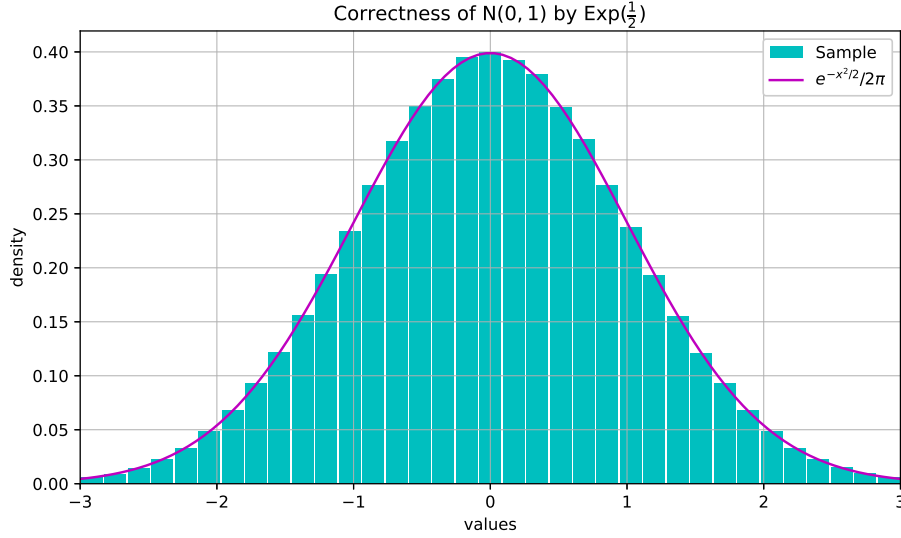


Рис. 1.15: Корректность работы датчика стандартного нормального распределения через датчик экспоненциального распределения для выборки  $N = 10^6$ .

**Определение 7.** Пусть  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины:  $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = \overline{0, n}$ . Тогда распределение случайной величины  $t$ :

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

называется *распределением Стьюдента с  $n$  степенями свободы*:  $t \sim t(n)$ .

**Утверждение 6 (Стьюдент).** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые случайные величины такие, что  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = \overline{1, n}$ . Положим  $\bar{X}$  — выборочное среднее,  $S^2$  — несмещенная выборочная дисперсия. Тогда

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

где  $t(n-1)$  — *распределение Стьюдента с  $(n-1)$  степенями свободы*.

Дополнительно проверим гипотезу о равенстве мат. ожидания конкретному значению одной нормально распределенной выборки при помощи t-критерия Стьюдента:

$$H_0 : \mathbb{E}X = \mu.$$

Согласно утверждению Стьюдента при истинности гипотезы  $H_0$  статистика  $T$  имеет распределение  $t(n-1)$ . Отметим, что критерий Стьюдента имеет двустороннюю критическую область.

Будем принимать  $H_0$ , если  $|T| < K_\alpha = F_{t(n-1)}^{-1}(1 - \alpha/2)$ .

Нужные значения возьмём из таблицы: при  $\alpha = 0.05, n = 10^4 + 1$  квантиль  $K_\alpha \approx 1.9623$ .

Число тестов	Размер выборки	$\mu$	$\sigma$	% принятия $H_0$
200	$10^5$	2.5	1.25	96.4
650	$10^5$	2.5	1.25	95.2
1000	$10^5$	2.5	1.25	95.3

Таблица 1.4: Тест Стьюдента о равенстве математического ожидания заданному числу  $\mu$  для  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ .

**Определение 8.** Пусть  $Y_1, Y_2$  — независимые случайные величины, имеющие распределения  $\chi^2(d_1), \chi^2(d_2), d_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$  соответственно. Тогда распределение случайной величины

$$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$$

называется распределением Фишера со степенями свободы  $d_1, d_2$ . Обозначение:  $F \sim F(d_1, d_2)$ .

Далее проверим гипотезу о равенстве дисперсий двух независимых нормально распределенных выборок при помощи критерия Фишера:

$$H_0 : \mathbb{D}X = \mathbb{D}Y = \sigma^2.$$

При истинности гипотезы  $H_0$  для выборок  $X$  (размера  $n$ ) и  $Y$  (размера  $m$ ) статистика

$$D = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(m-1, n-1),$$

где  $F(m-1, n-1)$  - распределение Фишера со степенями свободы  $n-1$  и  $m-1$ . Отметим, что критерий Фишера также имеет двустороннюю критическую область.

Будем принимать  $H_0$ , если  $D \in (K_{\alpha/2}, K_{1-\alpha/2})$ , где  $K_{\alpha/2} = F_{F(n-1, m-1)}^{-1}(\alpha/2)$ ,  $K_{1-\alpha/2} = F_{F(n-1, m-1)}^{-1}(1 - \alpha/2)$ .

Число тестов	Размер N	Размер M	$\mu$	$\sigma$	% принятия $H_0$
1000	6000	10000	2.5	1.25	94.7
5000	6000	10000	2.5	1.25	95.0
10000	6000	1000	2.5	1.25	94.8

Таблица 1.5: Тест Фишера о равенстве дисперсии заданному числу  $\sigma^2$  для  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ .

## 1.4 Задание 4

### 1.4.1 Условие

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи графика normal probability plot убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.

3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в задании 3 и в задании 4.

### 1.4.2 Генератор распределения Коши

**Определение 9.** Распределение Коши  $C(x_0, \gamma)$  — абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$\frac{1}{\pi\gamma \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)},$$

где  $x_0$  - параметр сдвига,  $\gamma > 0$  - параметр масштаба.

Пусть  $X \sim C(x_0, \gamma)$ . Тогда

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{x - x_0}{\gamma} \right) + \frac{1}{2},$$

$$F_X^{-1}(x) = x_0 + \gamma \operatorname{tg} \left[ \pi \left( x - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Будем моделировать выборку распределения Коши методом обращения функции распределения.

На рисунке 1.16 продемонстрировано отсутствия математического ожидания распределения Коши.

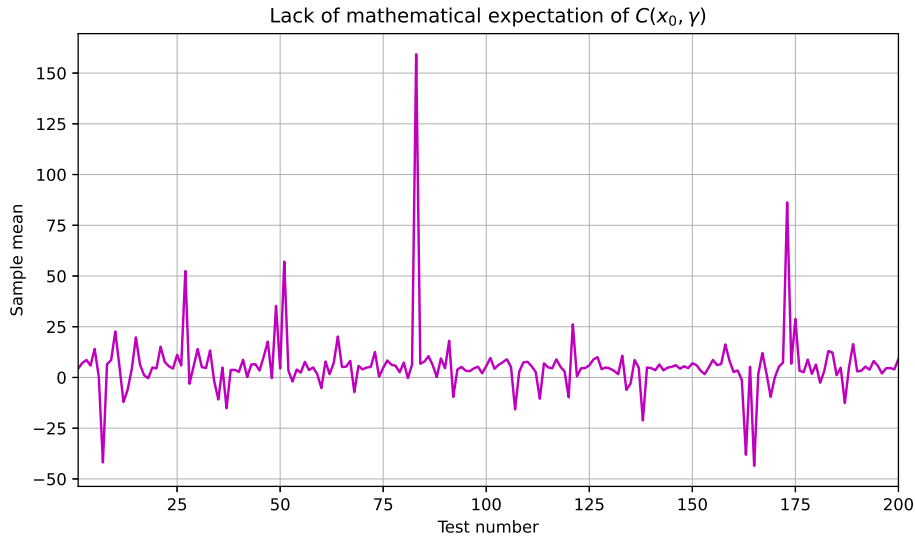


Рис. 1.16: Мат. ожидание  $C(5, 2)$  в зависимости от номера запуска при  $N = 10^6$ .

### 1.4.3 Г-р стандартного нормального р-я (через г-р р-я Коши)

Опишем *метод элиминации фон Неймана*.

Ставится задача моделирования распределения с плотностью  $f(x)$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть имеются  $X \sim g(x)$  и  $U \sim U[0, 1]$  - две случайные величины,  $g(x)$  принимает значения в  $\mathbb{R}^n$ . Также имеется константа  $c \geq 1$ .



Можно показать, что случайный вектор  $(X, cUg(X)) \sim U(A)$ , где  $A = \{(x, u) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq u \leq cf(x)\}$ .

Доказательство, обоснование корректности приведены в [3], с. 40-46.

Обоснованность алгоритма моделирования для  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$  приведена там же, с. 46.

Функция `scipy.stats.probplot` строит Q-Q plot (quantile-quantile plot). Он определяется следующим образом.

- По оси ординат откладывается выборка в возрастающем порядке.
- По оси абсцисс откладываются теоретические квантили заданного распределения (в данном случае нормального).

Подсчет теоретических квантилей осуществляется при помощи преобразования Филлибена, ведь возникает проблема их вычисления для выборок малого размера.

Таким образом, чтобы проверить данные на нормальность, достаточно взглянуть на линейный порядок сортированных данных на Q-Q графике.

На рисунке 1.17 отчётливо видна линейная зависимость, что влечёт корректность построенного датчика.

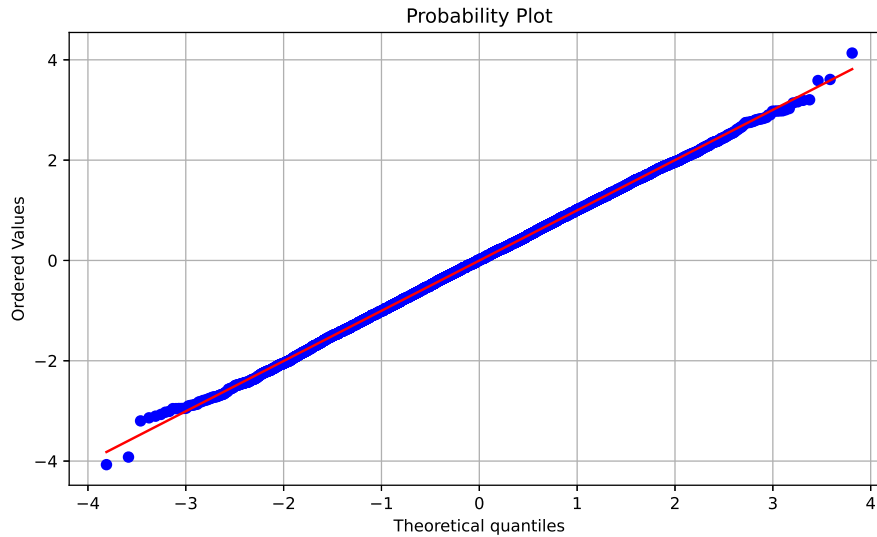


Рис. 1.17: Probability plot для выборки  $\mathcal{N}(0, 1)$ , полученной методом элиминации, при  $N = 10^6$ .

#### 1.4.4 Сравнение скорости сходимости

На рисунке 1.18 продемонстрирована средняя скорость вычисления по 100 вычислениям в зависимости от размера выборки на логарифмической шкале.

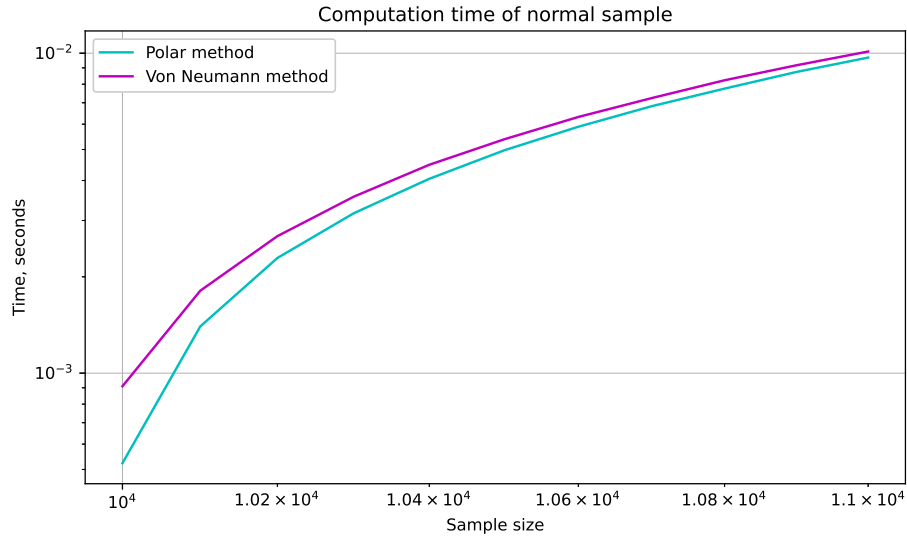


Рис. 1.18: Сравнение скорости моделирования выборки из стандартного нормального распределения полярным методом и методом элиминации.

## 1.5 Задание 5

### 1.5.1 Условие

1. Пусть  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Убедиться эмпирически в справедливости теоремы о законе больших чисел (ЗБЧ) и центральной предельной теоремы (ЦПТ): исследовать поведение суммы  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n} \frac{S_n}{n} - a.$$

2. Считая  $\mu, \sigma$  неизвестными, построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии по имеющейся выборке.
3. Пусть  $X_i \sim K(a, b)$  - имеет распределение Коши с параметрами сдвига  $a$  и масштаба  $b$ . Изучить эмпирически как ведут себя суммы  $\frac{S_n}{n}$ , объяснить результат и найти закон распределения данных сумм.

### 1.5.2 Справедливость теоремы о ЗБЧ и ЦПТ

Сформулируем теорему о ЗБЧ в форме А.Я.Хинчина. ЦПТ сформулирована в пункте 1.1.4.

**Теорема 7** (о законе больших чисел в форме А.Я.Хинчина). Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — последовательность н.о.р.с.в. таких, что  $\mathbb{E}|X_k| < \infty$ ,  $\mathbb{E}X_1 = \mu$ . Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Доказательство. Приведено в [2], с.447-449. □

Согласно ЦПТ выполняется

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - \mu \right) = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

На рисунке 1.20 это доказано эмпирически. Также, на рисунке 1.19 продемонстрирована сходимость выборочного среднего к теоретическому среднему при  $\mu = 5, \sigma = 1.5$ .

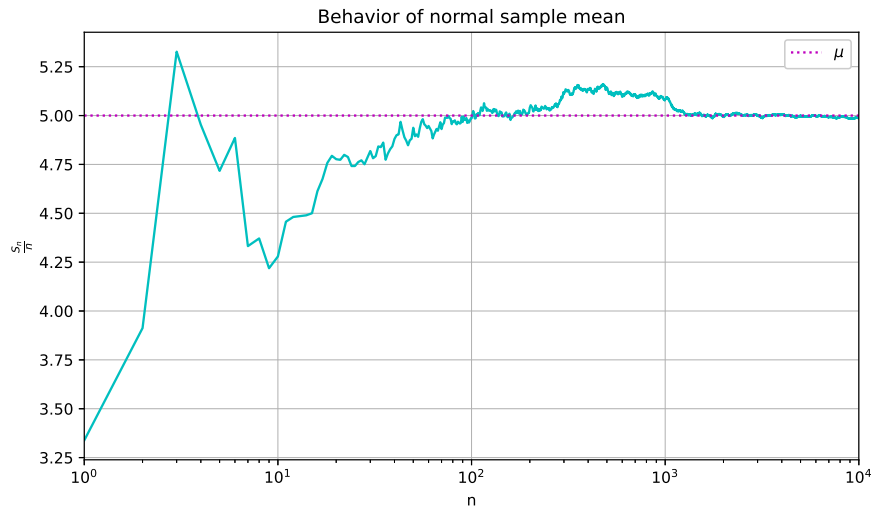


Рис. 1.19: Выборочное среднее суммы  $S_n/n$  при  $X_i \sim \mathcal{N}(5, 1.5^2)$  в зависимости от размера выборки.

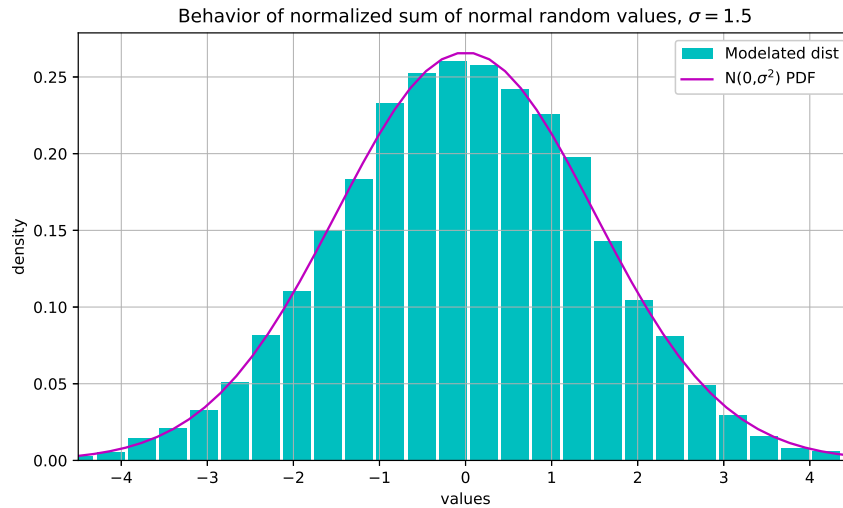


Рис. 1.20: Распределение нормированной суммы  $\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \mu)$  при  $\mu = 5, \sigma = 1.5, N = 10^4$ .

### 1.5.3 Доверительные интервалы для среднего и дисперсии

**Определение 10.** Пара статистик  $T_1(X_\theta), T_2(X_\theta)$  называется доверительным интервалом для параметра  $\theta$  с уровнем значимости  $\alpha \in [0, 1]$ , если

$$\mathbb{P}(T_1(X_\theta) \leq \theta \leq T_2(X_\theta)) \geq 1 - \alpha.$$

Знаем распределения следующих статистик:

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1). \quad D = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Здесь  $\bar{X}$  - выборочное среднее,  $S^2$  - несмещенная выборочная дисперсия:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{n-1}.$$

Будем искать доверительные интервалы  $(\gamma_1, \gamma_2)$  с уровнем значимости  $\alpha$ :

$$\mathbb{P}(\gamma_1 < Y < \gamma_2) = 1 - \alpha,$$

считая  $\mu, \sigma$  неизвестными. Для этого достаточно взять  $\gamma_1, \gamma_2$  равными таким квантилям, что

$$\mathbb{P}(\gamma_1 < Y < \gamma_2) = \underbrace{\mathbb{P}(Y < \gamma_2)}_{1 - \frac{\alpha}{2}} - \underbrace{\mathbb{P}(Y < \gamma_1)}_{\frac{\alpha}{2}} = 1 - \alpha.$$

Доверительный интервал для среднего  $\mu$  ищем при  $Y = T$ .

$$\mathbb{P}(\gamma_1 < T < \gamma_2) = \mathbb{P}\left(\gamma_1 < \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} < \gamma_2\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X} - \frac{\gamma_2 S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - \frac{\gamma_1 S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Выберем

$$\gamma_1 = F_{t(n-1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \gamma_2 = F_{t(n-1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом,  $\mu \in \left(\bar{X} - \frac{\gamma_2 S}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \frac{\gamma_1 S}{\sqrt{n}}\right)$  с вероятностью  $1 - \alpha$ .

Доверительный интервал для дисперсии  $\sigma^2$  ищем при  $Y = D$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\gamma_1 < D < \gamma_2) &= \mathbb{P}\left(\gamma_1 < \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\sigma^2} < \gamma_2\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_1}\right) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Выберем

$$\gamma_1 = F_{\chi^2(n-1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \gamma_2 = F_{\chi^2(n-1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом,  $\sigma^2 \in \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_2}, \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_1}\right)$  с вероятностью  $1 - \alpha$ .

При проведении 1000 тестов параметр  $\mu$  принадлежал доверительному интервалу с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$  в 94.8% случаев. Также, дисперсия  $\sigma^2$  принадлежала соответствующему доверительному интервалу в 95.5% случаев. На рисунках 1.21, 1.22 продемонстрировано сужение доверительных интервалов при увеличении размера выборки при  $\mu = 2, \sigma = 3$ .

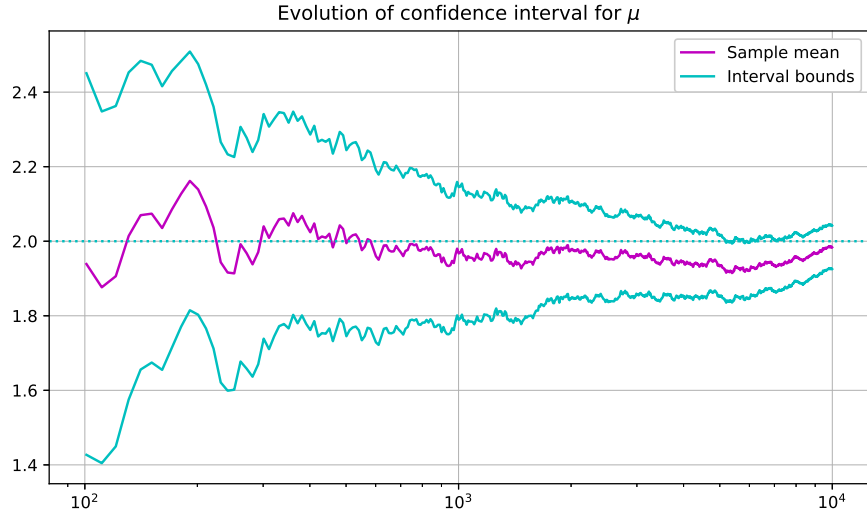


Рис. 1.21: Доверительные интервалы для выборочного среднего выборки из  $\mathcal{N}(2, 3^2)$  в зависимости от размера выборки.

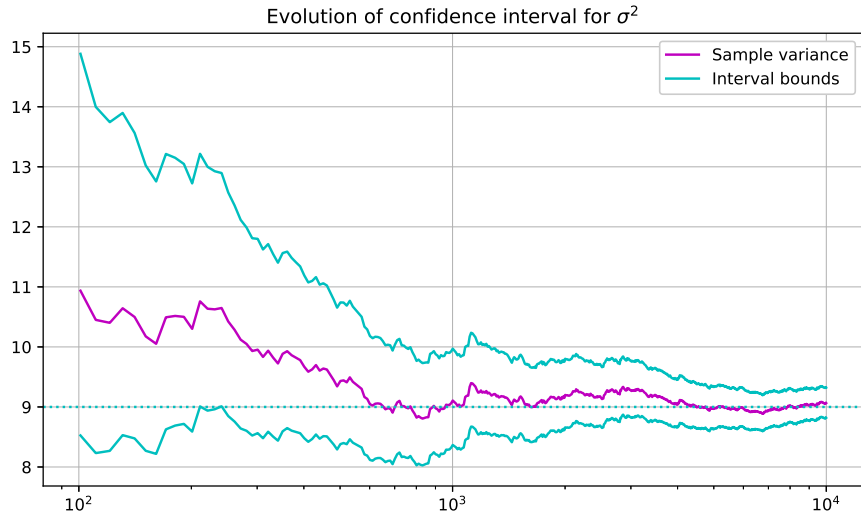


Рис. 1.22: Доверительные интервалы для выборочной дисперсии выборки из  $\mathcal{N}(2, 3^2)$  в зависимости от размера выборки.

#### 1.5.4 Распределение суммы элементов распределения Коши

**Определение 11.** Характеристической функции случайной величины  $X$  называется

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{itX}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим  $X_1, X_2, \dots \sim C(a, b)$ , где  $a$  - параметр сдвига,  $b > 0$  - параметр масштаба. Как известно, плотность распределения Коши задаётся в виде

$$\frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)}.$$

Характеристическая функция  $\xi \sim C(0, 1)$  равна

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = e^{-|t|}.$$

Используем её для вычисления характеристической функции  $X_1$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dx}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} = \left| \begin{array}{l} x = yb + a \\ dx = bdy \end{array} \right| = \\ &= e^{iat} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itby} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} = e^{iat-b|t|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $Y = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E} e^{itY} = \mathbb{E} \exp \left\{ it \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right\} = \{\text{н.о.р.с.в.}\} = \\ &= \left( \mathbb{E} \exp \left\{ i \frac{t}{n} X_1 \right\} \right)^n = \left( \varphi_{X_1} \left( \frac{t}{n} \right) \right)^n = e^{iat-b|t|}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $Y \sim C(a, b)$ . Эмпирически убедимся в этом на рисунке 1.23.

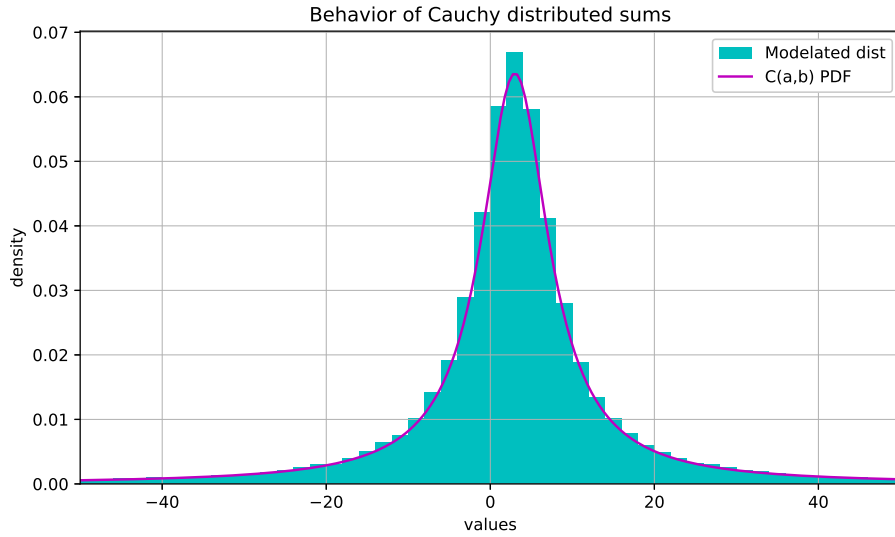


Рис. 1.23: Распределение суммы случайных величин  $C(3, 5)$ .

## 1.6 Задание 6

### 1.6.1 Условие

1. Вычислить следующий интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdots x_{10}^2})}}{x_1^2 \cdots x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

- Методом Монте-Карло,
- Методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.

2. Оценить точность вычислений для каждого из двух случаев.

### 1.6.2 Вычисление интеграла

Можно заметить, что интеграл существует, и он представим в виде

$$\begin{aligned} I &= \pi^5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi^{10}}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \right\}}_{p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{10})} \cdot \underbrace{\frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2^7 \cdot \prod_{i=1}^{10} x_i^2} \right\}}{\prod_{i=1}^{10} x_i^2}}_{f(x_1, x_2, \dots, x_{10})} dx_1 dx_2 \dots dx_{10} = \\ &= \pi^5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{10}) dx_1 dx_2 \dots dx_{10}, \end{aligned}$$

что равняется  $\mathbb{E}[f(\xi)]$ , где  $\xi$  - случайный вектор, компонентами которого являются независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами  $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2}$ .

Независимость следует из того, что совместная плотность представима в виде произведения плотностей отдельных компонент:

$$p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) \cdots p_{\xi_{10}}(x_{10}),$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{10})$ ,  $\xi_i \sim N(0, \frac{1}{2})$ ,  $i = \overline{1, 10}$ .

Рассмотрим  $\eta_i = f(\xi)$ ,  $i = \overline{1, n}$  - н.о.р.с.в. Согласно теореме о законе больших чисел

$$\frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\eta_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Альтернативно воспользуемся методом прямоугольников. Для этого рассмотрим замену  $x_i = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\varphi_i)$ ,  $i = \overline{1, 10}$ . Определитель якобиана равен

$$|J| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \left(\prod_{i=1}^{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right)\right)^{-1}.$$

Интеграл равен

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{10}, \\ \theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{10} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right)} \exp \left\{ -\left( \sum_{i=1}^{10} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right) + \frac{1}{2^7} \prod_{i=1}^{10} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Подинтегральная функция  $\theta(\vec{\varphi})$  обладает следующими свойствами. -  $\theta(\vec{\varphi})$  четна по каждому аргументу. -  $\theta(\vec{\varphi})$  инвариантна относительно перестановки аргументов  $\varphi_i \mapsto \varphi_j, i \neq j$ .

Первое свойство позволяет свести пределы интегрирования к  $[0, 1]$ , т.е.

$$I = \pi^{10} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{10}.$$

Введём равномерную сетку на  $(0, 1)^{10}$ .

$$T = \{(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_{10}}^{10}) \mid t_{i_k}^k = \frac{i_k + \frac{1}{2}}{N+1}, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, 10}\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &\approx \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{i=1}^N \cdots \sum_{i_{10}=1}^N \theta(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_{10}}^{10}) = \\ &= \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{i=1}^N \cdots \sum_{i_{10}=1}^N \theta\left(\frac{i_1 + \frac{1}{2}}{N+1}, \frac{i_2 + \frac{1}{2}}{N+1}, \dots, \frac{i_{10} + \frac{1}{2}}{N+1}\right). \end{aligned}$$

В силу инвариантности под знаками суммирования возникают равные значения для перестановок одного и того же набора индексов. Для каждого набора различных индексов таких перестановок всего  $10!$ . Для набора индексов, где встречаются равные значения, таких перестановок всего существует

$$\frac{10!}{m_1! m_2! \cdots m_N!},$$

где  $m_k!$  - число индексов в наборе  $(i_1, i_2, \dots, i_{10})$ , равных  $k$ .

Таким образом,

$$I \approx \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{1 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{10} \leq N} \frac{10!}{m_1! m_2! \cdots m_N!} \cdot \theta\left(\frac{i_1 + \frac{1}{2}}{N+1}, \frac{i_2 + \frac{1}{2}}{N+1}, \dots, \frac{i_{10} + \frac{1}{2}}{N+1}\right).$$

### 1.6.3 Оценка точности вычисления

Оценим точность вычислений эмпирически. Как можно заметить, значение интеграла, вычисленного по методу Монте-Карло находится в окрестности числа 125 (рисунок 1.24). При этом значение, вычисленное квадратурным методом, зависит как квадратный корень от размера дискретизации (рисунок 1.25) и с увеличением таковой стремится к тому же числу.

Найдём аналитическую оценку скорости сходимости для метода Монте-Карло. Из теоремы о ЗБЧ для последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин с конечными первым и вторым моментами:  $\mathbb{X}_i = a, \mathbb{D}X_i = \sigma^2$  следует, что

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathbb{E}[\overline{X}_n - a]^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, скорость сходимости составляет  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  (достаточно медленная). Отметим, что при этом метод Монте-Карло является универсальным.



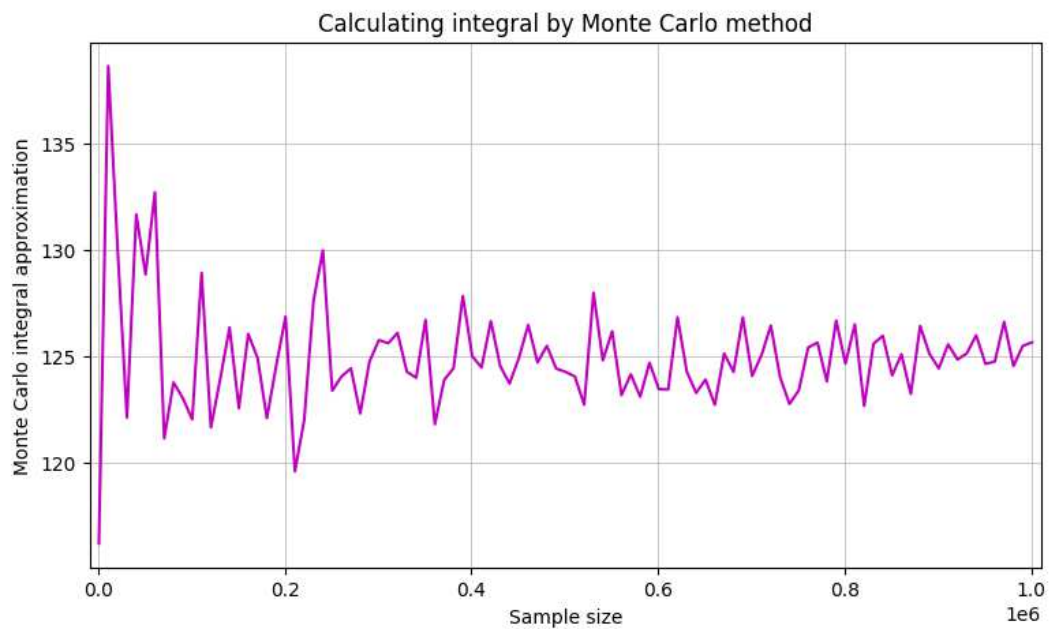


Рис. 1.24: Приближенное значение интеграла, полученного методом Монте-Карло, в зависимости от размера выборки.

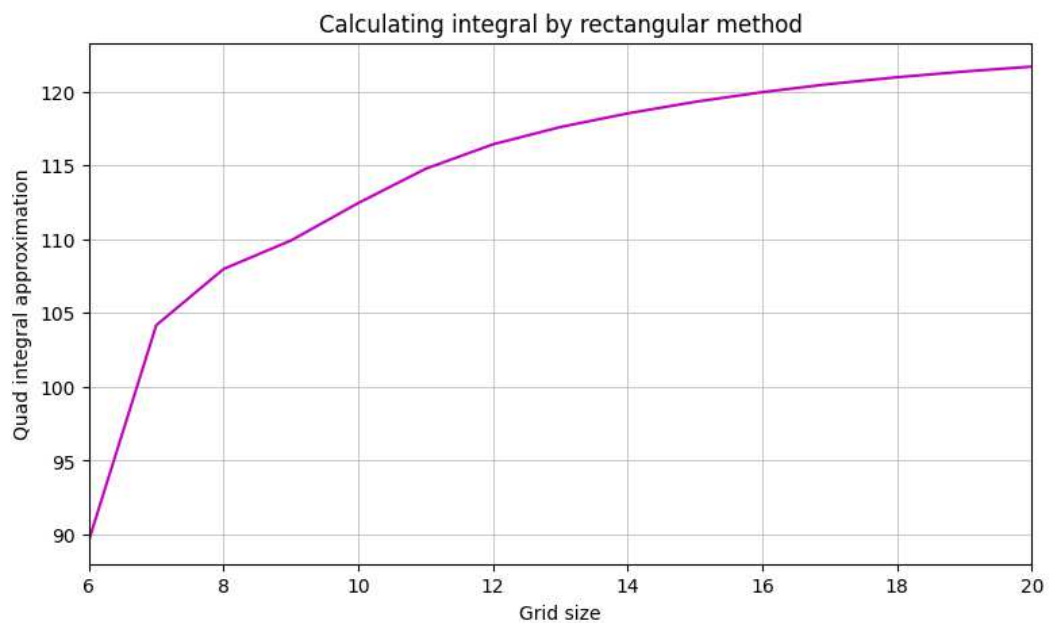


Рис. 1.25: Приближенное значение интеграла, полученного методом квадратур, в зависимости от размера дискретной сетки.

## Глава 2

# Вторая часть практикума

### 2.1 Задание 7

#### 2.1.1 Условие

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции  $f$  на множестве  $A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ , где

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10x_1x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0. \quad (2.1)$$

При  $x_1 = 0$  или  $x_2 = 0$  функция доопределяется по непрерывности.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка  $g$  в пространстве  $\mathbb{R}^2$ , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

3. Оценить точность и сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

#### 2.1.2 Метод случайного поиска

Метод случайного поиска минимального значения функции  $f(x)$  на множестве  $A$ :

1. Смоделировать выборку размера  $n$  точек  $x \sim U\{A\}$  (равномерно распределены на множестве  $A$ ).
2. Выбрать ту реализацию случайной величины, на которой достигается наименьшее значение.

По условию задачи множество  $A$  - круг единичного радиуса на плоскости  $(x_1, x_2)$ . Пусть  $x = (x_1, x_2) \sim U(A)$ . По определению для любого борелевского множества  $M$  выполняется ( $\mu$  - мера Лебега на плоскости)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((x_1, x_2) \in M) &= \frac{\mu(M)}{\mu(A)} = \frac{1}{\pi} \iint_M dt_1 dt_2 = |t_1 = r \cos \alpha \quad t_2 = r \sin \alpha| = \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_M r dr d\alpha = \iint_M d(r^2) d\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, будем моделировать

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\omega} \cos \alpha \\ x_2 = \sqrt{\omega} \sin \alpha \end{cases}$$

где  $\omega \sim U[0, 1], \alpha \sim U[0, 2\pi]$ .

Данная функция  $f(x) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10x_1x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}$  обладает свойствами

1.  $f(x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$  (чётность по  $x_2$ ).
2.  $f(-x_1, 0) = f(x_1, 0) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1}$ .
3.  $f(0, 0) = 0$ .

Следовательно, если  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  доставляет минимум функции, то  $(x_1^*, -x_2^*)$  также доставляет минимум. Минимум меньше нуля, ведь  $f(0.123, 0.123) < 0$  (проверяется численно). Следовательно, функция  $f$  имеет хотя бы две точки глобального минимума.

По условию задачи множество  $A$  - круг единичного радиуса на плоскости  $(x_1, x_2)$ . Пусть  $x = (x_1, x_2) \sim U(A)$ . По определению для любого борелевского множества  $M$  выполняется ( $\mu$  - мера Лебега на плоскости)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((x_1, x_2) \in M) &= \frac{\mu(M)}{\mu(A)} = \frac{1}{\pi} \iint_M dt_1 dt_2 = \left| \begin{matrix} t_1 = r \cos \alpha \\ t_2 = r \sin \alpha \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_M r dr d\alpha = \iint_M d(r^2) d\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, будем моделировать

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\omega} \cos \alpha \\ x_2 = \sqrt{\omega} \sin \alpha \end{cases}$$

где  $\omega \sim U[0, 1], \alpha \sim U[0, 2\pi]$ .

Отметим, что при реализации метода случайного поиска значения  $x_1 = 0, x_2 = 0$  достигаются с нулевой вероятностью. Следовательно, при вычислении значения заданной функции в точках выборки можно не обрабатывать неопределенность.

Пусть  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  доставляет минимум функции  $f(x_1, x_2)$ . Оценим точность работы алгоритма при помощи многомерной теоремы Лагранжа

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \max_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} \cdot \|x - x^*\|.$$

Справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| &= \left| 3x_1^2 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \cos \frac{1}{x_1} + 10x_2^4 \cos \frac{1}{x_2} \right| \leq 14. \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| &= \left| 40x_1x_2^3 \cos \frac{1}{x_2} + 10x_1x_2^2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq 50. \end{aligned}$$

Далее выберем окрестность радиуса  $\delta \in (0, 1)$ :  $B_\delta(x^*) = \{x : \|x - x^*\| \leq \delta\}$ . Пусть  $p$  - вероятность того, что в  $B_\delta(x^*) \cap A$  находится хотя бы одна точка выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$p = \mathbb{P}(\exists k : \|x_k - x^*\| \leq \delta) = 1 - \mathbb{P}(\forall k \|x_k - x^*\| > \delta) = 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\|x_k - x^*\| > \delta).$$

Если  $B_\delta(x^*) \cap A = B_\delta(x^*)$ , вероятность в правой части полученного выражения можно вычислить как отношение соответствующих площадей:

$$\mathbb{P}(\|x_k - x^*\| > \delta) = \frac{\pi - \pi\delta^2}{\pi} = 1 - \delta^2 < 1 - \frac{\delta^2}{2}.$$

Если  $B_\delta(x^*) \cap A \neq B_\delta(x^*)$ , то ограничим вероятность сверху числом  $1 - \frac{\delta^2}{2}$ . Этот случай включает в себя возможное расположение точки  $x^*$  на границе единичного круга. Ясно, что в худшем случае половина окрестности не будет лежать в круге.

Таким образом

$$1 - p = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\|x_k - x^*\| > \delta) < \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^n.$$

Зафиксируем  $p, \delta$ . Тогда с вероятностью  $p$  в окрестности радиуса  $\delta$  искомого решения будет находиться элемент выборки, если размер выборки составляет

$$n = \left\lfloor \frac{\ln(1-p)}{\ln\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)} \right\rfloor.$$

Если выбрать  $x \in B_\delta(x^*)$  погрешность вычисления составит

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \sqrt{14^2 + 50^2} \cdot \delta = \varepsilon.$$

Таким образом, по заданным  $\varepsilon$  - погрешности вычисления и  $p$  - уровне доверия, можно вычислить  $\delta, n$ .

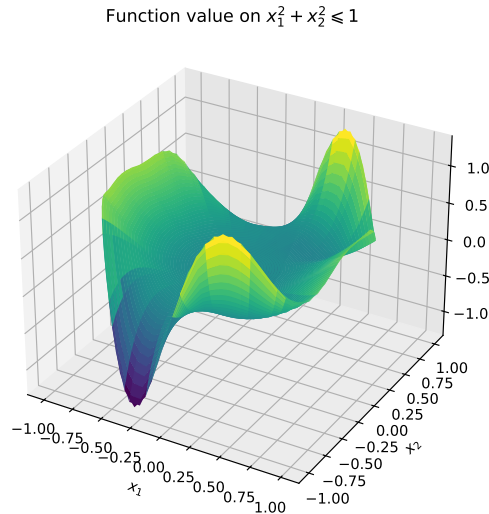


Рис. 2.1: Значение функции 2.1 на единичном круге.

### 2.1.3 Метод имитации отжига

Опишем *метод имитации отжига*:

1. Выбирается произвольное начальное состояние  $s_0$  и достаточно большая температура  $T$ .
2. Выбирается сосед для текущего состояния.
3. Осуществляется переход в соседнее состояние с некоторой функцией вероятности, зависящей от разницы значений функции в соседнем и текущих положениях и текущей температуры.
4. Температура снижается по некоторому закону охлаждения.
5. Повторяем шаги 2-4, пока не температура не станет достаточно близкой к нулю, либо не закончится число итераций.

В методе simulated annealing выберем следующие функции:

- функция выбора соседа — нормальная случайная величина со средним  $s_i = (x_i, y_i)$  и дисперсией  $\sigma^2 T_i$ ,
- функция вероятности перехода —  $e^{-\Delta F_i / T_i}$ ,
- функция понижения температуры —  $T_{i+1} = k T_i$ ,  $k \in (0, 1)$ .

Аналитически минимум функции Розенброка достигается в точке  $x = (1, 1)$  и равен нулю.

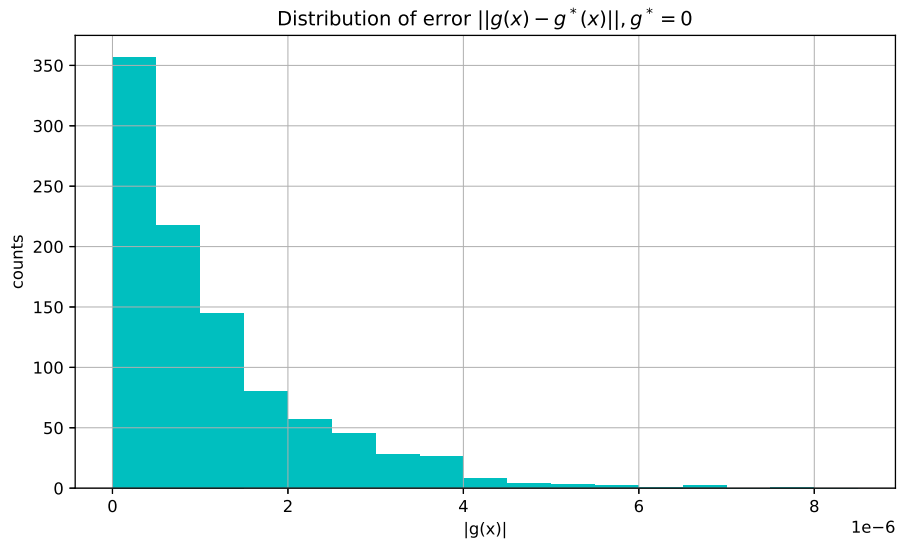


Рис. 2.2: Распределение ошибки вычисления минимума функции Розенброка.

### 2.1.4 Сравнение с методами минимизации

Функция, минимум которой был найден методом случайного поиска не обладает непрерывными производными, следовательно, градиентные методы навряд ли дадут правильный результат. Сравним наш метод с методом Constrained Optimization By Linear Optimization (COBYLA). Случайный поиск не требует начальной позиции.

Минимизацию функции Розенброка будем проводить методом безусловной минимизации Nelder-Mead Simplex. Абсолютную погрешность вычисления зададим равной  $10^{-8}$  (в обоих методах). Симплекс метод срабатывает точнее.

Начальная позиция, $x_0$	COBYLA	Случайный поиск
$(-0.5, 0.7)$	$-1.288489, (-0.3574, 0.9339)$	$-1.288479, (-0.3567, 0.9342)$
$(1.11, 1.53)$	$-1.288489, (-0.3572, 0.9340)$	$-1.288479, (-0.3567, 0.9342)$

Таблица 2.1: Минимизация функции 2.1 двумя методами.

Начальная позиция, $x_0$	Nelder-Mead	Метод отжига
$(15, 0.15)$	$\approx 10^{-17}, 130$ итераций	$\approx 10^{-9}$
$(15, -20)$	$\approx 10^{-18}, 107$ итераций	$\approx 10^{-10}$

Таблица 2.2: Минимизация функции Розенброка двумя методами.

## 2.2 Задание 8

### 2.2.1 Условие

1. Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D \\ u|_{\delta D} = f(x, y) \\ u \in C^2(D), f \in C(\delta D) \\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

2. Для функции  $f(x, y) = x^2 - y^2$  найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

### 2.2.2 Метод Монте-Карло для уравнения Лапласа

Введём равномерную квадратную сетку в единичном круге с шагом  $h$ .

Пусть  $P(x_i, y_i)$  — узел, внутренняя точка сетки (имеет 4 соседа),  $Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  — граничная точка сетки.

Рассмотрим соответствующую теоретико-вероятностную схему.

Будем искать вероятность  $u(P, Q)$ , того, что, выйдя из внутренней точки  $P$ , будет достигнута граничная точка  $Q$ .

Считаем, что все соседи выбираются равновероятным образом. Тогда для соседних точек  $P_i, i = \overline{1,4}$  по отношению к  $P$  справедливо

$$u(P, Q) = \frac{1}{4} (u(P_1, Q) + u(P_2, Q) + u(P_3, Q) + u(P_4, Q)).$$

Таким образом, мы пришли к конечно-разностному уравнению, которое является конечно-разностной схемой для уравнения Лапласа:

$$u(P) = \frac{1}{4} (u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4)),$$

где  $P$  - внутренняя,  $P_i, i = \overline{1,4}$  - соседние по отношению к  $P$ .

Вероятности  $u(P, Q)$  можно вычислять приближенно: будем моделировать  $N$  раз "блуждание" из точки  $P$  в точку  $Q$  и считать число  $M(Q)$  испытаний, при которых "блуждание" оканчивается в точке  $Q$ :

$$u(P, Q) \approx \frac{M(Q)}{N}.$$

Чтобы решить поставленную задачу Дирихле, нужно немного обобщить полученную вероятностную схему. Нужно считать, что при выходе из узла  $P$  и дальнейшем посещении граничной точки  $Q$  с нас взимается штраф, равный  $f(Q)$ . Ясно, что величина выплаченного штрафа является случайной величиной. Обозначим её  $\xi(P)$ .

Пусть  $\{Q_1, \dots, Q_s\}$  - совокупность всех граничных точек. Тогда величина штрафа принимает значения  $\{f(Q_1), \dots, f(Q_s)\}$ , вероятность заплатить  $f(Q_l)$  равняется  $u(P, Q_l)$ . Значит, математическое ожидание штрафа определяется как:

$$w(P) = \mathbb{E}\xi(P) = \sum_{l=1}^s f(Q_l)u(P, Q_l).$$

Причем,  $w(P)$  удовлетворяет разностному уравнению

$$w(P) = \frac{1}{4} (w(P_1) + w(P_2) + w(P_3) + w(P_4)).$$

Это непосредственно проверяется из исходной конечно-разностной схемы для уравнения Лапласа при  $Q = Q_l$  и суммировании обеих частей уравнений.

Таким образом,  $w(P)$  принимает на границе заданные значения, является решением задачи Дирихле.

Дополнительные сведения можно найти в [6], стр. 117.

Заметим, что для вычисления  $w(P)$  необязательно нужно вычислять вероятности  $u(P, Q_l)$  по отдельности.

Вычисляем  $w(P)$  приближенно:

$$w(P) \approx \sum_{l=1}^s f(Q_l) \frac{M(Q_l)}{N}.$$

Достаточно  $M(Q_l)$  раз прибавить  $f(Q_l)$  к итоговой сумме.

Таким образом, справедлив следующий алгоритм:

1. Задать квадратную сетку с числом точек  $N = \text{n\_points}$  по каждой оси.

2. Получить все внутренние точки (они удовлетворяют условию  $x^2 + y^2 < 1$ ).
3. Перебрать все внутренние точки  $P$ .
4. Смоделировать блуждание  $M = \text{n\_tests}$  раз: идём до произвольной граничной точки  $Q$ .
5. Прибавляем значение  $f(Q)/M$  к итоговому результату в точке  $P$ .

### 2.2.3 Сравнение численного результата с аналитическим решением

Функция  $f(x, y) = x^2 - y^2$  удовлетворяет  $\Delta u = 0$ . Для внешней задачи Дирихле условием регулярности является ограниченность функции  $u$ . Функция  $f = u$  является ограниченной, следовательно, данное уравнение имеет единственное решение, равное  $x^2 - y^2$ .

$\Delta u = 0$  with boundary condition  $x^2 - y^2$  on  $x^2 + y^2 \leq 1$

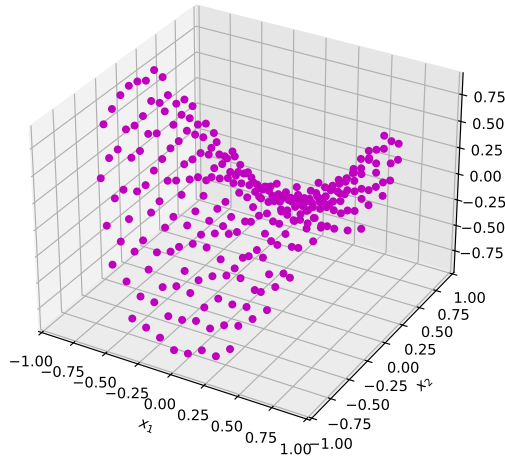


Рис. 2.3: Численное решение задачи Дирихле методом Монте-Карло.



Inaccuracy of Monte-Carlo method for  $\Delta u = 0$

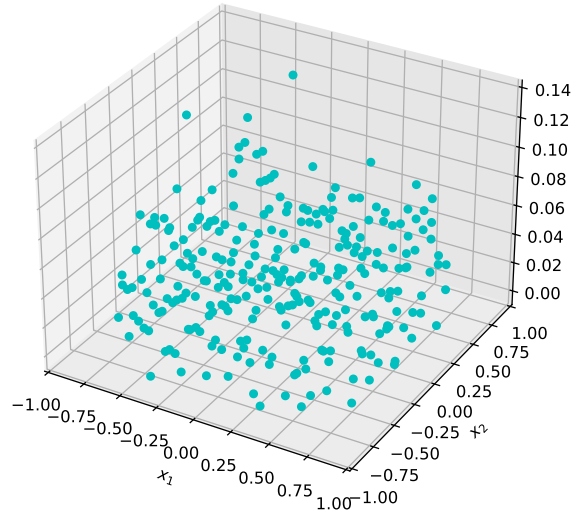


Рис. 2.4: Погрешность вычисления численного решения задачи Дирихле методом Монте-Карло.

## 2.3 Задание 9

### 2.3.1 Условие

Рассмотреть два вида гауссовских процессов:

- Винеровский процесс  $W(t), t \in [0, 1], W(0) = 0$ .
- Процесс Орнштейна-Уленбека  $X(t), t \in [0, 1], X(0) = X_0$ , т.е. стационарный марковский гауссовский процесс. Начальные значения  $X_0$  следует выбирать случайным образом так, чтобы полученный процесс был стационарным.

Для данных процессов:

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Промоделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломаной, с целью получения визуально непрерывной линии.

### 2.3.2 Теоретические выкладки

**Определение 12.** Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Случайный процесс - параметризованное семейство случайных величин  $\{P_t\}_{t \in T}$ , опре-

деленных на одном вероятностном пространстве, вида

$$P_t : \Omega \mapsto \mathbb{R} \quad \forall t \in T, \quad T \subset [0, +\infty).$$

**Определение 13.** Случайный процесс  $P_t$  имеет независимые приращения, если  $\forall 0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ ,  $t_i \in T, i = \overline{0, n}$  случайные величины  $P_{t_0}, P_{t_1} - P_{t_0}, P_{t_2} - P_{t_1}, \dots, P_{t_n} - P_{t_{n-1}}$  являются независимыми.

**Определение 14.** Случайный процесс  $P_t$  является гауссовским, если  $\forall 0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ ,  $t_i \in T, i = \overline{0, n}$  случайный вектор  $(P_{t_0}, P_{t_1}, \dots, P_{t_n})$  имеет многомерное нормальное распределение.

**Определение 15.** Случайный процесс  $P_t$  является стационарным (в узком смысле), если его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига по времени.

**Определение 16.** Винеровский процесс  $W_t, t \in T$  - это случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1.  $W_0 = 0$  п.н.
2.  $W_t$  имеет независимые приращения.
3.  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$ , где  $\sigma > 0$  и  $\forall s, t \in T : 0 \leq s < t$ .

**Определение 17.** Процесс Орнштейна-Уленбека  $X_t, t \in [0, 1]$  - это единственный нетривиальный стационарный марковский гауссовский процесс.

Пусть  $P_t$  - случайный процесс. Обозначим

$$R_P(t_1, t_2) = \text{cov}(P_{t_1}, P_{t_2}) = \mathbb{E}[(P_{t_1} - \mathbb{E}P_{t_1})(P_{t_2} - \mathbb{E}P_{t_2})].$$

Далее вычислим  $R_W(\cdot, \cdot), R_X(\cdot, \cdot)$ .

**Теорема 8.** Случайный процесс  $\{P_t\}_{t \in T}$  является марковским тогда, и только тогда, когда

$$\tilde{R}_P(s, t) = \tilde{R}_P(s, \tau) \cdot \tilde{R}_P(\tau, t), \quad \forall s < \tau < t \in T,$$

где  $\tilde{R}_P(s, t) = \frac{R_P(s, t)}{\sqrt{\mathbb{D}P_s \mathbb{D}P_t}}$  - коэффициент корреляции между  $P_s, P_t$ .

*Доказательство.* Приведено в [8], стр. 123-128. □

**Теорема 9.** Пусть функция  $u(t)$  определена при  $t > 0$  и ограничена в каждом конечном интервале. Если  $u(t)$  удовлетворяет функциональному уравнению Коши

$$u(t + s) = u(t)u(s),$$

то или  $u(t) = 0$  при всех  $t$ , или найдется такая постоянная  $\theta > 0$ , что  $u = e^{-\theta t}$ .

*Доказательство.* Приведено в [7], стр. 444. □

Опишем метод разбиения отрезка. Пусть требуется смоделировать случайный процесс  $X_t$  на отрезке  $[0, 1]$ . Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Моделирование  $X_0$ .
2. Моделирование  $X_1$  по условному распределению  $X_1|X_0$ .
3. Пусть  $t_1, t_2$  - крайние узлы сетки,  $t_3 = \frac{t_1+t_2}{2}$ . Моделируем  $X_{t_3}$  по условному распределению  $X_t|X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2$ .
4. Повторяем шаг 3 до достижения заданного шага разбиения.

### 2.3.3 Решение для винеровского процесса

Из определения винеровского процесса следует

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t).$$

Следовательно,  $W_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Вычислим  $R_W(\cdot, \cdot)$ : пусть  $0 \leq t_1 < t_2$ , тогда

$$\begin{aligned} R_W(t_1, t_2) &= \text{cov}(W_{t_1}, W_{t_2}) = \mathbb{E}[W_{t_1} W_{t_2}] = \mathbb{E}[W_{t_1}(W_{t_2} - W_{t_1} + W_{t_1})] = \\ &= \{\text{линейность мат. ожидания, независимость } W_{t_2} - W_{t_1} \text{ и } W_{t_1}\} = \\ &= \mathbb{E}[W_{t_1}] \cdot \mathbb{E}[W_{t_2} - W_{t_1}] + \mathbb{E}W_{t_1}^2 = \\ &= \sigma^2 t_1. \end{aligned}$$

Вычисления в случае  $0 \leq t_2 < t_1$  аналогичны.

Таким образом,

$$R_W(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\}.$$

Далее считаем  $0 \leq t_1 < t_2$ . Нас интересует распределение  $Y = W_{t_3} | W_{t_1} = \omega_1, W_{t_2} = x_2$ , где  $t_3 \in (t_1, t_2)$ .

Мы могли бы найти распределение  $Y$  для любого  $t_3$  из интервала, но для реализации метода добавления разбиения отрезка нам достаточно знать распределение  $Y$  при  $t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ .

Обозначим плотность  $Y$  как  $p_Y(\omega; \omega_1, \omega_2)$ . Тогда

$$p_Y(\omega; \omega_1, \omega_2) = p_{W_{t_3}}(\omega \mid W_{t_1} = \omega_1, W_{t_2} = \omega_2) = \frac{p(W_{t_1}, W_{t_3}, W_{t_2})(\omega_1, \omega, \omega_2)}{p(W_{t_1}, W_{t_2})(\omega_1, \omega_2)},$$

где  $p(W_{t_1}, W_{t_3}, W_{t_2})$  и  $p(W_{t_1}, W_{t_2})$  - плотности векторов  $(W_{t_1}, W_{t_3}, W_{t_2})$  и  $(W_{t_1}, W_{t_2})$  соответственно.

Плотность многомерного нормального распределения с вектором средних  $\mu \in \mathbb{R}^n$  и ковариационной матрицей  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  имеет вид

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu)^T \right\}.$$

Обозначим

$$\Sigma_{12} = \{R_W(t_i, t_j)\}_{i,j=1,2} = \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{132} = \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_3 & t_3 \\ t_1 & t_3 & t_2 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p(W_{t_1}, W_{t_3}, W_{t_2})(\omega_1, \omega, \omega_2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma_{132}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\omega_1, \omega, \omega_2) \Sigma_{132}^{-1} (\omega_1, \omega, \omega_2)^T \right\}. \\ p(W_{t_1}, W_{t_2})(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma_{12}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2) \Sigma_{12}^{-1} (\omega_1, \omega_2)^T \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$p_Y(\omega; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right\},$$

где

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(t_2 - t_1)}{4},$$

и случайная величина  $Y \sim \mathcal{N}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\sigma^2(t_2 - t_1)}{4})$ .

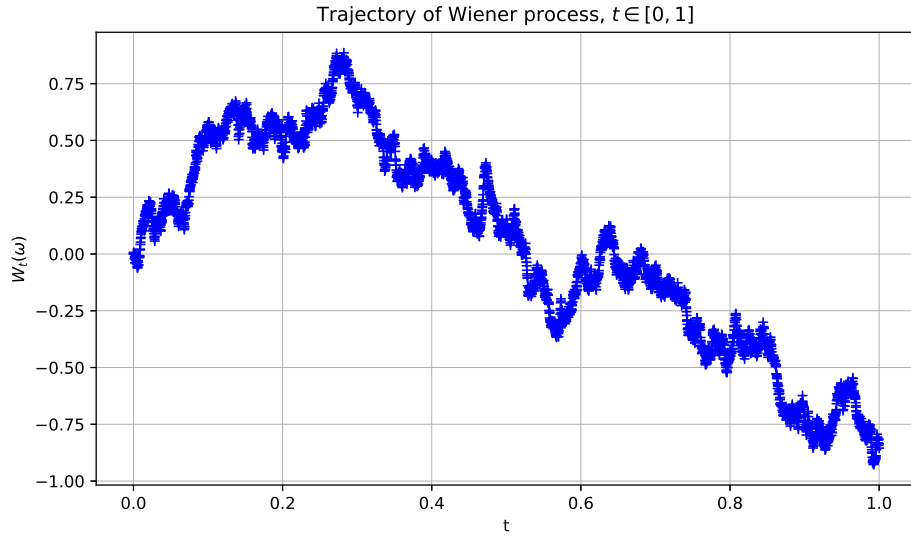


Рис. 2.5: Траектория винеровского процесса.

### 2.3.4 Решение для процесса Орнштейна-Уленбека

Стационарность процесса Орнштейна-Уленбека влечёт

$$R_X(s, t) = R_X(|s - t|), \forall s, t; \quad \mathbb{E}X_t \equiv \mu; \quad \mathbb{D}X_t \equiv \sigma^2.$$

Следовательно, для корреляционной функции также выполнено  $\tilde{R}_X(s, t) = R_X(|s - t|)$ .

Марковость процесса Орнштейна-Уленбека влечёт

$$\tilde{R}_X(s, t) = \tilde{R}_X(s, \tau) \cdot \tilde{R}_X(\tau, t), \quad \forall s < \tau < t.$$

Значит, из марковости и стационарности:

$$\tilde{R}_X(|s - t|) = \tilde{R}_X(|s - \tau|) \cdot \tilde{R}_X(|\tau - t|), \quad \forall s < \tau < t.$$

Обозначим  $x = s - \tau, y = \tau - t$ . Тогда

$$\tilde{R}_X(|x + y|) = \tilde{R}_X(|x|) \cdot \tilde{R}_X(|y|),$$

т.е. корреляционная функция удовлетворяет функциональному уравнению Коши. Возможны два случая:

1.  $\tilde{R}_X(t) \equiv 0, \forall t > 0.$
2.  $\tilde{R}_X(t) \equiv e^{-\theta t}, \theta > 0.$

Далее считаем, что корреляционная функция ненулевая (иначе моделирование сводится к моделированию независимых нормально распределенных случайных величин со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ ).

Тогда ковариационная функция имеет вид

$$R_X(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\theta|t_2 - t_1|}, \quad \theta > 0.$$

Таким образом,  $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Далее будем считать  $\mu = 0$  (этого легко можно добиться на практике, рассматривая процесс  $X_t - \mu$ ).

В отличие от винеровского процесса,  $X_0$  не является фиксированной величиной. Найдем распределение  $Z = X_1|X_0$ :

$$p_Z(x; x_0) = \frac{p_{(X_0, X_1)}(x_0, x)}{p_{X_0}(x_0)}.$$

В данном случае

$$\begin{aligned} p_{(X_0, X_1)}(x_0, x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma_{01}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_0, x) \Sigma_{01}^{-1} (x_0, x)^T \right\}. \\ \Sigma_{01} &= \{R_X(i, j)\}_{i,j=0,1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 1 \end{pmatrix}. \\ |\Sigma_{01}| &= \sigma^4 (1 - e^{-2\theta}). \\ \Sigma_{01}^{-1} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^4 (1 - e^{-2\theta})} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-\theta} \\ -e^{-\theta} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_Z(x; x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - e^{-2\theta})}} \exp \left\{ -\frac{x_0^2 - 2x_0xe^{-\theta} + x^2}{2\sigma^2(1 - e^{-2\theta})} + \frac{x_0^2}{2\sigma^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - e^{-2\theta})}} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0e^{-\theta})^2}{2\sigma^2(1 - e^{-2\theta})} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $p_Z(x; x_0) \sim \mathcal{N}(x_0e^{-\theta}, \sigma^2(1 - e^{-2\theta}))$ .

Аналогично в прошлом пункте нас интересует распределение  $Y = X_{t_3}|X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2$ , где  $t_3 = \frac{t_1+t_2}{2}$ .

Вычислим переходную плотность  $p_Y(x; x_1, x_2) = p_Y(x | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2)$ :

$$p_Y(x; x_1, x_2) = \frac{p_{(X_{t_1}, X_{t_3}, X_{t_2})}(x_1, x, x_2)}{p_{(X_{t_1}, X_{t_2})}(x_1, x_2)}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &= \{R_X(t_i, t_j)\}_{i,j=1,2} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\theta(t_2 - t_1)} \\ e^{-\theta(t_2 - t_1)} & 1 \end{pmatrix}, \\ \Sigma_{132} &= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\theta(t_3 - t_1)} & e^{-\theta(t_2 - t_1)} \\ e^{-\theta(t_3 - t_1)} & 1 & e^{-\theta(t_2 - t_3)} \\ e^{-\theta(t_2 - t_1)} & e^{-\theta(t_2 - t_3)} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p_{(X_{t_1}, X_{t_3}, X_{t_2})}(\omega_1, \omega, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma_{132}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1, x, x_2) \Sigma_{132}^{-1} (x_1, x, x_2)^T \right\}.$$

$$p_{(X_{t_1}, X_{t_2})}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma_{12}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1, x_2) \Sigma_{12}^{-1} (x_1, x_2)^T \right\}.$$

Таким образом,

$$p_Y(x; x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \frac{e^{h\theta}(x_1+x_2)}{e^{2h\theta}+1})^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right\},$$

где

$$h = t_3 - t_1, \quad 2h = t_2 - t_1,$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(e^{h\theta} - e^{-h\theta})}{e^{h\theta} + e^{-h\theta}} = \frac{\sigma^2(e^{2h\theta} - 1)}{e^{2h\theta} + 1},$$

т.е.  $Y \sim \mathcal{N} \left( \frac{x_1 + x_2}{e^{h\theta} + e^{-h\theta}}, \frac{\sigma^2(e^{h\theta} - e^{-h\theta})}{e^{h\theta} + e^{-h\theta}} \right).$

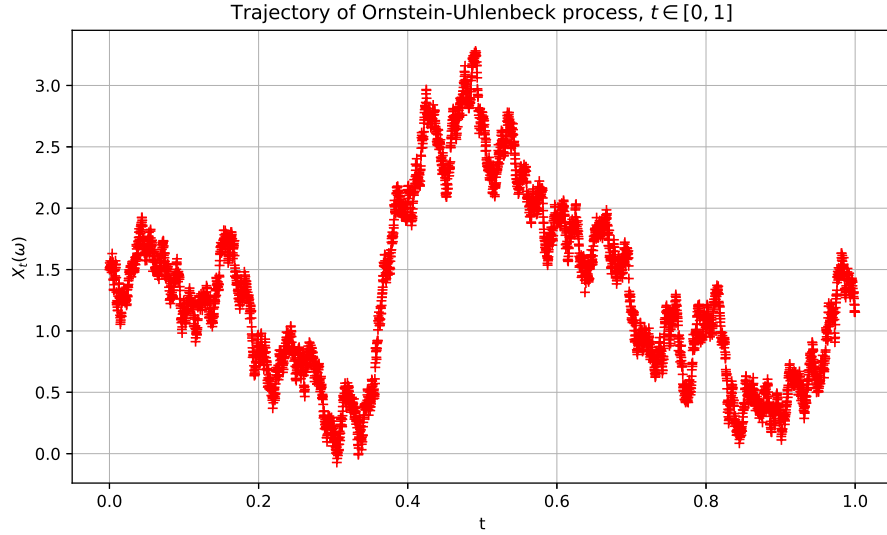


Рис. 2.6: Траектория процесса Орнштейна-Уленбека.

## 2.4 Задание 10

### 2.4.1 Условие

Произвести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна-Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить к реализации процесса Орнштейна-Уленбека случайную ошибку с заранее известной дисперсией.

2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу, считая известными параметры шума и процесса.
3. Рассмотреть следующие виды шума:
  - Гауссов
  - Коши (шум имеет распределение Коши)

## 2.4.2 Теоретические выкладки

Рассмотрим дискретный одномерный фильтр Калмана для динамической системы вида:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + \nu_n, \\ y_n = x_n + \varepsilon_n, \\ x_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \end{cases}$$

где

- $\nu_n \sim \mathcal{N}(0, q)$  - н.о.р.с.в.;
- $\varepsilon_n$  - шум, распределен как  $\mathcal{N}(0, r)$  или  $\mathcal{C}(0, r)$ ;
- $r, \sigma^2 > 0$  - заданные параметры;
- $a, q$  - неизвестные величины.

Для определения коэффициентов уравнения динамики необходимо приравнять теоретические значения ковариационной матрицы процесса Орнштейна-Уленбека в точках  $t_n$  и  $t_{n+1}$  с соответствующими значениями динамической системы, то есть решить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a$  и  $q$  через известные  $\sigma$  и  $\theta$ :

$$\begin{cases} R_X(t_n, t_n) = \sigma^2 = \mathbb{D}x_n, \\ R_X(t_n, t_{n+1}) = \sigma^2 e^{-\theta(t_{n+1}-t_n)} = \text{cov}(x_n, x_{n+1}) = a\mathbb{D}x_n, \\ R_X(t_{n+1}, t_{n+1}) = \sigma^2 = \mathbb{D}x_{n+1} = a^2\mathbb{D}x_n + q. \end{cases}$$

Положим, что наблюдение происходит на равномерной сетке отрезка  $[0, 1]$  с шагом  $h$ . Тогда решением указанной системы является

$$a = e^{-\theta h}, \quad q = \sigma^2(1 - e^{-2\theta h}).$$

При помощи фильтра Калмана будем оценивать траекторию зашумленного процесса  $y_n$ : построим доверительный интервал  $[\hat{x}_n - k_\alpha R_n, \hat{x}_n + k_\alpha R_n]$

При фильтрации значение оригинального процесса (сигнала)  $x_n$  неизвестно. Вместо него доступен наблюдаемый зашумленный сигнал  $y_n$ .

Выведем итеративный алгоритм, который позволит по значениям зашумленного сигнала  $y_n = x_n + \varepsilon_n$  оптимальным образом найти истинное значение сигнала  $x_n$ .

Обозначим

- оценка  $x_n$  на  $n$ -ом шаге  $x_n^{\text{opt}}$ ;
- величина ошибки на  $n$ -ом шаге  $e_n = x_n - x_n^{\text{opt}}$ ;

- коэффициент Калмана  $K_n$ .

Будем искать оптимальное значение как линейную комбинацию зашумленного сигнала и предсказанного значения на прошлом шаге:

$$x_{n+1}^{\text{opt}} = K_{n+1}y_{n+1} + M_{n+1}x_n^{\text{opt}}, \quad x_1^{\text{opt}} = x_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Выведем рекуррентные соотношения для значения ошибки:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - K_{n+1}y_{n+1} - M_{n+1}x_n^{\text{opt}} = \\ &= ax_n + \nu_n - K_{n+1}(ax_n + \nu_n + \varepsilon_{n+1}) - M_{n+1}x_n^{\text{opt}} = \\ &= (1 - K_{n+1})(ax_n + \nu_n) - K_{n+1}\varepsilon_{n+1} - M_{n+1}x_n^{\text{opt}} = \\ &= (1 - K_{n+1})(a(x_n - x_n^{\text{opt}}) + ax_n^{\text{opt}} + \nu_n) - K_{n+1}\varepsilon_{n+1} - M_{n+1}x_n^{\text{opt}} = \\ &= (1 - K_{n+1})(ae_n + \nu_n) - K_{n+1}\varepsilon_{n+1} - (M_{n+1} - a(1 - K_{n+1}))x_n^{\text{opt}}. \end{aligned}$$

Положим  $M_n = a(1 - K_n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{\text{opt}} &= K_{n+1}y_{n+1} + a(1 - K_{n+1})x_n^{\text{opt}}. \\ e_{n+1} &= (1 - K_{n+1})(ae_n + \nu_n) - K_{n+1}\varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Если применить оператор математического ожидания к правой части схемы для  $e_{n+1}$ , то, полагая  $\mathbb{E}e_1 = 0$ , получим  $\mathbb{E}e_{n+1} = 0$ .

На каждом шаге минимизируем дисперсию ошибки:

$$\mathbb{E}e_n^2 \rightarrow \min$$

Из этих соображений выводим рекуррентные соотношения для коэффициента Калмана.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e_{n+1}^2 &= a^2(1 - K_{n+1})^2(\mathbb{E}e_n^2 + q) + K_{n+1}^2r. \quad \left| \cdot \frac{\partial}{\partial K_{n+1}} \right. \\ 0 &= 2a^2(K_{n+1} - 1)(\mathbb{E}e_n^2 + q) + 2K_{n+1}r. \\ K_{n+1} &= \frac{a^2(\mathbb{E}e_n^2 + q)}{a^2(\mathbb{E}e_n^2 + q) + r}. \end{aligned}$$

Итоговая схема имеет вид

$$\begin{cases} K_{n+1} = \frac{a^2(\mathbb{E}e_n^2 + q)}{a^2(\mathbb{E}e_n^2 + q) + r}, \\ x_{n+1}^{\text{opt}} = K_{n+1}y_{n+1} + a(1 - K_{n+1})x_n^{\text{opt}}, \\ \mathbb{E}e_{n+1}^2 = a^2(1 - K_{n+1})^2(\mathbb{E}e_n^2 + q) + K_{n+1}^2r, \\ x_1^{\text{opt}} = y_1, \quad \mathbb{E}e_1^2 = r. \end{cases}$$

Доверительный интервал уровня значимости  $\alpha$  для  $x_n$  определим как  $\left[ x_n^{\text{opt}} - k_{(1-\alpha)/2} \sqrt{\mathbb{E}e_n^2}, x_n^{\text{opt}} + k_{(1-\alpha)/2} \sqrt{\mathbb{E}e_n^2} \right]$ , где  $k_{(1-\alpha)/2}$  — квантиль уровня значимости  $(1 - \alpha)/2$  стандартного нормального распределения.



Действительно, значения  $x_n - x_n^{\text{opt}} = e_n$  имеют дисперсию  $\mathbb{E}e_n^2$  и при предположении, что ошибка распределена нормально

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-k_{(1-\alpha)/2} \sqrt{\mathbb{E}e_n^2} \leq e_n \leq k_{(1-\alpha)/2} \sqrt{\mathbb{E}e_n^2}) &= \{\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)\} = \\ &= P(-k_{(1-\alpha)/2} \leq \xi \leq k_{(1-\alpha)/2}) = \\ &= 2\Phi(k_{(1-\alpha)/2}) - 1 = \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Для данного процесса  $x_n$  имеет нормальное распределение, ошибка распределена нормально.

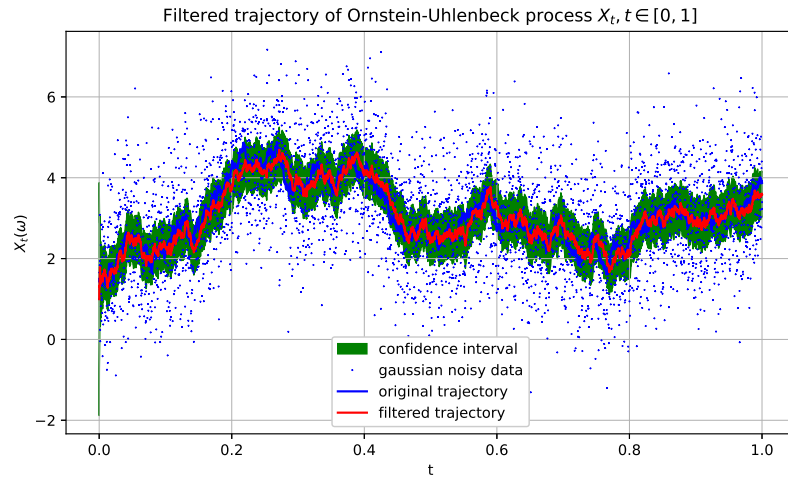


Рис. 2.7: Результат работы фильтра Калмана для процесса Орнштейна-Уленбека с гауссовым шумом.

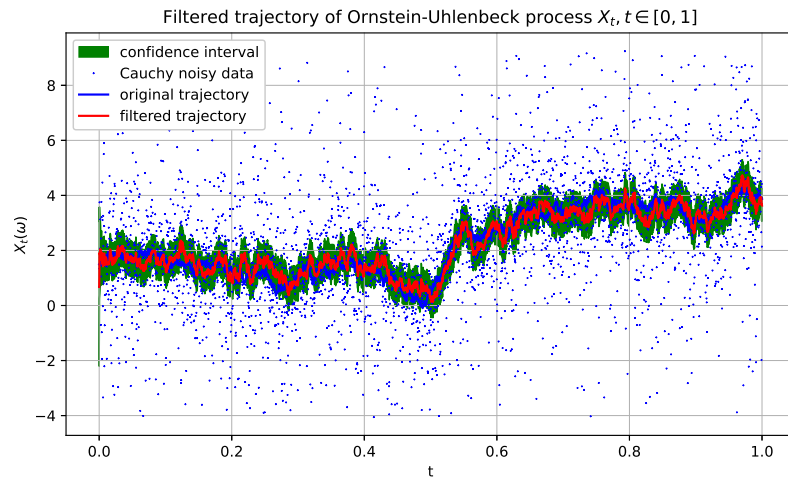


Рис. 2.8: Результат работы фильтра Калмана для процесса Орнштейна-Уленбека с шумом Коши.

## 2.5 Задание 11

### 2.5.1 Условие

Построить двумерное пуассоновское поле, отвечающее сложному пуассоновскому процессу:

1. Система массового обслуживания. Первая координата поля — время поступления заявки в СМО (распределение равномерно), а вторая — время обслуживания заявки (распределение  $\chi^2$  с десятью степенями свободы).
2. Система массового обслуживания с циклической интенсивностью  $\lambda(1 + \cos(t))$  и единичными скачками. При помощи метода Льюиса и Шедлеара, свести задачу моделирования неоднородного пуассоновского процесса к моделированию двумерного пуассоновского поля, где первая координата распределена равномерно, а вторая имеет распределение Бернулли.
3. Работа страховой компании: первая координата - момент наступления страхового случая (равномерное распределение), вторая величина ущерба (распределение Парето). Поступление капитала считать линейным по времени со скоростью  $c > 0$ , начальный капитал  $W > 0$ .

### 2.5.2 Система массового обслуживания (СМО)

Рассмотрим двумерное пуассоновское поле  $(t, s)$ , где

- координата  $t$  отвечает времени поступления заявки;
- координата  $s$  отвечает времени обслуживания заявки.

Обозначим

- время  $T$  - конечное время работы системы;
- интенсивность  $\lambda > 0$  - среднее число поступающих заявок в единицу времени.

Рассмотрим модель, в которой

- времена поступлений заявок  $t \sim \mathcal{U}[0, T]$ ;
- число заявок  $n$  имеет распределение Пуассона:  $n \sim \text{Pois}(\lambda T)$ ;
- время обработки  $k$ -ой заявки  $s_k \sim \chi_m^2, m = 10$ .

Нас интересует число заявок  $N(t)$ , стоящих в очереди на обработку, в заданный момент времени  $t \in [0, T]$ .

Положим, что времена поступления заявок упорядочены:  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ .

Определим  $X_k$  как время окончания обработки  $k$ -ой заявки. Нетрудно заметить, что

$$X_1 = t_1 + s_1.$$
$$X_k = \begin{cases} t_k + s_k, & X_{k-1} \leq t_k, \\ X_{k-1} + s_k, & X_{k-1} > t_k. \end{cases}$$

Событие  $\{X_k > t \geq t_k\}$  возможно (имеет положительную вероятность), если  $k$ -ая заявка поступила в обработку ( $t \geq t_k$ ), но к текущему моменту времени  $t$  не была до конца обработана ( $X_k > t$ ).

Таким образом,

$$N(t) = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{X_k > t \geq t_k\},$$

где  $\mathbb{I}\{\cdot\}$  - индикатор некоторого события.

Отметим, что

$$t_{k+1} - t_k \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = \overline{1, n-1}$$

Тогда среднее время ожидания между заявками

$$\mathbb{E}[t_{k+1} - t_k] = \frac{1}{\lambda}.$$

Однако первый момент распределения  $\chi_m^2$  равняется

$$\mathbb{E}s_k = m = 10.$$

Следовательно, поведение  $N(t)$  можно описать в рамках средних значений:

- если  $\lambda > 0.1$ , то среднее время ожидания меньше среднего времени обработки заявки, система перегружается;
- если  $\lambda = 0$ , то про поведение системы в среднем ничего нельзя сказать;
- если  $\lambda < 0.1$ , то среднее время ожидания больше среднего времени обработки заявки, система не перегружается.

Моделируем работу системы массового обслуживания согласно следующему алгоритму:

1.  $n \sim \text{Pois}(\lambda T)$ ;
2.  $t_k \sim U[0, T]$ ,  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;
3.  $s_k \sim \chi_{10}^2$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;
4. Вычисляем  $X_k$ ;
5. Задаём сетку по времени и вычисляем  $N(t)$ .

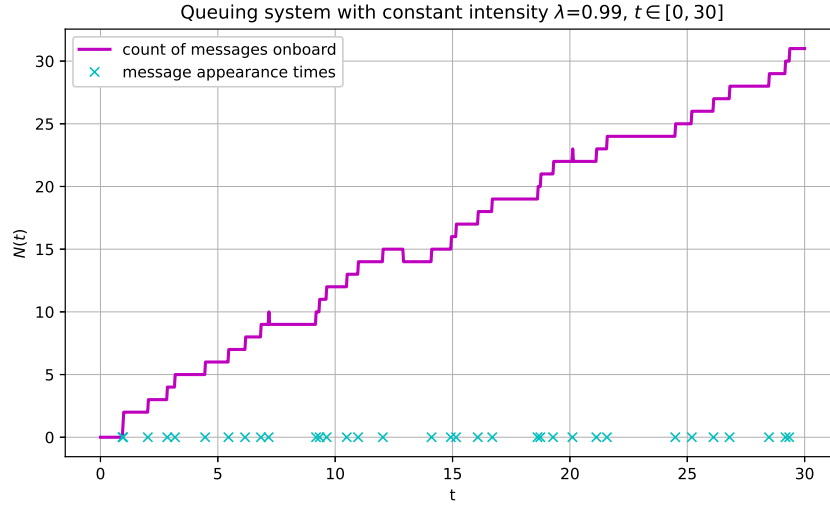


Рис. 2.9: СМО с постоянной интенсивностью  $\lambda = 0.99, t \in [0, 30]$ .

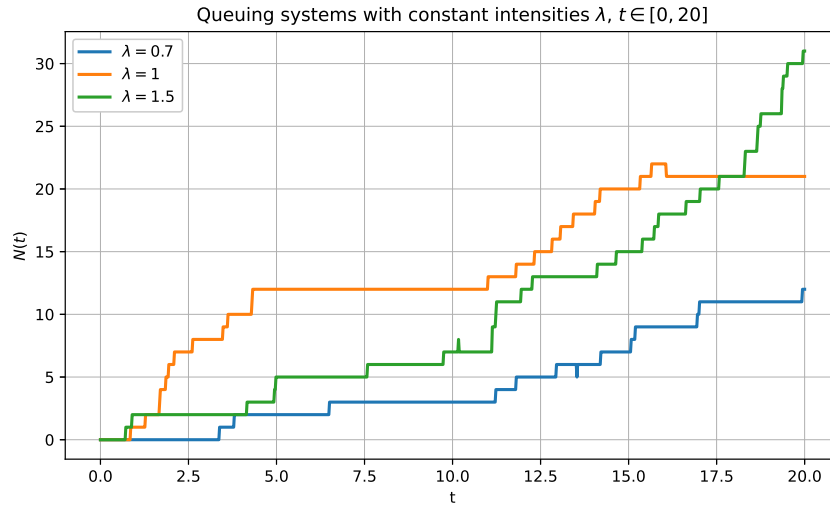


Рис. 2.10: СМО с постоянными интенсивностями  $\lambda \in \{0.7, 1, 1.5\}, t \in [0, 20]$ .

### 2.5.3 СМО с циклической интенсивностью

Моделирование неоднородного пуассоновского процесса с интенсивностью  $\lambda(x)$  на фиксированном интервале может быть основано на прореживании неоднородного пуассоновского процесса с интенсивностью  $\lambda^*(x) \geq \lambda(x)$ .

**Теорема 10.** Рассмотрим неоднородный пуассоновский процесс  $\{N^*(x) : x \geq 0\}$  с интенсивностью  $\lambda^*(x)$ . Пусть  $N^*(x_0)$  - количество точек на фиксированном полуинтервале  $(0, x_0]$  и  $N^*(x_0) \sim \text{Pois}(\mu_0^*)$ , где  $\mu_0^* = \Lambda^*(x_0) - \Lambda^*(0)$ . Пусть  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_{N^*(x_0)}^*$  - точки на  $(0, x_0]$  и, к тому же,  $\lambda(x) \leq \lambda^*(x), 0 \leq x \leq x_0$ . Тогда при удалении на  $i$ -ом шаге

( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) точки  $X_i^*$  с вероятностью  $1 - \frac{\lambda(X_i^*)}{\lambda^*(X_i^*)}$  оставшиеся точки образуют неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda(x)$  на полуинтервале  $(0, x_0]$ .

*Доказательство.* Приведено в [11].  $\square$

Опишем *метод Льюиса и Шедлеара* моделирования одномерного неоднородного пуассоновского процесса. Будем моделировать точки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  исходного процесса  $\{N(x) : x \geq 0\}$ .

1. Смоделировать точки неоднородного пуассоновского процесса  $\{N^*(x) : x \geq 0\}$  с функцией интенсивности  $\lambda^*(x)$  на фиксированном интервале  $(0, x_0]$ . Если число сгенерированных точек  $n^*$  равно нулю, то стоп (точек второго процесса  $\{N(x) : x \geq 0\}$  нет).
2. Полученные точки  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  упорядочить. Положим  $i = 1, k = 0$ .
3. Смоделировать  $U_i \sim U[0, 1]$ . Если  $U_i \leq \frac{\lambda(X_i^*)}{\lambda^*(X_i^*)}$ , то  $k := k + 1$  и  $X_k = X_i^*$ .
4. Присвоить  $i := i + 1$ . Если  $i \leq n^*$ , то повторяем шаг 3.
5. Вернуть  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , где  $n = k$ .

*Доказательство.* Подробные сведения изложены в [10].  $\square$

Рассмотрим СМО с циклической интенсивностью  $\lambda(1 + \cos t)$  и единичными скачками. Положим  $\lambda^*(t) = 2\lambda \geq \lambda(1 + \cos t)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Тогда пуассоновский процесс  $N^*(t)$  будем моделировать как в прошлом пункте, а затем применять к нему алгоритм прореживания.

Отметим, что в алгоритме

$$\frac{\lambda(t_i)}{\lambda^*(t_i)} = \frac{\lambda(1 + \cos t_i)}{2\lambda} = \frac{1 + \cos t_i}{2} =: p_i$$

и сравнение  $p_i \leq U_i$  равносильно моделированию  $\text{Be}(p_i)$ .

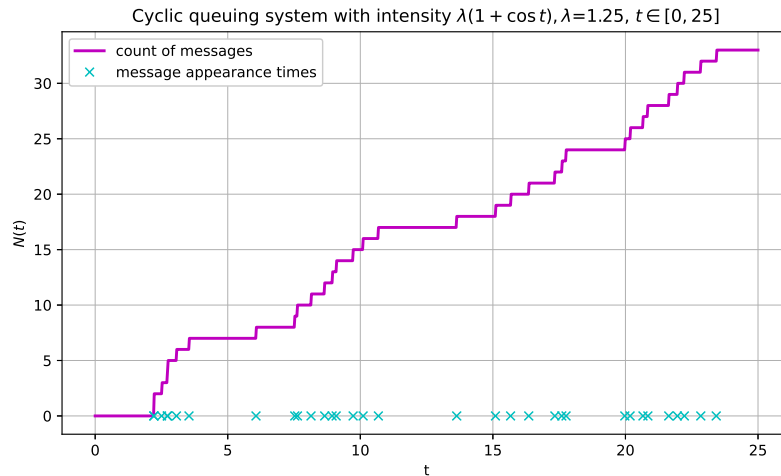


Рис. 2.11: СМО с циклической интенсивностью  $\lambda(1 + \cos t)$ ,  $\lambda = 1.25, t \in [0, 25]$ .

### 2.5.4 Моделирование страховой компании

Распределение Парето  $P(k, \sigma)$  задаётся плотностью

$$p_P(x) = \begin{cases} \frac{k\sigma^k}{x^{k+1}}, & x \geq \sigma, \\ 0, & x < \sigma, \end{cases}$$

где  $k, \sigma > 0$  и  $\sigma$  - коэффициент масштаба. Тогда функция распределения

$$F_P(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^k, & x \geq \sigma, \\ 0, & x < \sigma. \end{cases}$$

Его математическое ожидание равняется  $\frac{k\sigma}{k-1}$  при  $k > 1$ . При  $k \leq 1$  его не существует.

Функция распределения Парето обратима:

$$F_P^{-1}(y) = \sigma(1 - y)^{-\frac{1}{k}}, \quad y \in [0, 1].$$

Будем моделировать распределение Парето методом обращения функции распределения.

Обозначим  $W(t)$  - капитал страховой компании к моменту времени  $t \in [0, T]$ .

Пусть число страховых случаев к моменту  $t$  равняется  $N(t)$  - однородный пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ .

Положим  $\kappa_i$  - величина страхового случая, который нужно выплатить в момент времени  $t_i$ .

Тогда по условию задачи  $\kappa_i \sim P(k, \sigma)$  и

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \sigma(1 - U_i)^{-\frac{1}{k}}, \quad U_i \sim \mathcal{U}[0, 1], \\ W(t) &= W + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} \kappa_i, \end{aligned}$$

где  $W > 0$  - начальный капитал,  $c > 0$  - скорость линейного роста капитала компании.

Алгоритм моделирования аналогичен задаче СМО с постоянной интенсивностью. Дополнительно учтём, что капитал страховой компании не может быть отрицательным. Будем считать, что при банкротстве страховая компания прекращает свою деятельность (дальнейший капитал нулевой).

Исследуем поведение капитала при  $k > 1$ :

$$\mathbb{E}W(t) = W + ct - \lambda t \frac{k\sigma}{k-1}.$$

Таким образом,

- при  $c > \frac{k\sigma}{k-1}$  капитал в среднем растёт;
- при  $c < \frac{k\sigma}{k-1}$  капитал в среднем убывает, что приводит к банкротству;
- при равенстве  $c = \frac{k\sigma}{k-1}$  про поведение капитала в среднем ничего нельзя сказать.

Если же  $k \in (0, 1]$ , то в среднем  $\mathbb{E}W(t)$  равно минус бесконечности, что влечёт банкротство в некоторый момент времени.

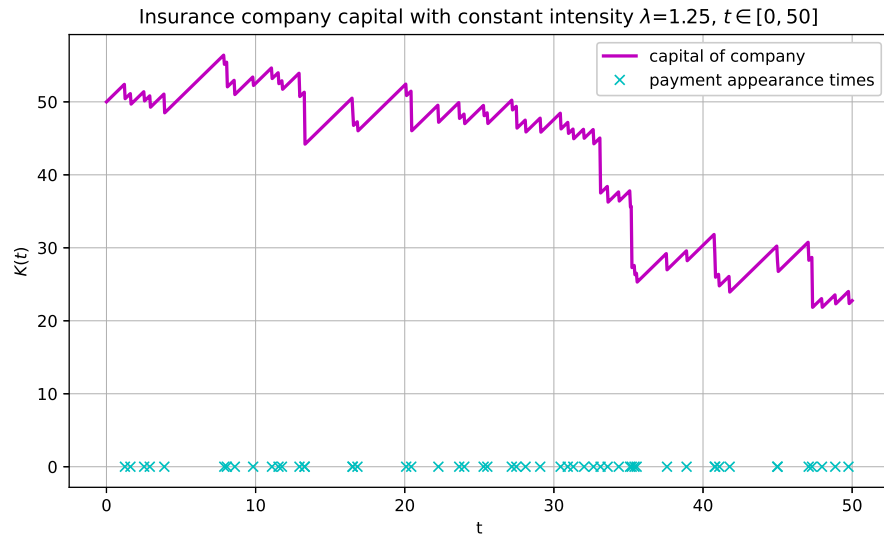


Рис. 2.12: Моделирование работы страховой компании  $W = 50, c = 2, k = 2.5, \sigma = 1.25$ .

# Литература

- [1] *Смирнов С. Н.* Лекции по стохастическому анализу. 2023-2024.
- [2] *Ширяев А. Н.* Вероятность, Кн. 1 - *М.:МЦНМО*, 2021.
- [3] *Devroye L.* Non-uniform random variate generation, *Springer-Verlag, New York*, 1986.
- [4] *Кропачева Н. Ю., Тихомиров А. С.* Моделирование случайных величин: Метод. указания, *Великий Новгород*, 2004.
- [5] *Некрутин В. В.* Моделирование распределений, 2014.
- [6] *Бусленко Н. П., Соболев И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А.* Метод статистических испытаний, 1961.
- [7] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 1, *М.: Мир*, 1964.
- [8] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 2, *М.: Мир*, 1967.
- [9] *Kalman R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Md.*, 1960.
- [10] *Lewis P. A. W., Shedler G. S.* Simulation of Nonhomogeneous Poisson Processes by Thinning, 1979.
- [11] *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления, *М.: Мир*, 1973.