Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная задача быстродействия»

Студент 315 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

1 Теоретические выкладки

1.1 Постановка задачи

Пусть даны множества $\mathcal{X}_0, \mathcal{P}, \mathcal{X}_1 \subseteq \operatorname{conv} \mathbb{R}^2$. Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x(\cdot), f(\cdot) \in \mathbb{R}^2,\ A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ u(\cdot) \in \mathbb{R}^2$. Для неё поставлена задача линейного быстродействия при фиксированном начальном времени t_0 и свободном конечном времени t_1.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \\ x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1,\ t_1 \geqslant t_0,\ t_1 - ? \\ J(u) = t_1 - t_0 \to \inf\limits_{u \in \mathcal{P}}, \end{cases} \tag{1}$$

т.е. необходимо найти минимальное время $t_1 > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

1.2 Принцип максимума Понтрягина

Принимаем за данное следующее необходимое условие, где $\rho(l \mid X)$ — опорная функция множества X.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). *Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ — оптимальная пара для задачи (1), t_1^* — оптимальное время быстродействия. Тогда $\exists\ \psi(t) \not\equiv 0,\ \psi(\cdot) \in \mathbb{R}^2$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) (сопряженная система)

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t)$$

2) (условие максимума)

$$\forall t \in [t_0, t_1^*],\ \left\langle B^T\psi(t), u^*(t) \right\rangle = \rho(B^T\psi(t) \mid \mathcal{P})$$

3) (условия трансверсальности на левом и правом концах соответственно)

$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0),$$
$$\langle -\psi(t_1^*), x^*(t_1^*) \rangle = \rho(-\psi(t_1^*) \mid \mathcal{X}_1),$$

1.3 Вычисление опорных функций

Даны следующие множества, $\alpha_i, \beta_i, \sigma, \zeta > 0, i = 1, 2$.

$$\mathcal{X}_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \alpha_1| + |x_2 - \beta_1| \leqslant \gamma_1\},$$
$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \sigma x_2^2 \leqslant \zeta,\ \sigma x_1^2 + x_2^2 \leqslant \zeta\},$$
$$\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - \alpha_2)^2 + (x_2 - \beta_2)^2 \leqslant \gamma_2\}.$$

Вычислим опорные функции этих множеств, чтобы в последующем использовать их при реализации алгоритма решения (1).

1.3.1 $\rho(l \mid \mathcal{X}_0)$

Множество $\mathcal{X}_0$ — ромб с полудиагоналями γ_1 с центром в точке (α_1, β_1). Ромб является выпуклым многоугольником. Тогда

$$\begin{aligned}
\rho(l \mid \mathcal{X}_0) &= \sup_{x \in \mathcal{X}_0} \langle l, x \rangle = \\
&= \max\{\langle l, (\alpha_1 - \gamma_1, \beta_1)\rangle, \langle l, (\alpha_1, \beta_1 - \gamma_1)\rangle, \langle l, (\alpha_1 + \gamma_1, \beta_1)\rangle, \langle l, (\alpha_1, \beta_1 + \gamma_1)\rangle\} = \\
&= l_1\alpha_1 + l_2\beta_1 + \gamma_1 \max\{|l_1|, |l_2|\}.
\end{aligned}$$

Получили, что

$$\boxed{\rho(l \mid \mathcal{X}_0) = l_1\alpha_1 + l_2\beta_1 + \gamma_1 \max\{|l_1|, |l_2|\}.}$$

Дополнительно найдём опорное множество $X_l^0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle l, x \rangle = \rho(l \mid \mathcal{X}_0)\},\ l \not\equiv \theta$.

$$X_l^0 = \begin{cases}
\{(\alpha_1, \beta_1 + \operatorname{sgn}(l_2)\gamma_1)\}, & |l_2| > |l_1|, \\
\{(\alpha_1 + \operatorname{sgn}(l_1)\gamma_1, \beta_1)\}, & |l_2| < |l_1|, \\
L_{11}, & l_2 = l_1 > 0, \\
L_{12}, & l_2 = -l_1 < 0, \\
L_{21}, & l_2 = l_1 < 0, \\
L_{22}, & l_2 = -l_1 > 0,
\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = -x + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad \alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_1 + \gamma_1 \quad \}, \\
L_{12} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = x - \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1, \quad \alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_1 + \gamma_1 \quad \}, \\
L_{21} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = -x + \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1, \quad \alpha_1 - \gamma_1 \leqslant x \leqslant \alpha_1 \quad \}, \\
L_{22} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y = x - \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad \alpha_1 - \gamma_1 \leqslant x \leqslant \alpha_1 \quad \}.
\end{aligned}$$

1.3.2 $\rho(l \mid \mathcal{P})$

Рассмотрим случай $\sigma = 1$. Тогда $\mathcal{P}$ — круг радиуса $\sqrt{\zeta}$ с центром в начале координат. Опорная функция такого множества равна

$$\rho(l \mid \mathcal{P}) = \sqrt{\zeta(l_1^2 + l_2^2)}.$$

Перепишем множество $\mathcal{P}$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{\zeta} + \frac{x_2^2}{\zeta/\sigma} \leqslant 1,\ \frac{x_1^2}{\zeta/\sigma} + \frac{x_2^2}{\zeta} \leqslant 1\}. \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow\ \mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \langle x, Q_1 x \rangle \leqslant 1,\ \langle x, Q_2 x \rangle \leqslant 1\},
\end{gathered}$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta/\sigma} \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{l}{\zeta/\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{l}{\zeta} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай $\sigma > 1$. В данном случае множество представлено в виде пересечения внутренностей двух эллипсов с полуосями $\zeta, \zeta/\sigma$ и $\zeta/\sigma, \zeta$ соответственно. Найдём точки пересечения двух эллипсов.

$$\begin{cases} x_1^2 + \sigma x_2^2 = \zeta, \\ x_1^2 + \sigma x_2^2 = \sigma x_1^2 + x_2^2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \zeta - \sigma x_2^2, \\ (1-\sigma) x_1^2 + (\sigma - 1) x_2^2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \zeta - \sigma x_2^2, \\ x_1^2 = x_2^2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}}, \\ x_2 = \pm\sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}} \end{cases}$$

Опорная функция множества $\mathcal{P}$ при $\sigma \neq 1, \sigma > 0$ является кусочно-заданной, ведь найдутся направления l такие, что $\rho(l \mid \mathcal{P}) = \langle l, \tilde{x} \rangle$, где $\tilde{x}$ — одна из точек пересечения двух эллипсов (опорная функция точки). Знаем, что опорные функции и опорные векторы для эллипсов с матрицами Q_1, Q_2 соответственно равны

$$\left\langle l, Q_1^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\zeta l_1^2 + \frac{\zeta}{\sigma} l_2^2},\ x = \frac{Q_1^{-1} l}{\left\langle l, Q_1^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}}};$$

$$\left\langle l, Q_2^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\zeta}{\sigma} l_1^2 + \zeta l_2^2},\ x = \frac{Q_2^{-1} l}{\left\langle l, Q_2^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Найдем все такие направления в I координатной четверти, которые дают опорную функцию равную опорной функции точки пересечения, из соображений непрерывности: мысленно идём вдоль эллипса с матрицей Q_1 вниз до пересечения с другим эллипсом, получим ограничения на вектор $l = (l_1, l_2)^T$:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^{-1} l}{\left\langle l, Q_1^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\left\langle l, Q_1^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \zeta l_1 \\ \frac{\zeta}{\sigma} l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} \\ \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{l_2}{l_1} = \sigma. \\ \frac{Q_2^{-1} l}{\left\langle l, Q_2^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\left\langle l, Q_2^{-1} l \right\rangle^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{\sigma} l_1 \\ \zeta l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} \\ \sqrt{\frac{\zeta}{1+\sigma}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{\sigma}. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, в I координатной четверти $\rho(l \mid \mathcal{P}) = \sqrt{\zeta/(1+\sigma)}(l_1 + l_2)$ для тех и только тех $l = (l_1, l_2)$: $1/\sigma \leqslant l_2/l_1 \leqslant \sigma$. Проводя аналогичные рассуждения, пользуясь симметричностью в оставшихся случаях и объединяя выводы, получим

$$\rho(l \mid \mathcal{P}) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}}(|l_1| + |l_2|), & \dfrac{1}{\sigma} \leqslant \dfrac{|l_2|}{|l_1|} \leqslant \sigma, \\ \sqrt{\zeta l_1^2 + \dfrac{\zeta}{\sigma} l_2^2}, & l_1 = 0,\ \dfrac{|l_2|}{|l_1|} > \sigma, \\ \sqrt{\dfrac{\zeta}{\sigma} l_1^2 + \zeta l_2^2}, & \dfrac{|l_2|}{|l_1|} < \dfrac{1}{\sigma}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $0 < \sigma < 1$. Исследуем условие (2). Аналогично получим

$$\rho(l \mid \mathcal{P}) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}}(|l_1| + |l_2|), & \sigma \leqslant \dfrac{|l_2|}{|l_1|} \leqslant \dfrac{1}{\sigma}, \\ \sqrt{\zeta l_1^2 + \dfrac{\zeta}{\sigma} l_2^2}, & l_1 = 0,\ \dfrac{|l_2|}{|l_1|} < \sigma, \\ \sqrt{\dfrac{\zeta}{\sigma} l_1^2 + \zeta l_2^2}, & \dfrac{|l_2|}{|l_1|} > \dfrac{1}{\sigma}. \end{cases}$$

Дополнительно найдем опорное множество $P_l,\ l=(l_1,l_2)\not\equiv\theta$ при $\sigma>1$:

$$P_l=\begin{cases}\left(\operatorname{sgn}(l_1)\sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}},\ \operatorname{sgn}(l_2)\sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}}\right), & \dfrac{1}{\sigma}|l_1|\leqslant|l_2|\leqslant\sigma|l_1|,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\zeta}{\sigma}l_1^2+\zeta l_2^2}}\left(\dfrac{\zeta}{\sigma}l_1,\zeta l_2\right), & |l_2|<\dfrac{1}{\sigma}|l_1|,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\zeta l_1^2+\frac{\zeta}{\sigma}l_2^2}}\left(\zeta l_1,\dfrac{\zeta}{\sigma}l_2\right), & |l_2|\geqslant\sigma|l_1|.\end{cases};$$

при $0<\sigma<1$:

$$P_l=\begin{cases}\left(\operatorname{sgn}(l_1)\sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}},\ \operatorname{sgn}(l_2)\sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\sigma}}\right), & \sigma|l_1|\leqslant|l_2|\leqslant\dfrac{1}{\sigma}|l_1|,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\zeta l_1^2+\frac{\zeta}{\sigma}l_2^2}}\left(\zeta l_1,\dfrac{\zeta}{\sigma}l_2\right), & |l_2|<\sigma|l_1|,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\zeta}{\sigma}l_1^2+\zeta l_2^2}}\left(\dfrac{\zeta}{\sigma}l_1,\zeta l_2\right), & |l_2|\geqslant\dfrac{1}{\sigma}|l_1|.\end{cases};$$

и при $\sigma=1$:

$$P_l=\left\{\sqrt{\frac{\zeta}{l_1^2+l_2^2}}\cdot l\right\}.$$

1.3.3 $\rho(l\mid\mathcal{X}_1)$

Множество $\mathcal{X}_1$ — круг радиуса $\sqrt{\gamma_2}$ с центром в точке $c=(\alpha_2,\beta_2)$. Перепишем множество $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{X}_1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\langle x-c,x-c\rangle\leqslant\gamma_2\}.$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим лагранжиан и найдем его наибольшее значение.

$$\mathcal{L}(x,\lambda)=\langle l,x\rangle+\lambda(\langle x-c,x-c\rangle-\gamma_2).$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\langle x-c,x-c\rangle-\gamma_2=0,\\ \dfrac{\mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial x}=l+2\lambda(x-c)=0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x-c=-\dfrac{l}{2\lambda},\\ \dfrac{1}{4\lambda^2}\langle l,l\rangle=\gamma_2.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x-c=-\dfrac{l}{2\lambda},\\ \lambda=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{\gamma_2}}\sqrt{\langle l,l\rangle}.\end{cases}$$

Наибольшее значение достигается при

$$\begin{cases}x^*=c+\sqrt{\gamma_2\,\langle l,l\rangle},\\ \lambda^*=-\dfrac{1}{2\sqrt{\gamma_2}}\sqrt{\langle l,l\rangle}.\end{cases}\Longrightarrow\ \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)=\langle l,c\rangle+\sqrt{\gamma_2\,\langle l,l\rangle}.$$

Получили, что

$$\boxed{\rho(l\mid\mathcal{X}_1)=l_1\alpha_2+l_2\beta_2+\sqrt{\gamma_2(l_1^2+l_2^2)}.}$$

Дополнительно найдем единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ в произвольной точке на окружности $\mathcal{X}_1$. Пусть даны векторы $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ и $\mathbf{c} = \{\alpha_2, \beta_2\}$. Тогда

$$\mathbf{n} = \mathbf{n_x} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}}{||\mathbf{x} - \mathbf{c}||}.$$

2 Алгоритм решения

Параметры численного метода: N — количество точек в равномерной сетке по единичной окружности, k — коэффициент разбиения опорного множества, T — верхняя оценка времени быстродействия, ε — величина малости.

1. Проверить $\mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1 \neq \varnothing$ перебором по границе 2-х множеств. Если условие выполнено, то выводим соответствующую ошибку в консоль, алгоритм неприменим.

2. Проверить матрицу B — нулевая (наибольший элемент по модулю меньше ε)? вырожденная (определитель по модулю меньше ε)? При необходимости воспользоваться сингулярным разложением, заменить малые (по модулю меньше ε) сингулярные числа на большее число.

3. Перебор по $\psi(t_0) = \psi^0$ с единичной окружности: $\psi_1^m = \cos\frac{2\pi m}{N}, \psi_2^m = \sin\frac{2\pi m}{N},\ m = \overline{1, N}$.

4. Перебор по $x(t_0) = x^0$ из опорного множества X_l^0 в направлении $\psi(t_0)$. Как ранее было показано, X_l^0 — может быть отрезком, параметризуем его с помощью $N \cdot k$ точек.

5. При помощи ode45 решить систему 4-х переменных, пока не выполнится условие $\exists\ t^* : x(t^*) \in \partial\mathcal{X}_1$ (проверка реализована с помощью event handling):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \\ \dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t), \\ x(t_0) = x^0, \\ \psi(t_0) = \psi^0, \\ t \in [t_0, T], \end{cases}$$

   где $u(t)$ однозначно находится из принципа максимума.

6. Если $\exists\ t^*$, то $T := t^*$, проверить условие трансверсальности на правом конце для найденной "оптимальной"траектории: вычислить угол между нормалью в точке $x(t^*)$ и вектором $\psi(t^*)$. Выполнять шаги 3-6, пока не закончим перебор.

7. Запомнить условие разрешимости ($\exists\ t^*$), пробные (вместе с ними и подозрительные на оптимальную) траектории, вектор нормали, угол, оптимальное время для вывода соответствующих графиков.

8. Спросить у пользователя необходимость повторного запуска. Находим новые траектории, подозрительные на оптимальные: если система разрешима, то вычисленное оптимальное время — новая верхняя оценка T, иначе изменяем параметры численного метода (например, увеличить в 2 раза N, уменьшить ε).

3 Примеры применения алгоритма

Обозначим следующие результаты вычислений: t_1 — оптимальное время быстродействия, α — угол между нормалью в точке $x(t_1)$ и вектором $\psi(t_1)$.

3.1 Пример 1

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2, \quad \zeta = 1,$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 2, \quad \sigma = 1,$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1,$$

$$t_0 = 0,\ N = 12,\ T = 1,\ k = 1,\ \varepsilon = 10^{-5}.$$

В самом начале имеем $N = 12$ итераций по ψ^0 с единичной окружности. Согласно алгоритму с каждой итерацией $N := 2 \cdot N$, $T := t_1$ (если t_1 было обновлено).

Результат при первичном запуске составил: $\alpha \approx 22.45490°$, $t_1 \approx 0.05707$.

Результат при повторном запуске составил: $\alpha \approx 1.4566°$, $t_1 \approx 0.056631$.

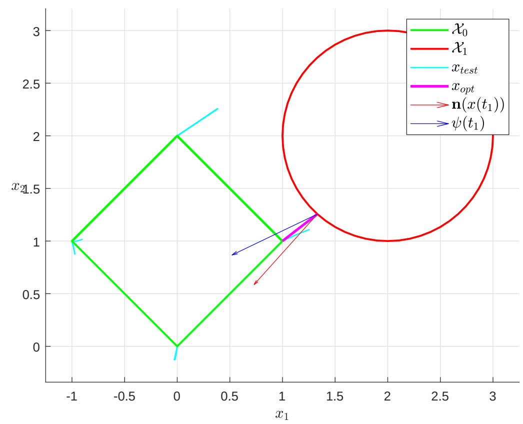
Теперь присвоим $N := 48$.

Результат составил: $\alpha \approx 0.18783°$, $t_1 \approx 0.056590$.

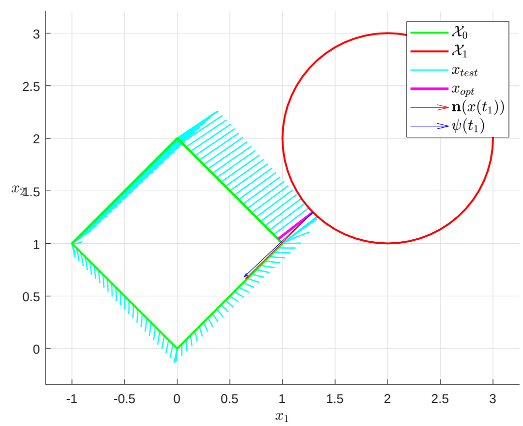
По сравнению с исходным значением $N = 12$ результат улучшился (уменьшились время быстродействия t_1, угол α).

Таким образом, была продемонстрирована возможность постепенного улучшения результата.

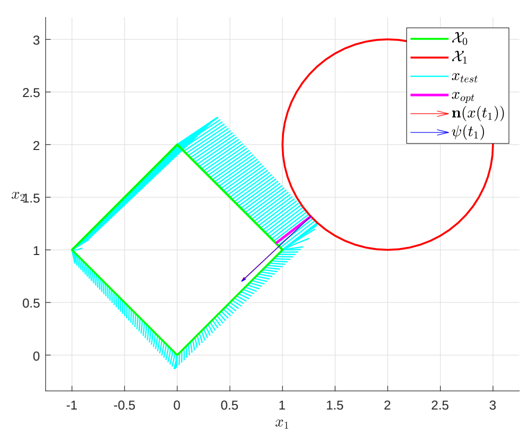
Появление новых пробных траекторий, исходящих со сторон ромба, обусловлено тем, что с заданной погрешностью ε вектор ψ^0 ортогонален соответствующей стороне ромба. В данном случае опорное множество X_l^0 является разбиением стороны ромба на $k \cdot N$ точек. Обход по ромбу осуществляется против часовой стрелки, множества расположены так, что на первых итерациях по ψ^0 уже удаётся получить верхнюю оценку времени быстродействия, что объясняет ограниченность пробных траекторий.



(a) Первичный запуск



(b) Повторный запуск



(c) Вторичный запуск

Рис. 1: График (x^1, x^2).

3.2 Пример 2

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

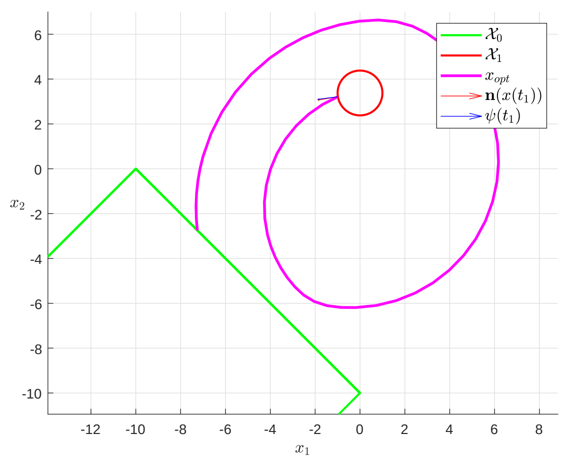
$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -10, \quad \alpha_2 = 0, \qquad \zeta = 1, \\ &\beta_1 = -10, \quad \beta_2 = 3.39, \quad \sigma = 1, \\ &\gamma_1 = 10, \qquad \gamma_2 = 1, \end{aligned}$$

$$t_0 = 0, \ N = 120, \ T = 4, \ k = 1, \ \varepsilon = 10^{-5}.$$

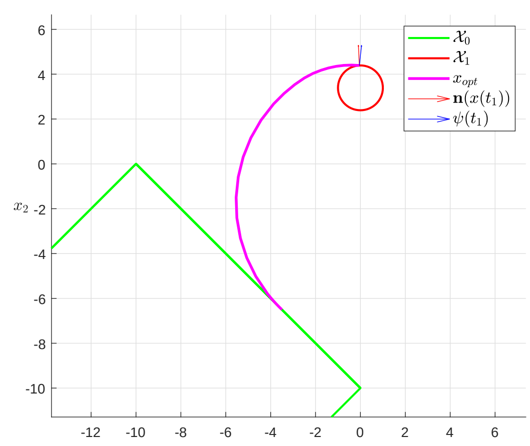
Результат составил: $\alpha \approx 1.8219, t_1 \approx 2.3139$.

Теперь присвоим $\beta_2 = 3.38$, что эквивалентно параллельному переносу конечного множества вдоль оси Oy.

Получим $\alpha \approx 2.945, t_1 \approx 0.8216$. Изменение $\Delta t_1 = 1.4923$.



(a) При $\beta = 3.38$



(b) При $\beta = 3.39$

Рис. 2: График (x_1, x_2) при различных значениях β_2.

Таким образом, было продемонстрировано отсутствие непрерывной зависимости оптимального времени от начальных данных.

3.3 Пример 3

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 = -5, \quad \alpha_2 = -12, \quad \zeta = 3,$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -12, \quad \sigma = 2,$$
$$\gamma_1 = 4, \quad \gamma_2 = 12,$$
$$t_0 = 0,\ N = 32,\ T = 4,\ k = 1,\ \varepsilon = 10^{-5}.$$

Результат при повторном запуске составил: $\alpha \approx 2.326°, t_1 \approx 0.70287$.

Приведем полный набор графиков.

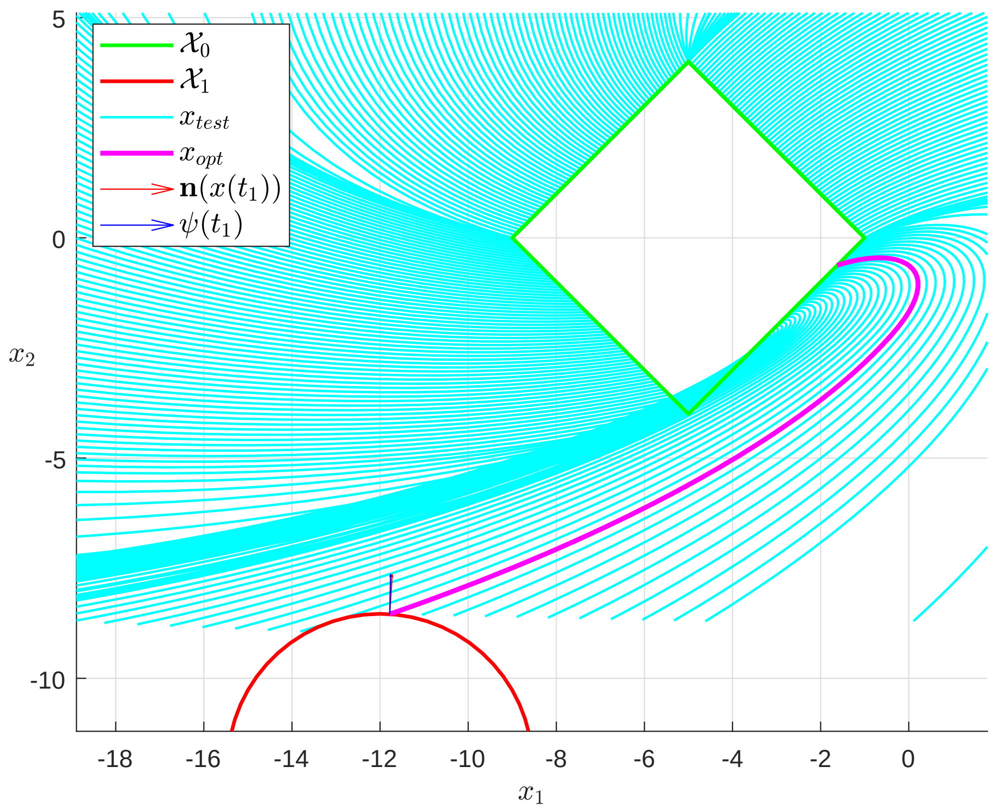


Рис. 3: График (x_1, x_2).

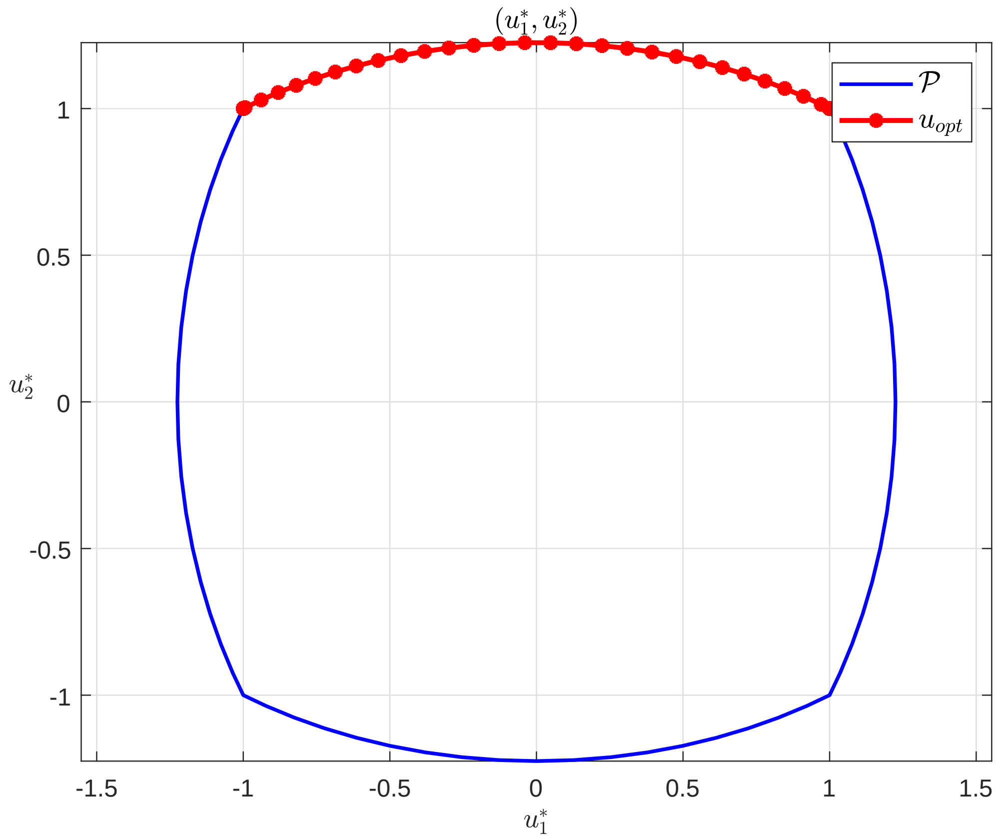
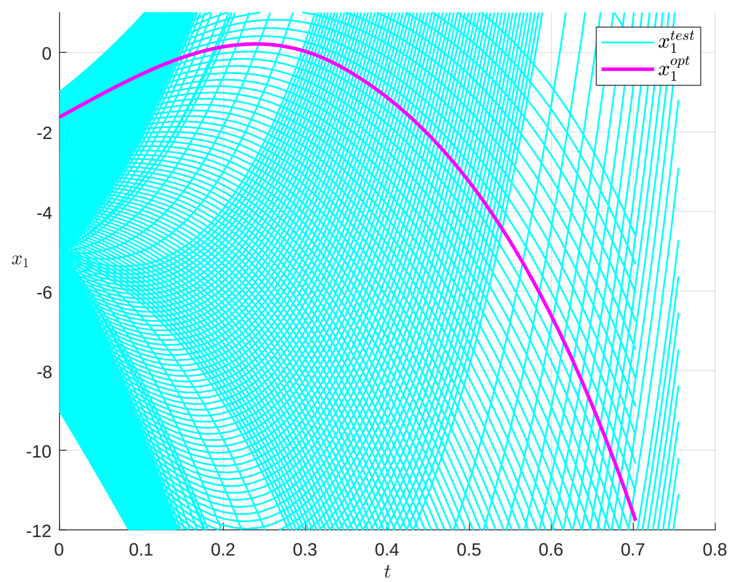
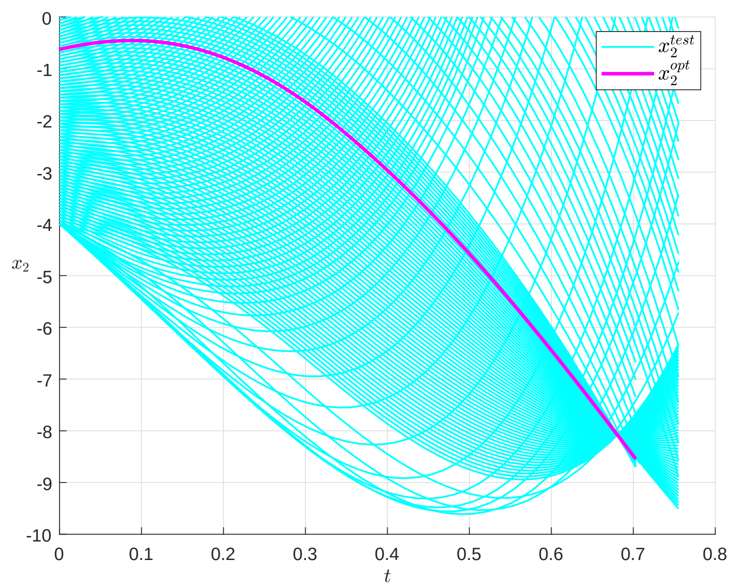


Рис. 4: График (u_1, u_2).

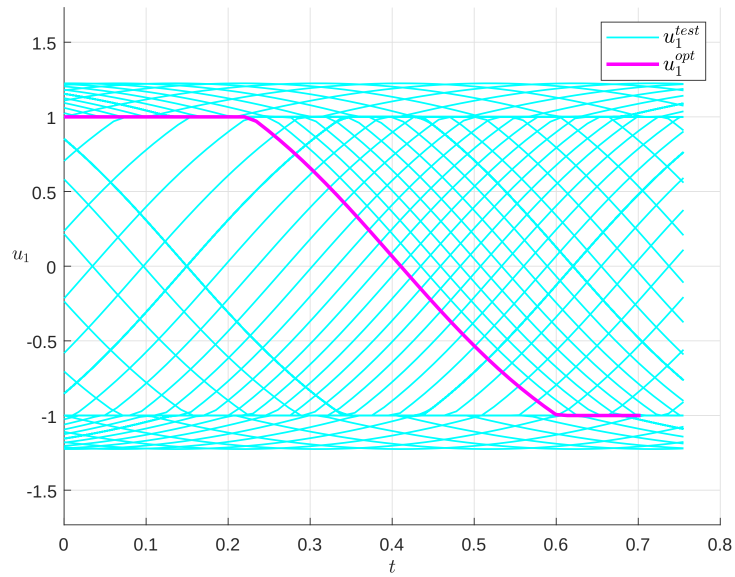


(a) $x_1(t)$

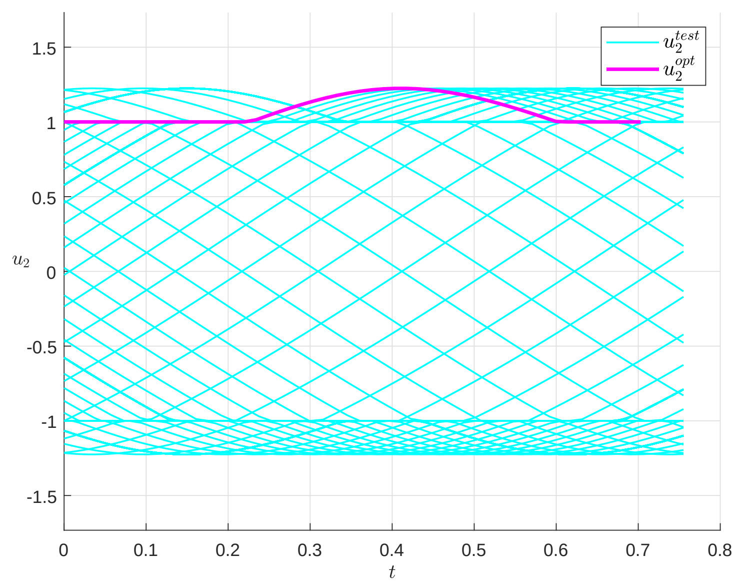


(b) $x_2(t)$

Рис. 5: Графики $x_1(t), x_2(t)$.

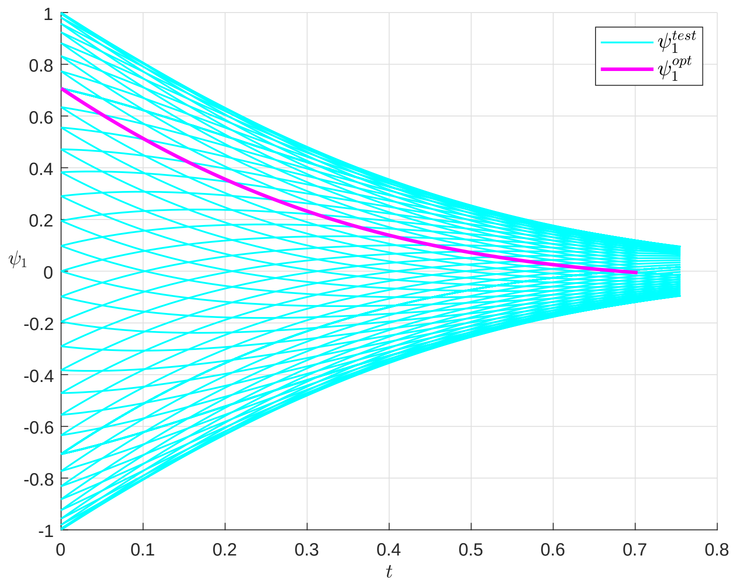


(a) $u_1(t)$

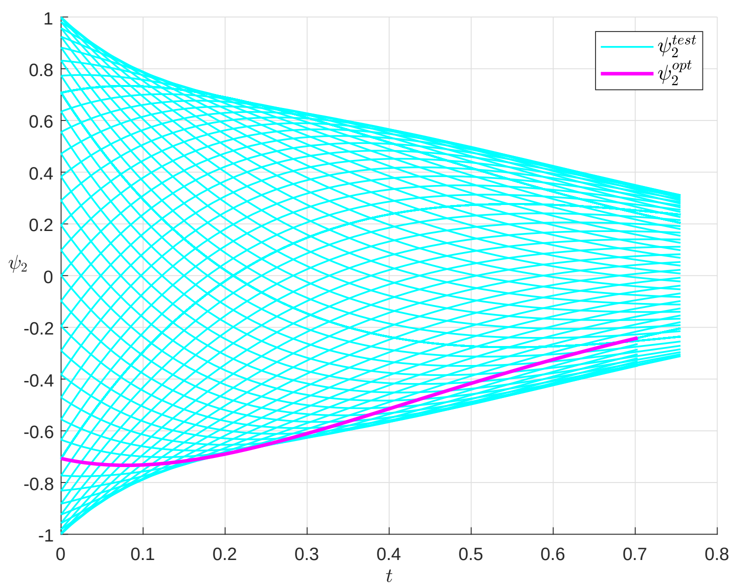


(b) $u_2(t)$

Рис. 6: Графики $u_1(t), u_2(t)$.



(a) $\psi_1(t)$



(b) $\psi_2(t)$

Рис. 7: Графики $\psi_1(t), \psi_2(t)$.

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамерклидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* **Математическая теория оптимальных процессов.**—4-е изд.—М.: «Наука», 1983.—с.23–27.