Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Численное решение задачи Дирихле»

Студент 315 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

1 Постановка задачи

Дана следующая краевая задача:

$$\begin{cases} u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) - \mu \cdot u(x,y) = f(x,y), \\ u(x,0) \equiv u(x,1) \equiv \xi(x), \\ u(0,y) \equiv u(1,y) \equiv \eta(y), \\ \xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1), \\ \mu > 0,\ f \in C^1([0,1]\times[0,1]),\ \xi, \eta \in C^1([0,1]). \end{cases} \tag{1}$$

Для этой краевой задачи рассматривается разностная схема:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1,\ell} - 2y_{k,\ell} + y_{k-1,\ell}}{h_x^2} + \dfrac{y_{k,\ell+1} - 2y_{k,\ell} + y_{k,\ell-1}}{h_y^2} - \mu \cdot y_{k,\ell} = f_{k,\ell}, \\ y_{k,0} = y_{k,N} = \xi_k,\ k = \overline{1, M-1}, \\ y_{0,\ell} = y_{M,\ell} = \eta_\ell,\ \ell = \overline{1, N-1}, \\ y_{k,\ell} \approx u(x_k, y_\ell),\ x_k = k/M,\ y_\ell = \ell/N, \\ f_{k,\ell} = f(x_k, y_\ell),\ \xi_k = \xi(x_k),\ \eta_\ell = \eta(y_\ell), \end{cases} \tag{2}$$

где $h_x = 1/M,\ h_y = 1/N$ и значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для x_k, y_ℓ. Необходимо получить численное решение задачи (1) при помощи разностной схемы (2), разрешенной при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ).

2 Теоретические выкладки

Допустим, что значения $y_{k,\ell}, f_{k,\ell}, \xi_k, \eta_\ell$ являются результатом ПДПФ с коэффициентами $a_{p,q}, b_{p,q}, \gamma_p, \delta_q$ соответственно т.е.

$$y_{k,\ell} = \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} e^{-2\pi i(\frac{pk}{M} + \frac{q\ell}{N})},\ f_{k,\ell} = \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} b_{p,q} e^{-2\pi i(\frac{pk}{M} + \frac{q\ell}{N})},$$
$$\xi_k = \sum_{p=0}^{M-1} \gamma_p e^{-2\pi i \frac{pk}{M}},\ \eta_\ell = \sum_{q=0}^{N-1} \delta_q e^{-2\pi i \frac{ql}{N}}.$$

Воспользуемся тем, что значения $y_{k,\ell}$ аппроксимируют функцию $u(x,y)$ в узлах сетки для x_k, y_ℓ: решение задачи (2) является приближенным решением задачи (1). Подставим полученные разложения в (2):

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} \Bigg(& a_{p,q} e^{-2\pi i(\frac{pk}{M} + \frac{q\ell}{N})} \cdot \frac{1}{h_x^2}\left(e^{-2\pi i \frac{p}{M}} - 2 + e^{2\pi i \frac{p}{M}}\right) + \\ & + a_{p,q} e^{-2\pi i(\frac{pk}{M} + \frac{q\ell}{N})} \cdot \frac{1}{h_y^2}\left(e^{-2\pi i \frac{q}{N}} - 2 + e^{2\pi i \frac{q}{N}}\right) - \\ & - \mu \cdot a_{p,q} e^{-2\pi i(\frac{pk}{M} + \frac{q\ell}{N})}\Bigg) = \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} b_{p,q} e^{-2\pi i(\frac{pk}{M} + \frac{q\ell}{N})}. \end{aligned} \tag{3}$$

Введём обозначение $c_{p,q}$:

$$\begin{aligned} c_{p,q} = \frac{1}{h_x^2}\left(e^{-2\pi i\frac{p}{M}} - 2 + e^{2\pi i\frac{p}{M}}\right) + \frac{1}{h_y^2}\left(e^{-2\pi i\frac{q}{N}} - 2 + e^{2\pi i\frac{q}{N}}\right) = \\ = \frac{2}{h_x^2}\left(\cos\frac{2\pi p}{M} - 1\right) + \frac{2}{h_y^2}\left(\cos\frac{2\pi q}{N} - 1\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q}c_{p,q}e^{-2\pi i(\frac{pk}{M}+\frac{q\ell}{N})} = \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} b_{p,q}e^{-2\pi i(\frac{pk}{M}+\frac{q\ell}{N})},$$

откуда следует, что

$$\boxed{a_{p,q}\cdot c_{p,q} = b_{p,q},\ \forall p = \overline{0, M-1}, q = \overline{0, N-1}.} \tag{5}$$

Далее, учтём краевые условия:

$$y_{k,0} = \xi_k \ \Rightarrow \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q}e^{-2\pi i\frac{pk}{M}} = \sum_{p=0}^{M-1}\gamma_p e^{-2\pi i\frac{pk}{M}} \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q} = \gamma_p,\ \forall p = \overline{0, M-1},} \tag{6}$$

$$y_{0,\ell} = \eta_\ell \ \Rightarrow \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} a_{p,q}e^{-2\pi i\frac{q\ell}{N}} = \sum_{q=0}^{N-1}\delta_q e^{-2\pi i\frac{q\ell}{N}} \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{p=0}^{M-1} a_{p,q} = \delta_q,\ \forall q = \overline{0, N-1}.} \tag{7}$$

Краевые условия $\xi_0 = \eta_0 = \xi_M = \eta_N,\ y_{k,N} = y_{k,0},\ y_{0,\ell} = y_{M,\ell}$ выполнены (проверяется подстановкой). Т.к. $b_{p,q}$ — коэффициенты ПДПФ, соответствующие значениям $f_{k,l}$, то они могут быть явно найдены согласно обратному дискретному преобразованию Фурье (ОДПФ). Далее будем считать, что $p = \overline{0, M-1},\ q = \overline{0, N-1}$.

$$b_{p,q} = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} f_{k,\ell}e^{2\pi i(\frac{pk}{M}+\frac{q\ell}{N})}.$$

Выделим слагаемые с $f_{k,0}, f_{0,\ell}, f_{0,0}$ из суммы:

$$\begin{aligned} b_{p,q} = \frac{1}{MN}f_{0,0} + \frac{1}{MN}\sum_{\ell=1}^{N-1} f_{0,\ell}e^{2\pi i\frac{q\ell}{N}} + \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{M-1} f_{k,0}e^{2\pi i\frac{pk}{M}} + \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{\ell=1}^{N-1} f_{k,\ell}e^{2\pi i(\frac{pk}{M}+\frac{q\ell}{N})} \equiv \\ \equiv \frac{1}{MN}f_{0,0} + \sum_{\ell=1}^{N-1} f_{0,\ell}\cdot\beta_{q,\ell} + \sum_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\cdot\alpha_{p,k} + \widetilde{b}_{p,q}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{p,k} &= \frac{1}{MN}e^{2\pi i\frac{pk}{M}},\ \forall k = \overline{1, M-1} \\ \beta_{q,\ell} &= \frac{1}{MN}e^{2\pi i\frac{q\ell}{N}},\ \forall \ell = \overline{1, N-1} \\ \widetilde{b}_{p,q} &= \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{\ell=1}^{N-1} f_{k,\ell}e^{2\pi i(\frac{pk}{M}+\frac{q\ell}{N})} \end{aligned} \tag{8}$$

Найдем $b_{p,q}$ согласно (5), (6), (7) и подставим полученные значения (8)

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{b_{p,q}}{c_{p,q}} = \gamma_p,\ \forall p = \overline{0, M-1}, \\ \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{b_{p,q}}{c_{p,q}} = \delta_q,\ \forall q = \overline{0, N-1}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{1}{c_{p,q}} \left(\dfrac{1}{MN} f_{0,0} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} f_{0,\ell}\beta_{q,\ell} + \sum\limits_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\alpha_{p,k} + \widetilde{b}_{p,q} \right) = \gamma_p,\ \forall p = \overline{0, M-1}, \\ \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{1}{c_{p,q}} \left(\dfrac{1}{MN} f_{0,0} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} f_{0,\ell}\beta_{q,\ell} + \sum\limits_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\alpha_{p,k} + \widetilde{b}_{p,q} \right) = \delta_q,\ \forall q = \overline{0, N-1}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_{0,0} \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{1}{MNc_{p,q}} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} f_{0,\ell} \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{\beta_{q,\ell}}{c_{p,q}} + \sum\limits_{k=1}^{M-1} f_{k,0}\alpha_{p,k} \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{1}{c_{p,q}} = \gamma_p - \sum\limits_{q=0}^{N-1} \dfrac{\widetilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}}, \\ f_{0,0} \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{1}{MNc_{p,q}} + \sum\limits_{\ell=1}^{N-1} f_{0,\ell}\beta_{q,\ell} \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{1}{c_{p,q}} + \sum\limits_{k=1}^{M-1} f_{k,0} \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{\alpha_{p,k}}{c_{p,q}} = \delta_q - \sum\limits_{p=0}^{M-1} \dfrac{\widetilde{b}_{p,q}}{c_{p,q}}, \end{cases} \tag{9}$$

$\forall p = \overline{0, M-1}, \forall q = \overline{0, N-1}$. Получили СЛАУ из $M+N$ уравнений для $M+N-1$ переменных $f_{0,0}, f_{0,\ell}, f_{k,0}$. Стоит учесть, что условия при $p=0, q=0$ равносильны. При вычислениях достаточно учесть одно из данных условий. Таким образом, получили СЛАУ с квадратной матрицей порядка $M+N-1$. Теперь можно составить алгоритм приближенного решения задачи (1) относительно значений $y_{k,\ell}$:

I. $\gamma_p = \mathrm{ifft}(\xi_k),\ \delta_q = \mathrm{ifft}(\eta_\ell)$.

II. Вычислить $c_{p,q}, \alpha_{p,k}, \beta_{q,\ell}$ согласно (4), (8).

III. $\widetilde{b}_{p,q} = \mathrm{ifft2}(f_{k,\ell})$, где $f_{0,\ell} = f_{k,0} = f_{0,0} = 0$.

IV. Решить СЛАУ (9).

V. $b_{p,q} = \mathrm{ifft2}(f_{k,\ell})$.

VI. $a_{p,q} = b_{p,q}/c_{p,q}$.

VII. $y_{k,\ell} = \mathrm{fft2}(a_{p,q})$.

VIII. Дополнить матрицу $y_{k,\ell}$ значениями ξ_k, η_ℓ.

3 Вычисление точного аналитического решения

Пусть
$$f(x, y) = e^{-3x}\sin(x) + 2y^2e^{5y}. \tag{10}$$
Решим задачу (1) с заданной функцией $f(x, y)$ аналитически. Представим $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y) \equiv f_1(x) + f_2(y),\ \ f_1(x) = e^{-3x}\sin(x),\ \ f_2(y) = 2y^2e^{5y}.$$

Найдем решение $u(x, y)$ в виде $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$. Тогда решение задачи (1) сводится к решению следующих краевых задач:

$$\begin{cases} u_k''(t) - \mu \cdot u_k(t) = f_k(t),\ 0 < t < 1,\ \mu > 0 \\ u_k(0) = u_k(1) = u_0^k, \end{cases} \quad k = 1, 2,$$

где $u_0^k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2$ — заданные начальные условия.

3.1 Вычисление $u_1(x)$

Рассмотрим случай $k = 1$.

$$\begin{cases} u''(t) - \mu \cdot u(t) = e^{-3t}\sin(t),\ 0 < t < 1,\ \mu > 0 \\ u(0) = u(1) = u_0^1, \end{cases} \tag{11}$$

Найдём частное решение в виде $u(t) = e^{-3t}(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$u'(t) = -3e^{-3t}(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) + e^{-3t}(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)).$$
$$u''(t) = 9e^{-3t}(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) - 6e^{-3t}(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) + e^{-3t}(-\alpha\sin(t) - \beta\sin(t)) =$$
$$= e^{-3t}((8\alpha + 6\beta)\sin(t) + (8\beta - 6\alpha)\cos(t)).$$

Подставим полученные функции $u'(t), u''(t)$ в (11) и получим ограничения на α, β:

$$\begin{cases} 1 = (8 - \mu)\alpha + 6\beta, \\ 0 = (8 - \mu)\beta - 6\alpha. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{8 - \mu}{(8 - \mu)^2 + 36}, \\ \beta = \dfrac{6}{(8 - \mu)^2 + 36}. \end{cases}$$

Тогда общее решение (11) представимо в виде

$$u(t) = e^{-3t}\frac{(8 - \mu)\sin(t) + 6\cos(t)}{(8 - \mu)^2 + 36} + c_1e^{\sqrt{\mu}t} + c_2e^{-\sqrt{\mu}t}.$$

Найдем c_1, c_2 из краевых условий:

$$\begin{cases} u(0) = \dfrac{6}{(8 - \mu)^2 + 36} + c_1 + c_2 = u_0^1, \\ u(1) = e^{-3}\dfrac{(8 - \mu)\sin 1 + 6\cos 1}{(8 - \mu)^2 + 36} + c_1e^{\sqrt{\mu}} + c_2e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^1. \end{cases}$$

Введем обозначения $A_1 = (8-\mu)/((8-\mu)^2+36), A_2 = 6/((8-\mu^2)+36)$.

$$\begin{cases} A_2 + c_1 + c_2 = u_0^1, \\ e^{-3}(A_1\sin 1 + A_2\cos 1) + c_1 e^{\sqrt{\mu}} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = u_0^1 - c_2 - A_2, \\ e^{-3}(A_1\sin 1 + A_2\cos 1) + (u_0^1 - c_2 - A_2)e^{\sqrt{\mu}} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = u_0^1 - c_2 - A_2, \\ c_2(e^{-\sqrt{\mu}} - e^{\sqrt{\mu}}) = u_0^1 - B, \end{cases}$$

где $B = e^{-3}(A_1\sin 1 + A_2\cos 1) + (u_0^1 - A_2)e^{\sqrt{\mu}}$. Тогда

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{u_0^1(2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}+1) - 2A_2\operatorname{sh}\sqrt{\mu} - B}{2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}, \\ c_2 = \dfrac{B - u_0^1}{2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}. \end{cases}$$

Итоговый результат для системы (11), записанный в обозначениях A_1, A_2, B:

$$u_1(x) = e^{-3x}(A_1\sin x + A_2\cos x) + \\ + e^{\sqrt{\mu}x}\frac{u_0^1(2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}+1) - 2A_2\operatorname{sh}\sqrt{\mu} - B}{2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}} + e^{-\sqrt{\mu}x}\frac{B - u_0^1}{2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}. \quad (12)$$

3.2 Вычисление $u_2(y)$

Рассмотрим случай $k = 2$.

$$\begin{cases} u''(t) - \mu\cdot u(t) = 2t^2 e^{5t},\ 0 < t < 1,\ \mu > 0 \\ u(0) = u(1) = u_0^2, \end{cases} \quad (13)$$

Найдём решение с помощью метода вариации постоянных. Пусть $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t)$. Тогда общее решение представимо в виде

$$u(t) = c_1(t)e^{\sqrt{\mu}t} + c_2(t)e^{-\sqrt{\mu}t}. \quad (14)$$

Согласно методу вариации постоянных, производные $c_1'(t), c_2'(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{\sqrt{\mu}t} + c_2'(t)e^{-\sqrt{\mu}t} = 0, \\ c_1'(t)\sqrt{\mu}e^{\sqrt{\mu}t} - c_2'(t)\sqrt{\mu}e^{-\sqrt{\mu}t} = 2t^2e^{5t}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_2'(t) = -c_1'(t)e^{2\sqrt{\mu}t}, \\ c_1'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\mu}}t^2e^{(5-\sqrt{\mu})t}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\mu}}t^2e^{(5-\sqrt{\mu})t}, \\ c_2'(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{\mu}}t^2e^{(5+\sqrt{\mu})t}. \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательный неопределенный интеграл при $\alpha \neq 0, C \in \mathbb{R}$:

$$\int t^2 e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} - \int \frac{2}{\alpha} t e^{\alpha t} dt =$$
$$= \frac{1}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} - \left(\frac{2}{\alpha^2} t e^{\alpha t} - \int \frac{2}{\alpha^2} e^{\alpha t} dt \right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha^2} t e^{\alpha t} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha t} + C \equiv$$
$$\equiv I(t, \alpha) + C,$$

где

$$I(t, \alpha) = \frac{1}{\alpha} t^2 e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha^2} t e^{\alpha t} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha t}, \ \alpha \neq 0.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} c_1(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\mu}} \cdot I(t, 5 - \sqrt{\mu}) + \widetilde{C}_1, \\ c_2(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{\mu}} \cdot I(t, 5 + \sqrt{\mu}) + \widetilde{C}_2, \end{cases} , \ \mu \neq 25, \\ \begin{cases} c_1(t) = \dfrac{2}{15} t^3 + \widetilde{C}_1, \\ c_2(t) = -\dfrac{2}{5} \cdot I(t, 10) + \widetilde{C}_2, \end{cases} , \ \mu = 25. \end{array} \right. \tag{15}$$

Рассмотрим случай $\mu \neq 25$ и найдем значения $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}$.

$$\begin{cases} u(0) = c_1(0) + c_2(0) = u_0^2, \\ u(1) = c_1(1) e^{\sqrt{\mu}} + c_2(1) e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\mu}} \left(\dfrac{2}{(5 - \sqrt{\mu})^3} + \widetilde{C_1} \right) - \dfrac{2}{\sqrt{\mu}} \left(\dfrac{2}{(5 + \sqrt{\mu})^3} + \widetilde{C_2} \right) = u_0^2, \\ \dfrac{2}{\sqrt{\mu}} \left(I(1, 5 - \sqrt{\mu}) + \widetilde{C_1} \right) e^{\sqrt{\mu}} - \dfrac{2}{\sqrt{\mu}} \left(I(1, 5 + \sqrt{\mu}) + \widetilde{C_2} \right) e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = \widetilde{C_2} + \dfrac{\sqrt{\mu} u_0^2}{2} - \left(\dfrac{2}{(5 - \sqrt{\mu})^3} - \dfrac{2}{(5 + \sqrt{\mu})^3} \right) \equiv \widetilde{C_2} + M_1, \\ I(1, 5 - \sqrt{\mu}) e^{\sqrt{\mu}} - I(1, 5 + \sqrt{\mu}) e^{-\sqrt{\mu}} + (\widetilde{C_2} + M_1) e^{\sqrt{\mu}} - \widetilde{C_2} e^{-\sqrt{\mu}} = \dfrac{\sqrt{\mu} u_0^2}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = \widetilde{C_2} + M_1, \\ \widetilde{C_2} (e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}) = \dfrac{\sqrt{\mu} u_0^2}{2} - I(1, 5 - \sqrt{\mu}) e^{\sqrt{\mu}} + I(1, 5 + \sqrt{\mu}) e^{-\sqrt{\mu}} - M_1 e^{\sqrt{\mu}}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = M_2 + M_1, \\ \widetilde{C_2} = M_2, \end{cases}$$

где

$$M_1 = \frac{\sqrt{\mu} u_0^2}{2} - \left(\frac{2}{(5 - \sqrt{\mu})^3} - \frac{2}{(5 + \sqrt{\mu})^3} \right),$$
$$M_2 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \sqrt{\mu}} \left(\frac{\sqrt{\mu} u_0^2}{2} - I(1, 5 - \sqrt{\mu}) e^{\sqrt{\mu}} + I(1, 5 + \sqrt{\mu}) e^{-\sqrt{\mu}} - M_1 e^{\sqrt{\mu}} \right).$$

Подставим полученные значения в (14) и получим решение (13) при $\mu \neq 25$.

$$u(t) = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \cdot I(t, 5-\sqrt{\mu})e^{\sqrt{\mu}t} - \frac{2}{\sqrt{\mu}} \cdot I(t, 5+\sqrt{\mu})e^{-\sqrt{\mu}t} + (M_2 + M_1)e^{\sqrt{\mu}t} + M_2 e^{-\sqrt{\mu}t}. \quad (16)$$

Аналогично рассмотрим случай $\mu = 25$ при найденных значениях (15).

$$\begin{cases} u(0) = c_1(0) + c_2(0) = u_0^2, \\ u(1) = c_1(1)e^{\sqrt{\mu}} + c_2(1)e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} - \dfrac{2}{5} \cdot I(0, 10) + \widetilde{C}_2 = u_0^2, \\ \left(\dfrac{2}{15} + \widetilde{C_1}\right)e^{\sqrt{\mu}} + \left(-\dfrac{2}{5} \cdot I(1, 10) + \widetilde{C}_2\right)e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = K_1 - \widetilde{C_2}, \\ \widetilde{C_2}(e^{-\sqrt{\mu}} - e^{\sqrt{\mu}}) + \left(\dfrac{2}{15} + K_1\right)e^{\sqrt{\mu}} - \dfrac{2}{5} \cdot I(1, 10)e^{-\sqrt{\mu}} = u_0^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = K_1 + K_2, \\ \widetilde{C_2} = K_2, \end{cases}$$

где

$$K_1 = u_0^2 + \frac{2}{5} \cdot I(0, 10),$$

$$K_2 = \frac{1}{-2\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}\left(u_0^2 + \frac{2}{5} \cdot I(1, 10)e^{-\sqrt{\mu}} - \left(\frac{2}{15} + K_1\right)e^{\sqrt{\mu}}\right).$$

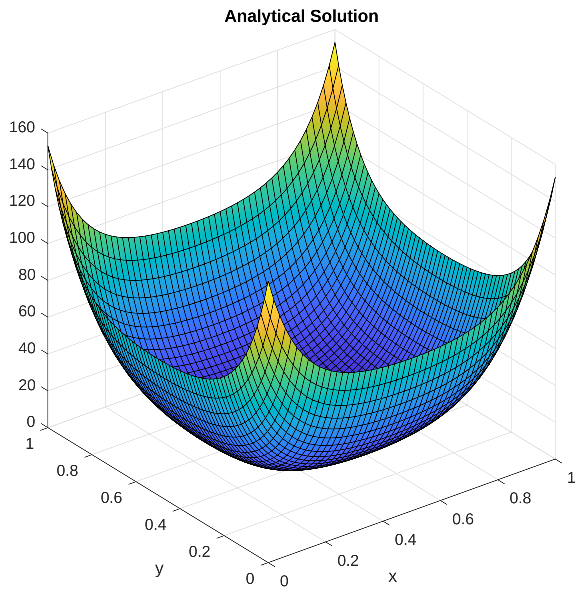
Подставим полученные значения в (14) и получим решение (13) при $\mu = 25$.

$$u(t) = \frac{2}{15}t^3 e^{\sqrt{\mu}t} - \frac{2}{5} \cdot I(t, 10)e^{-\sqrt{\mu}t} + (K_1 + K_2)e^{\sqrt{\mu}t} + K_2 e^{-\sqrt{\mu}t}. \quad (17)$$

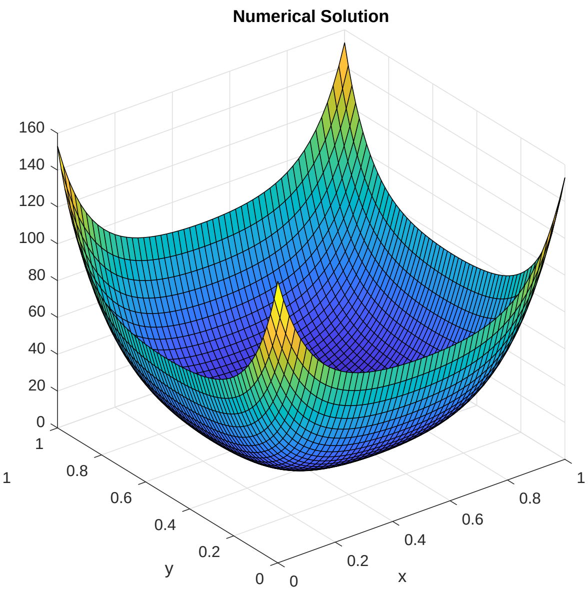
Таким образом, $u_2(y)$ определяется из (16) и (17) согласно введенным обозначениям в зависимости от значения $\mu > 0$. Тем самым, получили решение $u(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$ исходной задачи (1) с неоднородностью (10).

4 Сравнение аналитического и численного решений

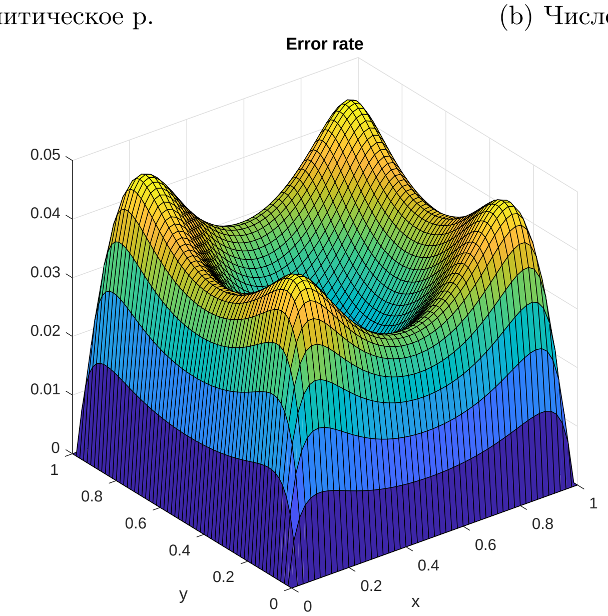
Сравним результат работы алгоритма с аналитически полученным решением исходной задачи (1) с неоднородностью (10). Погрешность вычисления задана как модуль разности двух матриц.



(a) Аналитическое р.

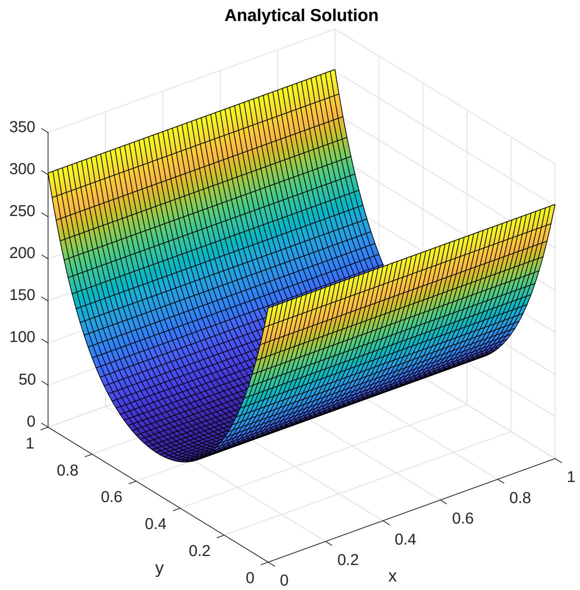


(b) Численное р.

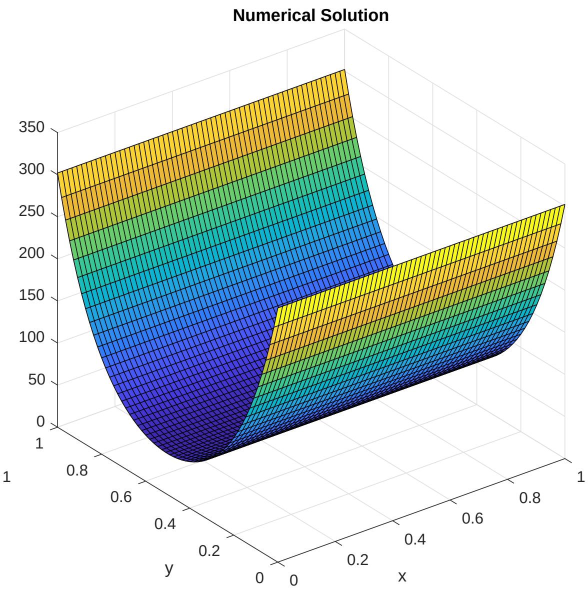


(c) Погрешность

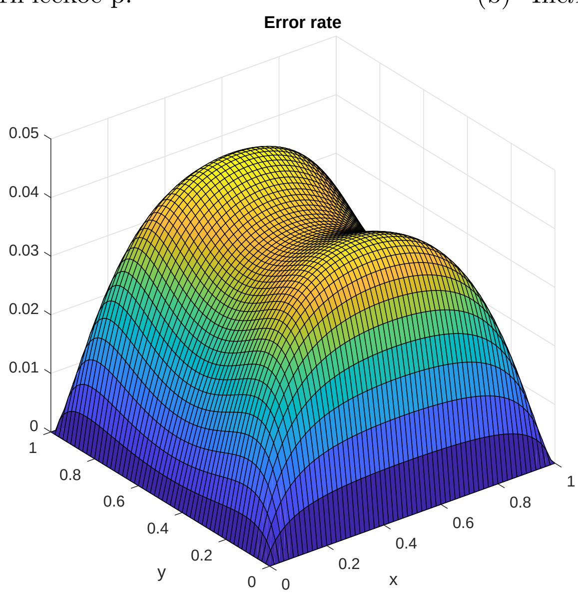
Рис. 1: Результат при $\mu = 75.2, M = 50, N = 60, u_0^1 = 72, u_0^2 = 81$.



(a) Аналитическое р.



(b) Численное р.



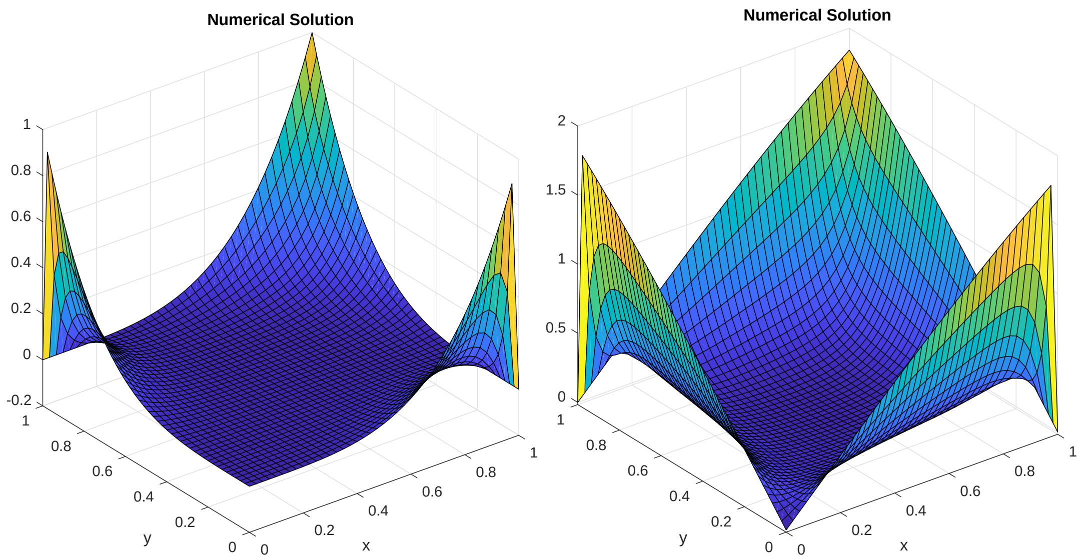
(c) Погрешность

Рис. 2: Результат при $\mu = 25, M = 60, N = 55, u_0^1 = 135, u_0^2 = 167$.

5 Результаты работы программы для некоторых функций

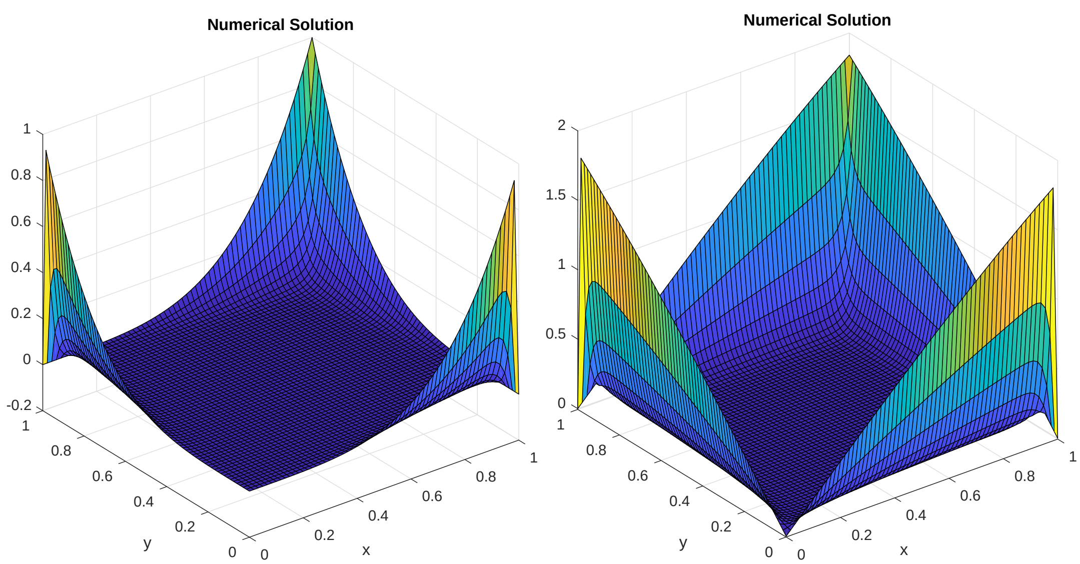
Рассмотрим $f_1(x,y) = (x^2+y^2)^2$ и $f_2(x,y) = e^{2x}\sin y + e^{2y}\sin x + x + y$. Тогда

$$\xi_1(x) = x^4,\ \ \eta_1(y) = y^4,$$
$$\xi_2(x) = \sin x + x,\ \ \eta_2(y) = \sin y + y.$$



(a) Для $f_1(x,y), \xi_1(x), \eta_1(y)$ (b) Для $f_2(x,y), \xi_2(x), \eta_2(y)$

Рис. 3: Результат при $\mu = 123, M = 40, N = 45$.



(a) Для $f_1(x,y), \xi_1(x), \eta_1(y)$ (b) Для $f_2(x,y), \xi_2(x), \eta_2(y)$

Рис. 4: Результат при $\mu = 1234, M = 60, N = 65$.

Список литературы

[1] *Денисов А. М., Разгулин А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Часть 1, 2009. — с. 75–77.