



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Построение множества достижимости нелинейной системы»

*Студент 315 группы*  
А. А. Пилюшенок

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Решение задачи</b>	<b>4</b>
2.1	Принцип максимума для задачи достижимости . . . . .	4
2.2	Применение принципа максимума . . . . .	5
2.3	Исследование стационарных точек . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Алгоритм численного решения</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Результаты работы алгоритма</b>	<b>12</b>
4.1	Эволюция множества достижимости в зависимости от $\alpha$ . . . . .	12
4.2	Эволюция множества достижимости в зависимости от времени . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Список литературы</b>	<b>14</b>

## 1 Постановка задачи

Дано ОДУ

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = u, \quad f(x, \dot{x}) = \beta x \cos(\dot{x}) - x\dot{x}, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}, u \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ .

Задан начальный момент времени  $t_0 = 0$ , начальная позиция  $x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0$ .

Необходимо построить множество достижимости  $\mathcal{X}(t, t_0, (x(t_0), \dot{x}(t_0)))$  — множество пар  $(x(t), \dot{x}(t))$ , удовлетворяющих начальному условию  $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ , в классе программных управлений в заданный момент времени  $t \geq t_0$ , а также исследовать его свойства.

Необходимо написать в среде MatLab функцию

$$[X, Y, X1, Y1, X2, T2] = \text{reachset}(\alpha, \beta, t),$$

которая по заданным параметрам  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, t \geq t_0$  рассчитывает приближенно множество достижимости управляемой системы  $\mathcal{X}(t, t_0, (x(t_0), \dot{x}(t_0)))$ . На выходе функции — шесть массивов точек:

- $X, Y$  содержат упорядоченные координаты точек многоугольника, образующего границу искомого множества;
- $X1, Y1$  содержат упорядоченные координаты линий переключений оптимального управления;
- $X2$  содержит координаты  $x$  стационарных точек замкнутой системы;
- $T2$  содержит номера подсистем (1 или 2), для которых были найдены стационарные точки.

## 2 Решение задачи

Центральным объектом отчёта является следующий объект.

**Определение.** Дана нелинейная система ОДУ  $\dot{x} = f(t, x, u), x(t_0) = x^0, t \in [t_0, t_1]$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ , функции  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}$  являются непрерывными в  $\mathbb{R}^{1+n+m}$ . Пусть  $U$  — некоторое подмножество множества всех измеримых вектор-функций на отрезке  $[t_0, t_1]$ , для каждой из которых существует решение  $x(t)$ .

Множеством достижимости  $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, t_0, x^0)$  для каждого момента времени  $t \in [t_0, t_1]$  назовём множество концов всех траекторий  $x(t)$ , соответствующих всем управлениям из  $U$ .

### 2.1 Принцип максимума для задачи достижимости

Дальнейшие выкладки опираются на следующее необходимое условие, доказанное в [3].

**Теорема 1.** Имеем автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x^0. \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, f(x, u) \in C^1(\mathbb{R}^{n+m})$  и  $\Omega$  — некоторое ограниченное замкнутое множество в  $\mathbb{R}^m$ .

Пусть далее  $U$  — множество всех измеримых управлений  $u(t)$ , удовлетворяющих ограничению  $u(t) \in \Omega$  и имеющих ограниченные решения, исходящие из точки  $x^0$ , для всех  $t \in [t_0, t_1]$ .

Пусть некоторому управлению  $\tilde{u}(t) \in U$  соответствует решение  $\tilde{x}(t)$  с концом  $\tilde{x}(t_1)$ , лежащим на границе множества достижимости, т.е.  $\tilde{x}(t_1) \in \partial\mathcal{X}(t_1, t_0, x^0)$ .

Тогда  $\exists \tilde{\psi}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} \not\equiv 0$  ( $\tilde{\psi} \neq 0$ ), непрерывно дифференцируемая и, кроме того, имеют место следующие соотношения:

1) (сопряженная система)

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, \tilde{u})}{\partial x}, \quad \mathcal{H}(\tilde{\psi}, x, u) = \langle \tilde{\psi}, f(x, u) \rangle. \quad (2)$$

2) (условие максимума)

$$\max_{u \in \Omega} \mathcal{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u) \equiv \mathcal{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) = \mathcal{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

3) (постоянство гамильтониана)

$$\text{если управление } \tilde{u}(t) \text{ — ограничено, то } \mathcal{M}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) \equiv \text{const} \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (4)$$

## 2.2 Применение принципа максимума

Рассмотрим систему 1. Сделаем замену  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ . Получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -f(x_1(t), x_2(t)) + u(t). \end{cases} \quad (5)$$

где  $u(\cdot) \in [-\alpha, \alpha]$  и  $f(x_1, x_2) = \beta x_1 \cos x_2 - x_1 x_2$ .

Для системы 5 требуется построить множество достижимости  $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, 0, (0, 0))$  — множество пар  $(x_1, x_2)$  таких, что  $t_0 = 0, x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$ , в классе программных управлений ( $u \in \mathbb{R}$ ) в заданный момент времени  $t \geq 0$ .

Сформулируем ряд утверждений, характерных для поставленной задачи.

Применим принцип максимума 1 на отрезке  $[0, t_1]$ , где  $t_1$  — фиксированное число.

Рассмотрим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-f + u).$$

Сопряженная система 2 имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}. \end{cases} \quad (6)$$

Найдем управление  $u(t)$  из условия максимума 3:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn} \psi_2(t), & \psi_2(t) \neq 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2(t) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим  $\psi_2(t) = 0$  на некотором отрезке времени. Тогда

$$\dot{\psi}_2 = 0 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_1 = 0.$$

Получили  $\psi = 0$ . Это противоречит принципу максимума. Значит, особый режим при  $\psi_2(t) = 0$  невозможен, управление  $u(t) = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2(t)$ .

Таким образом, имеем следующую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 \cos x_2 + x_1 x_2 + \alpha \operatorname{sgn} \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2 (\beta \cos x_2 - x_2), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 (-\beta x_1 \sin x_2 - x_1). \end{cases} \quad (7)$$

причём  $u(t) = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2(t)$  — ограничено, тогда в силу 4

$$\mathcal{M} = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-\beta x_1 \cos x_2 + x_1 x_2) + \alpha |\psi_2| = \text{const}.$$

**Теорема 2** (о нулях  $x_2$  и  $\psi_2$ ). Пусть  $\tau_1 < \tau_2$  и  $[\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, t_1]$ . Для системы 7 рассмотрим 4 случая.

1. Пусть

$$\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Тогда  $x_2(\tau_2) = 0$ .

2. Пусть

$$\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) \neq 0. \end{cases}$$

Тогда  $x_2(\tau_2) \neq 0$  и  $\exists \tau : (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$ .

3. Пусть

$$\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ \psi_2(\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Тогда  $\psi_2(\tau_2) = 0$ .

4. Пусть

$$\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ \psi_2(\tau_1) \neq 0. \end{cases}$$

Тогда  $\psi_2(\tau_2) \neq 0$  и  $\exists \tau : (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0$ .

*Доказательство.* Поочередно разберем случаи.

1. Рассмотрим  $\mathcal{M} \stackrel{4}{=} \text{const}$  в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \psi_1(\tau_1) \underbrace{x_2(\tau_1)}_{=0} - \underbrace{\psi_2(\tau_1)}_{=0} f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) + \underbrace{\alpha|\psi_2(\tau_1)|}_{=0} \equiv 0. \\ \mathcal{M} &= \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) - \underbrace{\psi_2(\tau_2)}_{=0} f(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) + \underbrace{\alpha|\psi_2(\tau_2)|}_{=0}. \end{aligned}$$

Имеем  $x_2(\tau_2) = 0$ , ведь  $\psi_1(\tau_1) \neq 0$  (иначе получим противоречие с принципом максимума).

2. Без ограничения общности положим  $\psi_2(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ . Аналогично прошлому пункту  $\psi_1(\tau_1) \neq 0$ ,  $\psi_1(\tau_2) \neq 0$  и

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \psi_1(\tau_1) \underbrace{x_2(\tau_1)}_{\neq 0} - \underbrace{\psi_2(\tau_1)}_{=0} f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) + \underbrace{\alpha|\psi_2(\tau_1)|}_{=0} \equiv \text{const} \neq 0. \\ \mathcal{M} &= \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) - \underbrace{\psi_2(\tau_2)}_{=0} f(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) + \underbrace{\alpha|\psi_2(\tau_2)|}_{=0} = \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2). \end{aligned}$$

Получили, что  $x_2(\tau_2) \neq 0$ . Так как  $\psi_2(t)$  — непрерывная функция, принимающая на концах отрезка  $[\tau_1, \tau_2]$  нулевые значения, имеем

$$\dot{\psi}_2(\tau_1) \cdot \dot{\psi}_2(\tau_2) < 0.$$

Подставим  $\psi_2(\tau_1)$  в 6.

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_2(\tau_1) &= -\psi_1(\tau_1) + \underbrace{\psi_2(\tau_1)}_{=0} \cdot \frac{\partial f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_2))}{\partial x_2}. \\ \dot{\psi}_2(\tau_2) &= -\psi_1(\tau_2) + \underbrace{\psi_2(\tau_2)}_{=0} \cdot \frac{\partial f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_2))}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Получим

$$\psi_1(\tau_1) \cdot \psi_1(\tau_2) < 0. \quad (8)$$

Из постоянства гамильтониана имеем

$$\mathcal{M} = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) \neq 0.$$

В силу 8 получим  $x_2(\tau_1) \cdot x_2(\tau_2) < 0$ . Так как  $x_2(t)$  — непрерывная, по теореме Вейерштрасса о промежуточных значениях  $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x(\tau) = 0$ .

3. Рассмотрим функцию  $z(t)$ :

$$z(t) = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)\frac{dx_2(t)}{dt}.$$

Она является кусочно-непрерывной, ведь  $dx_2/dt$  претерпевает разрыв в момент переключения управления. Рассмотрим  $dz(t)/dt$  в точках непрерывности  $z(t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \dot{\psi}_1 x_2 + \psi_1 \dot{x}_2 + \dot{\psi}_2 \dot{x}_2 + \psi_2 \ddot{x}_2 = \\ &= \left( \psi_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) x_2 + \psi_1(-f + u) + \left( -\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (-f + u) + \psi_2 \frac{d}{dt}(-f + u).\end{aligned}$$

Производная  $du/dt = 0$ , ведь  $u(t)$  — кусочно-постоянное. Вычислим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} (-f + u).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \psi_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \psi_1(-f + u) - \\ &\quad - \psi_1(-f + u) + \psi_2(-f + u) \frac{\partial f}{\partial x_2} - \psi_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \psi_2(f - u) \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.\end{aligned}$$

Тогда  $z(t)$  является кусочно-постоянной функцией.

Т.к. в моменты разрыва  $\psi_2(t) = 0$ , то  $z(t)$  является просто постоянной функцией.

Рассмотрим  $z(t)$  в моменты времени  $\tau_1, \tau_2$ .

$$\begin{aligned} z(\tau_1) &= \psi_1(\tau_1) \underbrace{x_2(\tau_1)}_{=0} + \underbrace{\psi_2(\tau_1)}_{=0} \frac{dx_2(\tau_1)}{dt}. \\ z(\tau_2) &= \psi_1(\tau_2) \underbrace{x_2(\tau_2)}_{=0} + \psi_2(\tau_2) \frac{dx_2(\tau_2)}{dt}. \end{aligned}$$

Из равенства  $z(\tau_1) = z(\tau_2)$  получим  $\psi_2(\tau_2)\dot{x}_2(\tau_2) = 0$ . Т.к. нули  $x_2$  изолированы, то  $\dot{x}_2(\tau_2) \neq 0$ . Следовательно,  $\psi_2(\tau_2) = 0$ .

4. Рассмотрим ту же функцию  $z(t)$ . Т.к. нули  $x_2$  изолированы, то  $\dot{x}_2(\tau_1) \neq 0, \dot{x}_2(\tau_2) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} z(\tau_1) &= \psi_1(\tau_1) \underbrace{x_2(\tau_1)}_{=0} + \underbrace{\psi_2(\tau_1)}_{\neq 0} \frac{dx_2(\tau_1)}{dt}. \\ z(\tau_2) &= \psi_1(\tau_2) \underbrace{x_2(\tau_2)}_{=0} + \psi_2(\tau_2) \frac{dx_2(\tau_2)}{dt}. \\ \implies \psi_2(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_1) &= \psi_2(\tau_2)\dot{x}_2(\tau_2). \end{aligned}$$

Т.к.  $x_2(t)$  — непрерывная,  $x(\tau_1) = x(\tau_2) = 0$ , то  $\dot{x}_2(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_2) < 0$ . Окончательно, имеем  $\psi_2(\tau_1)\psi_2(\tau_2) < 0$ . Т.к.  $\psi_2(t)$  — непрерывная, то по теореме Вейерштрасса о промежуточных значениях  $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0$ .

Таким образом, было доказано, что нули  $x_2, \psi_2$  либо совпадают, либо чередуются.  $\square$

**Утверждение 1.** *Множество достижимости обладает свойством монотонности:*

$$\forall \tau_1 \leq \tau_2 : [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, t_1] \Rightarrow \mathcal{X}(\tau_1) \subseteq \mathcal{X}(\tau_2).$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную точку из  $\mathcal{X}(\tau_1)$ . Пусть  $\bar{u}(t)$  — соответствующее ей управление. Положим

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_2 - \tau_1), \\ \bar{u}(t), & t \in [\tau_2 - \tau_1, \tau_2]. \end{cases}$$

Система 5 содержит неподвижную точку  $(0, 0)$ . Тогда управление  $\tilde{u}(t)$  соответствует некоторой точке из  $\mathcal{X}(\tau_2)$ . Конечная точка, полученная управлением  $\tilde{u}(t)$  на отрезке  $[0, \tau_2]$ , совпадёт с исходной рассматриваемой точкой из  $\mathcal{X}(\tau_1)$ .  $\square$

Разобьём 5 на две системы относительно  $u^*(t) = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2(t)$ . Систему при  $u^* \equiv \alpha$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 \cos x_2 + x_1 x_2 + \alpha. \end{cases} \quad (9)$$

обозначим как  $S^+$ . Систему при  $u^* \equiv -\alpha$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 \cos x_2 + x_1 x_2 - \alpha. \end{cases} \quad (10)$$



обозначим как  $S^-$ .

Причём сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2(\beta \cos x_2 - x_2), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2(-\beta x_1 \sin x_2 - x_1). \end{cases} \quad (11)$$

Исследуем поведение  $\psi_1(t), \psi_2(t)$  при достаточно малом времени  $t \in (0, \delta)$ .

Зафиксируем  $\psi_2(0) = 0$ . При этом  $\psi_1(0) \neq 0$ , ведь иначе получим противоречие с принципом максимума. Достаточно рассмотреть  $\psi_1(0) = \pm 1$  (сопряженная система является линейно-однородной). Так как  $\psi_2(0) = 0, x_2(0) = 0$ , то по теореме о нулях из  $x_2(\tau) = 0$  следует  $\psi_2(\tau) = 0$ , т.е. в нулях  $x_2$  происходит переключение управления.

Пусть  $\psi_1(0) = 1$ . Тогда можем выбрать  $\delta$  настолько малым, что

$$\dot{\psi}_2 = \underbrace{-\psi_1}_{\approx -1} + \underbrace{\psi_2(-\beta x_1 \sin x_2 - x_1)}_{\approx 0} < 0.$$

Следовательно  $u^*(t) = -\alpha$  на  $(0, \delta)$  и траектория эволюционирует согласно  $S^-$ . В какой-то момент времени  $x_2$  зануляется. Обозначим участок траектории до пересечения  $x_2$  с нулём за  $W^-$ .

Пусть  $\psi_1(0) = -1$ . Тогда можем выбрать  $\delta$  настолько малым, что

$$\dot{\psi}_2 = \underbrace{-\psi_1}_{\approx 1} + \underbrace{\psi_2(-\beta x_1 \sin x_2 - x_1)}_{\approx 0} > 0.$$

Следовательно  $u^*(t) = \alpha$  на  $(0, \delta)$  и траектория эволюционирует согласно  $S^+$ . В какой-то момент времени  $x_2$  зануляется. Обозначим участок траектории до пересечения  $x_2$  с нулём за  $W^+$ .

Зафиксируем  $\psi_2(0) \neq 0$ . Так как  $\psi_2(0) \neq 0, x_2(0) = 0$  то по теореме о нулях из  $x_2(\tau) = 0$  следует  $\exists \tilde{\tau} \in [0, \tau] : \psi_2(\tilde{\tau}) = 0$ . При этом  $\tilde{\tau}$  является моментом переключения.

Таким образом, на непрерывной кривой  $W^+(W^-)$  плоскости  $(x_1, x_2)$  имеется точка с координатой  $x_2 = x_2(\tilde{\tau}) : x(\tilde{\tau}) \in W^+ \cup W^-$ , в которой происходит переключение управления, траектория начинает эволюционировать согласно  $S^-(S^+)$  с начальными значениями равными конечным значениям  $x_1, x_2, \psi_1, \psi_2$ . Обозначим соответствующую непрерывную кривую за  $W_1^+(W_1^-)$ .

Далее, перебрав все такие моменты переключений  $\tilde{\tau}$  (когда обнуляется  $\psi_2$ ), можем построить

$$W = (W^+ \cup W_1^+ \cup W_2^+ \cup \dots) \cup (W^- \cup W_1^- \cup W_2^- \cup \dots).$$

Построили картину синтеза.

### 2.3 Исследование стационарных точек

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 \cos x_2 + x_1 x_2 + u. \end{cases}$$

Найдем все точки  $(x_1, x_2)$ , удовлетворяющие

$$\begin{cases} 0 = x_2, \\ 0 = -\beta x_1 \cos x_2 + x_1 x_2 + u. \end{cases}$$

При  $\beta \neq 0$  получим точки  $(u/\beta, 0)$ . При  $\beta = 0$  стационарных точек нет. Далее рассматриваем  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Как было показано ранее,  $u = \alpha$  либо  $u = -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Имеем две точки  $v_{1,2} = (\pm\alpha/\beta, 0)$ .

Рассмотрим матрицу Якоби рассматриваемой системы.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta \cos x_2 + x_2 & \beta x_2 \sin x_2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

$$J|_{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}, \quad J|_{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Исследуем собственные значения  $J|_{v_1}$ .

$$\det(J|_{v_1} - \lambda E) = \lambda^2 - \frac{\alpha}{\beta}\lambda + \beta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^3}}{2|\beta|}.$$

Пусть  $\beta \leq (\alpha/2)^{2/3}$ . Тогда при  $\beta \in (0, (\alpha/2)^{2/3}]$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^3}}{2\beta} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^3}}{2\beta} > 0.$$

Точка  $v_1$  — неустойчивый узел.

При  $\beta \in (-\infty, 0)$  имеем  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Тогда  $v_1$  — седло.

Пусть  $\beta > (\alpha/2)^{2/3}$ . Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2\beta} \pm i \frac{\sqrt{4\beta^3 - \alpha^2}}{2\beta}.$$

Точка  $v_1$  — неустойчивый фокус.

Исследуем собственные значения  $J|_{v_2}$ .

$$\det(J|_{v_2} - \lambda E) = \lambda^2 + \frac{\alpha}{\beta}\lambda + \beta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^3}}{2|\beta|}.$$

Пусть  $\beta \leq (\alpha/2)^{2/3}$ . Тогда при  $\beta \in (0, (\alpha/2)^{2/3}]$

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^3}}{2\beta} < 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^3}}{2\beta} < 0.$$

Точка  $v_2$  — устойчивый узел.

При  $\beta \in (-\infty, 0)$  имеем  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ . Тогда  $v_2$  — седло.

Пусть  $\beta > (\alpha/2)^{2/3}$ . Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm i \frac{\sqrt{4\beta^3 - \alpha^2}}{2\beta}.$$

Точка  $v_2$  — устойчивый фокус.

**Утверждение 2.** Система 5 при фиксированном параметре  $\alpha > 0$  и  $\beta \neq 0$  имеет неподвижные точки  $v_{1,2} = (\pm\alpha/\beta, 0)$ , причём

- $v_1$  — неустойчивый фокус,  $v_2$  — устойчивый фокус при  $\beta > (\alpha/2)^{2/3}$ .
- $v_1$  — неустойчивый узел,  $v_2$  — устойчивый узел при  $\beta \in (0, (\alpha/2)^{2/3}]$ .
- $v_1$  — седло,  $v_2$  — седло при  $\beta < 0$ .

### 3 Алгоритм численного решения

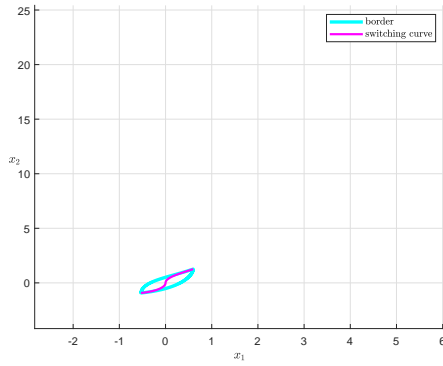
Согласно исследованию системы 1 в пункте 2.2 сформулируем алгоритм приближенного построения множества достижимости  $\mathcal{X}(t)$  на плоскости  $(x, \dot{x}) = (x_1, x_2)$ .

1. Из точки  $(0, 0)$  выпускаем две траектории согласно  $S^+, S^-$  при  $\psi_2(0) = 0$  и  $\psi_1(0) = -1, \psi_1(0) = 1$  соответственно до моментов времени  $\tau^+, \tau^- : x_2(\tau^\pm) = 0$ . Построили кривую  $W^+ \cup W^-$ .
2. Перебираем  $\tau_1 \in [0, \tau^+], \tau_2 \in [0, \tau^-]$  по сетке. Считаем, что  $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$  (происходит переключение).
3. Из точки с абсциссой  $x_2(\tau_1)$  выпускаем траекторию системы  $S^-$  при  $\psi_1(\tau_1) = -1, \psi_2(\tau_1) = 0$  до момента  $\tilde{\tau}^+ : \psi_2(\tilde{\tau}^+) = 0$ . Далее аналогично выпускаем траекторию системы  $S^+$ . Повторяем до окончания времени.
4. Из точки с абсциссой  $x_2(\tau_2)$  выпускаем траекторию системы  $S^+$  при  $\psi_1(\tau_2) = 1, \psi_2(\tau_2) = 0$  до момента  $\tilde{\tau}^- : \psi_2(\tilde{\tau}^-) = 0$ . Далее аналогично выпускаем траекторию системы  $S^-$ . Повторяем до окончания времени.
5. Собираем конечные точки построенных траекторий в массивы **X**, **Y**. В массивы **X1**, **Y1** собираем точки, которые соответствуют кривой  $W^+ \cup W^-$ .
6. Удаляем самопересечения. Вариант 1: проводим внешнюю нормаль в точке множества достижимости, пускаем луч в направлении нормали, считаем число пересечений с отрезками границы множества достижимости. Если пересечений чётное число, то нормаль направлена вовнутрь, имеется участок самопересечения (петля), удаляем точку. Вариант 2: последовательно перебираем отрезки границы множества достижимости, проверяем их на пересечение. Если пересекаются, то идём по петле, удаляем все точки, образующие петлю.
7. Сохраняем в массив **X2** точки  $\pm\alpha/\beta$ , **T2**=[1, 2].

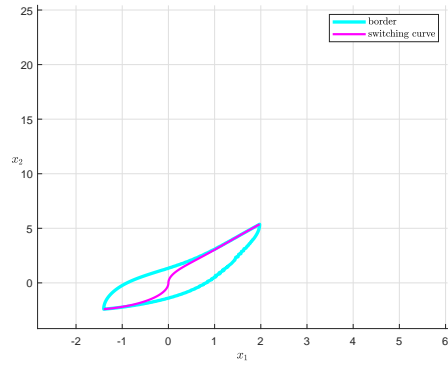
## 4 Результаты работы алгоритма

### 4.1 Эволюция множества достижимости в зависимости от $\alpha$

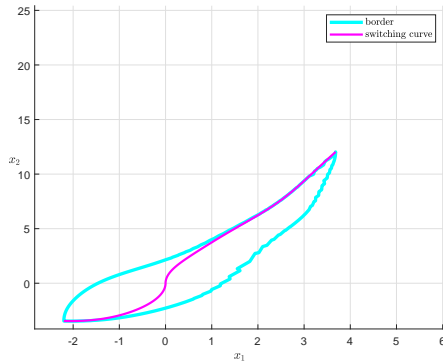
Зафиксируем  $\beta = T = 1$  и рассмотрим  $\mathcal{X}(T)$  при  $\alpha \in [1.2, 7.2]$ . На рисунке 1 продемонстрировано монотонное расширение множества достижимости в зависимости от параметра  $\alpha$ . Отметим, что при дальнейшем увеличении параметра часть кривой переключения, находящаяся в правой полуплоскости, бесконечно возрастает, что влечет за собой трудоёмкость вычисления систем дифференциальных уравнений при помощи `ode45`. В данном примере неподвижные точки не входят во внутренность множества достижимости, программа не выводит их на экран.



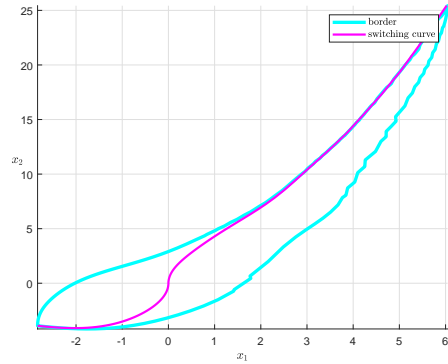
(a)  $\alpha = 1.2$



(b)  $\alpha = 3.2$



(c)  $\alpha = 5.2$

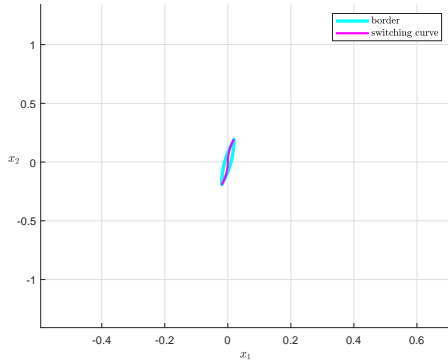


(d)  $\alpha = 7.2$

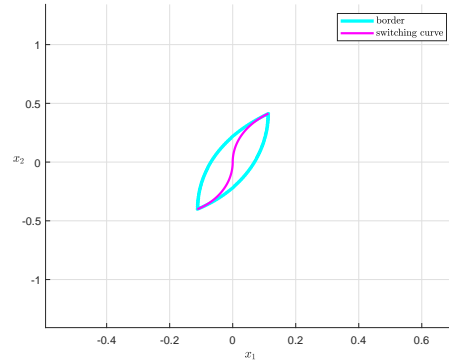
Рис. 1: Зависимость множества достижимости от параметра  $\alpha$ .

## 4.2 Эволюция множества достижимости в зависимости от времени

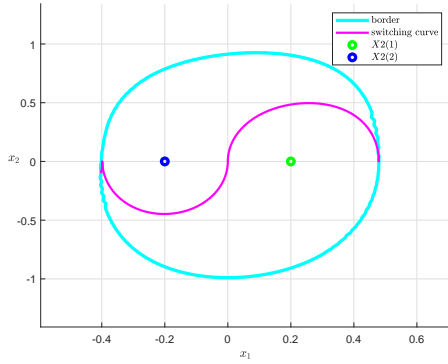
Зафиксируем  $\alpha = 1, \beta = 5$ . В данном случае  $\beta > \alpha$ , в исходной системе 5 наибольший вклад вносит часть при косинусе. Рассмотрим  $t \in [0.2, 2]$ . На рисунке 2 зелёная точка  $(\alpha/\beta, 0)$  является устойчивым фокусом, а синяя  $(-\alpha/\beta, 0)$  — неустойчивым фокусом.



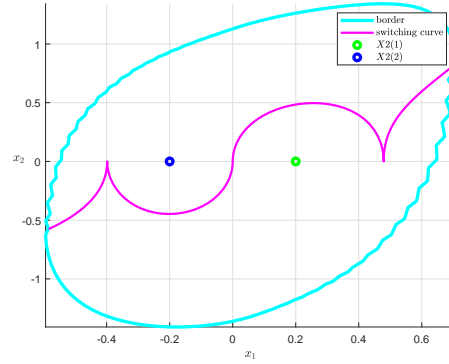
(a)  $t = 0.2$



(b)  $t = 0.5$



(c)  $t = 1.5$



(d)  $t = 2$

Рис. 2: Зависимость множества достижимости от времени с отображением неподвижных точек.

## 5 Список литературы

- [1] *Чистяков И. А. Лекции по оптимальному управлению.* 2023-2024.
- [2] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамерклизде Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.*—4-е изд.—М.: «Наука», 1983.
- [3] *Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.*—М.: «Наука», 1972.