Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

1 Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для $f(t)$ при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$, область иллюстрации $F(\lambda)$.

2 Теоретические выкладки

Встроенная в систему MATLAB функция **fft** позволяет найти дискретное преобразование Фурье на отрезке $[0, 2\pi/\Delta_t]$ функции $f(t)$, заданной на $[0, T]$, где $T = N\Delta_t$, N — число отсчетов, Δ_t — шаг дискретизации функции $f(t)$, при помощи быстрого преобразования Фурье. Полученная аппроксимация является периодической с периодом $2\pi/\Delta_t$.

Имеем функцию $f(t)$, заданную на отрезке $[a, b]$, шаг дискретизации Δ_t. Хотим получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ на заданном отрезке $[c, d]$. Пусть

$$h(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [a, b], \\ 0, \ t \notin [a, b]. \end{cases}$$

Тогда преобразование Фурье $F(\lambda)$ функции $f(t)h(t)$ примет вид

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t)e^{-i\lambda t}\, dt = \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}\, dt =$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} s = t - a \\ ds = dt \end{array} \right\} = \int_0^{b-a} f(s+a)e^{-i\lambda(s+a)}\, ds = e^{-i\lambda a}\int_0^T g(s)e^{-i\lambda s}\, ds \approx$$
$$\approx e^{-i\lambda a}\Delta_t \,\mathrm{fft}(\mathrm{g}(\cdot)),$$

где $g(s) \equiv f(s+a),\ T = b - a$. Опираясь на вышеизложенное, составим алгоритм вычисления $F(\lambda)$:

I. Вычислить $G(\lambda) = \mathrm{fft}(f(s+a)),\ s \in [0, b-a],\ \lambda = 0, \Delta_\lambda, 2\Delta_\lambda, \cdots, \frac{2\pi}{\Delta_t} - \Delta_\lambda$, где $\Delta_\lambda = 2\pi/T$.

II. С учётом выходного окна $[c, d]$ достроить $\widetilde{G}(\cdot)$ по $G(\cdot)$ с периодом $S = 2\pi/\Delta_t$, эффективно выделить только те точки, которые входят в это окно. Т.е.

   1. Найти k, n:
   $$c \in [kS, (k+1)S],\ d \in [nS, (n+1)S].$$

   2. Составить сетку
   $$\Lambda = \{\lambda_i = kS + \Delta_\lambda i,\ i = \overline{c_k, mN + c_n}\},$$
   $$c_k = \mathrm{ceil}\,\frac{c - kS}{\Delta_\lambda},$$
   $$c_n = \mathrm{floor}\,\frac{d - nS}{\Delta_\lambda},$$

   где $n - k = m$ — число периодов между точками c и d.

3. Вычислить $\widetilde{G}(\Lambda)$ с учётом c_k, c_n, m.

III. Вычислить $e^{-i\lambda a},\ \lambda \in \Lambda$.

IV. Вычислить $F(\Lambda) = e^{-i\Lambda a}\Delta_t\widetilde{G}(\Lambda)$ — искомая аппроксимация на $[c, d]$.

В итоге, имеем массивы данных $\Lambda, F(\Lambda)$ размера $mN + c_n - c_k + 1$ каждый.

3 Вычисление вручную образа Фурье

Введём вспомогательные функции:

$$\Phi(z) = \int_0^z e^{-t^2}\ dt,$$
$$\mathrm{Erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Phi(z).$$

3.1 $f(t) = te^{-2|t|-t^2}$

Исследуем образ Фурье данной функции $f(t)$ на сходимость. Рассмотрим модуль образа Фурье $|F(\lambda)|$ данной функции $f(t)$:

$$|F(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |te^{-2|t|-t^2}|\underbrace{|e^{-i\lambda t}|}_{=1}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-2|t|-t^2}\ dt$$

в силу интегрируемости $te^{-2|t|-t^2-i\lambda t}$. Полученный интеграл является интегралом от чётной функции. Интегралы на полупрямых $[0, +\infty], [-\infty, 0]$ совпадают. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-2|t|-t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} 2te^{-2t-t^2}\ dt = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-2\sqrt{x}-x}\ dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Значит, образ Фурье $F(\lambda)$ сходится абсолютно $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, что позволяет переходить к интегралу в смысле главного значения, пользоваться линейностью. Перейдём к вычислению образа Фурье.

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|-t^2}e^{-i\lambda t}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|-t^2}(\cos\lambda t - i\sin\lambda t)\ dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|-t^2}\cos\lambda t\ dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|-t^2}\sin\lambda t\ dt =$$
$$= F_1(\lambda) - iF_2(\lambda).$$

Рассмотрим интегралы $F_1(\lambda)$ — интеграл от нечётной функции, $F_2(\lambda)$ — интеграл от чётной функции:

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|-t^2}\cos\lambda t\ dt = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} te^{-2|t|-t^2}\cos\lambda t\ dt = 0,$$
$$F_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|-t^2}\sin\lambda t\ dt = 2\int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}\sin\lambda t\ dt.$$

Тогда

$$F(\lambda) = -iF_2(\lambda) = -2i\int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}\sin\lambda t\ dt. \tag{1}$$

Воспользуемся следующим соотношением:

$$-2i\sin\lambda t = e^{-i\lambda t} - e^{i\lambda t}.$$

Тогда равенство (1) после подстановки примет вид:

$$\begin{gathered} F(\lambda) = \int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}(e^{-i\lambda t} - e^{i\lambda t})\ dt = \\ = \int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}e^{-i\lambda t}\ dt - \int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}e^{i\lambda t}\ dt = \\ = \widetilde{F}(\lambda) - \widetilde{F}(-\lambda), \\ \widetilde{F}(\lambda) = \int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}e^{-i\lambda t}\ dt. \end{gathered} \tag{2}$$

Осталось вычислить $\widetilde{F}(\lambda)$.

$$\begin{gathered} \widetilde{F}(\lambda) = \int_0^{+\infty} te^{-2t-t^2}e^{-i\lambda t}\ dt = \int_0^{+\infty} te^{-(2+i\lambda)t-t^2}\ dt = \\ = \left\{\mu = 1 + i\frac{\lambda}{2}\right\} = \int_0^{+\infty} te^{-(t+\mu)^2+\mu^2}\ dt = \\ = \left\{\begin{array}{c} p = t+\mu \\ dp = dt \end{array}\right\} = e^{\mu^2}\int_\mu^{+\infty+i\frac{\lambda}{2}} (p-\mu)e^{-p^2}dp = \\ = e^{\mu^2}\int_\mu^{+\infty+i\frac{\lambda}{2}} pe^{-p^2}\ dp\ -\ \mu e^{\mu^2}\int_\mu^{+\infty+i\frac{\lambda}{2}} e^{p^2}\ dp = \\ = I_1(\lambda) - I_2(\lambda). \end{gathered} \tag{3}$$

Вычислим $I_1(\lambda), I_2(\lambda)$:

$$\begin{gathered} I_1(\lambda) = e^{\mu^2}\int_\mu^{+\infty+i\frac{\lambda}{2}} pe^{-p^2}\ dp = \left\{\begin{array}{c} s = p^2 \\ ds = 2pdp \end{array}\right\} = \\ = \frac{1}{2}e^{\mu^2}\int_{\mu^2}^{+\infty+i\infty} e^{-s}\ ds = \frac{1}{2}e^{\mu^2}\left(-e^{-s}\Big|_{\mu^2}^{+\infty}\right) = \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} I_2(\lambda) = \mu e^{\mu^2}\int_\mu^{+\infty+i\frac{\lambda}{2}} e^{p^2}\ dp = \mu e^{\mu^2}\Big(\Phi(+\infty + i\frac{\lambda}{2}) - \Phi(\mu)\Big) = \\ = \mu e^{\mu^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\mu)\right) = \\ = \left(1 + i\frac{\lambda}{2}\right)\exp\left\{1 - \frac{\lambda^2}{4} + i\frac{\lambda}{2}\right\}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(1 + i\frac{\lambda}{2})\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Подставим результаты вычислений (4), (5) в (3):

$$\widetilde{F}(\lambda) = \frac{1}{2} - \mu e^{\mu^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\mu)\right).$$

Вспомним, что $\mu = 1 + i\frac{\lambda}{2}$ и $\mu^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + i\lambda$; $\overline{\mu}$, $\overline{\mu}^2 = \overline{\mu^2}$ — комплексно сопряженное к μ число. Получим выражение для (1):

$$\begin{gathered}
F(\lambda) = -\mu e^{\mu^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\mu)\right) + \overline{\mu} e^{\overline{\mu}^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Phi(\overline{\mu})\right) = \\
= -\mu\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\mu^2}\operatorname{Erfc}(\mu) + \overline{\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\overline{\mu}^2}\operatorname{Erfc}(\overline{\mu}) = \\
= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{1-\frac{\lambda^2}{4}}\left(-\mu e^{i\lambda}\operatorname{Erfc}(\mu) + \overline{\mu} e^{-i\lambda}\operatorname{Erfc}(\overline{\mu})\right) \\
= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{1-\frac{\lambda^2}{4}}\left((1 - i\frac{\lambda}{2})e^{-i\lambda}\operatorname{Erfc}(1 - i\frac{\lambda}{2}) - (1 + i\frac{\lambda}{2})e^{i\lambda}\operatorname{Erfc}(1 + i\frac{\lambda}{2})\right). \qquad (6)
\end{gathered}$$

Итоговый результат, (6):

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{1-\frac{\lambda^2}{4}}\left((1 - i\frac{\lambda}{2})e^{-i\lambda}\operatorname{Erfc}(1 - i\frac{\lambda}{2}) - (1 + i\frac{\lambda}{2})e^{i\lambda}\operatorname{Erfc}(1 + i\frac{\lambda}{2})\right).$$

3.2 $f(t) = \operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t$

Рассмотрим образ Фурье данной функции $f(t)$ — нечётная функция. Значит, образ Фурье имеет нулевую вещественную часть $\forall\lambda \neq 0$.

$$\begin{gathered}
F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t) e^{-i\lambda t}\, dt = \\
= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t)\cos\lambda t\, dt}_{=0} - i\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t)\sin\lambda t\, dt = \\
= -i\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t)\sin\lambda t\, dt.
\end{gathered}$$

Проинтегрируем по частям: пусть $u = \operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t$, $v' = \sin\lambda t$. Тогда

$$F(\lambda) = \left(i(\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t)\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{3}{1+9t^2} - \frac{2}{1+4t^2}\right)\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\, dt. \qquad (7)$$

Вычислим необходимые значения:

$$\lim_{t\to\pm\infty} (\operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t)\frac{\cos\lambda t}{\lambda} = 0, \qquad (8)$$

$$\left(\frac{3}{1+9t^2} - \frac{2}{1+4t^2}\right) = \frac{3 + 12t^2 - 2 - 18t^2}{(1+9t^2)(1+4t^2)} = \frac{1 - 6t^2}{(1+9t^2)(1+4t^2)} \stackrel{\text{def}}{=} g(t). \qquad (9)$$

Подставим (8), (9) в (7). Тогда

$$F(\lambda) = -\frac{i}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cos\lambda t\, dt = -\frac{i}{\lambda}2\pi\operatorname{Re}\left\{i\sum_k \operatorname{res}\Big[g(t)e^{i\lambda t}, t_k\Big]\right\}, \qquad (10)$$

согласно теории вычетов функции комплексного аргумента. Отметим, что суммирование идёт по тем изолированным особым точкам, которые при $\lambda > 0$ принадлежат $\operatorname{Im} t > 0$, при $\lambda < 0$ принадлежат $\operatorname{Im} t < 0$. Исследуем особенности функции $g(t)e^{i\lambda t}$ на комлпексной плоскости.

$$g(t)e^{i\lambda t} = \frac{(1-6t^2)e^{i\lambda t}}{(1+9t^2)(1+4t^2)} = \frac{(1-6t^2)e^{i\lambda t}}{36(t+i/3)(t-i/3)(t+i/2)(t-i/2)}.$$

Точки $t_1 = -i/3,\ t_2 = i/3,\ t_3 = -i/2,\ t_4 = i/2$ являются полюсами 1-го порядка. Вычислим вычеты в данных точках.

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}[g(t)e^{i\lambda t}, t_1] = &\quad \frac{(1+2/3)e^{-\lambda/3}}{36(-2i/3)(i/6)(-5i/6)} &= -\frac{e^{-\lambda/3}}{2i},\\
\operatorname{res}[g(t)e^{i\lambda t}, t_2] = &\quad \frac{(1+2/3)e^{\lambda/3}}{36(2i/3)(5i/6)(-i/6)} &= \frac{e^{\lambda/3}}{2i},\\
\operatorname{res}[g(t)e^{i\lambda t}, t_3] = &\quad \frac{(1+3/2)e^{-\lambda/2}}{36(-i/6)(-5i/6)(-i)} &= \frac{e^{-\lambda/2}}{2i},\\
\operatorname{res}[g(t)e^{i\lambda t}, t_4] = &\quad \frac{(1+3/2)e^{\lambda/2}}{36(5i/6)(i/6)(i)} &= -\frac{e^{\lambda/2}}{2i}.
\end{aligned}$$

Подставим вычисленные значения в (10):

$$F(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\pi i}{\lambda}(e^{\lambda/3} - e^{\lambda/2}), & \lambda < 0,\\ -\dfrac{\pi i}{\lambda}(-e^{-\lambda/3} + e^{-\lambda/2}), & \lambda > 0. \end{cases}$$

Итоговый результат:

$$F(\lambda) = \frac{\pi i}{|\lambda|}(e^{|\lambda|/2} - e^{|\lambda|/3}).$$

4 Иллюстрация возникающих эффектов

4.1 Наложение спектра

Рассмотрим функцию $f(t) = te^{-2|t|-t^2}$. Продемонстрируем эффект наложения спектра, возникающий при досточном большом шаге дискретизации Δ_t. Устранить этот эффект можно посредством уменьшения Δ_t. Для сравнения с периодом $2\pi/\Delta_t$ нарисуем ранее вычисленное преобразование Фурье.

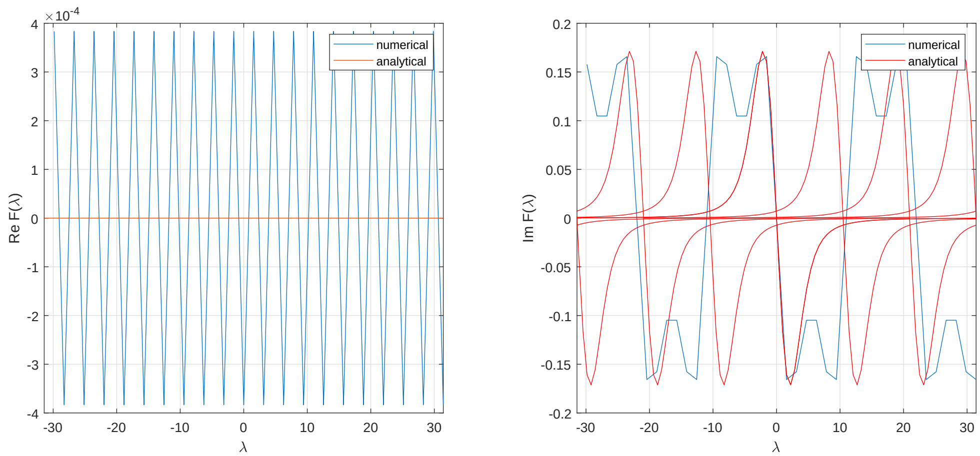

Рис. 1: Результат работы программы $\Delta_t = 0.6$, $[a, b] = [-2, 2]$, $[c, d] = [-3S, 3S]$, $S = \frac{2\pi}{\Delta_t}$.

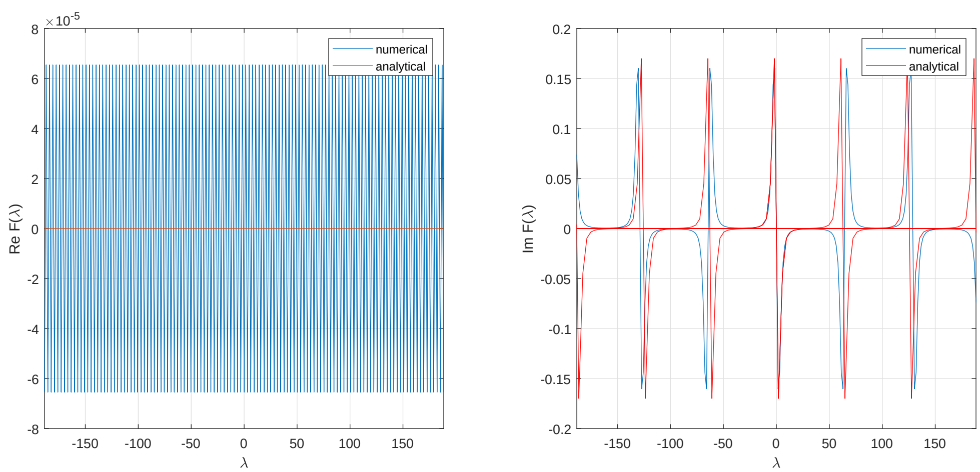

Рис. 2: Результат работы программы $\Delta_t = 0.1$, $[a, b] = [-2, 2]$, $[c, d] = [-3S, 3S]$, $S = \frac{2\pi}{\Delta_t}$.

4.2 Появление ряби

Рассмотрим функцию $f(t) = \operatorname{arctg} 3t - \operatorname{arctg} 2t$. Её спектр принимает чисто мнимые значения и разрывен в нуле, поэтому при $\lambda = 0$ появляется рябь. При изменении параметров рябь устранить невозможно.

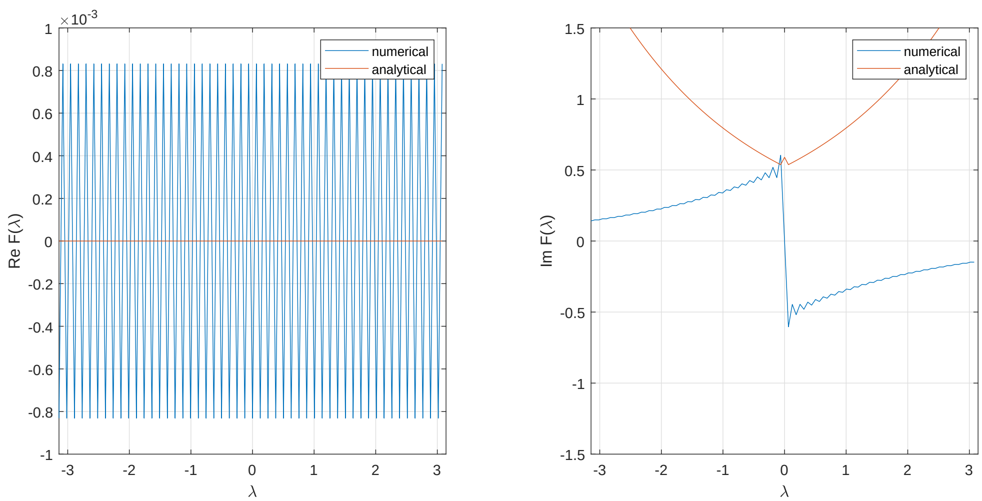

Рис. 3: Результат работы программы $\Delta_t = \frac{1}{4}$, $[a, b] = [-50, 50]$, $[c, d] = [-\frac{\pi}{4\Delta_t}, \frac{\pi}{4\Delta_t}]$.

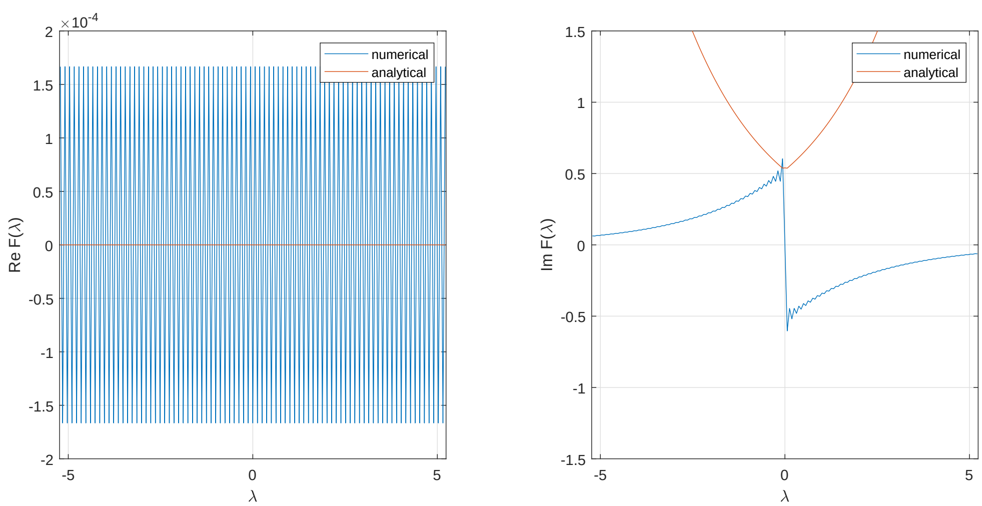

Рис. 4: Результат работы программы $\Delta_t = \frac{1}{20}$, $[a, b] = [-50, 50]$, $[c, d] = [-\frac{\pi}{12\Delta_t}, \frac{\pi}{12\Delta_t}]$.

Список литературы

[1] *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной, 6-е изд. ФИЗМАТЛИТ, 2005. — с. 135–142.