Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задача управления ракетой»

Студент 315 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2024

Содержание

1 Постановка задачи

Движение ракеты в вертикальной плоскости над поверхностью планеты описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -mg + lu, \\ \dot{m} = -u, \end{cases} \tag{1}$$

где $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — её переменная масса, $g > 0$ — гравитационная постоянная, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны сгорающего топлива, $u \in [0, u_{\max}]$ — скорость подачи топлива, $u_{\max} > 0$. Кроме того, известна масса корпуса ракеты без топлива $M > 0$.

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, а также начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$.

Задача 1. Необходимо за счет выбора программного управления $u(t)$ (т.е. $u(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t$) перевести ракету на максимально возможную высоту в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы $v(T) = 0$.

Задача 2. Необходимо за счет выбора программного управления $u(t)$ (т.е. $u(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t$) перевести ракету на заданную высоту $H > 0$ в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы при этом минимизировать функционал

$$J[u(\cdot)] = \int_0^T (u^2(t) + \alpha u(t))dt, \quad \alpha > 0.$$

Замечание. В начальный момент времени ракета находится на поверхности Земли и двигаться "вниз"не может (данный вариант можно не рассматривать).

Замечание. В каждый момент времени масса ракеты с топливом m не должна быть меньше массы ракеты без топлива M. В случае, если топливо заканчивается, двигатель ракеты отключается.

2 Теоретические сведения

2.1 Постановка общей задачи

Задана, вообще говоря, нелинейная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{2}$$

где $x(\cdot), f(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \subset \mathcal{P} \in \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{P}$ — замкнутое множество, и функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности переменных (x, u) и непрерывно дифференцируема по вектору переменных x.

Заданы начальное и конечное множества $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$, которые являются гладкими многообразиями, и начальные условия

$$x(t_0) = x^0 \in \mathcal{X}_0, \quad x(t_1) = x^1 \in \mathcal{X}_1 \tag{3}$$

при фиксированном времени t_0, свободном конечном времени t_1, начальном и конечном условиях x^0, x^1.

Ставится задача минимизации функционала

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \ \to \ \inf_{u \in \mathcal{P}}, \tag{4}$$

где $f^0(x, u)$ имеет те же ограничения, что и функция $f(x, u)$, и квадратными скобками обозначается главная (рассматриваемая нами) зависимость (при этом сам функционал может зависеть от других переменных и постоянных).

Таким образом, необходимо найти оптимальное время t_1^*, оптимальное управление $u^*(t)$ и соответствующую оптимальную траекторию $x^*(t)$ системы (2), которая переводит некоторую точку x^0 из $\mathcal{X}_0$ в некоторую точку x^1 из $\mathcal{X}_1$, чтобы при этом достигался минимум функционала (4).

2.2 Принцип максимума Понтрягина

Введём следующие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \quad f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T,$$
$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T, \quad x^1 = (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1)^T;$$

и новую переменную, отвечающую за значение функционала (4):

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau.$$

Переменная $x_0(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\dot{x_0}(t) = f^0(x(t), u(t)), \quad x_0(t_0) = 0, \quad x_0(t_1) = J[u(\cdot)] \equiv J.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x_0}(t) = f^0(x(t), u(t)), \\ \dot{x_1}(t) = f_1(x(t), u(t)), \\ \dot{x_n}(t) = f_2(x(t), u(t)), \\ \cdots \\ \dot{x_n}(t) = f_n(x(t), u(t)). \end{cases} \iff \dot{\overline{x}}(t) = \overline{f}(x(t), u(t)),$$

где $\overline{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)^T$, $\overline{f} = (f^0, f_1, \cdots, f_n)^T$.

Согласно описанной выше формулировке, вектор переменных $\overline{x}$ удовлетворяет условиям:

$$\overline{x}(t_0) = (0, x_1^0, \cdots, x_n^0)^T, \quad \overline{x}(t_1) = (J, x_1^1, \cdots, x_n^1)^T.$$

Введём вектор сопряженных переменных $\psi(\cdot) \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)^T;$$

и расширенный вектор сопряженных переменных $\overline{\psi}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\overline{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)^T.$$

Введём *функцию Гамильтона-Понтрягина*:

$$\overline{\mathcal{H}}(x(t),\overline{\psi}(t),u(t)) := \left\langle \overline{\psi}(t),\overline{f}(x(t),u(t))\right\rangle \equiv \left\langle \overline{\psi},\overline{f}\right\rangle = \psi_0 f^0 + \langle \psi, f\rangle\,;$$

и *гамильтониан*:

$$\overline{\mathcal{M}}(x(t),\overline{\psi}(t)) = \sup_{u\in\mathcal{P}} \overline{\mathcal{H}}(x(t),\overline{\psi}(t),u),\ \dot{\forall} t.$$

Справедливо следующее необходимое условие оптимальности.

Теорема 1 (принцип максимума Понтрягина)**.** *Пусть* $\{x^*(t),u^*(t)\}$ *— оптимальная пара* (2),(3),(4) *при* $t\in[t_0,t_1^*]$. *Тогда* $\exists\ \overline{\psi^*}(\cdot):[t_0,t_1^*]\to\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{\psi^*}\not\equiv 0$, *непрерывно дифференцируемая и, кроме того, имеют место следующие соотношения:*

1) (сопряженная система)

$$\dot{\overline{\psi^*}} = -\frac{\partial\overline{\mathcal{H}}}{\partial\overline{x}}\bigg|_{\substack{x(\cdot)\,=\,x^*(\cdot)\\ \overline{\psi}(\cdot)\,=\,\overline{\psi^*}(\cdot)\\ u(\cdot)\,=\,u^*(\cdot)}}. \tag{5}$$

2) (условие максимума)

$$\sup_{u\in\mathcal{P}} \overline{\mathcal{H}}(x^*(t),\overline{\psi^*}(t),u) = \overline{\mathcal{H}}(x^*(t),\overline{\psi^*}(t),u^*(t)),\ \dot{\forall} t. \tag{6}$$

3) (постоянство гамильтониана и ψ_0^**)*

$$\psi_0^* = const \leqslant 0,\quad \overline{\mathcal{M}}(\overline{\psi^*}(t),x^*(t)) \equiv 0 \text{ для почти всех } t. \tag{7}$$

4) (условие трансверсальности на правом конце)

$$\psi^*(t_1^*)\perp T_{x^*(t_1^*)}\mathcal{X}_1. \tag{8}$$

(и условие трансверсальности на левом конце)

$$\psi^*(t_0)\perp T_{x^*(t_0)}\mathcal{X}_0. \tag{9}$$

где $T_x\mathcal{X}_0, T_x\mathcal{X}_1$ *— касательные подпространства в точке* x *множеств* $\mathcal{X}_0$ *и* $\mathcal{X}_1$ *соответственно.*

Замечание 1.1 (о свойствах и упрощениях)**.** *Сопряженная система является линейно-однородной относительно* $\overline{\psi}$, *вектор сопряженных переменных определён с точностью до умножения на константу, что позволяет рассматривать* $\psi_0^* = -1$ *(нормальный случай) и* $\psi_0^* = 0$ *(анормальный случай) без ограничения общности и условие* $\overline{\psi^*}\not\equiv 0$ *можно упростить. Достаточно требовать* $\overline{\psi^*}(t)\neq 0$, $\dot{\forall} t\in[t_0,t_1^*]$ *в силу теоремы о единственности решения однородной системы ОДУ. К тому же,* $\overline{\mathcal{H}}$ *не зависит от* x_0, *что позволяет вынести из рассмотрения уравнение* $\dot{\psi}_0^* = \frac{\partial\overline{\mathcal{H}}}{\partial x_0} = 0$.

Замечание 1.2 (о переходе к фиксированному t_1)**.** *Если положить, что* t_1 *— фиксировано, то считаем, что* t_1 *— свободно, но добавим новую переменную:*

$$x_{n+1}(t_0) = t_0,\ x_{n+1}(t_1) = t_1\ \Rightarrow\ x_{n+1}(t) = t,\ \dot{x} = 1.$$

Тогда можем применить теорему к вектору $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ на отрезке $[t_0, t_1]$, причем

$$\overline{\mathcal{M}} = \sup_{u \in \mathcal{P}} (\psi_0 f^0 + \langle \psi, f \rangle + \psi_{n+1} \cdot 1) \equiv 0. \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \sup_{u \in \mathcal{P}} (\psi_0 f^0 + \langle \psi, f \rangle) \equiv \mathrm{const}\,.$$

ведь $\dot{\psi}_{n+1} = 0$. Т.е. равенство нулю гамильтониана сменяется равенством гамильтониана произвольной константе.

Замечание 1.3 (о условиях трансверсальности)**.** *Если $\mathcal{X}_0$ или $\mathcal{X}_1$ одноточечное, то соответствующее условие трансверсальности выполняется $\forall \psi$.*

3 Эквивалентная система

Рассмотрим систему (1) на фиксированном отрезке времени $[0, T]$. Перепишем её в удобной для нас формулировке, подставив $\dot{m}(t) = -u(t)$ в первое уравнение системы.

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \dfrac{u(t)}{m(t)}(v(t) + l) - g, \\ \dot{m}(t) = -u(t), \\ v(0) = 0, \ m(0) = m_0. \end{cases}$$

где $m(t) \geqslant M, \ m_0 > M > 0, \ u(t) \in [0, u_{\max}], \ \forall t \in [0, T], \ l, g > 0.$

4 Решение задачи №1

Требуется за счет выбора программного управления $u(t)$ перевести ракету на максимальную высоту в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы $v(T) = 0$.

Приведём ряд утверждений, которые помогут применить принцип максимума Понтрягина к поставленной задаче.

Утверждение 1. *Требование достижения ракетой максимальной высоты эквивалентно максимизации функционала*

$$J[u(\cdot)] = \int_0^T v(t)dt \to \max_{u \in [0, u_{\max}]}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное кусочно-непрерывное управление $u(t)$ (имеет не более чем конечное число точек разрыва). Тогда скорость и масса ракеты являются интегрируемыми по Риману функциями, что позволяет явно найти координату ракеты в вертикальной плоскости. $\square$

Утверждение 2. *Для данной задачи*

$$\mathcal{X}_0 = \{(0, m_0)\}, \quad \mathcal{X}_1 = \{(v, m) \in \mathbb{R}^2 \mid v = 0, m \in [M, m_0]\};$$
$$\textit{если } m(T) \in (M, m_0), \ \textit{то } \psi_1^*(T) \neq 0, \ \psi_2^*(T) = 0,$$
$$\textit{если } m(T) \in \{M, m_0\}, \ \textit{то } \psi_1^*(T), \psi_2^*(T) : (\psi_1^*(T))^2 + (\psi_2^*(T))^2 \neq 0;$$
$$\overline{\mathcal{M}} \equiv \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Конечное множество представляет собой отрезок при $v = 0$ на плоскости координат (v, m). Ограничения на $\psi^*(T)$ следуют из (8), с учётом того, что нормаль к внутренности отрезка $[M, m_0]$ имеет нулевую вторую координату, нормаль в граничных точках отрезка является произвольным вектором на плоскости. Отметим, что $m(T) = m_0$ соответствует тому, что ракета не взлетела (в дальнейшем отбросим этот случай). Ограничение на гамильтониан следует из замечания о переходе к фиксированному конечному времени. □

Утверждение 3 (условие взлёта)**.** *Для того, чтобы ракета имела возможность оторваться от земли, необходимо и достаточно*

$$u_{\max} > \frac{gm_0}{l}. \tag{10}$$

Доказательство. Требуем

$$\dot{v}(0) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{u(0)}{m(0)}(v(0) + l) - g > 0.$$

Воспользуемся начальными условиями и получим

$$u(0) > \frac{gm_0}{l}.$$

Ясно, что такое возможно только при (10), и наоборот. □

Отметим, что ключевой особенностью задачи управления ракетой является ограниченность запасов топлива: управление задаёт скорость сгорания. При применении принципа максимума Л.С.Понтрягина масса $m(t)$ может принимать значения меньше M, является невозрастающей функцией ($\dot{m}(t) \leqslant 0$). Однако оптимальная масса в конечный момент времени $m^*(T)$ принимает значения из отрезка $[M, m_0]$ и также является невозрастающей. Следовательно, $m^*(t) \geqslant M$ во время полёта. Конечные значения скорости $v(T)$ и массы $m(T)$ накладывают ограничения на вектор сопряженных переменных $\overline{\psi}(t)$ согласно *Утверждению 2*.

Таким образом, искомая оптимальная траектория удовлетворяет формулировке принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Везде далее предполагаем выполненным условие взлёта (10).

4.1 Применение принципа максимума Понтрягина

Таким образом, имеем следующую задачу

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \dfrac{u(t)}{m(t)}(v(t) + l) - g, \\ \dot{m}(t) = -u(t), \\ v(0) = 0,\; v(T) = 0,\; m(0) = m_0,\; m(T) \geqslant M, \\ J = \displaystyle\int_0^T (-v(t))dt \;\to \inf_{u \in [0, u_{\max}]}, \end{cases} \tag{11}$$

где $g, l, u_{\max} > 0$, $m_0 > M > 0$, $u(t) \in [0, u_{\max}]$.

Воспользуемся принципом максимума Понтрягина на отрезке $[0, T]$. В наших обозначениях $t_0 = 0,\ t_1 = T,\ x^0 = (0, m_0)^T$ — фиксированные, вектор $x^1 \in \mathcal{X}_1$ — свободный. Всюду далее считаем $\overline{\psi^*} = \overline{\psi},\ v^* = v,\ m^* = m$.

Рассмотрим *функцию Гамильтона-Понтрягина*

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{H}} = \langle \overline{\psi}, \overline{f} \rangle = \psi_0(-v) + \psi_1\left(\frac{u}{m}(v+l) - g\right) + \psi_2(-u) = \\ = -\psi_0 v - g\psi_1 + u\left(\psi_1\left(\frac{v+l}{m}\right) - \psi_2\right),\end{aligned} \tag{12}$$

где $\psi_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$ согласно (7). Тогда из условия максимума (6)

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \psi_1\left(\dfrac{v+l}{m}\right) - \psi_2 > 0, \\ [0, u_{\max}], & \psi_1\left(\dfrac{v+l}{m}\right) - \psi_2 = 0, \\ 0, & \psi_1\left(\dfrac{v+l}{m}\right) - \psi_2 < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Согласно (12) сопряжённая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial v} = \psi_0 - \dfrac{u\psi_1}{m}, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial m} = \dfrac{u(v+l)\psi_1}{m^2}, \\ \psi_1(0) = \psi_1^0,\ \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases} \tag{14}$$

4.2 Поведение оптимальных траекторий

Обозначим выражение из левой части неравенства (13) как

$$\Phi(t) = \psi_1(t)\left(\frac{v(t)+l}{m(t)}\right) - \psi_2(t).$$

и при $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ положим

$$\widetilde{v} = v(\tau_1), \quad \widetilde{m} = m(\tau_1), \quad \widetilde{\psi}_1 = \psi_1(\tau_1), \quad \widetilde{\psi}_2 = \psi_2(\tau_1).$$

Нас интересует, какие значения может принимать управление при начале полёта ракеты, в течение полёта, при завершении полёта и при остановке в конечный момент времени.

Для ответа на поставленный вопрос проведем первоначальное исследование на произвольном отрезке времени $[\tau_1, \tau_2]$ поведения траекторий, удовлетворяющих (11), (14) в зависимости от значений управления $u^*(t)$.

Назовём соответствующие случаи как

- $\Phi(t) > 0$ — режим максимального ускорения (МУ);
- $\Phi(t) = 0$ — особый режим (ОР);
- $\Phi(t) < 0$ — режим отсутствия влияния (ОВ).

4.2.1 Отсутствие влияния, $\Phi(t) < 0$

В данном случае $u^*(t) = 0$ при $t \in [\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ и системы (11), (14) принимают вид

$$\begin{cases} \dot v = -g, & v(\tau_1) = \widetilde{v}; \\ \dot m = 0, & m(\tau_1) = \widetilde{m}; \\ \dot\psi_1 = \psi_0, & \psi_1(\tau_1) = \widetilde{\psi}_1; \\ \dot\psi_2 = 0, & \psi_2(\tau_1) = \widetilde{\psi}_2. \end{cases} \iff \begin{cases} v(t) = \widetilde{v} - g(t - \tau_1), \\ m(t) = \widetilde{m}, \\ \psi_1(t) = \widetilde{\psi}_1 + \psi_0(t - \tau_1), \\ \psi_2(t) = \widetilde{\psi}_2. \end{cases} \tag{15}$$

Данный случай имеет физическую интерпретацию. Ракета движется лишь под действием силы тяжести, двигатель отключен, масса не меняется.

Условие $\Phi(t) < 0$ накладывает ограничения на вектор начальных переменных

$$(\widetilde{\psi}_1 + \psi_0(t - \tau_1))\frac{\widetilde{v} - g(t - \tau_1) + l}{\widetilde{m}} - \widetilde{\psi}_2 < 0 \;\forall t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Т.к. $\psi_1(t)$ невозрастает и $v(t)$ убывает, то достаточно выполнения $\Phi(\tau_1) < 0$:

$$\Phi(\tau_1) < 0 \iff \widetilde{\psi}_1 \frac{\widetilde{v} + l}{\widetilde{m}} - \widetilde{\psi}_2 < 0.$$

Отметим, что как только по мере полёта ракеты $\Phi(t) < 0$, то $\Phi(t) < 0$ и $u^*(t) = 0$ вплоть до конца полёта. Т.е. дальнейшие переключения невозможны.

Пусть $\tau_1 = 0$. Тогда аналитически имеем, что ракета летит вниз на самом старте. Такой случай не удовлетворяет постановке задачи, аналитически он заведомо не оптимальный (пользуемся физическими соображениями: в самом начале высота ракеты становится меньше нуля, потребуется больше топлива, чтобы вернуть её в исходное положение).

Пусть $\tau_2 = T, v(T) = 0$. Если $m(T) > M$, то из *Утверждения 2* имеем дополнительные ограничения

$$\widetilde{v} = g(T - \tau_1), \quad \widetilde{\psi}_2 = 0, \quad \widetilde{\psi}_1 + \psi_0(T - \tau_1) \neq 0. \tag{16}$$

и, если $m(T) = \widetilde{m} = M$, то $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2$ — одновременно не равны нулю и $\widetilde{v} = g(T - \tau_1)$.

Таким образом, чтобы оптимальная траектория завершилась в данном режиме, необходимо достичь указанные значения $\tau_1, \widetilde{v}, \widetilde{\psi}_2$ или $\widetilde{v}, \widetilde{m}$ до переключения в режим отсутствия влияния в момент времени τ_1.

4.2.2 Особый режим, $\Phi(t) = 0$

Рассмотрим особый режим на отрезке времени $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$:

$$\Phi(t) \equiv 0, \quad u^*(t) \in [0, u_{\max}]. \tag{17}$$

Продифференцируем $\Phi(t)$ и подставим (11), (14):

$$\begin{aligned} \dot\Phi &= \dot\psi_1 \frac{v + l}{m} + \psi_1 \frac{\dot v m - \dot m(v + l)}{m^2} - \dot\psi_2 = \\ &= \left(\psi_0 - \frac{u\psi_1}{m}\right)\frac{v + l}{m} + \psi_1 \frac{2u(v + l) - mg}{m^2} - \frac{u\psi_1(v + l)}{m^2} = \\ &= \psi_0 \frac{v + l}{m} \underbrace{- \frac{u\psi_1(v + l)}{m^2} + \frac{2u\psi_1(v + l)}{m^2} - \frac{u\psi_1(v + l)}{m^2}}_{=0} - \frac{g\psi_1}{m} = \\ &= \psi_0 \frac{v + l}{m} - \frac{g\psi_1}{m} \equiv 0 \xLeftrightarrow{m \geqslant M > 0} \psi_1(t) = \frac{\psi_0}{g}(v(t) + l). \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, получили явное значение сопряженной переменной $\psi_1(t)$.

Рассмотрим анормальный случай ($\psi_0 \equiv 0$). Тогда согласно (18): $\psi_1(t) \equiv 0$. Подставим в (17), получим $\psi_2(t) \equiv 0$. Значит, $\overline{\psi}(t) = 0$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, что противоречит принципу максимума.

Таким образом, если оптимальное управление находилось в особом режиме на некотором отрезке времени, то $\psi_0 < 0$. Далее рассмотрим только такие значения ψ_0.

Приравняем производные $\psi_1(t)$ из (18) и (14).

$$\dot{\psi}_1 \overset{(18)}{=} \frac{\psi_0}{g}\dot{v} \overset{(11)}{=} \frac{\psi_0}{g}\left(\frac{u}{m}(v+l) - g\right) = \frac{\psi_0 u}{mg}(v+l) - \psi_0 \overset{(14)}{=} \psi_0 - \frac{u\psi_1}{m}.$$

Сделаем замену $(18) = \psi_1$.

$$\frac{u\psi_1}{m} - \psi_0 = \psi_0 - \frac{u\psi_1}{m}. \xRightarrow{\text{если } \psi_1 \neq 0} u(t) = \frac{\psi_0 m(t)}{\psi_1(t)}. \tag{19}$$

Получили явное выражение для управления $u(t)$ в особом режиме. Отметим, что нужно следить за условиями $u(t) \in [0, u_{\max}]$, $\psi_1(t) \neq 0$ (что равносильно $v(t) \neq -l$).

Допустим $\psi_1(t) \neq 0$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ и $u(t) \in (0, u_{\max})$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда (11), (14) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{\psi_0}{\psi_1}(v+l) - g \overset{(18)}{=} g - g = 0, \\ \dot{m} = -\dfrac{\psi_0 m}{\psi_1}, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_0 - \dfrac{\psi_0 m}{\psi_1} \cdot \dfrac{\psi_1}{m} = \psi_0 - \psi_0 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_0 m}{\psi_1 m^2} \cdot \dfrac{g\psi_1}{\psi_0} \cdot \psi_1 = \dfrac{g\psi_1}{m}. \end{cases} \iff \begin{cases} v \equiv \widetilde{v}, \\ m(t) = \widetilde{m} \exp\{-\dfrac{\psi_0}{\widetilde{\psi}_1}(t-\tau_1)\}, \\ \psi_1 \equiv \widetilde{\psi}_1, \\ \psi_2 = \dfrac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\widetilde{m}\psi_0} \exp\{\dfrac{\psi_0}{\widetilde{\psi}_1}(t-\tau_1)\} + \widetilde{\psi}_2 - \dfrac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\widetilde{m}\psi_0}. \end{cases} \tag{20}$$

Из условий $u(t) > 0, \psi_0 < 0$ следует, что $\psi_1 = \widetilde{\psi}_1 < 0$. Следовательно $m(t)$ монотонно убывает и $\widetilde{v} > -l$. В какой-то момент времени топливо заканчивается:

$$m(t^*) = M. \iff -\frac{\psi_0}{\widetilde{\psi}_1}(t^* - \tau_1) = \ln\frac{M}{\widetilde{m}}. \iff t^* = \tau_1 + \frac{\widetilde{\psi}_1}{\psi_0}\ln\frac{\widetilde{m}}{M}. \tag{21}$$

Таким образом, при указанных допущениях в особом режиме ракета движется прямолинейно без ускорения с скоростью $\widetilde{v} > -l$, пока хватает топлива.

При каких ограничениях на $\widetilde{v}, \widetilde{m}$ выполняется условие $\Phi(\mathrm{t}) = 0,\ \forall t \in [\tau_1, \tau_2]$? Учтём $\psi_1 \equiv \widetilde{\psi}_1, v \equiv \widetilde{v}$ и воспользуемся представлением для $\psi_2(t)$:

$$\psi_2(t) = \frac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\psi_0 m(t)} + \widetilde{\psi}_2 - \frac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\widetilde{m}\psi_0}.$$

$$\Phi(t) = \widetilde{\psi}_1\frac{\widetilde{v}+l}{m(t)} - \psi_2(t) \equiv 0. \iff \{\text{привели к общему знаменателю}\} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \widetilde{\psi}_1(\widetilde{v}+l) - \dfrac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\psi_0} = 0, \\ \widetilde{\psi}_2 - \dfrac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\widetilde{m}\psi_0} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \widetilde{v} = -l + \dfrac{g\widetilde{\psi}_1}{\psi_0}. \\ \widetilde{m} = \dfrac{g\widetilde{\psi}_1^2}{\psi_0\widetilde{\psi}_2}. \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, получили условия для переключения в особый режим. Заметим, что выражение для $\widetilde{v}$ удовлетворяет (18).

Проверим условие $u(t) \in (0, u_{\max})$, согласно (19) и (22):

$$u(t) = \frac{\psi_0 m(t)}{\widetilde{\psi}_1} \leqslant \frac{\psi_0 \widetilde{m}}{\widetilde{\psi}_1} = \frac{g\widetilde{\psi}_1}{\widetilde{\psi}_2} < u_{\max}.$$

Получили дополнительные ограничения на $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2$.

Пусть $\tau_1 = 0$. Тогда $\widetilde{v} = 0$, топливо тратится только на преодоление силы тяжести, ракета не отрывается от поверхности земли. В нашей постановке данный случай эквивалентен покою ракеты в начальном положении. Вынесем его из рассмотрения, достаточно рассмотреть ту же задачу с меньшим фиксированным конечным временем так, что в начальный момент времени ракета начинает взлетать.

Пусть $\tau_2 = T$ и $m(T) > M$. Тогда в силу условия $\widetilde{v} = v(T) = 0$, т.е. необходимо достичь положение покоя (на некоторой высоте) до переключения в особый режим. Причём в силу условий трансверсальности из *Утверждения 2* $\widetilde{\psi}_1 \neq 0$, $\psi_2(T) = 0$ и (17),(18),(19) имеем

$$\widetilde{\psi}_1 = \frac{\psi_0 l}{g} \neq 0, \quad u(t) = \frac{gm(t)}{l} \overset{(10)}{<} u_{\max},$$

$$\psi_2(T) \overset{(17)}{=} \widetilde{\psi}_1 \frac{l}{m(T)} = 0. \Rightarrow \widetilde{\psi}_1 = 0.$$

Получили противоречие с условием трансверсальности: $\widetilde{\psi}_1 = \psi_1(T) \neq 0$. Значит, если $m(T) > M$, не можем закончить полёт ракеты, находясь в особом режиме, потребуется дополнительное переключение из особого режима.

Отметим, что при допустимых условиях (22) функция $\Phi(t) \equiv 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$. Пока имеется топливо ($m(t) > M$), знак $\Phi(t)$ не меняется.

Переключение в режим ОВ в момент τ_2 возможно. Положим $\widetilde{v} = g(T - \tau_1)$ и $\Phi(\tau_2 + 0) \leqslant 0$ (согласно прошлому пункту протягиваем траекторию для переключения в режим ОВ). Если $m(T) > M$, то дополнительно нужно учесть $\psi_2(\tau_2) = 0$. Если $m(T) = M$ (значит, $m(\tau_2) = M$), то дополнительных условий нет. Полученные условия позволяют численно решить задачу №1.

Возможно ли движение МУ-ОР? Предположим, что такое возможно. Тогда, как известно, в особом режиме скорость ракеты остаётся постоянной, в момент переключения скорость строго положительна, условие $v(T) = 0$ не будет выполнено. Также переключение в режим МУ невозможно.

Таким образом, необходимо совершить переключение в режим отсутствия влияния и только в него.

4.2.3 Максимальное ускорение, $\Phi(t) > 0$

Рассмотрим $\Phi(t) > 0$, $u^*(t) = u_{\max}$ на $[\tau_1, \tau_2]$. Тогда (11), (14) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{u_{\max}}{m}(v + l) - g, \\ \dot{m} = -u_{\max}, \\ \dot{\psi}_1 = \psi_0 - \dfrac{u_{\max}\psi_1}{m}, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{u_{\max}(v + l)\psi_1}{m^2}. \end{cases} \tag{23}$$

Следовательно, масса $m(t) = \widetilde{m} - u_{\max}(t - \tau_1)$. Максимальное время $t^* \in [\tau_1, \tau_2]$, которое можем пробыть в данном режиме вычисляется из условий

$$\Phi = \psi_1 \frac{v + l}{m} - \psi_2 > 0, \quad m(t) \geqslant M.$$

Вычислим скорость $v(t)$. Для начала решим линейное однородное ОДУ

$$\dot{v} = \frac{u_{\max}}{m} v. \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{u_{\max}}{m} = -\frac{dm}{m}. \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{A}{m(t)}.$$

Воспользуемся методом вариации постоянного $A \mapsto A(t)$:

$$\dot{v} = \frac{\dot{A}m + u_{\max}A}{m^2} = \frac{u_{\max}}{m}\left(\frac{A}{m} + l\right) - g. \;\Rightarrow\; \frac{\dot{A}}{m} = \frac{u_{\max}l}{m} - g. \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \dot{A}(t) = g u_{\max}(t - \tau_1) + u_{\max}l - g\widetilde{m}. \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(t) = \frac{g u_{\max}}{2}(t - \tau_1)^2 + (u_{\max}l - g\widetilde{m})(t - \tau_1) + \widetilde{A}.$$
$$v(\tau_1) = \widetilde{v} = \frac{\widetilde{A}}{\widetilde{m}}. \;\Rightarrow\; \widetilde{A} = \widetilde{v}\widetilde{m}.$$

Откуда делением в столбик получим

$$v(t) = \frac{A(t)}{m(t)} = -\frac{g}{2}(t - \tau_1) + \frac{g\widetilde{m}}{2u_{\max}} - l + \frac{(\widetilde{v} + l)\widetilde{m} - \frac{g\widetilde{m}^2}{2u_{\max}}}{\widetilde{m} - u_{\max}(t - \tau_1)}. \tag{24}$$

Вычислим $\psi_1(t)$. Для начала решим линейное однородное ОДУ

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{u_{\max}\psi_1}{m}. \;\Rightarrow\; \frac{d\psi_1}{\psi_1} = \frac{-u_{\max}dt}{m} = \frac{dm}{m}. \;\Rightarrow\; \psi_1(t) = C \cdot m(t).$$

Воспользуемся методом вариации постоянного $C \mapsto C(t)$:

$$\dot{\psi}_1 = \dot{C}m - u_{\max}C = \psi_0 - \frac{u_{\max}Cm}{m}. \;\Rightarrow\; \dot{C} = \frac{\psi_0}{m}. \;\Rightarrow\; C(t) = -\frac{\psi_0}{u_{\max}} \ln m(t) + \widetilde{C}.$$
$$\psi_1(\tau_1) = \widetilde{\psi}_1 = -\frac{\psi_0}{u_{\max}}\widetilde{m}\ln\widetilde{m} + \widetilde{C}\widetilde{m}. \;\Rightarrow\; \widetilde{C} = \frac{\widetilde{\psi}_1}{\widetilde{m}} + \frac{\psi_0}{u_{\max}} \ln\widetilde{m}.$$

Откуда

$$\psi_1(t) = -\frac{\psi_0}{u_{\max}} m(t) \ln m(t) + \left(\frac{\widetilde{\psi}_1}{\widetilde{m}} + \frac{\psi_0}{u_{\max}} \ln\widetilde{m}\right) m(t) = m(t)\left(-\frac{\psi_0}{u_{\max}} \ln m(t) + \widetilde{C}\right). \tag{25}$$

Осталось вычислить $\psi_2(t)$. Согласно (23) данная сопряженная переменная является решением ОДУ

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{u_{\max}}{m^2(t)}\left(\frac{A(t)}{m(t)} + l\right) \cdot C(t)m(t) = u_{\max}\frac{C(t)}{m(t)}\left(\frac{A(t)}{m(t)} + l\right) =$$
$$= u_{\max}\left(-\frac{\psi_0}{u_{\max}} \cdot \frac{\ln m(t)}{m(t)} + \frac{\widetilde{C}}{m(t)}\right) \cdot \left(-\frac{g}{2}(t - \tau_1) + B + \frac{D}{m(t)}\right),$$

где константы $B, D, \widetilde{C}$ равны

$$B = \frac{g\widetilde{m}}{2u_{\max}},$$
$$D = (\widetilde{v} + l)\widetilde{m} - \frac{g\widetilde{m}^2}{2u_{\max}},$$
$$\widetilde{C} = \frac{\widetilde{\psi}_1}{\widetilde{m}} + \frac{\psi_0}{u_{\max}} \ln \widetilde{m}.$$

Таким образом, ОДУ для $\psi_2(t)$ имеет вид

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{\psi_0 g}{2} \cdot \frac{(t-\tau_1)\ln m(t)}{m(t)} - \psi_0 B \frac{\ln m(t)}{m(t)} - \psi_0 D \frac{\ln m(t)}{m^2(t)} - \\ - \frac{u_{\max}\widetilde{C}g}{2} \cdot \frac{t-\tau_1}{m(t)} + \frac{u_{\max}\widetilde{C}B}{m(t)} + \frac{u_{\max}\widetilde{C}D}{m^2(t)}.$$

Вычислим $\psi_2(t)$.

$$\frac{\psi_0 g}{2} \int \frac{(t-\tau_1)\ln m(t)}{m(t)} dt = \frac{\psi_0 g}{2} \int \frac{(\frac{m(t)-\widetilde{m}}{-u_{\max}})\ln m(t)}{m(t)} \cdot \frac{dm(t)}{-u_{\max}} =$$
$$= \frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2}\left(\int \ln m dm - \widetilde{m} \int \frac{\ln m}{m} dm\right) = \frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2}\left(m(t)\ln m(t) - m(t) - \frac{\widetilde{m}}{2}\ln^2 m(t)\right) + C_1.$$

$$-\psi_0 B \int \frac{\ln m(t)}{m(t)} dt = \frac{\psi_0 B}{u_{\max}} \int \frac{\ln m}{m} dm = \frac{\psi_0 B}{2u_{\max}} \ln^2 m(t) + C_2.$$

$$-\psi_0 D \int \frac{\ln m(t)}{m^2(t)} dt = \frac{\psi_0 D}{u_{\max}} \int \frac{\ln m}{m^2} dm = -\frac{\psi_0 D}{u_{\max}}\left(\frac{\ln m(t)}{m(t)} + \frac{1}{m(t)}\right) + C_3.$$

$$-\frac{u_{\max}\widetilde{C}g}{2} \int \frac{t-\tau_1}{m(t)} dt = \frac{\widetilde{C}g}{2} \int \frac{\frac{m(t)-\widetilde{m}}{-u_{\max}}}{m(t)} dm = -\frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}}\left(m(t) - \widetilde{m}\ln m(t)\right) + C_4.$$

$$\int \frac{u_{\max}\widetilde{C}B}{m(t)} dt = -\widetilde{C}B \ln m(t) + C_5.$$

$$\int \frac{u_{\max}\widetilde{C}D}{m^2(t)} dt = \frac{\widetilde{C}D}{m(t)} + C_6.$$

Обозначим $C_0 = \sum_{k=1}^{6} C_k$. Тогда

$$\psi_2(t) = \frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2} m(t)\ln m(t) - \left(\frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2} + \frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}}\right) m(t) + \underbrace{\left(\frac{\psi_0 B}{2u_{\max}} - \frac{\psi_0 g\widetilde{m}}{4u_{\max}^2}\right)}_{=0} \ln^2 m(t) - \\ - \frac{\psi_0 D}{u_{\max}} \cdot \frac{\ln m(t)}{m(t)} + \left(\widetilde{C}D - \frac{\psi_0 D}{u_{\max}}\right)\frac{1}{m(t)} + \underbrace{\left(\frac{\widetilde{C}g\widetilde{m}}{2u_{\max}} - \widetilde{C}B\right)}_{=0} \ln m(t) + C_0 =$$
$$= \frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2} m(t)\ln m(t) - \left(\frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2} + \frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}}\right) m(t) - \frac{\psi_0 D}{u_{\max}} \cdot \frac{\ln m(t)}{m(t)} + \left(\widetilde{C}D - \frac{\psi_0 D}{u_{\max}}\right)\frac{1}{m(t)} + C_0.$$

Причем C_0 удовлетворяет

$$\psi_2(\tau_1) = \widetilde{\psi}_2, \quad m(\tau_1) = \widetilde{m}.$$

$$C_0 = \widetilde{\psi}_2 - \frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2}\widetilde{m}\ln\widetilde{m} + \left(\frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2} + \frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}}\right)\widetilde{m} + \frac{\psi_0 D}{u_{\max}} \cdot \frac{\ln\widetilde{m}}{\widetilde{m}} - \left(\widetilde{C}D - \frac{\psi_0 D}{u_{\max}}\right)\frac{1}{\widetilde{m}}.$$

Окончательно, получим $\psi_2(t)$.

$$\psi_2(t) = \widetilde{\psi}_2 - \frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2}\Big(\widetilde{m}\ln\widetilde{m} - m(t)\ln m(t)\Big) + \left(\frac{\psi_0 g}{2u_{\max}^2} + \frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}}\right)(\widetilde{m} - m(t)) +$$
$$+ \frac{\psi_0 D}{u_{\max}}\left(\frac{\ln\widetilde{m}}{\widetilde{m}} - \frac{\ln m(t)}{m(t)}\right) + \left(\widetilde{C}D - \frac{\psi_0 D}{u_{\max}}\right)\left(\frac{1}{m(t)} - \frac{1}{\widetilde{m}}\right). \quad (26)$$

Таким образом, уравнения (24), (25), (26) задают траектории систем (11), (14) при $u(t) \equiv u_{\max}$ в зависимости от $m(t) = \widetilde{m} - u_{\max}(t - \tau_1)$ на отрезке времени $[\tau_1, \tau_2]$.

Пусть $[\tau_1, \tau_2] = [0, T]$. Допустим, что у ракеты достаточно топлива, чтобы обеспечить режим максимального ускорения на протяжении всего полета. Получим противоречие с конечным условием $v(T) = 0$, ведь скорость ракеты постоянно возрастает. Таким образом, ракета не может закончить полёт в данном режиме, необходимо совершить переключение.

Если топливо ракеты кончится ($\exists t^* : \ m(t^*) = M$), то в момент времени t^* происходит переключение в режим отсутствия влияния.

Также если начальные условия таковы, что

$$\exists[\tau_1^*, \tau_2^*] : \ \Phi(t) = 0, \ \forall t \in [\tau_1^*, \tau_2^*]$$

то при данном τ_1^* происходит переключение в особый режим, из которого, как было показано ранее, нужно переключиться в режим отсутствия влияния.

Пусть $\tau_1 = 0$. Найдем ограничения на ψ_1^0, ψ_2^0. Требуем

$$\Phi(0) > 0. \iff \psi_1^0 \frac{l}{m_0} - \psi_2^0 > 0. \quad (27)$$

При указанных ограничениях имеем возможность управлять ракетой в режиме максимального ускорения вплоть до смены знака функции $\Phi(t)$.

4.3 Теорема о переключениях

Обладаем достаточной информацией для формулировки следующей теоремы.

Теорема 2 (о переключениях)**.** *Пусть $v^*(t), m^*(t), u^*(t)$ — оптимальные значения скорости, массы, управления, удовлетворяющие* (11), *при которых достигается минимум функционала*

$$J = \int_0^T (-v(t))dt.$$

Тогда максимальное число переключений $u^*(t)$ равно двум, причем оптимальное управление обладает одним из следующих свойств:

1. *$u^*(t)$ имеет единственное переключение τ, $u(t) = u_{\max}$ при $[0, \tau]$ и $u(t) = 0$ при $[\tau, T]$;*

2. $u^*(t)$ имеет два переключения τ_1 и τ_2, $u(t) = u_{\max}$ при $[0, \tau_1]$, $u(t)$ удовлетворяет (19) при $[\tau_1, \tau_2]$, $u(t) = 0$ при $[\tau_2, T]$.

Таким образом, движение ракеты происходит в режимах МУ-ОВ или МУ-ОР-ОВ.

Обозначим движение согласно первому свойству Случай №1, согласно второму свойству — Случай №2.

Получим явное представление для ограничений на начальные и конечные значения вектора сопряженных переменных для реализации численного решения задачи №1, пользуясь доказанными фактами.

4.4 Случай №1

Рассмотрим $u(t)$ вида

$$u(t) = \begin{cases} u_{\max}, & [0, \tau), \\ 0, & [\tau, T]. \end{cases}$$

где τ — время переключения из режима максимального ускорения в режим отсутствия влияния.

4.4.1 Анормальный случай, $\psi_0 = 0$

Рассмотрим $t \in [0, \tau]$ и $\psi_0 = 0$. Имеем следующую систему ОДУ

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{u_{\max}}{m}(v + l) - g, & v(0) = 0, \\ \dot{m} = -u_{\max}, & m(0) = m_0, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{u_{\max}\psi_1}{m}, & \psi_1(0) = \psi_1^0, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{u_{\max}(v + l)\psi_1}{m^2}, & \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases}$$

Согласно (24), (25), (26) при $\widetilde{v} = 0, \widetilde{m} = m_0, \widetilde{\psi}_1 = \psi_1^0, \widetilde{\psi}_2 = \psi_2^0, \tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$ решением данной системы является

$$\begin{cases} v(t) = -\dfrac{g}{2}t + B - l + \dfrac{D}{m(t)}, \\ m(t) = m_0 - u_{\max}t, \\ \psi_1(t) = \dfrac{\psi_1^0}{m_0}m(t). \\ \psi_2(t) = \psi_2^0 + \dfrac{\widetilde{C}g}{2}t + \widetilde{C}D\left(\dfrac{1}{m(t)} - \dfrac{1}{m_0}\right). \end{cases} \tag{28}$$

где константы $B, D, \widetilde{C}$ равны

$$B = \frac{gm_0}{2u_{\max}},$$

$$D = lm_0 - \frac{gm_0^2}{2u_{\max}},$$

$$\widetilde{C} = \frac{\psi_1^0}{m_0}.$$

Рассмотрим $t \in [\tau, T]$ и потребуем $m(T) > M$. Движение ракеты описывается системой (15). Дополнительные ограничения на ψ_1^0, ψ_2^0 согласно *Утверждению 2* вытекают из того, что $\Phi(t)$ — непрерывная функция (как композиция непрерывных):

$$\Phi(\tau) = 0 \iff \psi_1(\tau) \underbrace{\frac{v(\tau) + l}{m(\tau)}}_{>0} - \underbrace{\psi_2(\tau)}_{=0} = 0. \implies \psi_1(\tau) = 0. \tag{29}$$

Получили противоречие с условием (16). Оптимальная траектория не удовлетворяет требованию на массу $m(T) > M$ в данном случае.

Рассмотрим $t \in [\tau, T]$ и потребуем $m(\tau) = m(T) = M$ (сжигаем всё топливо), $v(\tau) = g(T - \tau), \Phi(\tau) = 0$:

$$\begin{gathered} \tau = \frac{m_0 - M}{u_{\max}}. \quad v(\tau) = g(T - \tau) = -\frac{g}{2}\tau + B - l + \frac{D}{M}. \\ \psi_1(\tau)\frac{g(T - \tau) + l}{M} = \psi_2(\tau). \end{gathered} \tag{30}$$

Мы могли бы вычислить ψ_1^0, ψ_2^0 и проинтегрировать сопряженную систему, однако условия трансверсальности говорят, что $\psi_1(T)$ и $\psi_2(t)$ лишь одновременно неравны нулю. Перебор здесь необязателен: можем вычислить T при котором выполняется условие $v(T) = 0$, а затем учесть полученную траекторию при отборе на оптимальную.

К тому же, высота ракеты в конечный момент времени составит

$$\begin{aligned} H = \int_0^\tau v(t)dt + \int_\tau^T (g(T - \tau) - g(t - \tau))dt = \\ = -\frac{g}{4}\tau^2 + (B - l)\tau + \frac{D}{u_{\max}} \ln \frac{m_0}{M} + \frac{g(T - \tau)^2}{2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом, при определенном параметре T и фиксированных остальных параметрах анормальный режим в Случае №1 возможен.

4.4.2 Нормальный случай, $\psi_0 = -1$

Рассмотрим $t \in [0, \tau]$ и $\psi_0 = -1$. Имеем следующую систему ОДУ

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{u_{\max}}{m}(v + l) - g, & v(0) = 0, \\ \dot{m} = -u_{\max}, & m(0) = m_0, \\ \dot{\psi}_1 = -1 - \dfrac{u_{\max}\psi_1}{m}, & \psi_1(0) = \psi_1^0, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{u_{\max}(v + l)\psi_1}{m^2}, & \psi_2(0) = \psi_2^0. \end{cases}$$

Согласно (24), (25), (26) при $\widetilde{v} = 0, \widetilde{m} = m_0, \widetilde{\psi}_1 = \psi_1^0, \widetilde{\psi}_2 = \psi_2^0, \tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$ решением данной системы является

$$\begin{cases} v(t) = -\dfrac{g}{2}t + B - l + \dfrac{D}{m(t)}, \\ m(t) = m_0 - u_{\max}t, \\ \psi_1(t) = m(t)\left(\dfrac{\ln m(t)}{u_{\max}} + \widetilde{C}\right), \\ \psi_2(t) = \psi_2^0 + \dfrac{g}{2u_{\max}^2}(m_0 \ln m_0 - m(t)\ln m(t)) + \left(\dfrac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}} - \dfrac{g}{2u_{\max}^2}\right)\overbrace{(m_0 - m(t))}^{u_{\max}t} - \\ \qquad - \dfrac{D}{u_{\max}}\left(\dfrac{\ln m_0}{m_0} - \dfrac{\ln m(t)}{m(t)}\right) + \left(\widetilde{C}D + \dfrac{D}{u_{\max}}\right)\left(\dfrac{1}{m(t)} - \dfrac{1}{m_0}\right). \end{cases} \tag{32}$$

где константы $B, D, \widetilde{C}$ равны

$$B = \frac{gm_0}{2u_{\max}},$$
$$D = lm_0 - \frac{gm_0^2}{2u_{\max}},$$
$$\widetilde{C} = \frac{\psi_1^0}{m_0} - \frac{\ln m_0}{u_{\max}}.$$

Потребуем $m(T) = m(\tau) > M$. Аналогично прошлому пункту, ссылаясь на условие (16), получим:

$$v(\tau) = g(T - \tau) \;\Leftrightarrow\; \tau = T - \frac{v(\tau)}{g}, \quad \psi_1(\tau) - (T - \tau) \neq 0, \quad \psi_2(\tau) = 0.$$

Дополнительные ограничения на ψ_1^0 вытекают из непрерывности $\Phi(t)$:

$$\Phi(\tau) = 0 \iff \psi_1(\tau)\underbrace{\frac{v(\tau) + l}{m(\tau)}}_{>0} - \underbrace{\psi_2(\tau)}_{=0} = 0. \implies \psi_1(\tau) = 0. \iff$$
$$\iff \frac{\ln m(\tau)}{u_{\max}} = -\widetilde{C} = \frac{\ln m_0}{u_{\max}} - \frac{\psi_1^0}{m_0}. \iff \boxed{\psi_1^0 = \frac{m_0}{u_{\max}} \ln \frac{m_0}{m(\tau)}.} \tag{33}$$

Таким образом, точно определили начальное значение ψ_1^0 в зависимости от момента переключения τ. По сравнению с анормальным случаем не получаем противоречие с принципом максимума в силу $\psi_0 = -1$.

Зная ψ_1^0, можем однозначно выразить значение ψ_2^0 в зависимости от момента переключения τ из условия $\psi_2(\tau) = 0$:

$$\begin{aligned} \psi_2^0 = &-\frac{g}{2u_{\max}^2}(m_0 \ln m_0 - m(\tau)\ln m(\tau)) - \left(\frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}} - \frac{g}{2u_{\max}^2}\right)u_{\max}\tau + \\ &+ \frac{D}{u_{\max}}\left(\frac{\ln m_0}{m_0} - \frac{\ln m(\tau)}{m(\tau)}\right) - \left(\widetilde{C}D + \frac{D}{u_{\max}}\right)\left(\frac{1}{m(\tau)} - \frac{1}{m_0}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Потребуем $m(T) = M$. Тогда время переключения однозначно определено: $\tau = (m_0 - M)/u_{\max}$ (необходимо потратить всё топливо).

Закончили исследование Случая №1.

4.5 Случай №2

Рассмотрим $u(t)$ вида

$$u(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \in [0, \tau_1), \\ [0, u_{\max}], & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0, & t \in [\tau_2, T]. \end{cases}$$

где τ_1 — момент времени переключения из режима максимального ускорения в особый режим, τ_2 — момент времени переключения из особого режима в режим отсутствия влияния.

Как было доказано ранее, если управление в течение полёта ракеты находилось в особом режиме, то $\psi_0 < 0$. Достаточно рассмотреть нормальный случай ($\psi_0 = -1$). Далее фиксируем $\psi_0 = -1$.

Рассмотрим $t \in [0, \tau_1]$. Аналогично Случаю №1 при $\psi_0 = -1$ получаем явный вид траекторий (32).

Рассмотрим $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Уравнения (18), (19), (20) задают управление и траектории в особом режиме. Перепишем их в удобном виде.

$$\begin{cases} v(t) = v(\tau_1), \\ m(t) = m(\tau_1) \exp\{\dfrac{1}{\psi_1(\tau_1)}(t - \tau_1)\}, \\ \psi_1(t) = -\dfrac{1}{g}(v(\tau_1) + l) \equiv \psi_1(\tau_1) = \mathrm{const}, \\ \psi_2(t) = -\dfrac{g\psi_1^2(\tau_1)}{m(\tau_1)} \exp\{-\dfrac{1}{\psi_1(\tau_1)}(t - \tau_1)\} + \psi_2(\tau_1) + \dfrac{g\psi_1^2(\tau_1)}{m(\tau_1)}, \\ u(t) = \dfrac{m(t)}{-\psi_1(\tau_1)}. \end{cases}$$

где значения $v(\tau_1), m(\tau_1), \psi_1(\tau_1), \psi_2(\tau_1)$ соответствуют значениям траекторий (32) в момент времени τ_1.

Воспользуемся условиями (22) для переключения в особый режим:

$$\begin{cases} v(\tau_1) = -l - g\psi_1(\tau_1), \\ m(\tau_1) = -g\dfrac{\psi_1^2(\tau_1)}{\psi_2(\tau_1)}. \end{cases}$$

Из первого уравнения данной системы получим

$$\psi_1(\tau_1) = -\frac{v(\tau_1) + l}{g}.$$

$$\frac{\ln m(\tau_1)}{u_{\max}} + \frac{\psi_1^0}{m_0} - \frac{\ln m_0}{u_{\max}} = -\frac{v(\tau_1) + l}{gm(\tau_1)}.$$

$$\boxed{\psi_1^0 = \frac{m_0}{u_{\max}} \ln \frac{m_0}{m(\tau_1)} - \frac{m_0}{m(\tau_1)} \frac{v(\tau_1) + l}{g}.} \tag{35}$$

Нашли зависимость $\psi_1^0(\tau_1)$. Уравнение для $m(\tau_1)$ с учетом $\psi_1^0(\tau_1)$ позволяет найти зависимость $\psi_2^0(\tau_1)$, если подставить следующее значение в (32):

$$\psi_2(\tau_1) = -g\frac{\psi_1^2(\tau_1)}{m(\tau_1)}. \tag{36}$$

Рассмотрим $t \in [\tau_2, T]$. Воспользуемся условием завершения в режиме отсутствия влияния (16) при $m(T) > M$:

$$v(\tau_2) = g(T - \tau_2), \quad \psi_1(\tau_2) - (T - \tau_2) \neq 0, \quad \psi_2(\tau_2) = 0.$$

В особом режиме скорость ракеты $v(t)$ и значение сопряженной переменной $\psi_1(t)$ не меняются:

$$v(\tau_1) \overset{(32)}{=} -\frac{g}{2}\tau_1 + B - l + \frac{D}{m(\tau_1)} = v(\tau_2) = g(T - \tau_2), \qquad \psi_1(\tau_1) = \psi_1(\tau_2). \tag{37}$$

Распишем $\psi_2(\tau_2) = 0$:

$$0 = \psi_2(\tau_2) = \underbrace{-\frac{g\psi_1^2(\tau_1)}{m(\tau_1)}}_{=\psi_2(\tau_1)} \exp\{-\frac{1}{\psi_1(\tau_1)}(\tau_2 - \tau_1)\} + \underbrace{\psi_2(\tau_1) + \frac{g\psi_1^2(\tau_1)}{m(\tau_1)}}_{=0}. \implies \tag{38}$$

$$\implies \psi_1(\tau_1) = 0. \implies v(\tau_1) = -l. \tag{39}$$

Получили, что для переключения в особый режим из режима максимального ускорения, необходимо достичь значения $v = -l < 0$, что невозможно по физическим соображениям: реактивная тяга сообщает положительную скорость. Значит, случай $m(T) > M$ можно отбросить.

Рассмотрим случай $m(T) = M$. Учтём условия $v(T) = 0, m(T) = M$ и найдем зависимость время переключения $\tau_2(\tau_1)$ согласно (16).

$$\begin{cases} g(T - \tau_2) = v(\tau_2) = v(\tau_1), \\ M = m(\tau_2) = m(\tau_1)\exp\{\dfrac{1}{\psi_1(\tau_1)}(\tau_2 - \tau_1)\}. \end{cases} \implies \begin{cases} \tau_2 = T - \dfrac{v(\tau_1)}{g}, \\ \tau_2 = \tau_1 - \psi_1(\tau_1)\ln\dfrac{m(\tau_1)}{M}. \end{cases} \tag{40}$$

где значения $v(\tau_1), m(\tau_1), \psi_1(\tau_1)$ соответствуют значениям траекторий (32) в момент времени τ_1. Заметим, что $\psi_1(\tau_1) < 0$, значит в (40) выполняется $\tau_2 > \tau_1$.

Дополнительно учтём условия (35),(36) для переключения в особый режим.

Таким образом, τ_1 однозначно определяется из (40). Решая систему (40) численно относительно τ_1, однозначно получим τ_1 и τ_2. Никаких переборов делать ненужно.

Закончили исследование Случая №2.

4.6 Алгоритм численного решения задачи

Алгоритм состоит из трёх подалгоритмов, описанных далее. Результатом каждого подалгоритма является не более чем одна траектория. Выбираем среди них ту, на которой достигается наибольшая высота H.

Объединим в Случай №1 варианты при $\psi_0 = 0$ и $\psi_0 = -1$. Мы не будем учитывать сопряженные переменные, ведь управление определяется однозначно по времени переключения, удовлетворяющему условию $v(\tau) = 0$.

4.6.1 Случай №1

1. Найти T_{opt} — наибольшее значение конечного времени, при котором выполняется условие $v(T_{\text{opt}}) = 0$. Это означает, что задача разрешима при $T:\ T \leqslant T_{\text{opt}}$.

$$T_{\text{opt}} = \frac{\tau}{2} + \left(\frac{l}{g} - \frac{m_0}{2u_{\max}}\right)\left(\frac{m_0}{M} - 1\right).$$

2. Если данное T не превосходит T_{opt}, то вычисляем момент переключения τ при помощи `fzero`:

$$-g(T-\tau) - \frac{g\tau}{2} + \left(l - \frac{gm_0}{2u_{\max}}\right)\left(\frac{m_0}{m_0 - u_{\max}\tau} - 1\right) = 0. \tag{41}$$

   Уравнение означает $v(T) = v(\tau) = 0$ (протягиваем траектории в режимах МУ и ОВ до нулевого конечного значения).

   Иначе заканчиваем обработку данного случая.

3. Интегрируем систему (11) на $[0,\tau]$ при $u(t) \equiv u_{\max}$, на $[\tau, T]$ при $u(t) \equiv 0$.

4. Вычисляем высоту H_{an} ракеты по формуле (31).

5. Вычисляем высоту H_{num} методом трапеций по полученным значениям скорости $v(t)$ при помощи `trapz`.

6. Сравниваем H_{an} и H_{num} для получения погрешности вычисления.

Вообще говоря, согласно (29) и (30) данный алгоритм вычисляет траекторию, которая является оптимальной только при некотором значении T. Тем не менее, будем учитывать полученную траекторию при отборе.

4.6.2 Случай №1, нормальный

1. Повторяем первые два пункта алгоритма 4.6.1.

2. Если $\tau < \frac{m_0 - M}{u_{\max}}$, то выполняем дальнейшие шаги, иначе алгоритм останавливается.

3. Вычисляем $m(\tau) = m_0 - u_{\max}\tau$.

4. Вычисляем ψ_1^0, ψ_2^0 по формулам (33), (34) соответственно.

5. Интегрируем (23) на $[0,\tau]$, (15) на $[\tau, T]$.

6. Вычисляем значение высоты методом трапеций по полученным значениям скорости $v(t)$ при помощи `trapz`.

7. Проверяем условия трансверсальности при $m(T) > M$ согласно *Утверждению 2*. Случай $m(T) = M$ рассматривается в пункте 4.6.1.

4.6.3 Случай №2

1. Зафиксируем $\psi_0 = -1$. Вычисляем при помощи `fzero` первый момент переключения τ_1 как решение уравнения

$$T - \frac{v(t)}{g} - t - \frac{v(t)+l}{g}\ln\frac{m(t)}{M} = 0, \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 - u_{\max}t. \\ v(t) &= -\frac{gt}{2} + \left(l - \frac{gm_0}{2u_{\max}}\right)\left(\frac{m_0}{m(t)} - 1\right). \end{aligned}$$

Все τ_1, удовлетворяющие (42), доставляют истинность условий (40) и учитывают условия для переключения в особый режим (35),(36).

Функция в левой части (42) имеет асимптоту в точке $t = \frac{m_0}{u_{\max}}$, определена при $t < \frac{m_0}{u_{\max}}$.

2. По найденному значению $\tau_1 < \frac{m_0 - M}{u_{\max}}$ вычисляем значения исходных и сопряженных функций (32) в момент времени τ_1 и используем их для вычисления ψ_2^0 по формуле:

$$\begin{aligned} \psi_2^0 = -g\frac{\psi_1^2(\tau_1)}{m(\tau_1)} - \frac{g}{2u_{\max}^2}(m_0\ln m_0 - m(\tau_1)\ln m(\tau_1)) - \left(\frac{\widetilde{C}g}{2u_{\max}} - \frac{g}{2u_{\max}^2}\right)u_{\max}\tau_1 + \\ + \frac{D}{u_{\max}}\left(\frac{\ln m_0}{m_0} - \frac{\ln m(\tau_1)}{m(\tau_1)}\right) - \left(\widetilde{C}D + \frac{D}{u_{\max}}\right)\left(\frac{1}{m(\tau_1)} - \frac{1}{m_0}\right). \end{aligned}$$

3. Вычисляем $\tau_2 = \tau_1 - \psi_1(\tau_1)\ln\frac{m(\tau_1)}{M} = T - \frac{v(\tau_1)}{g}$.

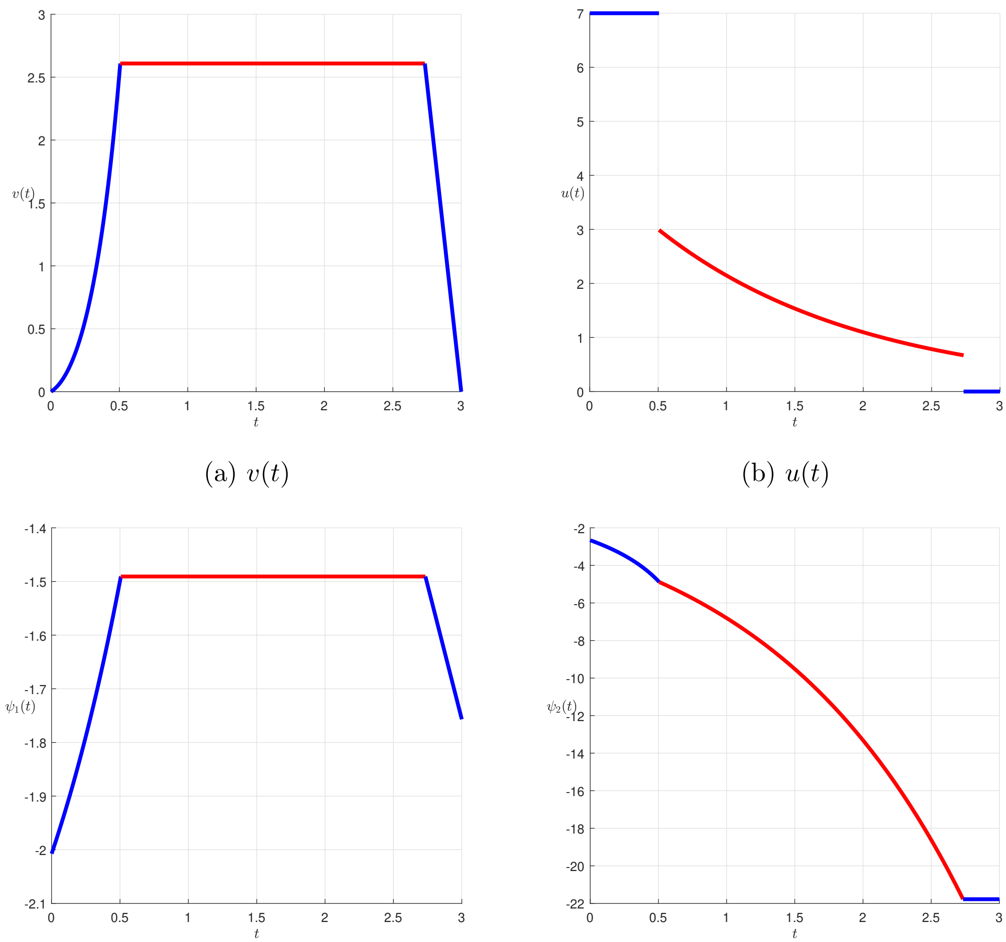
4. Интегрируем (23) на $[0, \tau_1]$, (20) на $[\tau_1, \tau_2]$, (15) на $[\tau_2, T]$.

5. Вычисляем значение высоты методом трапеций по полученным значениям скорости $v(t)$ при помощи `trapz`.

4.7 Примеры работы алгоритма

4.7.1 Пример 1

Положим $m_0 = 8, M = 1, u_{\max} = 7, g = 9.8, l = 12, T = 3$.



(a) $v(t)$ (b) $u(t)$

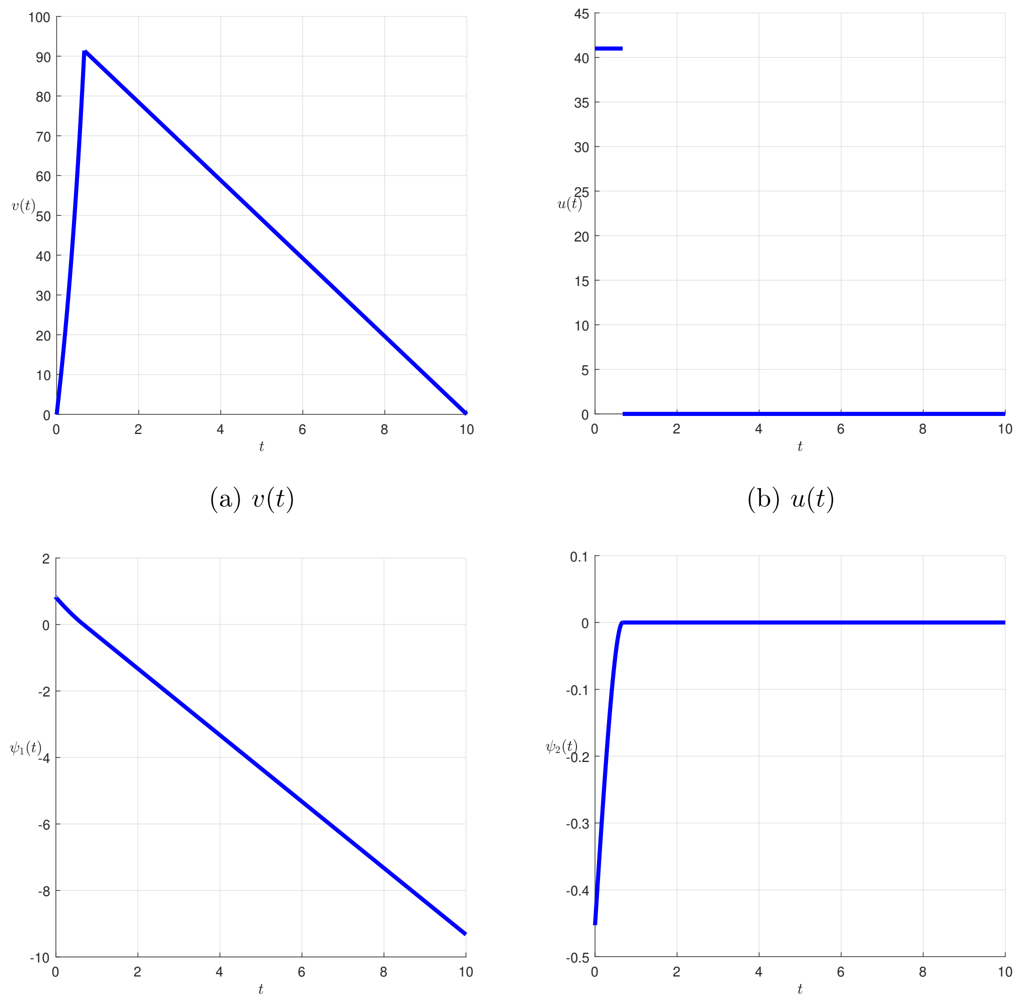
(c) $\psi_1(t)$ (d) $\psi_2(t)$

Рис. 1: Результат при $m_0 = 8, M = 1, u_{\max} = 7, g = 9.8, l = 12, T = 3$.

В данном примере оптимальная траектория была найдена в Случае №2. На рисунке 1 изображены оптимальные значения скорости $v(t)$ и управления $u(t)$, вместе с двумя сопряженными переменными $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Здесь времена переключения $\tau_1 = 0.5062, \tau_2 = 2.7338$ и достигнутая высота $H = 6.5703$. Красным выделен особый режим.

4.7.2 Пример 2

Положим $m_0 = 83, M = 5, u_{\max} = 41, g = 9.8, l = 200, T = 10$.



(a) $v(t)$

(b) $u(t)$

(c) $\psi_1(t)$

(d) $\psi_2(t)$

Рис. 2: Результат при $m_0 = 8, M = 1, u_{\max} = 7, g = 9.8, l = 12, T = 3$.

В данном примере оптимальная траектория была найдена в Случае №1. Уравнение (42) не имеет решений. На рисунке 2 изображены оптимальные значения скорости $v(t)$ и управления $u(t)$, вместе с двумя сопряженными переменными $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Здесь наибольшее конечное время $T_{\text{opt}} = 303.5283$, время переключения $\tau = 0.6732$ и достигнутая высота $H = 452.7439$.

5 Решение задачи №2

Требуется перевести ракету на заданную высоту $H > 0$ в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы при этом минимизировать функционал

$$J[u(\cdot)] = \int_0^T (u^2(t) + \alpha u(t))dt, \quad \alpha > 0.$$

Также задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$.

Введём новую переменную $h(t)$ — высота ракеты в момент времени t:

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt, \quad \dot{h}(t) = v(t), \quad h(0) = 0.$$

Дополним эквивалентную систему, получим:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \dfrac{u(t)}{m(t)}(v(t) + l) - g, \\ \dot{m}(t) = -u(t), \\ \dot{h}(t) = v(t), \\ v(0) = 0,\ m(0) = m_0,\ h(0) = 0,\ h(T) = H, \\ J[u(\cdot)] = \displaystyle\int_0^T (u^2(t) + \alpha u(t))dt \to \inf_{u(\cdot)\in[0,u_{\max}]}. \end{cases} \tag{43}$$

где $g, l, u_{\max} > 0$, $m_0 > M > 0$, $u(t) \in [0, u_{\max}]$. В дальнейшем будем рассматривать положительные значения высоты $h(t)$.

5.1 Применение принципа максимума Понтрягина

Пусть $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))^T$ — расширенный вектор сопряженных переменных, где $\psi_0(t)$ отвечает переменной

$$x_0(t) = \int_0^t (u^2(\tau) + \alpha u(\tau))d\tau, \quad \dot{x}(t) = f^0(t) = u^2(t) + \alpha u(t).$$

Вообще говоря, ракета имеет ограниченный запас топлива. Обозначим T_{end} — время сгорания всего запаса топлива. В момент T_{end} динамика системы меняется и соответствует нулевому управлению, и система однозначно интегрируется. Следовательно, траектории системы (43) в момент окончания запасов топлива должны достигнуть высоты

$$h(T_{\text{end}}) = H - v(T_{\text{end}}) \cdot (T - T_{\text{end}}) + \frac{g(T - T_{\text{end}})^2}{2}. \tag{44}$$

Применить принцип максимума Понтрягина на отрезке $[0, T]$, вообще говоря, нельзя, ведь динамика системы меняется в неизвестный момент времени.

Наискорейшее время сгорания топливо равно $\frac{m_0 - M}{u_{\max}}$. Следовательно, $T_{\text{end}} \geqslant \frac{m_0 - M}{u_{\max}}$. Далее рассмотрим 2 случая.

- $T \geqslant \frac{m_0 - M}{u_{\max}}$, т.е. полное сгорание возможно. Здесь будем рассматривать принцип максимума Понтрягина на $[0, T_{\text{end}}]$ и протягивать траекторию до момента времени T согласно (44). А именно, T_{end} — фиксировано, $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$ — точка и прямая соответственно:

$$\mathcal{X}_0 = \{(0, m_0, 0)\},$$
$$\mathcal{X}_1 = \left\{ \left(x, M, H - x(T - T_{\text{end}}) + \frac{g(T - T_{\text{end}})^2}{2} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $T < \frac{m_0 - M}{u_{\max}}$, т.е. полное сгорание невозможно. Здесь применяем принцип максимуа Понтрягина на $[0, T]$. В данном случае

$$\mathcal{X}_0 = \{(0, m_0, 0)\},$$
$$\mathcal{X}_1 = \{(v, m, h) \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R}, m \geqslant M, h = H\}.$$

Будем реализовывать алгоритм без использования условий трансверсальности (дополнительные проверки не понадобятся).

Применим принцип максимума Понтрягина, дополнительно не обговаривая смену динамики системы. В наших обозначениях $t_0 = 0,\ t_1 = T,\ x^0 = (0, m_0, 0)^T$ — фиксированные, вектор $x^1 \in \mathcal{X}_1$ — свободный. Всюду далее считаем $\overline{\psi^*} = \overline{\psi},\ v^* = v,\ m^* = m,\ h^* = h$.

Рассмотрим *функцию Гамильтона-Понтрягина.*

$$\overline{\mathcal{H}} = \langle \overline{\psi}, \overline{f} \rangle = \psi_0(u^2 + \alpha u) + \psi_1\left(\frac{u}{m}(v + l) - g\right) + \psi_2(-u) + \psi_3 v =$$
$$= \psi_0 u^2 + \left(\alpha\psi_0 + \frac{\psi_1}{m}(v + l) - \psi_2\right)u - g\psi_1 + \psi_3 v.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0(t) = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial x_0} = 0, \\ \dot{\psi}_1(t) = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial v} = -\psi_3 - \dfrac{u\psi_1}{m}, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial m} = \dfrac{u(v + l)\psi_1}{m^2} \\ \dot{\psi}_3(t) = -\dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial h} = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Получили, что $\psi_0 = \text{const} \leqslant 0, \psi_3 = \text{const}$. Вынесем ψ_0 и ψ_3 из рассмотрения.

Обозначим

$$\Phi(t) = \frac{\psi_1}{m}(v + l) - \psi_2, \quad \mathrm{P}(t) = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\Phi(t)}{2\psi_0}.$$

Пусть $\psi_0 = 0$. Из условия максимума получим оптимальное управление

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \Phi(t) > 0, \\ [0, u_{\max}], & \Phi(t) = 0, \\ 0, & \Phi(t) < 0. \end{cases} \tag{46}$$

Пусть $\psi_0 < 0$. Максимум функции Гамильтона-Понтрягина достигается в вершине параболы $-\psi_0 u^2 + (-\psi_0\alpha + \Phi)u$ с ветвями вниз, если эта вершина лежит в $[0, u_{\max}]$, иначе достигается на соответствующей границе отрезка $[0, u_{\max}]$. Таким образом, имеем

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \mathrm{P}(t) > u_{\max}, \\ \mathrm{P}(t), & \mathrm{P}(t) \in [0, u_{\max}], \\ 0, & \mathrm{P}(t) < 0. \end{cases} \tag{47}$$

5.2 Вывод алгоритма

По сравнению с прошлой задачей, перебор моментов переключения является трудоёмким. Действительно, максимальное число переключений $u^*(t)$ в случае $\psi_0 < 0$ трудно получить. Однако мы имеем точную формулу для $u^*(t)$, что позволяет численно и однозначно проинтегрировать систему

Мы реализуем алгоритм перебора начальных значений сопряженных переменных.

Получим представление для $u^*(t)$ в особом режиме ($\psi_0 = 0, \Phi(t) \equiv 0$).

$$\Phi = \frac{\psi_1}{m}(v + l) - \psi_2 \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{(\dot{\psi}_1(v+l) + \psi_1\dot{v})m - \dot{m}\psi_1(v+l)}{m^2} - \dot{\psi}_2 = \\ &= \frac{v+l}{m}\left(-\psi_3 - \frac{u\psi_1}{m}\right) + \frac{\psi_1}{m}\left(\frac{u}{m}(v+l) - g\right) + \underbrace{\frac{u\psi_1(v+l)}{m^2} - \dot{\psi}_2}_{=0} = \\ &= -\frac{1}{m}\left(\psi_3(v+l) + \psi_1 g\right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\psi_1 = -\psi_3(v+l)/g$. Вычислим производную по t и сравним с правой частью соответствующего уравнения сопряженной системы (45).

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\psi_3}{g}\dot{v} = -\frac{\psi_3 u(v+l)}{m} + \psi_3 = -\psi_3 - \frac{u\psi_1}{m}.$$

$$\boxed{u = \frac{2\psi_3 m g}{\psi_3(v+l) - \psi_1 g}.}$$

Отдельно отметим метод перебора $(\psi_0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$.

- $\psi_0 = 0$. Достаточно перебрать $(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0) \in S^3$ — единичная сфера с нулевым центром в пространстве $\mathbb{R}^3$. Введём полярные координаты. Двойным циклом перебираем полярные координаты (углы).

- $\psi_0 < 0$. Достаточно перебрать S^4. Вводим линейную сетку для $\psi_0 \in (0, 1]$. Далее параметризуем сферу с нулевым центром в пространстве $\mathbb{R}^3$ и радиусом $\sqrt{1 - \psi_0^2}$, аналогично прошлому пункту.

5.3 Алгоритм численного решения задачи

В скобках отметим шаги, которые также или заместо выполняются в случае $\psi_0 < 0$. Параметры алгоритма:

- ($K+1$ — число элементов в сетке по ψ_0.)
- $N+1$ — число элементов в сетке по полярным координатам.
- ε_{tol} — абсолютная погрешность сравнения с нулём.
- H_{tol} — абсолютная погрешность сравнения достигнутой высоты с H.

Тело алгоритма:

0. Проверить условие взлёта $u_{\max} > gm_0/l$.
1. (Создать сетку по $\psi_0 \in [\varepsilon_{\text{tol}}, 1]$.)
2. Создать двумерную сетку по полярным координатам $\varphi, \theta: \ \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. (Цикл по $\psi_{0k}, k = \overline{0, K}$.)
4. Двойной цикл по $\varphi_i, \theta_j, \ i, j = \overline{0, N}$.
5. Присваиваем $r = 1$ (или присваиваем $r = \sqrt{1 - \psi_{0k}^2}$), вычисляем сопряженные переменные:
$$\begin{cases} \psi_1^0 = r \cos\varphi_i \sin\theta_j, \\ \psi_2^0 = r \sin\varphi_i \sin\theta_j, \\ \psi_3^0 = r \cos\theta_j. \end{cases}$$
6. Внутри циклов интегрируем систему
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u^2 + \alpha u, \\ \dot{v} = \dfrac{u}{m}(v + l) - g, \\ \dot{m} = -u, \\ \dot{h} = v, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_3 - \dfrac{u\psi_1}{m}, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{u\psi_1(v+l)}{m^2}, \\ \dot{\psi}_3 = 0, \\ x_0 = 0, v(0) = 0, m(0) = m_0, h(0) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_1^0, \psi_2(0) = \psi_2^0, \psi_3(0) = \psi_3^0. \end{cases} \tag{48}$$
до момента $h \geqslant -\varepsilon_{\text{tol}}$ или $m \geqslant M$.
Внутри системы вычисляем $\Phi = \frac{\psi_1}{m}(v + l) - \psi_2$ и управление
$$u = \frac{2\psi_3 m g}{\psi_3(v + l) - \psi_1 g} \tag{49}$$

при $|\Phi| \leqslant \varepsilon_{\text{tol}}$, иначе $u = u_{\max}$ при $\Phi > \varepsilon_{\text{tol}}$, иначе $u = 0$.
(Или же внутри системы вычисляем $P = -\frac{\alpha}{2} - (\frac{\psi_1}{m}(v+l) - \psi_2)/(2\psi_{0k})$ и управление $u = u_{\max}$ при $P > u_{\max} - \varepsilon_{\text{tol}}$, иначе $u = P$ при $P > \varepsilon_{\text{tol}}$, иначе $u = 0$.)

6'. Если сработал случай $m(\tau) = M$, то проверяем

$$\left| h(\tau) - \left(H - v(\tau) \cdot (T - \tau) + \frac{g(T-\tau)^2}{2} \right) \right| < H_{\text{tol}}$$

и в случае успеха интегрируем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 0, \\ \dot{v} = -g, \\ \dot{m} = 0, \\ \dot{h} = v, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_3, \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{u\psi_1(v+l)}{m^2}, \\ \dot{\psi}_3 = 0, \\ x_0 = \widetilde{x}_0(\tau), v(0) = \widetilde{v}(\tau), m(0) = \widetilde{m}(\tau), h(0) = \widetilde{h}(\tau), \\ \psi_1(0) = \widetilde{\psi}_1(\tau), \psi_2(0) = \widetilde{\psi}_2(\tau), \widetilde{\psi}_3(0) = \widetilde{\psi}_3(\tau). \end{cases}$$

где начальные значения соответствуют конечным значениям на предыдущем шаге.

6". Если сработал один из случаев: $h \geqslant -\varepsilon_{\text{tol}}$ или управление из (49) не лежит в $[0, u_{\max}]$, то выносим траекторию из рассмотрения и движемся дальше по циклу.

7. Если достигнутая высота $h(T)$ совпадает с H, т.е. $|h(T) - H| \leqslant H_{\text{tol}}$, то сохраняем начальные значения $(\psi_{0k},)$ ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, например, в отдельный файл.

8. Обрабатываем шаги 5-7, пока не пройдем все вложенные циклы.

9. Отображаем сохраненные траектории: интегрируем (48), моделируем управление и выводим графики для каждого набора начальных значений. Выбираем ту траекторию, на которой достигается минимум $x_0(T)$.

5.4 Пример работы алгоритма

Запустим лёгкую ракету с большим количеством топлива на высоту $H = 700$. Параметры задачи положим равными $m_0 = 83, M = 5, u_{\max} = 41, g = 9.8, l = 200, T = 3, H = 700, \alpha = 3.45$.
Параметры алгоритма положим равными $(K = 20, N = 70,)N = 150, \varepsilon_{\mathrm{tol}} = 10^{-10}, H_{\mathrm{tol}} = 1$. Красным выделим оптимальные значения. Значения округлим до 4-го знака после точки.

В задаче $\frac{m_0-M}{u_{\max}} \approx 1.9024$.

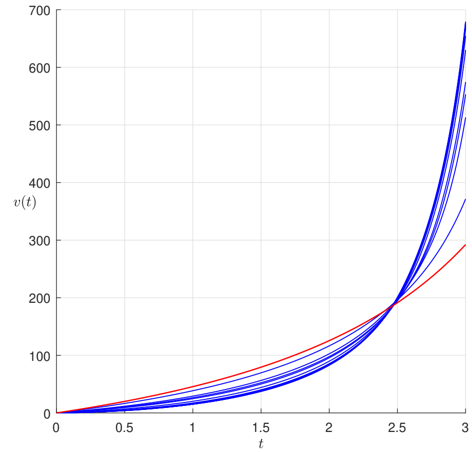
Результат при $\psi_0 < 0$.

- Минимум функционала составил 1106.1391.
- Достигается при $\psi_0 = 0.0316, \psi_1^0 = -0.6422, \psi_2^0 = -0.7537, \psi_3 = 0.1360$.
- Погрешность вычисления конечной высоты составила $\Delta = 0.5482$.

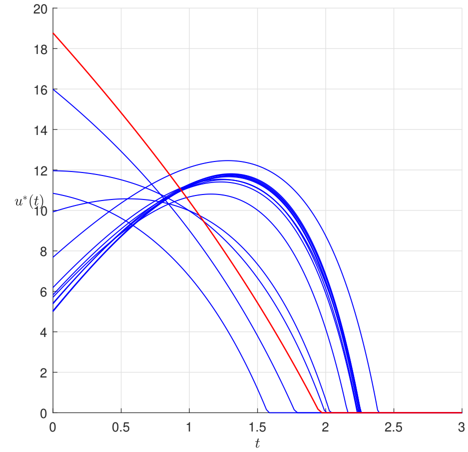
Результат при $\psi_0 = 0$.

- Минимум функционала составил 1515.3860.
- Достигается при $\psi_1^0 = 0.7099, \psi_2^0 = -0.3551, \psi_3 = 0.6081$.
- Погрешность вычисления конечной высоты составила $\Delta = 0.7862$.

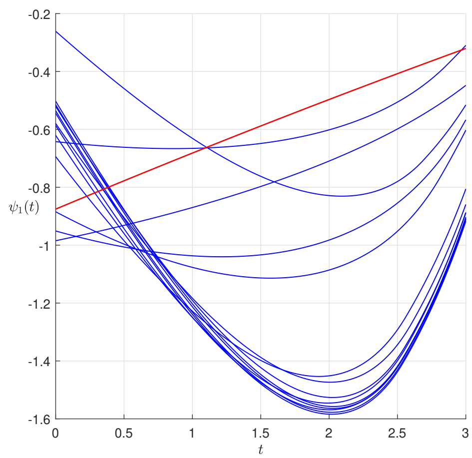
Продемонстрировали весь функционал программы на данном примере. Стоит отметить, что решение о конечном выборе оптимальной траектории остаётся за пользователем. В разных ситуациях нам может быть важна точность попадания, а не значение функционала.



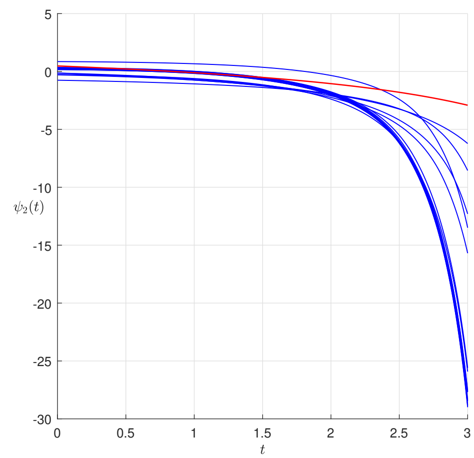
(a) $v(t)$



(b) $u(t)$

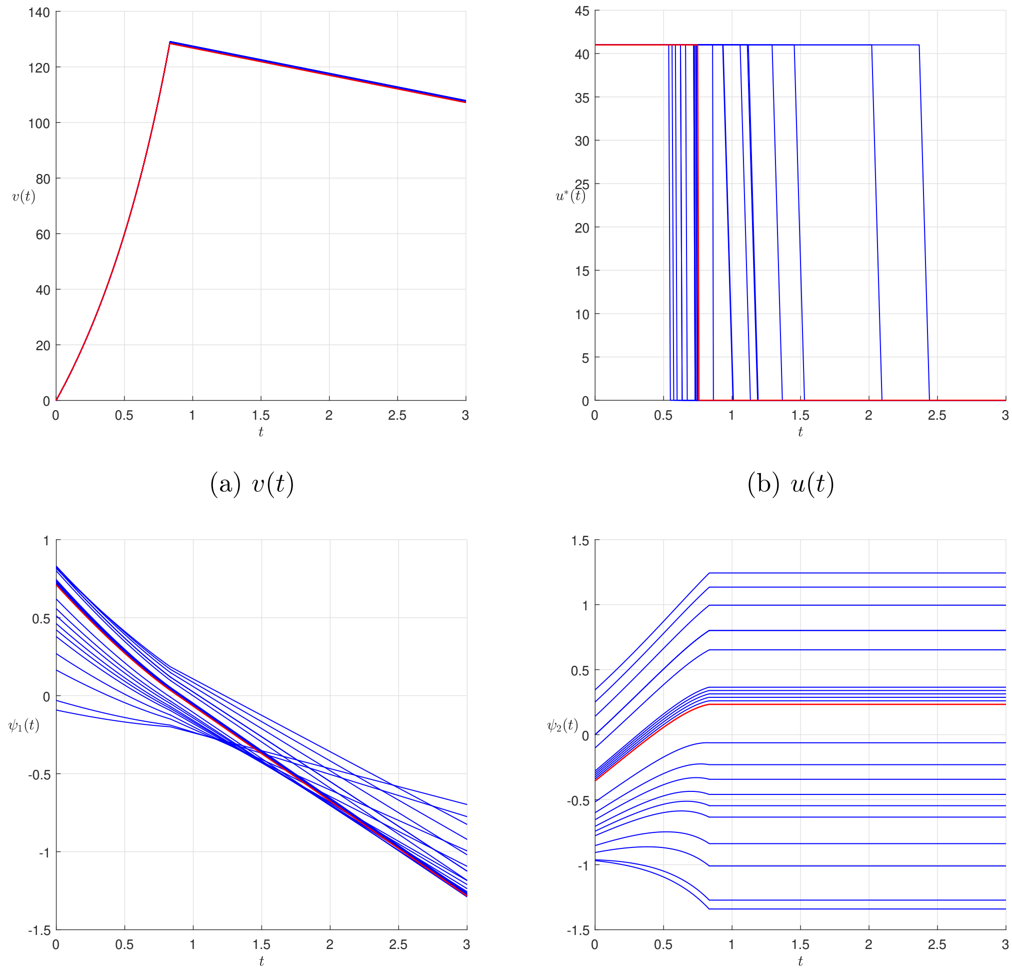


(c) $\psi_1(t)$



(d) $\psi_2(t)$

Рис. 3: Результат при $\psi_0 < 0$ в Примере 1.



(a) $v(t)$ (b) $u(t)$

(c) $\psi_1(t)$ (d) $\psi_2(t)$

Рис. 4: Результат при $\psi_0 = 0$ в Примере 1.

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамерклидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* **Математическая теория оптимальных процессов.**—4-е изд.—М.: «Наука», 1983.—с.23–27,76–80.