Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Поляра эллипса на плоскости»

Студент 315 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

1 Постановка задачи

Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ — множество точек на плоскости. В рамках заданий практикума был реализован алгоритм отрисовки плоского множества X и его поляры X°. Требуется выписать вывод уравнений, описывающих поляру данного эллипса:

$$E_{(-5,1)}^{3,5} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{25} \leqslant 1 \right\}.$$

Результат работы алгоритма с внутренним приближением множеств, состоящем из 100 точек, выглядит следующим образом:

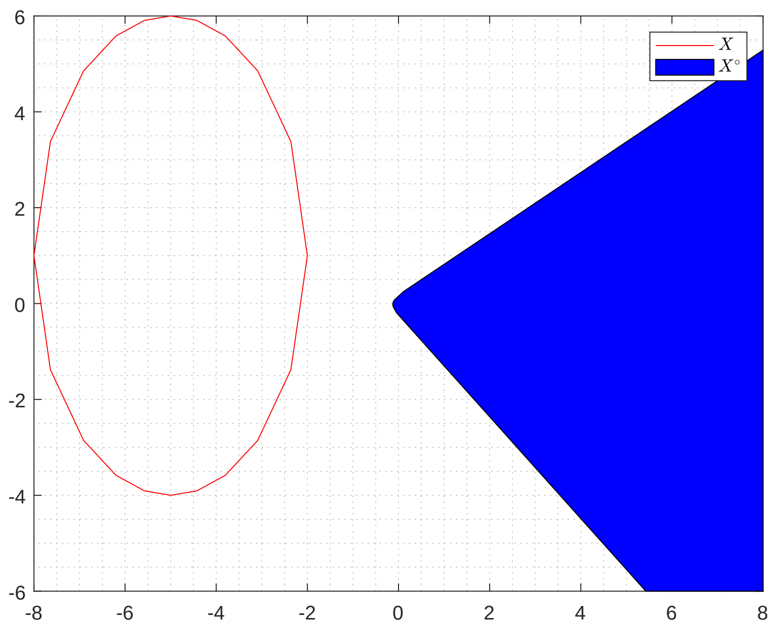

Рис. 1: Поляра эллипса с центром в точке $(-5, 1)$ и полуосями $3, 5$.

2 Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное нормированное линейное пространство, множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ — непустое подмножество $\mathbb{R}^n$. Введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ по правилу:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\; y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Определение. *Опорной функцией множества* $Z \subset \mathbb{R}^n$ *называется отображение* $\rho(\cdot) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ *такое, что:*

$$\rho(l \mid Z) = \sup_{y \in Z} \langle l, y \rangle .$$

Определение. *Полярой множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ называется*

$$Z^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle x, z \rangle \leqslant 1,\ \forall z \in Z \right\}.$$

Утверждение. *Пусть $\rho(l \mid Z)$ — опорная функция множества $Z \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$Z^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \rho(x \mid Z) \leqslant 1 \right\}.$$

3 Вывод уравнений для $\left(E^{3,5}_{(-5,1)}\right)^\circ$

Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ – множество точек на плоскости. Обозначим $E_c^{a,b}$ – эллипс с центром в точке $c \in \mathbb{R}^2$ и полуосями $a, b > 0$. Как уже было доказано [1], опорная функция множества $E_c^{a,b}$ равна:

$$\rho(l \mid E_c^{a,b}) = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}\ ,\ \forall\, l = (l_1, l_2),\ c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Вычислим поляру множества $E^{3,5}_{(-5,1)} = E$ согласно *Утверждению*:

$$\begin{aligned}(E)^\circ &= \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -5x_1 + x_2 + \sqrt{9x_1^2 + 25x_2^2} \leqslant 1 \right\} = \\ &= \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; F(x_1, x_2) \leqslant 1 \right\}.\end{aligned}$$

Преобразуем выражение $F(x_1, x_2) = -5x_1 + x_2 + \sqrt{9x_1^2 + 25x_2^2} \leqslant 1$. Перенесём первые два слагаемых в правую часть неравенства:

$$\sqrt{9x_1^2 + 25x_2^2} \leqslant 1 - (-5x_1 + x_2). \iff \begin{cases} 9x_1^2 + 25x_2^2 \leqslant (1 - (-5x_1 + x_2))^2, & (1) \\ 1 - (-5x_1 + x_2) \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Преобразуем неравенство (1) в отдельности:

$$\begin{aligned} 9x_1^2 + 25x_2^2 &\leqslant 1 - 2(-5x_1 + x_2) + (-5x_1 + x_2)^2, \\ 9x_1^2 + 25x_2^2 &\leqslant 1 - 2(-5x_1 + x_2) + 25x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Перенесём слагаемые в левую часть и сгруппируем:

$$-16x_1^2 + 24x_2^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 2x_2 \leqslant 1. \tag{3}$$

Попробуем привести левую часть неравенства (3) к каноническому виду. Для этого перейдем к новому ортонормированному базису, повернув исходные оси на угол φ. Рассмотрим матрицу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \implies Q^T = Q^{-1},\ QQ^T = Q^T Q = I.$$

т.е. матрица Q – ортогональная. Пусть теперь

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T,\ \mathbf{y} = Q\mathbf{x} = (y_1, y_2)^T$$

— заданные векторы. Тогда

$$\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{y} = Q^T\mathbf{y}. \tag{4}$$

Рассмотрим матрицы M, N:

$$M = \begin{pmatrix} -16 & 5 \\ 5 & 24 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим матричный вид неравенства (3):

$$\mathbf{x}^T M\mathbf{x} + 2N^T\mathbf{x} \leqslant 1. \tag{5}$$

Преобразуем неравенство (5) при помощи перехода (4). Получим

$$(Q^T\mathbf{y})^T MQ^T\mathbf{y} + 2N^TQ^T\mathbf{y} \leqslant 1,$$
$$\mathbf{y}^T QMQ^T\mathbf{y} + 2(QN)^T\mathbf{y} \leqslant 1.$$

Обозначим $K = QMQ^T,\ L = QN$. Получим эквивалентное (5) неравенство

$$\mathbf{y}^T K\mathbf{y} + 2L^T\mathbf{y} \leqslant 1. \tag{6}$$

где матрица K – симметричная матрица. Удостоверимся в этом:

$$K = QMQ^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16 & 5 \\ 5 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -16\cos\varphi - 5\sin\varphi & -16\sin\varphi + 5\cos\varphi \\ 5\cos\varphi - 24\sin\varphi & 5\sin\varphi + 24\cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -16\cos^2\varphi - 10\sin\varphi\cos\varphi + 24\sin^2\varphi & -40\sin\varphi\cos\varphi + 5\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi \\ -40\sin\varphi\cos\varphi + 5\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi & -16\sin^2\varphi + 10\sin\varphi\cos\varphi + 24\cos^2\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

где числа $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ — элементы матрицы K. Действительно, матрица K — симметричная. Также, K — невырожденная. Хотим привести её к диагональному виду. Согласно этому получим условия на угол φ.

$$k_{12} = k_{21} = 0. \implies -20\sin 2\varphi + 5\cos 2\varphi = 0. \implies \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{4}.$$

Возьмём $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Тогда $\frac{\pi}{4} < 2\varphi < \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{4}$.

$$\cos 2\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}},\ \sin 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}},$$
$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{17}}}\ >\ 0,\ \sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{17}}}\ >\ 0.$$

Таким образом, неравенство (6) равносильно

$$k_{11}y_1^2 + k_{22}y_2^2 + 2l_1y_1 + 2l_2y_2 \leqslant 1, \tag{7}$$

где

$$k_{11} = -16\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{17}}\right) - 5\frac{1}{\sqrt{17}} + 24\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{17}}\right) = -4 - \frac{85}{\sqrt{17}} \ < \ 0,$$
$$k_{22} = -16\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{17}}\right) + 5\frac{1}{\sqrt{17}} + 24\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{17}}\right) = 4 + \frac{85}{\sqrt{17}} \ > \ 0,$$
$$L = QN = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cos\varphi - \sin\varphi \\ -5\sin\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в координатах $Oy_1'y_2'$ неравенство (7) определяет внутреннюю часть гиперболы:

$$\frac{{y_1'}^2}{a^2} - \frac{{y_2'}^2}{b^2} \geqslant 1, \tag{8}$$

где

$$y_1' = y_1 + \frac{l_1}{k_{11}},\ y_2' = y_2 + \frac{l_2}{k_{22}},$$
$$a^2 = \frac{1}{k_{11}^2}\left(1 + \frac{l_1^2}{k_{11}} + \frac{l_2^2}{k_{22}}\right)^2,\ b^2 = \frac{1}{k_{22}^2}\left(1 + \frac{l_1^2}{k_{11}} + \frac{l_2^2}{k_{22}}\right)^2,$$
$$1 + \frac{l_1^2}{k_{11}} + \frac{l_2^2}{k_{22}} \ < \ 0.$$

Неравенства (8) и (2) описывают ветвь гиперболы и её внутреннюю часть, изображенные на рис. 1.

Список литературы

[1] *Пилюшенок А. А.* Вычисление опорных функций. 2023.

[2] *Ильин В. А., Ким Г. Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 3-е изд. ПРОСПЕКТ, 2006. — с. 193–205.