Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Вычисление опорных функций»

Студент 315 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

1 Постановка задачи

Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ — множество точек на плоскости. Требуется вычислить опорные функции для следующих множеств из $\mathbb{R}^2$: квадрат, ромб, эллипс. Центр множеств необязательно находится в начале координат. Центр и полуоси являются параметрами.

2 Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное нормированное линейное пространство, множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ — непустое подмножество $\mathbb{R}^n$. Введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ по правилу:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Определение. *Опорной функцией множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ называется отображение $\rho(\cdot) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ такое, что:*

$$\rho(l \mid Z) = \sup_{y \in Z} \langle l, y \rangle .$$

Свойство. *Из определения вытекает полезное свойство:*

$$\rho(l \mid c + Z) = \langle l, c \rangle + \sup_{y \in Z} \langle l, y \rangle , \forall\ c \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где сумма множеств понимается в смысле Минковского.

Это *свойство* позволяет перейти от опорной функции множества с центром в начале координат к опорной функции множества с центром в произвольной точке плоскости.

Утверждение. *Опорная функция произвольного замкнутого множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с опорной функцией выпуклой оболочки множества Z.*

Следствие. *В частности, пусть $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — множество точек в пространстве. Тогда $\operatorname{conv} M$ — выпуклая оболочка множества M, представляет собой многогранник, построенный на n заданных точках. Следовательно для $\forall\ l = (l^1, l^2, \ldots, l^n) \in \mathbb{R}^n$:*

$$\rho(l \mid M) = \rho(l \mid convM) = \max_{i=\overline{1,n}} \langle l, p_i \rangle = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^{n} l^k p_i^k, \quad p_i = (p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема (Метод множителей Лагранжа)**.** *Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, множество $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) \leqslant 0\}$ — гладкая поверхность $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим так называемый лагранжиан функции $f(x, y)$: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Если точка (x_0, y_0) является локальным экстремумом функции $f(x, y)$ на множестве $\mathcal{X}$, то она удовлетворяет системе уравнений:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

откуда найдём λ_0.

Достаточным условием характера экстремума служит знак $d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0)$*:*

- $d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$*, то* (x_0, y_0) *— локальный минимум;*
- $d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$*, то* (x_0, y_0) *— локальный максимум;*
- $d^2\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$*, то про точку* (x_0, y_0) *ничего нельзя сказать.*

3 Вывод формул вычисления опорных функций

Теперь вычислим опорные функции интересующих нас множеств. Введем следующие обоначения:

- S_c^a — квадрат со стороной $a > 0$ с центром в точке c;
- $D_c^{a,b}$ — ромб с диагоналями $a, b > 0$ с центром в точке c;
- $E_c^{a,b}$ — эллипс с полуосями $a, b > 0$ с центром в точке c.

3.1 Квадрат

Рассмотрим вектор $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ и S_0^a — квадрат со стороной $a > 0$ с центром в начале координат. Заметим, что $S_0^a = \operatorname{conv} M$, где $M = \{(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}), (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}), (-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}), (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})\}$. Опорная функция множества S_0^a равна:

$$\begin{aligned}
\rho(l \mid S_0^a) &= \max\left\{\frac{al_1}{2} + \frac{al_2}{2},\ -\frac{al_1}{2} + \frac{al_2}{2},\ -\frac{al_1}{2} - \frac{al_2}{2},\ \frac{al_1}{2} - \frac{al_2}{2}\right\} = \\
&= \frac{a|l_1|}{2} + \frac{a|l_2|}{2} = \\
&= \frac{a}{2}(|l_1| + |l_2|).
\end{aligned}$$

Тогда в силу 1 получим:

$$\rho(l \mid S_c^a) = \langle l, c\rangle + \frac{a}{2}(|l_1| + |l_2|).$$

3.2 Ромб

Аналогично вычислим опорную функцию множества $D_0^{a,b}$ — ромб с диагоналями a, b с центром в начале координат. $D_0^{a,b} = \operatorname{conv} M$, где $M = \{(\frac{a}{2}, 0), (0, \frac{b}{2}), (-\frac{a}{2}, 0), (0, -\frac{b}{2})\}$:

$$\rho(l \mid D_0^{a,b}) = \max\left\{\frac{al_1}{2},\ \frac{bl_2}{2},\ -\frac{al_1}{2},\ -\frac{bl_2}{2}\right\} = \max\left\{\frac{a|l_1|}{2},\ \frac{b|l_2|}{2}\right\},$$

$$\rho(l \mid D_c^{a,b}) = \langle l, c\rangle + \max\left\{\frac{a|l_1|}{2},\ \frac{b|l_2|}{2}\right\},\ \forall\ c \in \mathbb{R}^2.$$

3.3 Эллипс

Пусть $E_0^{a,b} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leqslant 1\}$ — эллипс с полуосями $a, b > 0$ с центром в начале координат. Рассмотрим опорную функцию множества $E_0^{a,b}$:

$$\rho(l \mid E_0^{a,b}) = \sup_{x \,\in\, E_0^{a,b}} \langle l, x\rangle = \sup_{x \,\in\, E_0^{a,b}} (l_1 x_1 + l_2 x_2)\,.$$

Воспользуемся *методом множителей Лагранжа* поиска безусловного экстремума. В данном случае $f(x_1, x_2) = l_1x_1 + l_2x_2$, $\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1$. Лагранжиан примет вид:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = l_1x_1 + l_2x_2 + \lambda\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right).$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} l_1 + \dfrac{2x_1}{a^2}\lambda = 0, \\ l_2 + \dfrac{2x_2}{b^2}\lambda = 0, \\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{a^2 l_1}{2\lambda}, \\ x_2 = -\dfrac{b^2 l_2}{2\lambda}, \\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Откуда, подставив первые два условия в третье, получим значения параметра λ:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}}{2},\ \ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}}{2}.$$

Проверим условие $d^2\mathcal{L} < 0$:

$$d^2\mathcal{L} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2}(dx_1)(dx_2) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2}(dx_2)^2 =$$
$$= \frac{2\lambda}{a^2}(dx_1)^2 + \frac{2\lambda}{b^2}(dx_2)^2 = 2\lambda\underbrace{\left((dx_1)^2 + (dx_2)^2\right)}_{>\,0} > 0.$$

Поэтому требуем $\lambda < 0$, т.е. нас интересует значение λ_2, и в таком случае достигается максимум выражения $l_1x_1 + l_2x_2$. Получив соответствующие координаты (x_1, x_2) точки локального максимума, найдём значение лагранжиана, совпадающего со значением искомой опорной функции:

$$\begin{aligned}\rho(l \mid E_0^{a,b}) &= \mathcal{L}\left(\frac{a^2 l_1}{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}}, \frac{b^2 l_2}{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}}, -\frac{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}}{2}\right) = \\ &= \frac{a^2 l_1^2}{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}} + \frac{b^2 l_2^2}{\sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}} = \\ &= \sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}.\end{aligned}$$

И, согласно 1, получим:

$$\forall\ c \in \mathbb{R}^2 \implies \rho(l \mid E_c^{a,b}) = \langle l, c\rangle + \sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}.$$

4 Вывод

В результате проделанной работы были найдены следующие опорные функции:

$$\rho(l \mid S_c^a) = \langle l, c\rangle + \frac{a}{2}(|l_1| + |l_2|),$$

$$\rho(l \mid D_c^{a,b}) = \langle l, c\rangle + \max\left\{\frac{a|l_1|}{2},\ \frac{b|l_2|}{2}\right\},$$

$$\rho(l \mid E_c^{a,b}) = \langle l, c\rangle + \sqrt{a^2 l_1^2 + b^2 l_2^2}.$$

Список литературы

[1] *Арутюнов А. В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. ФИЗМАТЛИТ, 2014.

[2] *Зорич В. А.* Математический анализ. Том I. МЦНМО, 2021.