Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
д.ф.-м.н., профессор С. Н. Смирнов

Москва, 2024

Содержание

1 Задание 1 **3**

2 Задание 2 **3**

3 Задание 3 **3**

4 Задание 4 **3**

5 Задание 5 **3**

6 Задание 6 **3**

7 Задание 7 **3**

8 Вега **3**

1 Задание 1

2 Задание 2

3 Задание 3

4 Задание 4

5 Задание 5

6 Задание 6

7 Задание 7

8 Вега

Доказательство. Определим $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство: $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0},\ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ s \leqslant t$.

Напомним определения момента остановки, локального мартингала и супермартингала.

Определение 1. *Неотрицательная случайная величина τ называется моментом остановки по отношению к фильтрации $\mathbb{F}$, если*

$$\{\omega :\ \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geqslant 0.$$

Определение 2. *Согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$ процесс X_t (X_t — $\mathcal{F}_t$-измеримая с.в. $\forall t$) с $\mathbb{E}|X_0| < \infty$ называется локальным мартингалом, если $\exists$ последовательность моментов остановки τ_n (локализующая последовательность) такая, что*

1. $\tau_n \leqslant \tau_{n+1},\ \forall n = 1, 2, \dots$; $\tau_n \to \infty$ *п.н.*
2. X_{τ_n} — *мартингал* $\forall n = 1, 2, \dots$

Определение 3. *Процесс X_t является супермартингалом на заданном фильтрованном вероятностном пространстве, если*

1. X_t *согласован с* $\mathbb{F}$.
2. $\mathbb{E}|X_t| < \infty,\ \forall t \geqslant 0$.
3. $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leqslant X_s,\ \forall t \geqslant s$.

Нам также потребуется **условная лемма Фату**: пусть дана σ-алгебра $\zeta \subseteq \mathcal{F}$. Тогда

$$\xi_n \geqslant \eta, \mathbb{E}\eta > -\infty \implies \mathbb{E}(\varliminf \xi_n \mid \zeta) \leqslant \varliminf \mathbb{E}(\xi_n \mid \zeta) \text{ a.s.}$$

Выберем локализующую последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ для локального мартингала X_t. Построим последовательность остановленных процессов $Y_t^k = X_{\tau_k \wedge t}$.
Из определения X_t следует, что Y_t^k — последовательность мартингалов.

Заметим, что $\lim\limits_{k\to\infty} Y_t^k = X_t$, $\lim\limits_{k\to\infty} Y_s^k = X_s$.
Так как данные пределы существуют, то их соответствующие частичные пределы совпадают между собой. Кроме того, $\exists\, c \in \mathbb{R}:\ Y_t^k \geqslant c$ п.н. из-за ограниченности снизу процесса X_k, что позволяет применить условную лемму Фату. Выберем $\tau \leqslant s$ и рассмотрим

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\lim Y_t^k \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\underline{\lim}\, Y_t^k \mid \mathcal{F}_s) \leqslant \underline{\lim}\, \mathbb{E}(Y_t^k \mid \mathcal{F}_s) = \\ = \{Y_t^k \text{ является мартингалом}\} = \underline{\lim}\, Y_s^k = \lim Y_s^k = X_s.$$

Таким образом, получили $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leqslant X_s$.

Осталось показать, что $\mathbb{E}|X_t| < \infty$, $\forall t$.
Имеем $X_t - c \geqslant 0$. Тогда $0 \leqslant \mathbb{E}(X_t - c) \leqslant \mathbb{E}(X_0 - c) < \infty$. Из $\mathbb{E}|X_t - c| < \infty$ следует $\mathbb{E}|X_t| < \infty$.

$\square$