



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
д.ф.-м.н., профессор С. Н. Смирнов

Москва, 2024

Оглавление

1	Первая часть практикума	4
1.1	Задание 1	4
1.1.1	Условие	4
1.1.2	Генераторы схемы Бернулли и биномиального распределения	4
1.1.3	Генератор геометрического распределения	6
1.1.4	Игра в орлянку	8
1.2	Задание 2	10
1.2.1	Условие	10
1.2.2	Генератор канторового распределения	10
1.2.3	Свойства канторового распределения	12
1.2.4	Численные характеристики канторового распределения	14
1.3	Задание 3	15
1.3.1	Условие	15
1.3.2	Генератор экспоненциального распределения	15
1.3.3	Распределение $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$	17
1.3.4	Генератор пуассоновского распределения (через g -р экспоненциального p -я)	18
1.3.5	Генератор пуассоновского распределения (через g -р биномиального p -я)	19
1.3.6	Генератор стандартного нормального распределения (преобразование Бокса-Мюллера)	20
1.4	Задание 4	23
1.4.1	Условие	23
1.4.2	Генератор распределения Коши	23
1.4.3	Генератор стандартного нормального распределения (через g -р распределения Коши)	24
1.4.4	Сравнение скорости сходимости	25
1.5	Задание 5	26
1.5.1	Условие	26
1.5.2	Справедливость теоремы о ЗБЧ и ЦПТ	26
1.5.3	Доверительные интервалы для среднего и дисперсии	28
1.5.4	Распределение суммы элементов распределения Коши	29
1.6	Задание 6	31
1.6.1	Условие	31
1.6.2	Вычисление интеграла	31
1.6.3	Оценка точности вычисления	32

2	Вторая часть практикума	34
2.1	Задание 7	34
2.1.1	Условие	34
2.1.2	Метод случайного поиска	34
2.1.3	Метод имитации отжига	35
2.1.4	Сравнение методов со стандартными методами оптимизации	35
2.2	Задание 8	35
2.2.1	Метод Монте-Карло для уравнения Лапласа	36
2.2.2	Сравнение численного результата с аналитическим решением	36
2.3	Задание 9	36
2.4	Задание 10	36
2.5	Задание 11	36

Глава 1

Первая часть практикума

1.1 Задание 1

1.1.1 Условие

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения; проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Промоделировать игру в орлянку: бесконечную последовательность независимых испытаний Бернулли с бросанием “правильной” (честной, $p = 0.5$) монеты. Величина “выигрыша” S_n определяется как сумма по n испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны монеты. Проиллюстрировать в виде ломаной поведение нормированной суммы $Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$ как функцию от номера испытания i для отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для значения $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.1.2 Генераторы схемы Бернулли и биномиального распределения

Дадим описание схемы Бернулли на метаязыке.

Определение 1. *Схемой Бернулли с вероятностью p называется эксперимент, состоящий из последовательности испытаний, обладающих следующими свойствами:*

- *воспроизводимость — все испытания проходят в подобных (может, не полностью идентичных) условиях;*
- *отсутствие взаимного влияния;*
- *каждому испытанию сопоставляется численная характеристика, которая реализуется (“успех” с вероятностью p) или не реализуется (“неуспех” с вероятностью $1 - p$).*

Определение 2. *Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью p , состоящую из n последовательных испытаний. Тогда распределение числа “успехов” в такой схеме Бернулли называется биномиальным с числом испытаний n и вероятностью p .*

Для моделирования случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром p (отвечает схеме Бернулли с единственным испытанием), воспользуемся методом обращения функции распределения. Он основан на следующем утверждении.

Утверждение 1. Пусть функция распределения $F(\cdot)$ имеет обратную $F^{-1}(\cdot)$. Положим $\nu \sim U[0, 1]$. Тогда функцией распределения случайной величины $\xi = F^{-1}(\nu)$ является $F(\cdot)$.

Доказательство.

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(F^{-1}(\nu) < x) = \mathbb{P}(\nu < F(x)) = F(x).$$

□

Утверждение 2. Биномиальное распределение $\text{Bin}(n, p)$ можно представить как сумму n н.о.р.с.в., имеющих распределение $\text{Be}(p)$.

Доказательство. Пусть $\xi_i \sim \text{Be}(p)$, $i = \overline{1, n}$ и $\eta \sim \text{Bin}(n, p)$. Тогда

$$\mathbb{P}(\eta = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Покажем методом математической индукции, что

$$\mathbb{P}(\eta = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^n \xi_l = k\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

- При $n = 1$:

$$\mathbb{P}(\eta = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\eta = 1) = p.$$

т.е., $\eta \sim \text{Be}(p) \equiv \text{Bin}(1, p)$.

- Пусть верно для n , покажем, что верно для $n + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n+1} \xi_l = k\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^n \xi_l = k \mid \xi_{n+1} = 0\right) \cdot \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 0) + \\ &+ \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^n \xi_l = k - 1 \mid \xi_{n+1} = 1\right) \cdot \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1) = \\ &= (C_n^k p^k (1-p)^{n-k}) \cdot (1-p) + (C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)}) \cdot p = \\ &= (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot p^k (1-p)^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся тождеством Вандермонда $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ и получим требуемое.

□

На графиках 1.1, 1.2 продемонстрирована работа датчиков. Для биномиального распределения показана справедливость Центральной Предельной Теоремы (формулировка приведена в пункте 1.1.4), где $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$ — характеристики биномиального распределения.

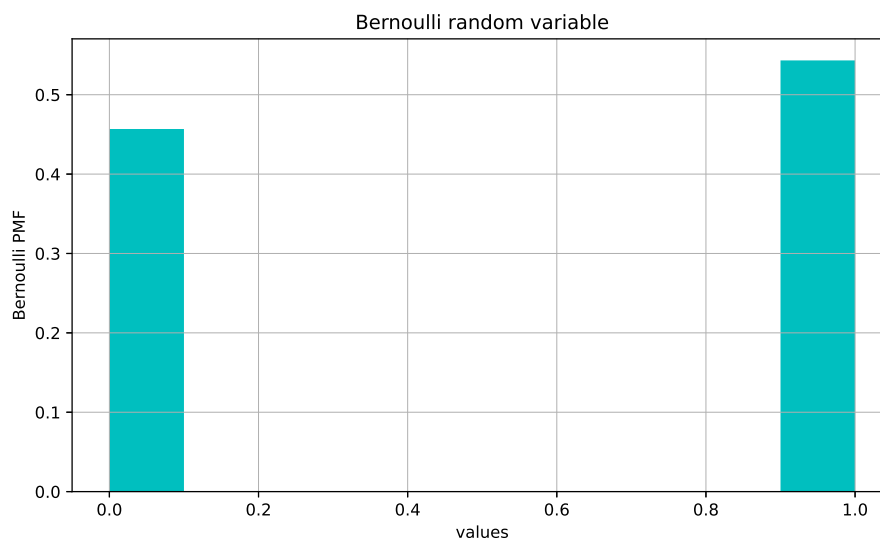


Рис. 1.1: Выборка распределения Бернулли $p = 0.54321$ размера $N = 10^7$.

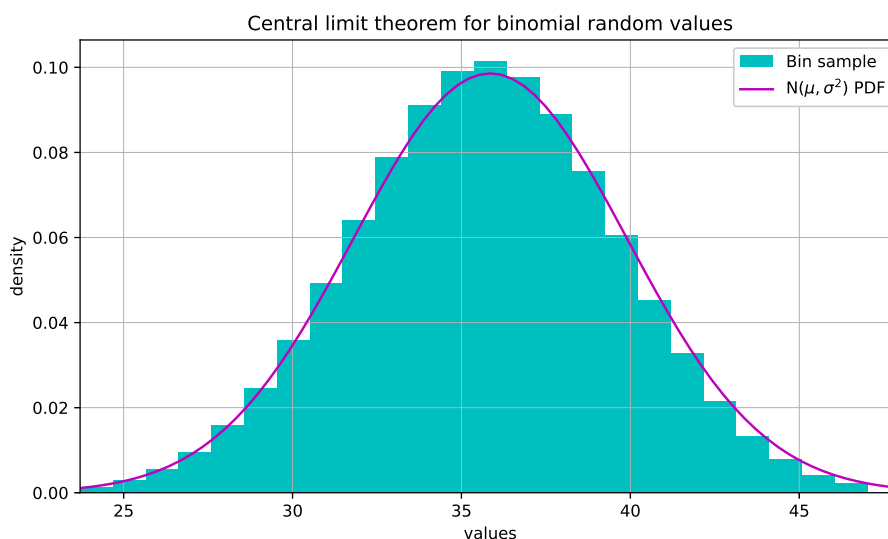


Рис. 1.2: Выборка биномиального распределения $n = 66, p = 0.54321$ размера $N = 10^6$.

1.1.3 Генератор геометрического распределения

Определение 3. *Геометрическое распределение - это распределение числа неудач до первого успеха в схеме Бернулли с неограниченным числом испытаний.*

Обозначим

$$\xi \sim \text{Geom}(p), \quad \nu \sim \text{U}[0, 1].$$

$$\mathbb{P}(\xi = n) = p(1-p)^n, \quad \sum_{k=0}^n p(1-p)^k = 1 - (1-p)^{n+1} = s_{n+1}.$$

Пользуясь генератором равномерного распределения, реализуем генератор геометрического распределения, исходя из следующих соображений:

$$\mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{P}(s_n < \nu \leq s_{n+1}) = \mathbb{P}((1-p)^{n+1} \leq 1-\nu < (1-p)^n).$$

$$\implies \boxed{\mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{P}\left(n < \frac{\ln(1-\nu)}{\ln(1-p)} \leq n+1\right)}.$$

Отметим, что $(1-\nu) \sim \text{U}[0, 1]$.

Таким образом, будем моделировать случайную величину

$$\eta = \left\lfloor \frac{\ln \nu}{\ln(1-p)} \right\rfloor.$$

Можно доказать, что $\frac{\ln \nu}{\ln(1-p)} \sim \text{Exp}(\ln \frac{1}{1-p})$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\ln \nu}{\ln(1-p)} < x\right) = \mathbb{P}(\nu < e^{\ln(1-p)x}) = 1 - e^{\ln(1-p)x}.$$

Утверждение 3. Геометрическое распределение с параметром p обладает свойством отсутствия памяти:

$$\mathbb{P}(\xi > m+n \mid \xi \geq m) = \mathbb{P}(\xi > n), \quad \forall m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > m+n \mid \xi \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(\xi > m+n)}{\mathbb{P}(\xi \geq m)} = \frac{\sum_{k=m+n+1}^{\infty} p(1-p)^k}{\sum_{k=m}^{\infty} p(1-p)^k} = \\ &= \frac{p \frac{(1-p)^{m+n+1}}{p}}{p \frac{(1-p)^m}{p}} = (1-p)^{n+1} = \mathbb{P}(\xi > n). \end{aligned}$$

□

Чтобы проверить этот результат численно, построим две гистограммы для двух выборок (отвечающих левой и правой частям соответственно). Сдвинутые графики должны совпасть. На рисунке 1.3 продемонстрирован теоретический результат.

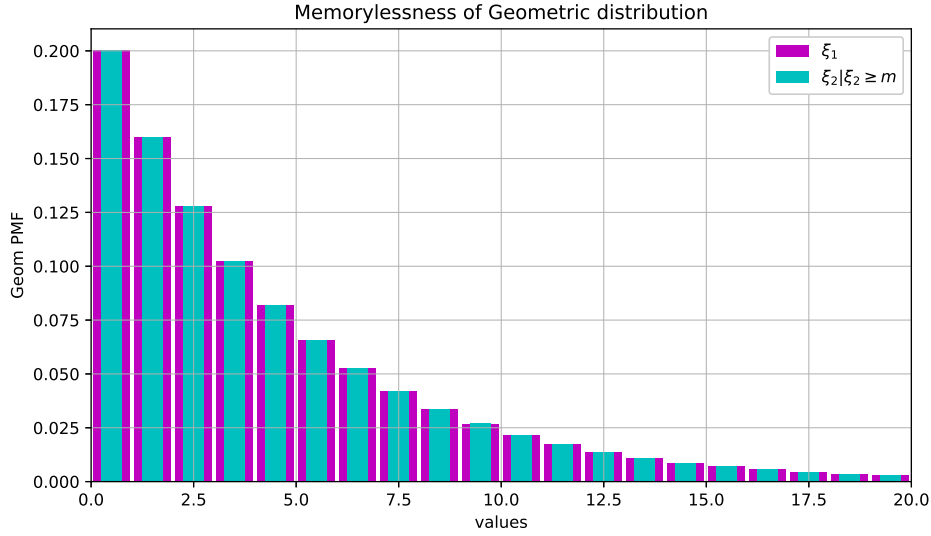


Рис. 1.3: Проверка отсутствия памяти $\text{Geom}(p), p = 0.2, m = 7$ на выборках размера $N = 10^7$.

1.1.4 Игра в орлянку

Теорема 1 (центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин). Пусть X_1, X_2, \dots - последовательность н.о.р. (невырожденных) случайных величин с конечным вторым моментом. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} < x \right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Доказательство. Приведено в [2] с.447-449

□

Рассмотрим

$$S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad \eta_i = 2\xi_i - 1, \quad \xi_i \sim \text{Be}(p) - \text{i.i.d.r.v.} Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Зафиксируем $p = 1/2$. В таком случае

$$\mathbb{E}\nu_i \equiv \mu = 2p - 1 = 0. \mathbb{D}\nu_i \equiv \sigma^2 = 4p(1-p) = 1.$$

Воспользуемся ЦПТ.

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что нормированная случайная величина внутри функции распределения в левой части выражения совпадает с Y_n . Также отметим, что третий абсолютный момент

$\mathbb{E}|\eta_i|^3 = 1$, ведь $|\eta_i| \equiv 1$. В таком случае можем воспользоваться неравенством Берри-Эссена, где $c_0 \in (0.4, 0.5)$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| < \frac{c_0}{n^{3/2}}.$$

Получили оценку скорости сходимости в ЦПТ. Нас также интересует оценка значений $Y_n(\omega)$.

Уже показали, что

$$Y_n \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1).$$

Следовательно, по мере увеличения числа элементов n нормированная сумма $Y(n)$ будет распределена нормально.

Также продемонстрируем поведение траектории $Y_i = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$, $i = \overline{0, n}$.

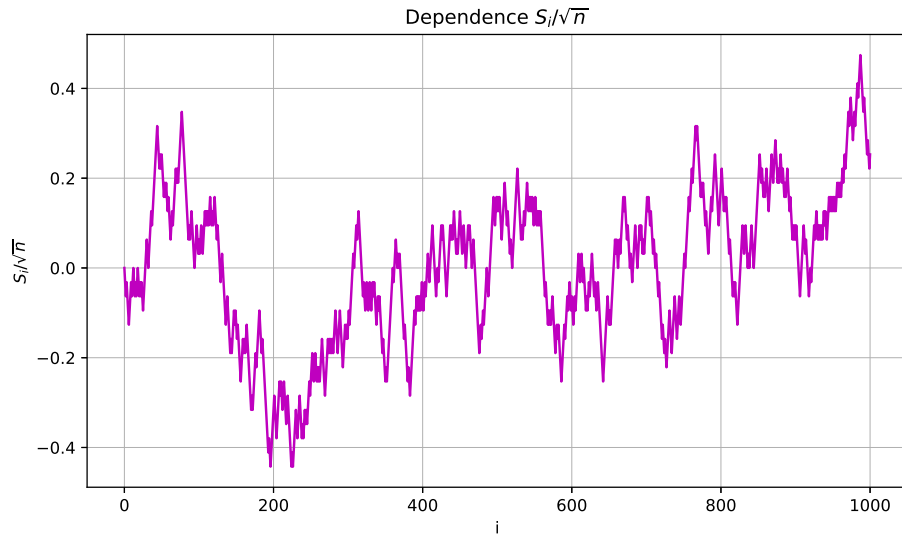


Рис. 1.4: Зависимость $Y_i = S_i/\sqrt{n}$, $i = \overline{0, n}$, $n = 1000$.

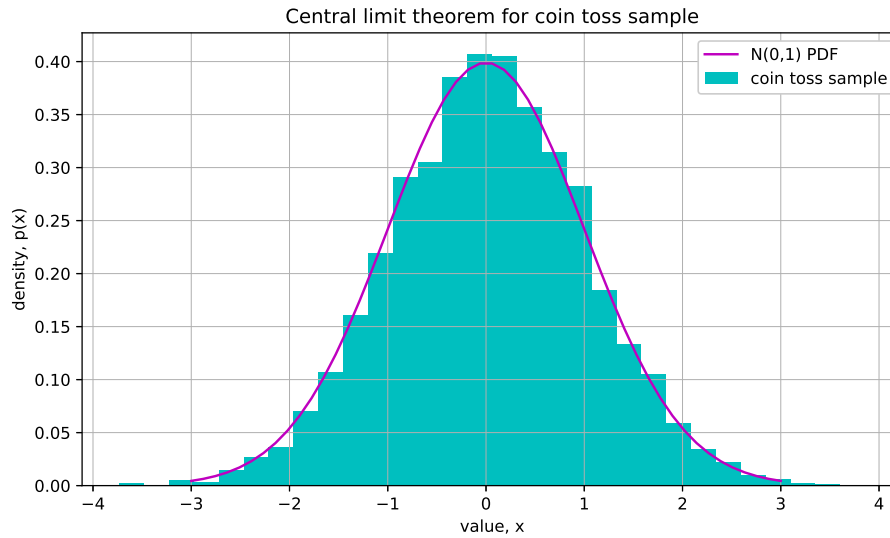


Рис. 1.5: ЦПТ для $Y_n = S_n/\sqrt{n}$, $n = 1000$ на выборке размера $N = 10^4$.

1.2 Задание 2

1.2.1 Условие

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин с помощью критерия Смирнова проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1 - X$ распределены одинаково) и свойство самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, 1/3]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$).
3. Рассчитать значения математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими (для различных объемов выборок), проиллюстрировать сходимость эмпирических значений к теоретическим.

1.2.2 Генератор канторового распределения

Канторовская лестница задаётся на множестве Кантора (которое имеет нулевую меру Лебега) отрезка $[0, 1]$, доопределяется по непрерывности в оставшихся точках. Канторовское распределение имеет функцию распределения, являющейся канторовской лестницей.

Есть два способа моделирования такого распределения:

1. По заданному $x \in [0, 1]$. Канторовское множество состоит из тех точек, у которых нет единицы в троичной записи. Переведем x в троичную запись, а затем отбросим все цифры после первой (самой левой) единицы.

2. По заданному размеру выборки N . Будем N раз моделировать n_{bits} испытаний схемы Бернулли с $p = \frac{1}{2}$. Все единицы заменим на двойки, и получим троичную запись числа, в которой отсутствуют единицы.

Значением функции распределения $F(x)$ будет являться двоичное представление числа x . Его можно получить, заменив все двойки в троичной записи данного числа на единицы.

Число испытаний схемы Бернулли $n = n_{\text{bits}}$ можно задавать с учётом заданной погрешности ε . В худшем случае отбрасываются двойки в троичной записи числа.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} < \varepsilon. \quad \Rightarrow \quad n + 1 < \log_{\frac{3}{2}} 3\varepsilon.$$

Будем генерировать канторово распределение по заданному размеру выборки N и точности ε .

На рисунке 1.6 продемонстрировано совпадение смоделированной выборки с её эмпирической функцией распределения.

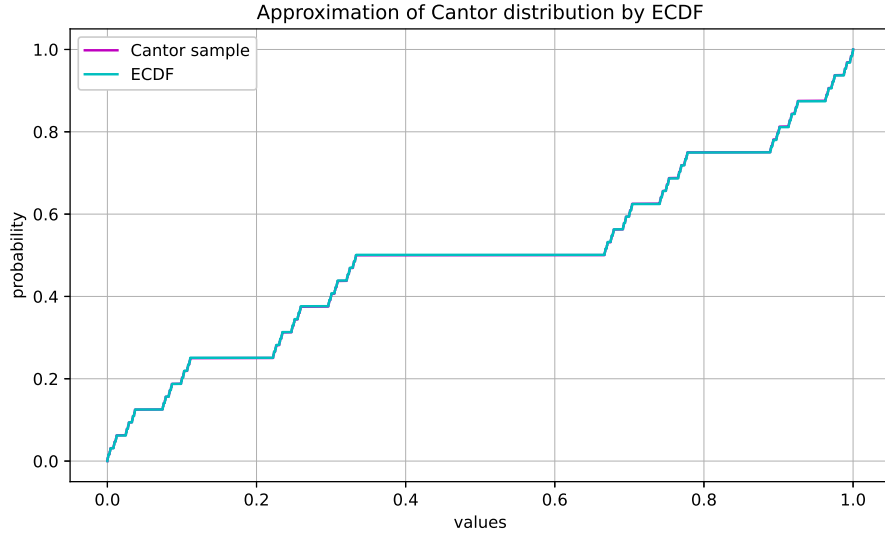


Рис. 1.6: Результат моделирования канторова распределения при $\varepsilon = 10^{-12}$, ($n_{\text{bits}} = 64$), сравнение с эмпирической функцией распределения на выборке размера $N = 10^5$.

Теорема 2 (Колмогоров). Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — н.о.р.с.в. с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_{(i)} < x\}$ — эмпирическая функция распределения (ECDF). Тогда

$$\forall x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}D_n < x) = F_K(x),$$

где $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$ — статистика Колмогорова и $F_K(\cdot)$ — функция распределения Колмогорова, которую можно выразить по формуле

$$F_K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

Доказательство. Приведено в [2]. □

Проверяем гипотезу

$$H_0 : F(\cdot) = G(\cdot)$$

с уровнем значимости α , где $G = F_C(\cdot)$ — канторово распределение при помощи критерия Колмогорова.

Заметим, что D_n является случайной величиной, ведь $F_n(x)$ зависит от реализации выборки. Теорема Колмогорова утверждает, что при истинности H_0 выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$, $\sqrt{n}D_n \sim F_K$ при $n \rightarrow \infty$.

Будем принимать H_0 , если $1 - F_K(\sqrt{n}D_n) > \alpha$.

При проверке истинности гипотезы при помощи критерия Колмогорова 1000 раз с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ для смоделированных датчиком канторова распределения выборок размера $N = 2000$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$ нулевая гипотеза была принята в 95.6% случаев.

1.2.3 Свойства канторова распределения

Теорема 3 (Смирнов). Пусть X_1, X_2, \dots, X_n и Y_1, Y_2, \dots, Y_m , $m \leq n$ две независимые выборки, подчиняющиеся одному закону распределения $F(\cdot) \in C$, и $F_n(x), G_m(y)$ — соответствующие эмпирические функции распределения. Тогда

$$\forall x \geq 0 \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} < x \right) = F_K(x),$$

где $D_{nm} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - G_m(x)|$ — статистика Смирнова и $F_K(\cdot)$ — функция распределения Колмогорова.

Доказательство. Приведено в [2]. □

Проверяем гипотезу H_0 для двух выборок X и Y с функциями распределения F_X и F_Y :

$$H_0 : F_X(\cdot) = F_Y(\cdot) = F(\cdot)$$

с уровнем значимости α при помощи критерия Смирнова.

Теорема Смирнова утверждает, что при истинности гипотезы H_0 верно $D_{nm} \rightarrow 0$, $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \sim F_K$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Будем принимать H_0 , если $1 - F_K(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_n) > \alpha$.

Пусть X выборка, соответствующая канторовому распределению.

1. Для проверки симметричности относительно $\frac{1}{2}$ выбираем $Y = 1 - X$.
2. Для проверки самоподобия относительно деления на 3 выбираем $\tilde{X} = \frac{X}{3}$, $Y = X$ при условии $X \in [0, \frac{1}{3}]$.

При проверке симметричности относительно $\frac{1}{2}$ при помощи Критерия Смирнова 1000 раз с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ для выборок размера $N = 1000$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-8}$ нулевая гипотеза была принята в 95.4% случаев.

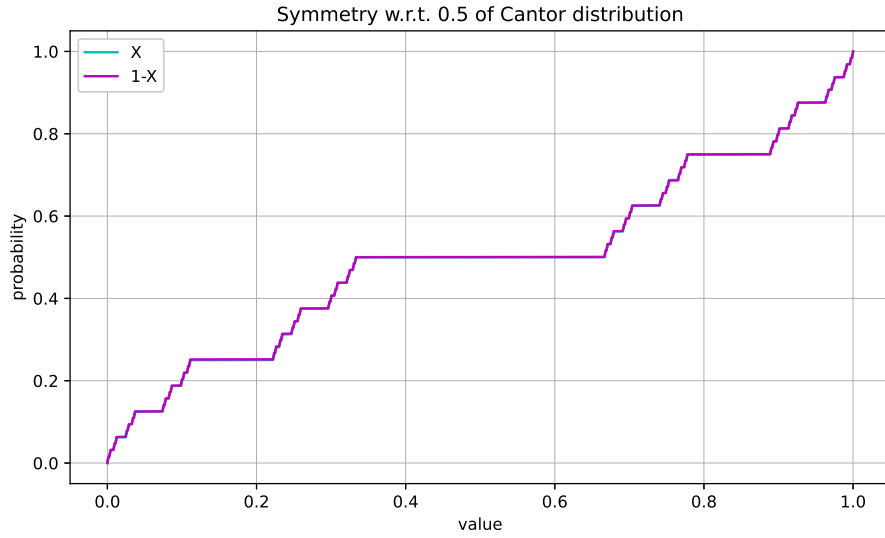


Рис. 1.7: Симметричность канторового распределения относительно $\frac{1}{2}$ при $\varepsilon = 10^{-8}$, $N = 1000$.

При проверке симметричности относительно деления на 3 при помощи Критерия Смирнова 1000 раз с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ для выборок размера $N = 10^4$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-12}$ нулевая гипотеза была принята в 94.0% случаев.

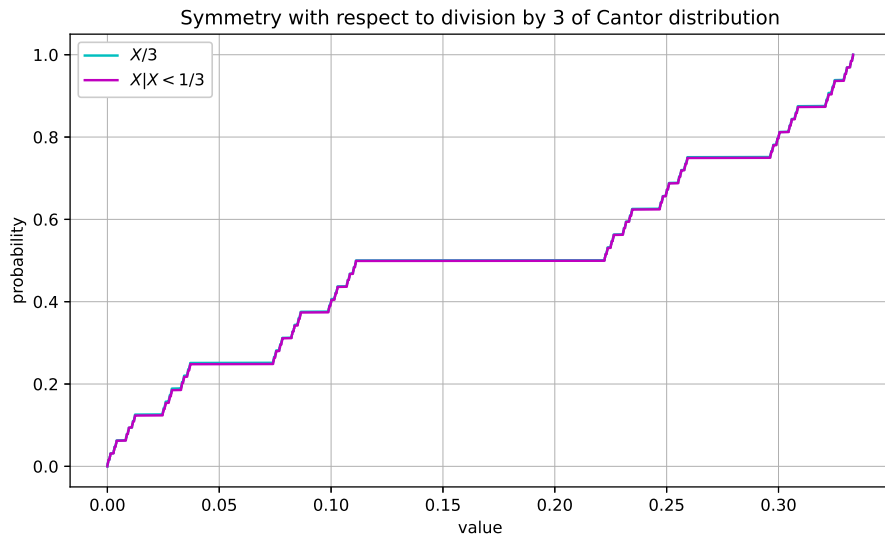


Рис. 1.8: Симметричность канторового распределения относительно деления на 3 при $\varepsilon = 10^{-12}$, $N = 10^4$.

На рисунках 1.7, 1.8 продемонстрирована симметричность относительно $\frac{1}{2}$ и деления на 3 (совпадение ECDF двух выборок на каждом рисунке).

1.2.4 Численные характеристики канторового распределения

Утверждение 4 (закон полной вариации). Пусть X, Y — случайные величины на одном вероятностном пространстве и $\mathbb{D}X < \infty$. Тогда

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y]).$$

Доказательство. По телескопическому свойству условного математического ожидания и определению дисперсии имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|Y]] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2 = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y) + (\mathbb{E}[X|Y])^2] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2 = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \underbrace{(\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|Y])^2] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]])^2)}_{=\mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y])} = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y]). \end{aligned}$$

. Свойства условного математического ожидания и их доказательство можно найти в [2]. \square

- Математическое ожидание $X \sim F_C$, F_C - канторово, равно $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \{X \stackrel{d}{=} 1 - X\} = \mathbb{E}[1 - X] \\ \Rightarrow \mathbb{E}X &= 1 - \mathbb{E}X \\ \Rightarrow \mathbb{E}X &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Дисперсия $X \sim F_C$ равна $\frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned} Y &\stackrel{def}{=} \mathbb{I} \left\{ X \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \right\}. \\ \mathbb{D}X &= \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] + \mathbb{D}(\mathbb{E}[X|Y]). \\ \mathbb{E}[\mathbb{D}(X|Y)] &= \frac{1}{9}\mathbb{D}X \text{ (из свойства самоподобия).} \\ \mathbb{E}[X|Y] &= \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{(из свойства симметричности)} \\ \mathbb{D}X &= \frac{1}{9}\mathbb{D}X + \frac{1}{9} \\ \Rightarrow \mathbb{D}X &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

На рисунке 1.9 продемонстрирована зависимость математического ожидания и дисперсии от размера выборки канторового распределения, сходимость эмпирических значений к теоретическим на логарифмической шкале. С увеличением размера выборки разброс относительно теоретических значений уменьшается.

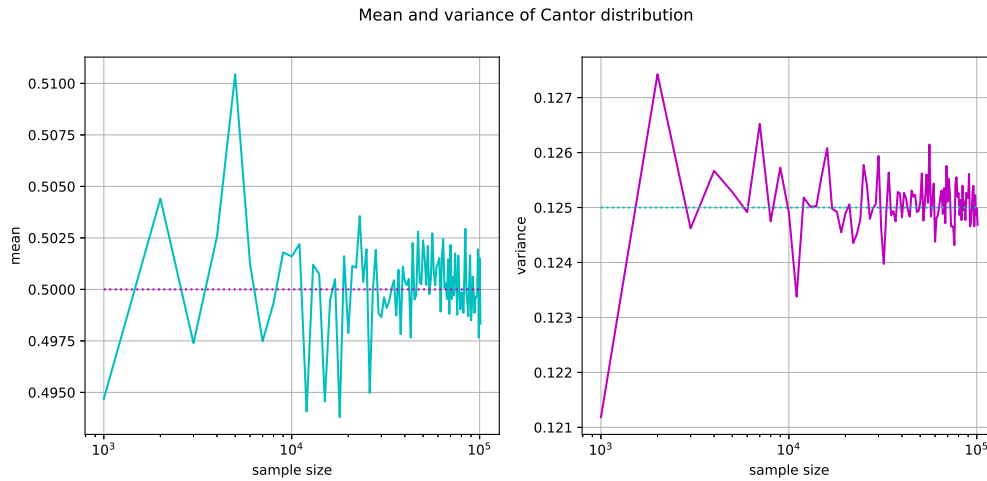


Рис. 1.9: Зависимость математического ожидания и дисперсии от выборки канторового распределения на сетке $N \in [10^3, 10^5]$ с шагом $h = 10^3$.

1.3 Задание 3

1.3.1 Условие

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
2. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Найти распределение случайной величины $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
3. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
4. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. Убедиться в корректности построенного датчика при помощи критерия χ^2 Пирсона.
5. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты (преобразование Бокса-Мюллера). Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера — равенство дисперсий.

1.3.2 Генератор экспоненциального распределения

Определение 4. Экспоненциальное распределение — абсолютно непрерывное распределение с плотностью $\lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0, x \geq 0$.

Рассмотрим $\lambda > 0$. Будем генерировать случайную величину

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln \nu, \quad \nu \sim U[0, 1].$$

Она имеет экспоненциальное распределение $\text{Exp}(\lambda)$, ведь

$$\mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda} \ln \nu < x\right) = \mathbb{P}(\nu > e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

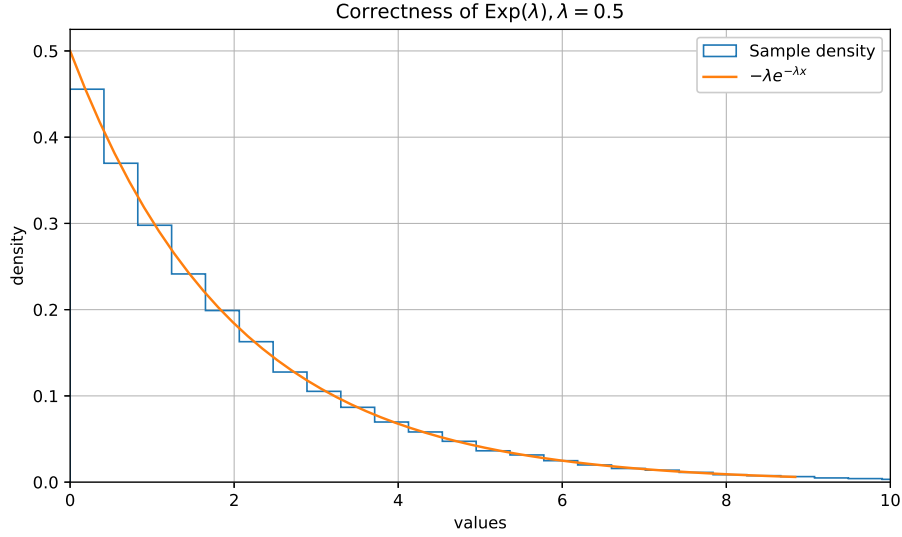


Рис. 1.10: Корректность работы датчика на примере выборки из распределения $\text{Exp}(0.5)$ размера $N = 10^5$.

Утверждение 5. *Случайная величина $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$ обладает свойством отсутствия памяти:*

$$\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t \mid \xi \geq t) = \mathbb{P}(\xi > \Delta t), \quad \forall t, \Delta t \geq 0.$$

Доказательство.

$$\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t \mid \xi \geq t) = \frac{\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t)}{\mathbb{P}(\xi \geq t)}.$$

Отдельно вычислим

$$\mathbb{P}(\xi > x) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\xi > t + \Delta t \mid \xi \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = \mathbb{P}(\xi > \Delta t).$$

□

На рисунке 1.11 аналогично пункту 1.1.3 численно показали отсутствие памяти экспоненциального распределения.

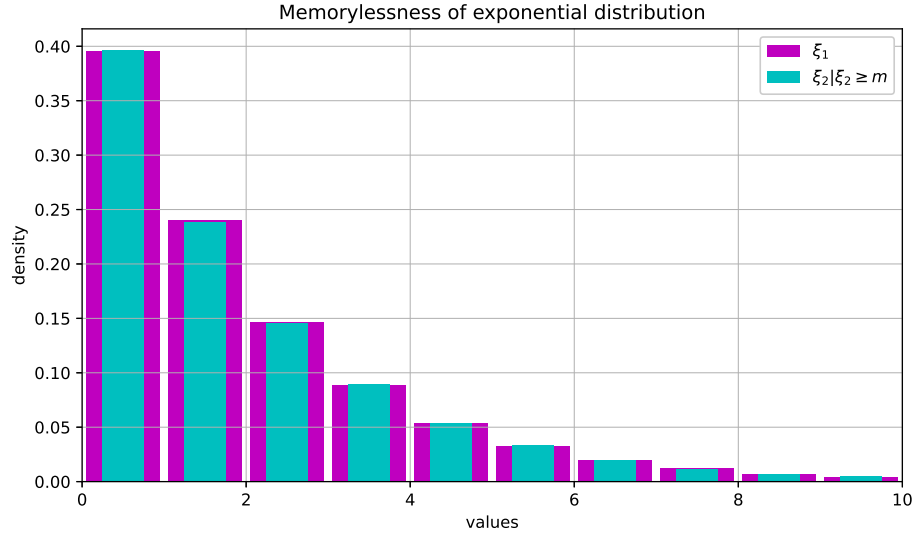


Рис. 1.11: Свойство отсутствия памяти для $\text{Exp}(0.5)$, $\Delta t = 5$ для выборок размера $N = 10^6$.

1.3.3 Распределение $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

Положим

$$X_k \sim \text{Exp}(\lambda_k), \quad k \in \overline{1, n} \text{ — н.о.р.с.в.}$$

Генератор строим из следующих соображений.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y < x) &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \geq x) = \\
 &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) = \{\text{независимость}\} = \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \geq x) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X_k < x)) = \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_k x} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x}.
 \end{aligned}$$

Получили, что $Y \sim \text{Exp}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$.

На рисунке 1.12 продемонстрировано совпадение ECDF для выборки из Y и выборки из $\text{Exp}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$.

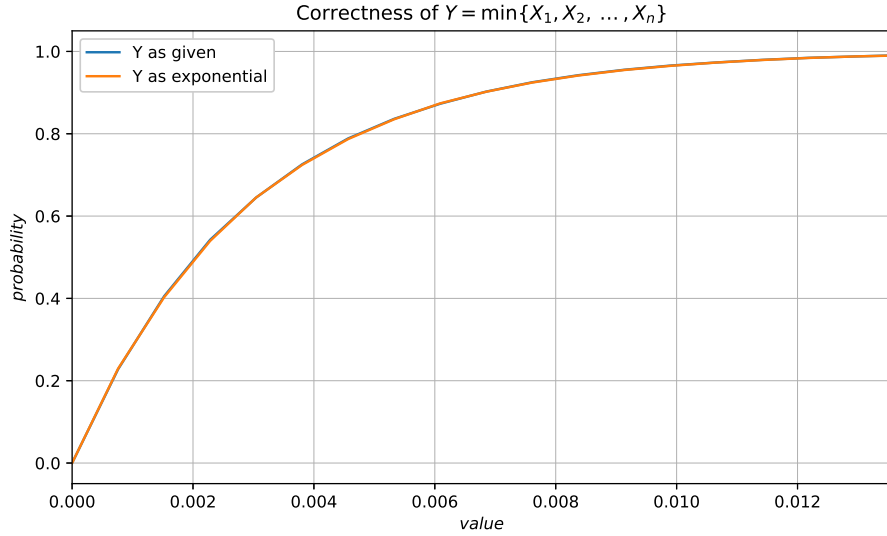


Рис. 1.12: Корректность работы датчика для выборки из Y размера $N = 10^5$, вектор $\hat{\lambda}$ — выборка равномерного распределения на $[0, 7]$ размера $n = 100$

1.3.4 Генератор пуассоновского распределения (через г-р экспоненциального р-я)

Определение 5. Случайная величина $\xi \in \mathbb{N}_0$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ ($\text{Pois}(\lambda)$), если

$$\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \lambda^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n - н.о.р.с.в., $X_i \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$. Положим Y — наименьшее неотрицательное целое число такое, что

$$\sum_{k=1}^{Y+1} X_k > 1.$$

Тогда $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Доказательство. Приведено в [3], с.501

□

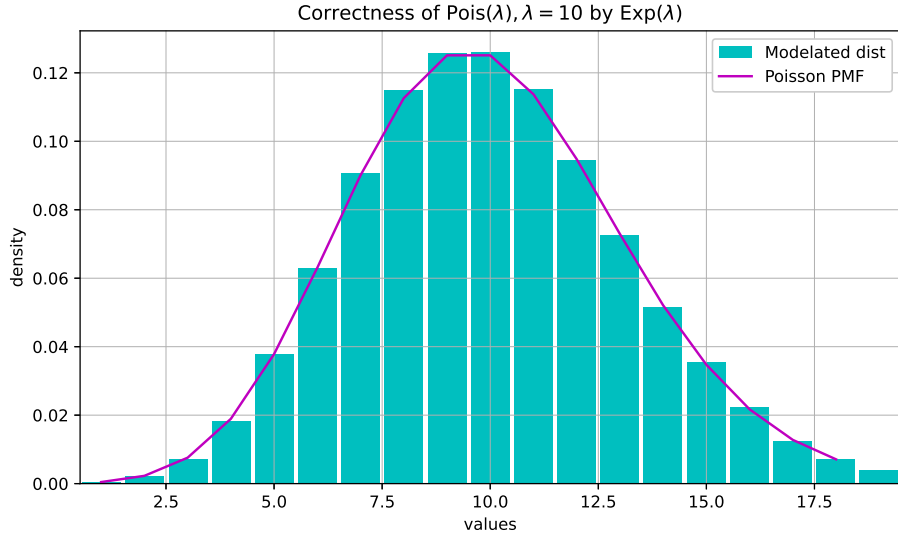


Рис. 1.13: Корректность работы датчика $\text{Pois}(\lambda)$ при помощи датчика $\text{Exp}(\lambda)$ при $\lambda = 10, N = 10^5$.

1.3.5 Генератор пуассоновского распределения (через г-р биномиального р-я)

Определение 6. Пусть Y_0, Y_1, \dots, Y_n — независимые стандартно нормально распределенные случайные величины: $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = \overline{0, n}$. Тогда распределение случайной величины χ^2 :

$$\chi^2 = Y_0^2 + Y_1^2 + \dots + Y_n^2$$

называется распределением χ^2 (хи-квадрат) с n степенями свободы: $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

Теорема 5 (Пуассон). Пусть есть последовательность биномиально распределенных случайных величин $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ такая, что

1. $n \rightarrow \infty$.
2. $np_n \rightarrow \lambda, n \rightarrow \infty$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$.

Доказательство. Приведено в [2], Гл. I, §6, п.4. □

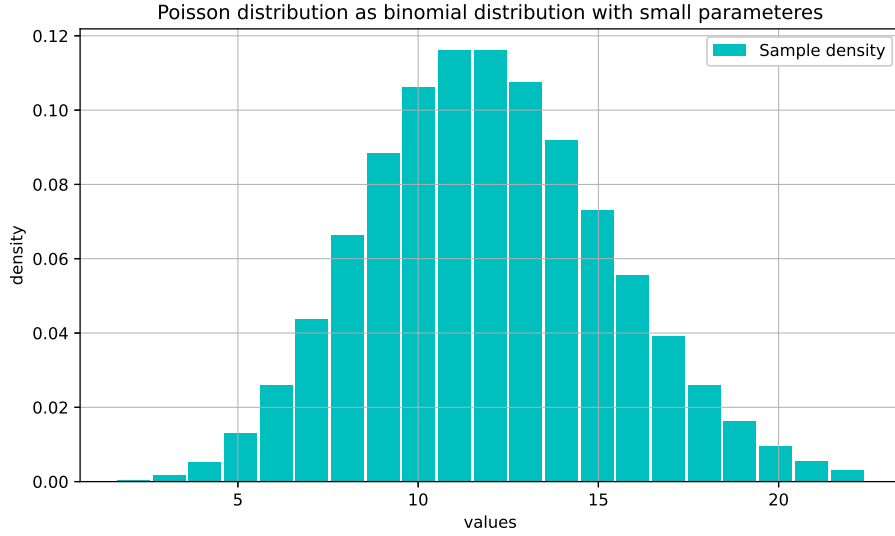


Рис. 1.14: Корректность работы датчика $\text{Pois}(\lambda)$ при помощи датчика $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ при $n = 10^4, \lambda = 12, N = 10^6$.

Проверяем гипотезу о виде функции распределения X при помощи критерия χ^2 Пирсона:

$$H_0 : F_X(\cdot) = F_{\text{Pois}}(\cdot)$$

с уровнем значимости α , где $F_{\text{Pois}}(\cdot)$ - функция распределения $\text{Pois}(10)$.

Выберем разбиение T размера $m = 15$ области определения распределения (\mathbb{N}_0):

$$T = \bigcup_{k=1}^{15} T_k, \quad T_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad T_k = \{k + 3\}, k = \overline{2, 14}, \quad T_{15} = \{k \geq 18\}.$$

Вычисляем теоретические вероятности $p_k = \mathbb{P}(X \in T_k)$ при условии истинности H_0 . Вычисляем l_k - число попаданий значений выборки X в множество T_k .

Согласно критерию χ^2 Пирсона при истинности гипотезы H_0 статистика χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(l_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^m \frac{n}{p_k} \left(\frac{l_k}{n} - p_k \right)^2$$

имеет распределение χ_{m-1}^2 .

Будем принимать гипотезу, если $1 - F_{\chi_{m-1}^2}(\chi^2) > \alpha$.

При проверке истинности гипотезы о виде распределения при помощи критерия χ^2 Пирсона для выборки размера $N = 10^4$ пуассоновского распределения, полученную как биномиальное распределение с малым параметром, в количестве 250 раз с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ гипотеза H_0 была принята в 95.6% случаев.

1.3.6 Генератор стандартного нормального распределения (преобразование Бокса-Мюллера)

Существует эффективный способ моделирования пары независимых нормально распределенных случайных величин. Он основан на следующей теореме.

Теорема 6 (преобразование Бокса-Мюллера). Пусть ξ_1, ξ_2 - независимые стандартно нормально распределенные случайные величины. Тогда их можно представить в виде

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\omega} \cos \nu, \\ \xi_2 = \sqrt{\omega} \sin \nu. \end{cases}$$

где $\nu \sim U[0, 2\pi]$, $\omega \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$ - независимые.

Доказательство. Покажем, что совместные плотности векторов

$$(\xi_1, \xi_2), (\sqrt{\omega} \cos \nu, \sqrt{\omega} \sin \nu)$$

совпадают. Для этого достаточно перейти к полярным координатам под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} dx_2 dx_1 = \\ &= \left| \begin{array}{l} x_1 = r \cos \alpha, \\ x_2 = r \sin \alpha. \end{array} \right| = \iint_{\substack{r \cos \alpha < x \\ r \sin \alpha < y}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\alpha = \\ &= \{\omega = r^2, d\omega = 2r dr\} = \\ &= \iint_{\substack{\sqrt{\omega} \cos \alpha < x \\ \sqrt{\omega} \sin \alpha < y}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{1}{2} d\omega d\alpha = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < y). \end{aligned}$$

□

На рисунке 1.15 продемонстрирована корректность работы датчика, основанном на преобразование Бокса-Мюллера, для моделирования выборки из стандартного нормального распределения размера $N = 10^6$.

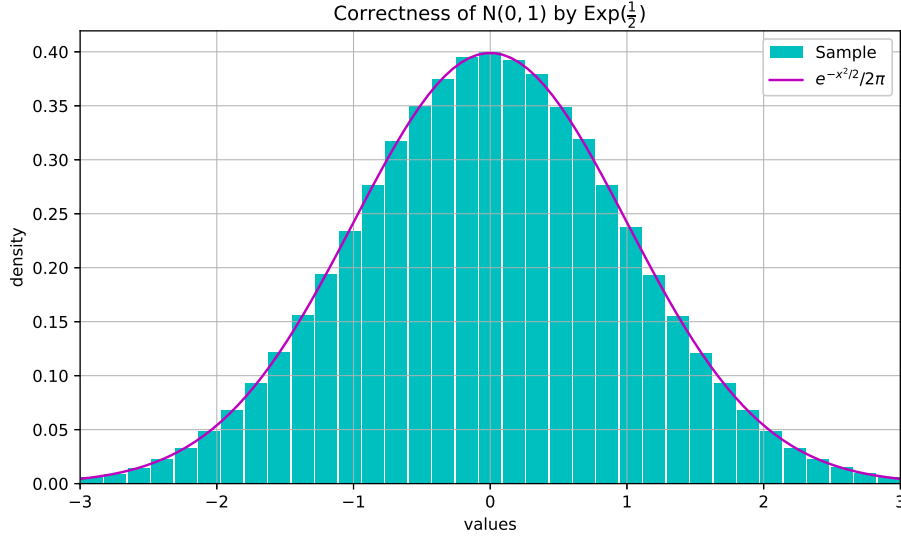


Рис. 1.15: Корректность работы датчика стандартного нормального распределения через датчик экспоненциального распределения для выборки $N = 10^6$.

Определение 7. Пусть Y_0, Y_1, \dots, Y_n — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины: $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = \overline{0, n}$. Тогда распределение случайной величины t :

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

называется *распределением Стьюдента с n степенями свободы*: $t \sim t(n)$.

Утверждение 6 (Стьюдент). Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины такие, что $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = \overline{1, n}$. Положим \bar{X} — выборочное среднее, S^2 — несмещенная выборочная дисперсия. Тогда

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

где $t(n-1)$ — *распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы*.

Дополнительно проверим гипотезу о равенстве мат. ожидания конкретному значению одной нормально распределенной выборки при помощи t-критерия Стьюдента:

$$H_0 : \mathbb{E}X = \mu.$$

Согласно утверждению Стьюдента при истинности гипотезы H_0 статистика T имеет распределение $t(n-1)$. Отметим, что критерий Стьюдента имеет двустороннюю критическую область.

Будем принимать H_0 , если $|T| < K_\alpha = F_{t(n-1)}^{-1}(1 - \alpha/2)$.

Нужные значения возьмём из таблицы: при $\alpha = 0.05, n = 10^4 + 1$ квантиль $K_\alpha \approx 1.9623$.

При применении описанного выше t-критерия Стьюдента в количестве 1000 раз для выборки из $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 2.5$, $\sigma = 1.25$ размера $N = 10^5$ нулевая гипотеза была принята в 95.3% случаев.

Определение 8. Пусть Y_1, Y_2 — независимые случайные величины, имеющие распределения $\chi^2(d_1), \chi^2(d_2), d_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$ соответственно. Тогда распределение случайной величины

$$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$$

называется распределением Фишера со степенями свободы d_1, d_2 . Обозначение: $F \sim F(d_1, d_2)$.

Далее проверим гипотезу о равенстве дисперсий двух независимых нормально распределенных выборок при помощи критерия Фишера:

$$H_0 : \mathbb{D}X = \mathbb{D}Y = \sigma^2.$$

При истинности гипотезы H_0 для выборок X (размера n) и Y (размера m) статистика

$$D = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(m-1, n-1),$$

где $F(m-1, n-1)$ — распределение Фишера со степенями свободы $n-1$ и $m-1$. Отметим, что критерий Фишера также имеет двустороннюю критическую область.

Будем принимать H_0 , если $D \in (K_{\alpha/2}, K_{1-\alpha/2})$, где $K_{\alpha/2} = F_{F(n-1, m-1)}^{-1}(\alpha/2)$, $K_{1-\alpha/2} = F_{F(n-1, m-1)}^{-1}(1 - \alpha/2)$.

При применении описанного выше критерия Фишера для двух выборок $X, Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 2.5$, $\sigma = 1.25$ размеров N и M соответственно в количестве 1000 раз с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ нулевая гипотеза была принята в 95.8% случаев.

1.4 Задание 4

1.4.1 Условие

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи графика normal probability plot убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в задании 3 и в задании 4.

1.4.2 Генератор распределения Коши

Определение 9. Распределение Коши $C(x_0, \gamma)$ — абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$\frac{1}{\pi\gamma \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)},$$

где x_0 — параметр сдвига, $\gamma > 0$ — параметр масштаба.

Пусть $X \sim C(x_0, \gamma)$. Тогда

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right) + \frac{1}{2},$$

$$F_X^{-1}(x) = x_0 + \gamma \operatorname{tg} \left[\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Будем моделировать выборку распределения Коши метод обращения функции распределения.

На рисунке 1.16 продемонстрировано отсутствия математического ожидания распределения Коши.

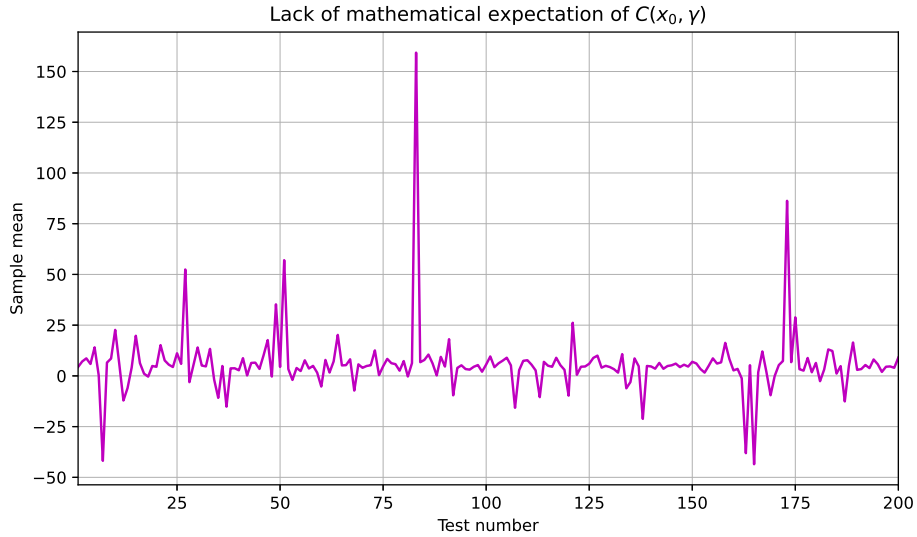


Рис. 1.16: Мат. ожидание $C(5, 2)$ в зависимости от номера запуска при $N = 10^6$.

1.4.3 Генератор стандартного нормального распределения (через г-р распределения Коши)

Опишем *метод элиминации фон Неймана*.

Ставится задача моделирования распределения с плотностью $f(x)$ со значениями в \mathbb{R}^n . Пусть имеются $X \sim g(x)$ и $U \sim U[0, 1]$ - две случайные величины, $g(x)$ принимает значения в \mathbb{R}^n . Также имеется константа $c \geq 1$.

Можно показать, что случайный вектор $(X, cUg(X)) \sim U(A)$, где $A = \{(x, u) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq u \leq cf(x)\}$.

Доказательство, обоснование корректности приведены в [3], с. 40-46.

Обоснованность алгоритма моделирования для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ приведена там же, с. 46.

Функция `scipy.stats.probplot` строит Q-Q plot (quantile-quantile plot). Он определяется следующим образом.

- По оси ординат откладывается выборка в возрастающем порядке.

- По оси абсцисс откладываются теоретические квантили заданного распределения (в данном случае нормального).

Подсчет теоретических квантилей осуществляется при помощи преобразования Филлибена, ведь возникает проблема их вычисления для выборок малого размера.

Таким образом, чтобы проверить данные на нормальность, достаточно взглянуть на линейный порядок сортированных данных на Q-Q графике.

На рисунке 1.17 отчетливо видна линейная зависимость, что влечёт корректность построенного датчика.

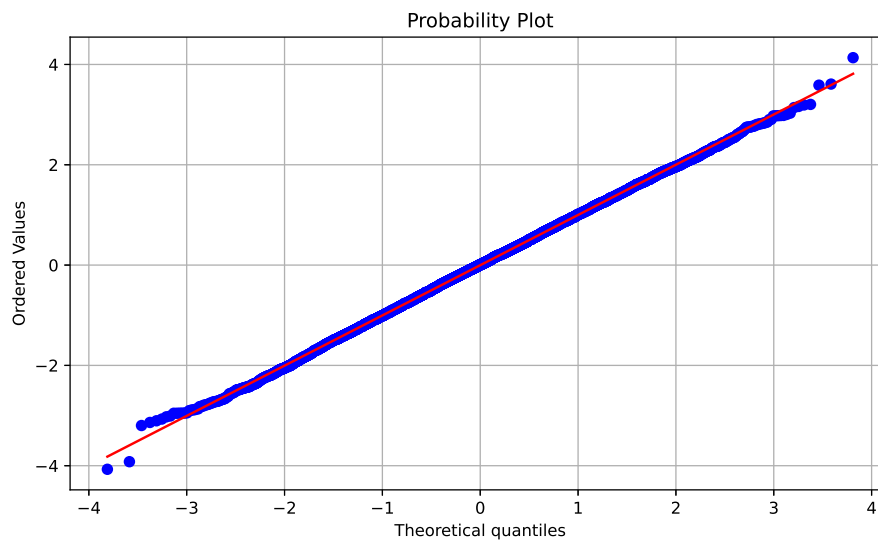


Рис. 1.17: Probability plot для выборки $\mathcal{N}(0, 1)$, полученной методом элиминации, при $N = 10^6$.

1.4.4 Сравнение скорости сходимости

На рисунке 1.18 продемонстрирована средняя скорость вычисления по 100 вычислениям в зависимости от размера выборки на логарифмической шкале.

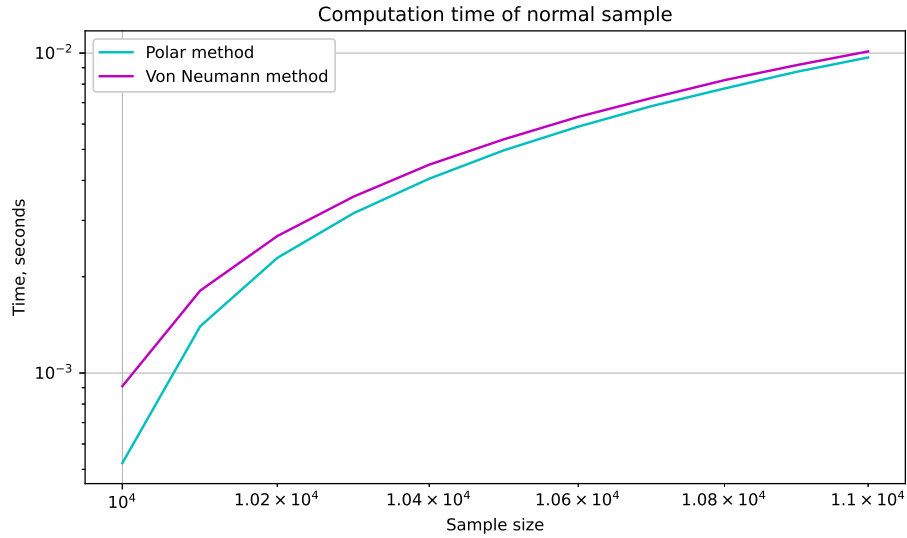


Рис. 1.18: Сравнение скорости моделирования выборки из стандартного нормального распределения полярным методом и методом элиминации.

1.5 Задание 5

1.5.1 Условие

1. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости теоремы о законе больших чисел (ЗБЧ) и центральной предельной теоремы (ЦПТ): исследовать поведение суммы $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n} \frac{S_n}{n} - a.$$

2. Считая μ, σ неизвестными, построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии по имеющейся выборке.
3. Пусть $X_i \sim K(a, b)$ - имеет распределение Коши с параметрами сдвига a и масштаба b . Изучить эмпирически как ведут себя суммы $\frac{S_n}{n}$, объяснить результат и найти закон распределения данных сумм.

1.5.2 Справедливость теоремы о ЗБЧ и ЦПТ

Сформулируем теорему о ЗБЧ в форме А.Я.Хинчина. ЦПТ сформулирована в пункте 1.1.4.

Теорема 7 (о законе больших чисел в форме А.Я.Хинчина). Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность н.о.р.с.в. таких, что $\mathbb{E}|X_k| < \infty$, $\mathbb{E}X_1 = \mu$. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Доказательство. Приведено в [2], с.447-449. □

Согласно ЦПТ выполняется

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right) = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

На рисунке 1.20 это доказано эмпирически. Также, на рисунке 1.19 продемонстрирована сходимость выборочного среднего к теоретическому среднему при $\mu = 5, \sigma = 1.5$.

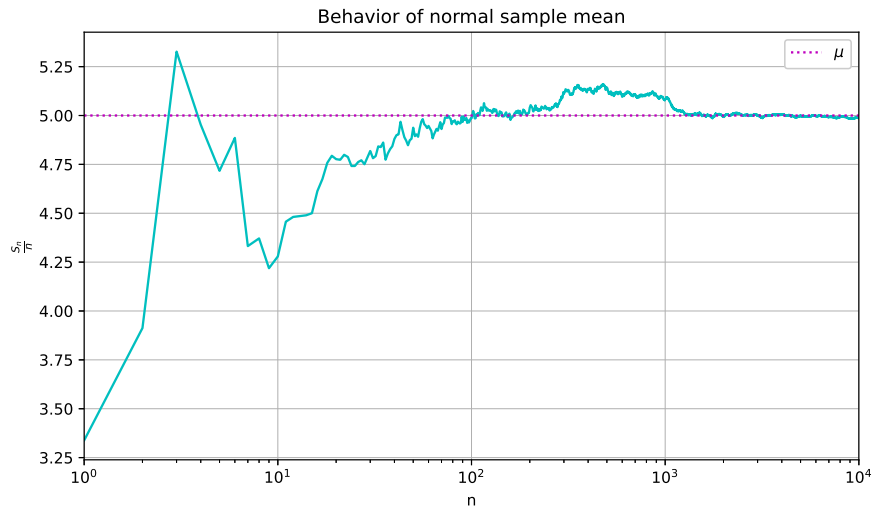


Рис. 1.19: Выборочное среднее суммы S_n/n при $X_i \sim \mathcal{N}(5, 1.5^2)$ в зависимости от размера выборки.

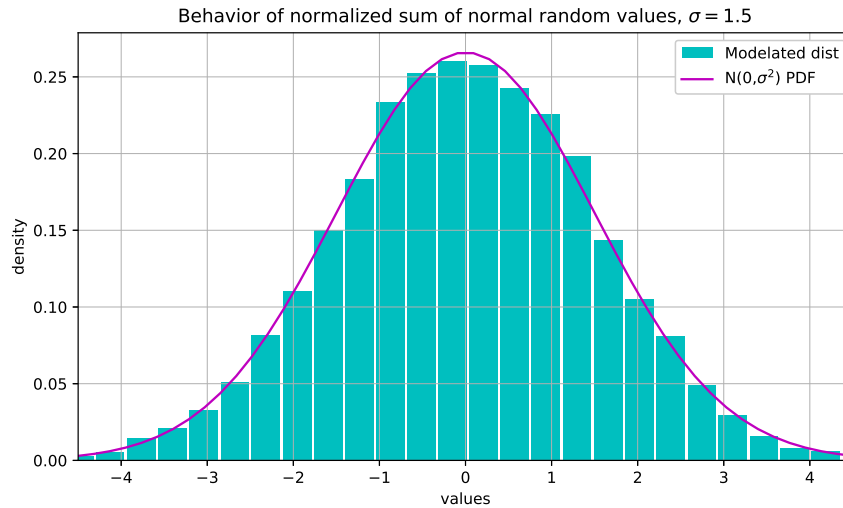


Рис. 1.20: Распределение нормированной суммы $\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \mu)$ при $\mu = 5, \sigma = 1.5, N = 10^4$.

1.5.3 Доверительные интервалы для среднего и дисперсии

Определение 10. Пара статистик $T_1(X_\theta), T_2(X_\theta)$ называется доверительным интервалом для параметра θ с уровнем значимости $\alpha \in [0, 1]$, если

$$\mathbb{P}(T_1(X_\theta) \leq \theta \leq T_2(X_\theta)) \geq 1 - \alpha.$$

Знаем распределения следующих статистик:

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1). \quad D = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Здесь \bar{X} - выборочное среднее, S^2 - несмещенная выборочная дисперсия:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{n-1}.$$

Будем искать доверительные интервалы (γ_1, γ_2) с уровнем значимости α :

$$\mathbb{P}(\gamma_1 < Y < \gamma_2) = 1 - \alpha,$$

считая μ, σ неизвестными. Для этого достаточно взять γ_1, γ_2 равными таким квантилям, что

$$\mathbb{P}(\gamma_1 < Y < \gamma_2) = \underbrace{\mathbb{P}(Y < \gamma_2)}_{1 - \frac{\alpha}{2}} - \underbrace{\mathbb{P}(Y < \gamma_1)}_{\frac{\alpha}{2}} = 1 - \alpha.$$

Доверительный интервал для среднего μ ищем при $Y = T$.

$$\mathbb{P}(\gamma_1 < T < \gamma_2) = \mathbb{P}\left(\gamma_1 < \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} < \gamma_2\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X} - \frac{\gamma_2 S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - \frac{\gamma_1 S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Выберем

$$\gamma_1 = F_{t(n-1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \gamma_2 = F_{t(n-1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, $\mu \in \left(\bar{X} - \frac{\gamma_2 S}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \frac{\gamma_1 S}{\sqrt{n}}\right)$ с вероятностью $1 - \alpha$.

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 ищем при $Y = D$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\gamma_1 < D < \gamma_2) &= \mathbb{P}\left(\gamma_1 < \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\sigma^2} < \gamma_2\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_1}\right) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Выберем

$$\gamma_1 = F_{\chi^2(n-1)}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \gamma_2 = F_{\chi^2(n-1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, $\sigma^2 \in \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_2}, \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{\gamma_1}\right)$ с вероятностью $1 - \alpha$.

При проведении 1000 тестов параметр μ принадлежал доверительному интервалу с уровнем значимости $\alpha = 0.05$ в 94.8% случаев. Также, дисперсия σ^2 принадлежала соответствующему доверительному интервалу в 95.5% случаев. На рисунках 1.21, 1.22 продемонстрировано сужение доверительных интервалов при увеличении размера выборки при $\mu = 2, \sigma = 3$.

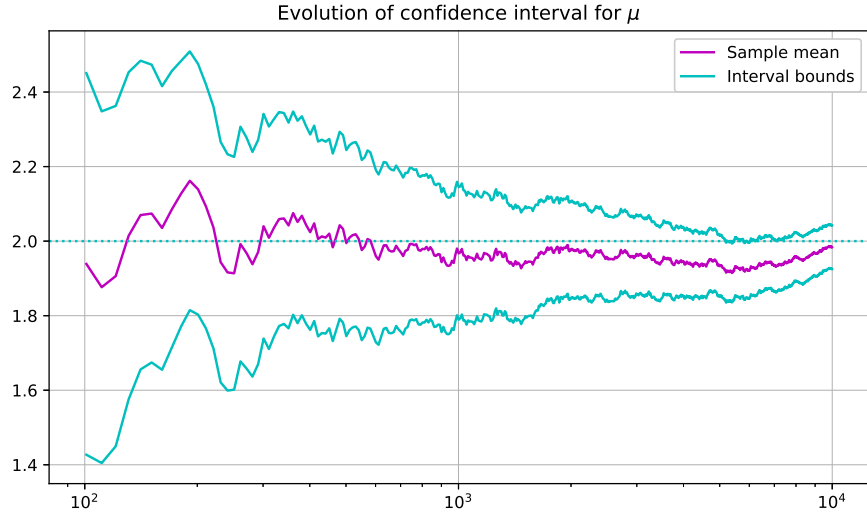


Рис. 1.21: Доверительные интервалы для выборочного среднего выборки из $\mathcal{N}(2, 3^2)$ в зависимости от размера выборки.

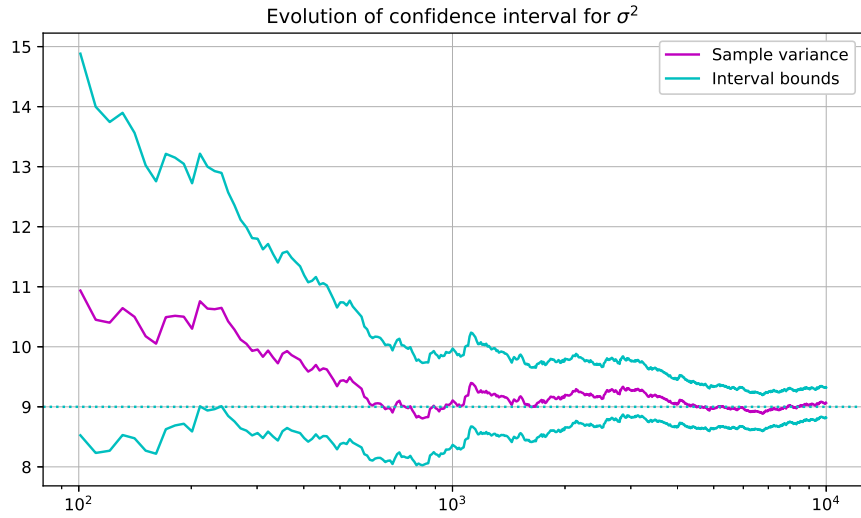


Рис. 1.22: Доверительные интервалы для выборочной дисперсии выборки из $\mathcal{N}(2, 3^2)$ в зависимости от размера выборки.

1.5.4 Распределение суммы элементов распределения Коши

Определение 11. Характеристической функции случайной величины X называется

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{itX}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим $X_1, X_2, \dots \sim C(a, b)$, где a - параметр сдвига, $b > 0$ - параметр масштаба. Как известно, плотность распределения Коши задаётся в виде

$$\frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)}.$$

Характеристическая функция $\xi \sim C(0, 1)$ равна

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = e^{-|t|}.$$

Используем её для вычисления характеристической функции X_1 .

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dx}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} = \left| \begin{array}{l} x = yb + a \\ dx = bdy \end{array} \right| = \\ &= e^{iat} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itby} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} = e^{iat-b|t|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $Y = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E} e^{itY} = \mathbb{E} \exp \left\{ it \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right\} = \{\text{н.о.р.с.в.}\} = \\ &= \left(\mathbb{E} \exp \left\{ i \frac{t}{n} X_1 \right\} \right)^n = \left(\varphi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n = e^{iat-b|t|}. \end{aligned}$$

Таким образом, $Y \sim C(a, b)$. Эмпирически убедимся в этом на рисунке 1.23.

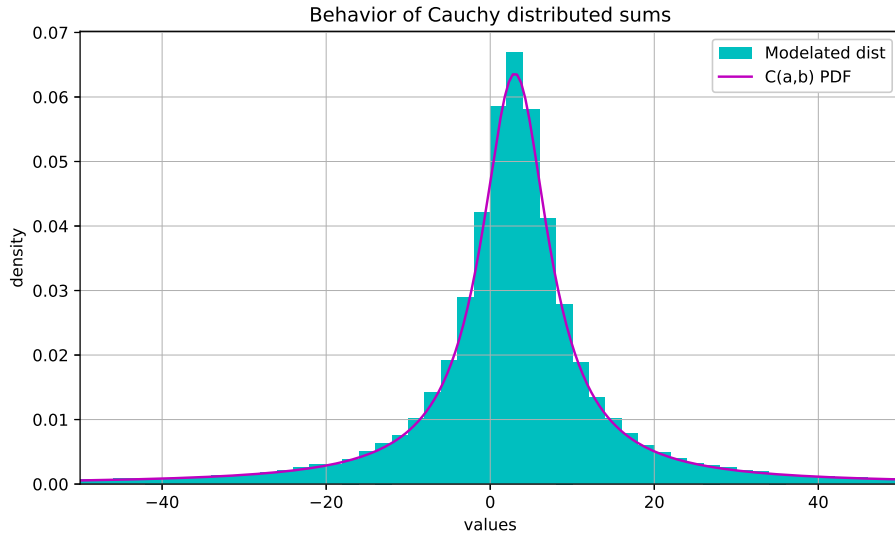


Рис. 1.23: Распределение суммы случайных величин $C(3, 5)$.

1.6 Задание 6

1.6.1 Условие

1. Вычислить следующий интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdots x_{10}^2})}}{x_1^2 \cdots x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

- Методом Монте-Карло,
- Методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.

2. Оценить точность вычислений для каждого из двух случаев.

1.6.2 Вычисление интеграла

Можно заметить, что интеграл существует, и он представим в виде

$$\begin{aligned} I &= \pi^5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi^{10}}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \right\}}_{p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{10})} \cdot \underbrace{\frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2^7 \cdot \prod_{i=1}^{10} x_i^2} \right\}}{\prod_{i=1}^{10} x_i^2}}_{f(x_1, x_2, \dots, x_{10})} dx_1 dx_2 \dots dx_{10} = \\ &= \pi^5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{10}) dx_1 dx_2 \dots dx_{10}, \end{aligned}$$

что равняется $\mathbb{E}[f(\xi)]$, где ξ - случайный вектор, компонентами которого являются независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2}$.

Независимость следует из того, что совместная плотность представима в виде произведения плотностей отдельных компонент:

$$p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) \cdots p_{\xi_{10}}(x_{10}),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{10})$, $\xi_i \sim N(0, \frac{1}{2})$, $i = \overline{1, 10}$.

Рассмотрим $\eta_i = f(\xi)$, $i = \overline{1, n}$ - н.о.р.с.в. Согласно теореме о законе больших чисел

$$\frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\eta_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Альтернативно воспользуемся методом прямоугольников. Для этого рассмотрим замену $x_i = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\varphi_i)$, $i = \overline{1, 10}$. Определитель якобиана равен

$$|J| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \left(\prod_{i=1}^{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right)\right)^{-1}.$$

Интеграл равен

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{10}, \\ \theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{10} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right)} \exp \left\{ -\left(\sum_{i=1}^{10} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right) + \frac{1}{2^7} \prod_{i=1}^{10} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi_i\right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Подинтегральная функция $\theta(\vec{\varphi})$ обладает следующими свойствами. - $\theta(\vec{\varphi})$ четна по каждому аргументу. - $\theta(\vec{\varphi})$ инвариантна относительно перестановки аргументов $\varphi_i \mapsto \varphi_j, i \neq j$.

Первое свойство позволяет свести пределы интегрирования к $[0, 1]$, т.е.

$$I = \pi^{10} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{10}.$$

Введём равномерную сетку на $(0, 1)^{10}$.

$$T = \{(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_{10}}^{10}) \mid t_{i_k}^k = \frac{i_k + \frac{1}{2}}{N+1}, i_k = \overline{1, N}, k = \overline{1, 10}\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &\approx \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{i=1}^N \cdots \sum_{i_{10}=1}^N \theta(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_{10}}^{10}) = \\ &= \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{i=1}^N \cdots \sum_{i_{10}=1}^N \theta\left(\frac{i_1 + \frac{1}{2}}{N+1}, \frac{i_2 + \frac{1}{2}}{N+1}, \dots, \frac{i_{10} + \frac{1}{2}}{N+1}\right). \end{aligned}$$

В силу инвариантности под знаками суммирования возникают равные значения для перестановок одного и того же набора индексов. Для каждого набора различных индексов таких перестановок всего $10!$. Для набора индексов, где встречаются равные значения, таких перестановок всего существует

$$\frac{10!}{m_1! m_2! \cdots m_N!},$$

где $m_k!$ - число индексов в наборе $(i_1, i_2, \dots, i_{10})$, равных k .

Таким образом,

$$I \approx \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{1 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{10} \leq N} \frac{10!}{m_1! m_2! \cdots m_N!} \cdot \theta\left(\frac{i_1 + \frac{1}{2}}{N+1}, \frac{i_2 + \frac{1}{2}}{N+1}, \dots, \frac{i_{10} + \frac{1}{2}}{N+1}\right).$$

1.6.3 Оценка точности вычисления

Оценим точность вычислений эмпирически. Как можно заметить, значение интеграла, вычисленного по методу Монте-Карло находится в окрестности числа 125 (рисунок 1.24). При этом значение, вычисленное квадратурным методом, зависит как квадратный корень от размера дискретизации (рисунок 1.25) и с увеличением таковой стремится к тому же числу.

Найдём аналитическую оценку скорости сходимости для метода Монте-Карло. Из теоремы о ЗБЧ для последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин с конечными первым и вторым моментами: $\mathbb{X}_i = a, \mathbb{D}X_i = \sigma^2$ следует, что

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathbb{E}[\bar{X}_n - a]^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, скорость сходимости составляет $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (достаточно медленная). Отметим, что при этом метод Монте-Карло является универсальным.

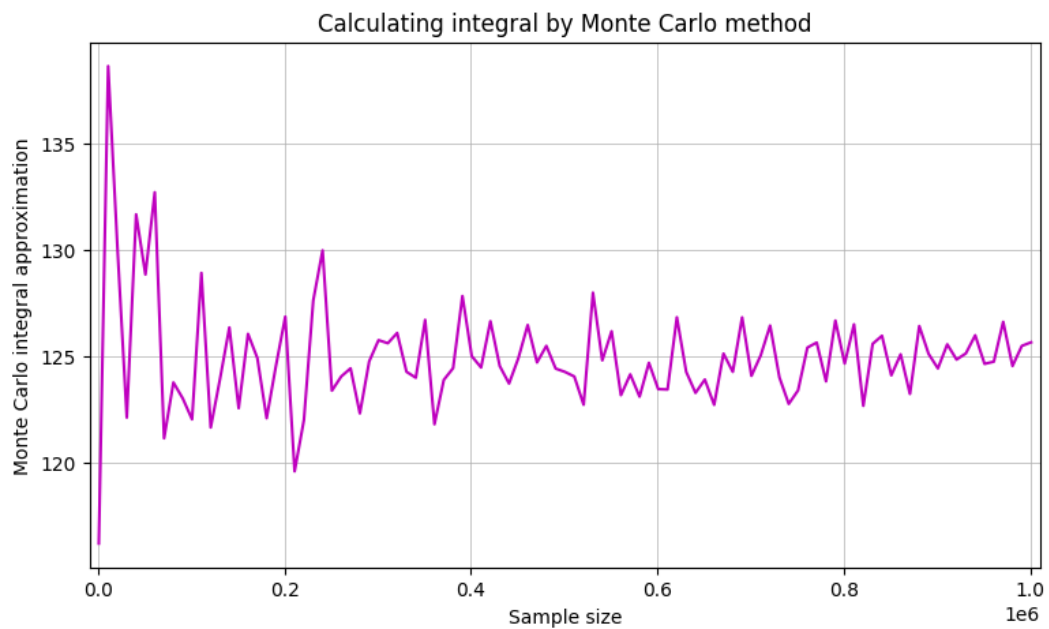


Рис. 1.24: Приближенное значение интеграла, полученного методом Монте-Карло, в зависимости от размера выборки.

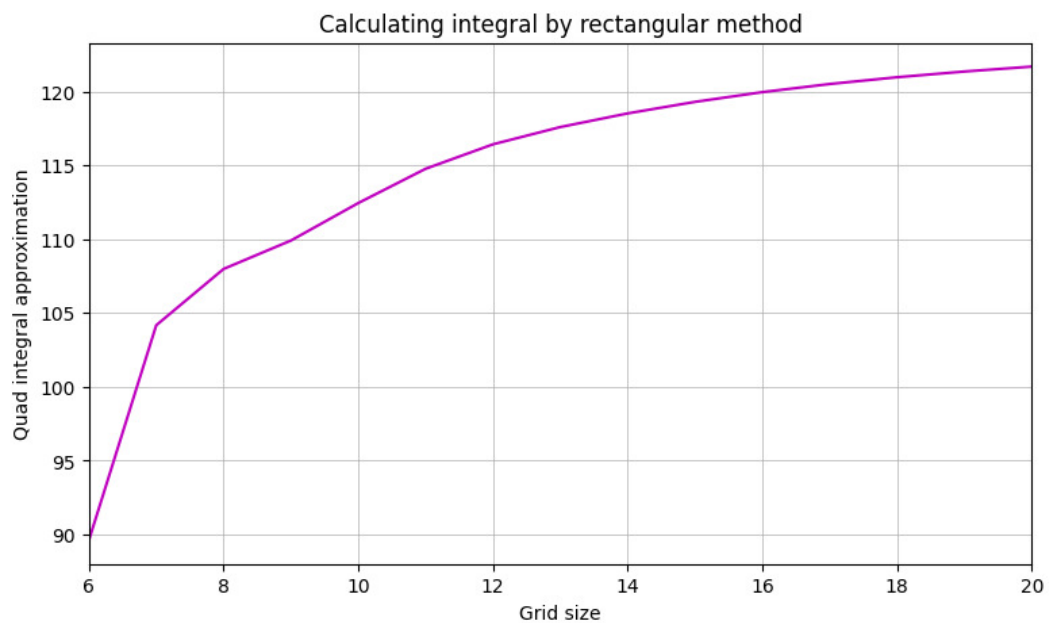


Рис. 1.25: Приближенное значение интеграла, полученного методом квадратур, в зависимости от размера дискретной сетки.

Глава 2

Вторая часть практикума

2.1 Задание 7

2.1.1 Условие

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, где

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10x_1x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0.$$

При $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ функция доопределяется по непрерывности.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве \mathbb{R}^2 , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

3. Оценить точность и сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

2.1.2 Метод случайного поиска

Метод случайного поиска минимального значения функции $f(x)$ на множестве A :

1. Смоделировать выборку размера n точек $x \sim U\{A\}$ (равномерно распределены на множестве A).
2. Выбрать ту реализацию случайной величины, на которой достигается наименьшее значение.

Данная функция $f(x) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10x_1x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}$ обладает свойствами

1. $f(x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$ (чётность по x_2).
2. $f(-x_1, 0) = f(x_1, 0) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1}$.
3. $f(0, 0) = 0$.

Следовательно, если $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ доставляет минимум функции, то $(x_1^*, -x_2^*)$ также доставляет минимум. Минимум меньше нуля, ведь $f(0.123, 0.123) < 0$ (проверяется численно). Следовательно, функция f имеет хотя бы две точки глобального минимума.

По условию задачи множество A - круг единичного радиуса на плоскости (x_1, x_2) . Пусть $x = (x_1, x_2) \sim U(A)$. По определению для любого борелевского множества M выполняется (μ - мера Лебега на плоскости)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((x_1, x_2) \in M) &= \frac{\mu(M)}{\mu(A)} = \frac{1}{\pi} \iint_M dt_1 dt_2 = \left| \begin{matrix} t_1 = r \cos \alpha \\ t_2 = r \sin \alpha \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_M r dr d\alpha = \iint_M d(r^2) d\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, будем моделировать

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\omega} \cos \alpha \\ x_2 = \sqrt{\omega} \sin \alpha \end{cases}$$

где $\omega \sim U[0, 1], \alpha \sim U[0, 2\pi]$.

2.1.3 Метод имитации отжига

2.1.4 Сравнение методов со стандартными методами оптимизации

Метод случайного поиска

Пусть $\varepsilon > 0$ - наперед заданная точность вычислений. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ доставляет минимум функции $f(x_1, x_2)$. Оценим точность работы алгоритма при помощи многомерной теоремы Лагранжа

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \max_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} \cdot \|x - x^*\|.$$

Справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| &= \left| 3x_1^2 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \cos \frac{1}{x_1} + 10x_2^4 \cos \frac{1}{x_2} \right| \leq 14. \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| &= \left| 40x_1x_2^3 \cos \frac{1}{x_2} + 10x_1x_2^2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq 50. \end{aligned}$$

Далее выберем окрестность радиуса δ : $B_\delta(x^*) = \{x : \|x - x^*\| \leq \delta\}$. Пусть p - вероятность того, что в $B_\delta(x^*)$ находится хотя бы одна точка выборки.

2.2 Задание 8

1. Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D \\ u|_{\delta D} = f(x, y) \\ u \in C^2(D), f \in C(\delta D) \\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

2. Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

2.2.1 Метод Монте-Карло для уравнения Лапласа

Будем решать задачу не в единичном круге, а в единичном квадрате. Решение при этом не изменится, ведь $x^2 - y^2$ — единственное решение поставленной задачи в единичном круге, которое является непрерывным. После работы алгоритма выберем только те точки, которые лежат в единичном круге.

Введём сетку на единичном квадрате $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Конечно-разностная схема для уравнения Лапласа представима в виде

$$u(P) = \frac{1}{4} (u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4)) .$$

2.2.2 Сравнение численного результата с аналитическим решением

Функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ удовлетворяет $\Delta u = 0$. Для внешней задачи Дирихле условием регулярности является ограниченность функции u . Функция $f = u$ является ограниченной, следовательно, данное уравнение имеет единственное решение, равное $x^2 - y^2$.

2.3 Задание 9

2.4 Задание 10

2.5 Задание 11

Литература

- [1] *Смирнов С. Н.* Лекции по стохастическому анализу. 2023-2024.
- [2] *Ширяев А. Н.* Вероятность, Кн. 1 - *М.:МЦНМО*, 2021.
- [3] *Devroye L.* Non-uniform random variate generation, *Springer-Verlag, New York*, 1986.
- [4] *Кропачева Н. Ю., Тихомиров А. С.* Моделирование случайных величин: Метод. указания, *Великий Новгород*, 2004.
- [5] *Некрутин В. В.* Моделирование распределений, 2014.
- [6] *Бусленко Н. П., Соболев И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А.* Метод статистических испытаний, 1961.
- [7] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 1, *М.: Мир*, 1964.
- [8] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 2, *М.: Мир*, 1967.
- [9] *Kalman R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Md.*, 1960.
- [10] *Lewis P. A. W., Shedler G. S.* Simulation of Nonhomogeneous Poisson Processes by Thinning, 1979.
- [11] *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления, *М.: Мир*, 1973.