Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
А. А. Пилюшенок

Руководитель практикума
д.ф.-м.н., профессор С. Н. Смирнов

Москва, 2024

Оглавление

1 Первая часть практикума **3**

1.1 Задание 1 . . . 3

1.2 Задание 2 . . . 3

1.3 Задание 3 . . . 3

1.4 Задание 4 . . . 3

1.5 Задание 5 . . . 3

1.6 Задание 6 . . . 3

2 Вторая часть практикума **4**

2.1 Задание 7 . . . 4

2.1.1 Условие . . . 4

2.1.2 Метод случайного поиска . . . 4

2.1.3 Метод имитации отжига . . . 5

2.1.4 Сравнение методов со стандартными методами оптимизации . . . 5

2.2 Задание 8 . . . 5

2.2.1 Метод Монте-Карло для уравнения Лапласа . . . 6

2.2.2 Сравнение численного результата с аналитическим решением . . . 6

2.3 Задание 9 . . . 6

2.4 Задание 10 . . . 6

2.5 Задание 11 . . . 6

Глава 1

Первая часть практикума

1.1 Задание 1

1.2 Задание 2

1.3 Задание 3

1.4 Задание 4

1.5 Задание 5

1.6 Задание 6

Глава 2

Вторая часть практикума

2.1 Задание 7

2.1.1 Условие

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, где
$$f(x_1, x_2) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10 x_1 x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0.$$
При $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ функция доопределяется по непрерывности.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве $\mathbb{R}^2$, где
$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

3. Оценить точность и сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

2.1.2 Метод случайного поиска

Метод случайного поиска минимального значения функции $f(x)$ на множестве A:

1. Смоделировать выборку размера n точек $x \sim \mathrm{U}\{A\}$ (равномерно распределены на множестве A).

2. Выбрать ту реализацию случайной величины, на которой достигается наименьшее значение.

Данная функция $f(x) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10 x_1 x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}$ обладает свойствами

1. $f(x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$ (чётность по x_2).

2. $f(-x_1, 0) = f(x_1, 0) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1}$.

3. $f(0, 0) = 0$.

Следовательно, если $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ доставляет минимум функции, то $(x_1^*, -x_2^*)$ также доставляет минимум. Минимум меньше нуля, ведь $f(0.123, 0.123) < 0$ (проверяется численно). Следовательно, функция f имеет хотя бы две точки глобального минимума.

По условию задачи множество A - круг единичного радиуса на плоскости (x_1, x_2). Пусть $x = (x_1, x_2) \sim \mathrm{U}(A)$. По определению для любого борелевского множества M выполняется (μ - мера Лебега на плоскости)

$$\mathbb{P}\left((x_1, x_2) \in M\right) = \frac{\mu(M)}{\mu(A)} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_M dt_1 dt_2 = \begin{vmatrix} t_1 = r\cos\alpha \\ t_2 = r\sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_M r dr d\alpha = \iint\limits_M d(r^2) d\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right).$$

Следовательно, будем моделировать

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\omega}\cos\alpha \\ x_2 = \sqrt{\omega}\sin\alpha \end{cases}$$

где $\omega \sim \mathrm{U}[0,1], \alpha \sim \mathrm{U}[0, 2\pi]$.

2.1.3 Метод имитации отжига

2.1.4 Сравнение методов со стандартными методами оптимизации

Метод случайного поиска

Пусть $\varepsilon > 0$ - наперед заданная точность вычислений. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ доставляет минимум функции $f(x_1, x_2)$. Оценим точность работы алгоритма при помощи многомерной теоремы Лагранжа

$$|f(x) - f(x^*)| \leqslant \max_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} \cdot ||x - x^*||.$$

Справедливы следующие оценки

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| = \left|3x_1^2 \sin\frac{1}{x_1} - x_1\cos\frac{1}{x_1} + 10x_2^4\cos\frac{1}{x_2}\right| \leqslant 14.$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| = \left|40x_1x_2^3\cos\frac{1}{x_2} + 10x_1x_2^2\sin\frac{1}{x_2}\right| \leqslant 50.$$

Далее выберем окрестность радиуса δ: $B_\delta(x^*) = \{x : ||x - x^*|| \leqslant \delta\}$. Пусть p - вероятность того, что в $B_\delta(x^*)$ находится хотя бы одна точка выборки.

2.2 Задание 8

1. Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D \\ u|_{\delta D} = f(x, y) \\ u \in C^2(D), f \in C(\delta D) \\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \end{cases}$$

2. Для функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

2.2.1 Метод Монте-Карло для уравнения Лапласа

Будем решать задачу не в единичном круге, а в единичном квадрате. Решение при этом не изменится, ведь $x^2 - y^2$ — единственное решение поставленной задачи в единичном круге, которое является непрерывным. После работы алгоритма выберем только те точки, которые лежат в единичном круге.

Введём сетку на единичном квадрате $|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$.

Конечно-разностная схема для уравнения Лапласа представима в виде

$$u(P) = \frac{1}{4}\left(u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4)\right).$$

2.2.2 Сравнение численного результата с аналитическим решением

Функция $f(x,y) = x^2 - y^2$ удовлетворяет $\Delta u = 0$. Для внешней задачи Дирихле условием регулярности является ограниченность функции u. Функция $f = u$ является ограниченной, следовательно, данное уравнение имеет единственное решение, равное $x^2 - y^2$.

2.3 Задание 9

2.4 Задание 10

2.5 Задание 11

Литература

[1] *Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А.* Метод статистических испытаний, 1961, с. 117-122.

[2] *Чистяков И. А.* Лекции по оптимальному управлению. 2023-2024.

[3] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамерклидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—4-е изд.—М.: «Наука», 1983.