

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Методические указания

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2004

УДК 519.2
М74

Печатается по решению
РИС НовГУ

Р е ц е н з е н т

доктор технических наук, профессор **Б. Ф. Кирьянов**

М74 Моделирование случайных величин: Метод. указания / Сост. Н. Ю. Кропачева, А. С. Тихомиров; НовГУ им. Ярослава Мудрого. — Великий Новгород, 2004. — 47 с.

Издано на основе лекций, прочитанных В.В. Некруткиным на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Излагаются общие методы моделирования случайных величин, методы моделирования некоторых часто встречающихся вероятностных распределений и методы проверки правильности моделирования.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика».

УДК 519.2

© Новгородский государственный
университет, 2004

© Н. Ю. Кропачева, А. С. Тихомиров,
составление, 2004

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При решении разных задач приходится использовать различные случайные величины, и, значит, нужно уметь находить значения этих случайных величин. При этом, как правило, поступают следующим образом: значения произвольной случайной величины получают путем преобразования значений одной какой-либо (“стандартной”) случайной величины. Обычно роль такой величины играет случайная величина α , равномерно распределенная на промежутке $[0, 1]$. В дальнейшем через α всегда будет обозначаться равномерно распределенная на промежутке $[0, 1]$ (кратко будем писать: р. р. на $[0, 1]$) случайная величина. Для получения значения стандартной случайной величины пользуются стандартными (уже готовыми) средствами. В языке программирования Турбо Паскаль таким средством является функция `Random` (стандартная математическая функция этого языка). Например, получить (и напечатать) значения десяти независимых р. р. на $[0, 1]$ случайных величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ можно при помощи следующего цикла:

```
for i := 1 to 10 do WriteLn(Random);
```

Здесь каждое последующее обращение к функциям `Random` возвращает значение следующей независимой р. р. на $[0, 1]$ случайной величины. Таким образом, у нас есть готовое средство (функция `Random`) для получения значений произвольного количества независимых р. р. на $[0, 1]$ случайных величин.

Если быть точным, то возвращаемые функцией Random числа лишь имитируют значения независимых р. р. на $[0, 1]$ случайных величин (такие числа называют псевдослучайными). Под словом *имитируют* подразумевается, что эти числа удовлетворяют ряду специальных тестов так, как если бы они были настоящими значениями нужных нам случайных величин [1–9]. При последующем изложении мы на эти тонкости обращать внимания не будем, и будем использовать псевдослучайные числа так, как если бы они были значениями последовательности независимых р. р. на $[0, 1]$ случайных величин.

Рассмотрим теперь способы получения значений произвольных случайных величин. Пусть задано P_ξ — распределение вероятностей случайной величины ξ . Наша цель состоит в получении значения случайной величины ξ с заданным распределением P_ξ . Получать нужные случайные величины будем с помощью преобразования последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ независимых р. р. на $[0, 1]$ случайных величин. Условимся процесс нахождения значений какой-либо случайной величины ξ путем преобразования одного или нескольких значений р. р. на $[0, 1]$ случайных величин называть *моделированием случайной величины ξ* . Таким образом, будем получать ξ в виде $\xi = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, или, в более сложном случае, в виде $\xi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$. Функцию $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ (или $\varphi: [0, 1]^\infty \rightarrow \mathbb{R}$) назовем *моделирующей функцией*, а формулу $\xi = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, (или $\xi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$) — *моделирующей формулой*.

Через $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ обозначим функцию распределения случайной величины ξ . Через $p_\xi(x)$ обозначим плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ . Математическое ожидание случайной величины ξ обозначим $E \xi$, а дисперсию обозначим $D \xi$.

В разделе 2 представлены общие методы моделирования случайных величин. В разделе 3 приведены моделирующие формулы для некоторых часто встречающихся вероятностных распределений. В разделах 4 и 5 описаны два метода проверки правильности моделирования.

2. ОБЩИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. Метод обратной функции

Пусть $F(x) = P(\xi < x)$ — функция распределения некоторой случайной величины ξ . Отметим вначале некоторые свойства функции распределения.

Теорема 1. *Функция распределения F обладает следующими свойствами:*

1. Если $x \leq y$, то $F(x) \leq F(y)$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow y-0} F(x) = F(y)$ (непрерывность слева).

Доказательство можно найти, например, в [20]. □

Перейдем теперь к получению моделирующих формул.

Теорема 2. Пусть функция распределения F имеет обратную F^{-1} . Тогда функцией распределения случайной величины

$$\eta = F^{-1}(\alpha)$$

является F .

Доказательство. Найдем функцию распределения η :

$$F_{\eta}(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = \mathbf{P}(F^{-1}(\alpha) < x) = \mathbf{P}(\alpha < F(x)) = F(x).$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. 1. Метод обратной функции эффективен, если удастся получить простую формулу для F^{-1} . А это не всегда возможно.

2. Условие обратимости функции F очень ограничительно. Далеко не каждая функция распределения имеет обратную. Но от этого требования можно отказаться.

Пусть F — функция распределения произвольной случайной величины ξ . При $0 < y < 1$ зададим функцию G следующим образом:

$$G(y) = \inf\{t : F(t) > y\}.$$

Теорема 3. Функцией распределения случайной величины

$$\eta = G(\alpha)$$

является F .

Доказательство. Учитывая равенство $\mathbf{P}(\alpha < F(x)) = F(x)$, докажем, что $\mathbf{P}(G(\alpha) < x) = \mathbf{P}(\alpha < F(x))$. Для этого достаточно показать, что условия $G(y) < x$ и $y < F(x)$ равносильны.

1. Пусть $G(y) < x$. Тогда $\inf\{t : F(t) > y\} < x$, и, значит, $F(x) > y$.

2. Пусть теперь $y < F(x)$. Обозначим $z = G(y) = \inf\{t : F(t) > y\}$. Тогда $F(z - \varepsilon) \leq y$ для всех $\varepsilon > 0$. Значит, по непрерывности слева функции F , $F(z) \leq y$. Таким образом, $F(z) \leq y < F(x)$, и, в силу монотонности F , $G(y) = z < x$. Теорема доказана. \square

Замечание 2. В отличие от Теоремы 2, Теорема 3 применима к любой функции распределения F . Трудности могут возникнуть при вычислении G .

Укажем один из способов получения G .

Теорема 4. Пусть $F(x)$ — функция распределения, и F_0 — сужение функции F на отрезок $[a, b]$. Пусть функция F_0 имеет обратную F_0^{-1} , и, кроме того, $F(a) = 0$ и $F(b) = 1$. Тогда $G = F_0^{-1}$.

Доказательство. Пусть $0 < y < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} G(y) &= \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) > y\} = \\ &= \inf\{t \in [a, b] : F(t) > y\} = \inf\{t \in [a, b] : F_0(t) > y\} = \\ &= \inf\{t \in [a, b] : t > F_0^{-1}(y)\} = F_0^{-1}(y). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Замечание 3. 1. Аналогичные утверждения справедливы и в тех случаях, когда $a = -\infty$ или $b = +\infty$.

2. Если функция распределения F имеет обратную F^{-1} , то

$G = F^{-1}$. Поэтому Теорема 3 является обобщением Теоремы 2. 3. Большинство моделирующих формул раздела 3 получено при помощи метода обратных функций.

Пример 1. Пусть функция распределения случайной величины ξ задается следующей формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^n, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad (1)$$

где n — натуральное число. Применяя Теоремы 3 и 4, получим моделирующую формулу для ξ . Пусть F_0 — сужение функции F на отрезок $[0, 1]$, $F_0(x) = x^n$. Найдем F_0^{-1} , решая уравнение $F_0(x) = y$ относительно x . Имеем: $x^n = y$ и $x = \sqrt[n]{y}$. Поэтому $F_0^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, и моделирующей формулой для ξ служит формула

$$\xi = \sqrt[n]{\alpha}. \quad (2)$$

Приведем еще один способ моделирования случайной величины ξ с функцией распределения (1).

Теорема 5. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — независимые равномерно распределенные на промежутке $[0, 1]$ случайные величины. Тогда функция распределения случайной величины

$$\xi = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

задается формулой (1).

Доказательство. Используя независимость $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и формулу (6), при $0 \leq x \leq 1$ получим

$$\begin{aligned} P(\xi < x) &= P(\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} < x) = \\ &= P(\alpha_1 < x, \alpha_2 < x, \dots, \alpha_n < x) = \prod_{i=1}^n P(\alpha_i < x) = x^n. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

2.2. Метод отбора

Построим алгоритм моделирования случайной величины ξ с заданной плотностью p . Для этого нам потребуются вспомогательная случайная величина η с плотностью q . Полагаем, что случайную величину η мы умеем моделировать. Кроме того, распределения вероятностей случайных величин ξ и η должны быть определенным образом “согласованы”. Нам нужно, чтобы функция $r(x) = p(x)/q(x)$ была определена при всех $x \in \mathbb{R}$ (в том смысле, что если при некотором $x \in \mathbb{R}$ $q(x) = 0$, то и $p(x) = 0$; $r(x)$ в этом случае полагаем равным нулю) и ограничена константой M (т. е. $r(x) \leq M \forall x \in \mathbb{R}$). Через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ обозначим равномерно распределенные на промежутке $[0, 1]$ случайные величины (их плотности обозначим p_α). Пусть случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ и η_1, η_2, \dots независимы. Обозначим

$$\nu = \min\{n \in \mathbb{N} : r(\eta_n) > M\alpha_n\}.$$

Алгоритм моделирования случайной величины ξ и оценка его трудоемкости основаны на следующей теореме.

Теорема 6. *Справедливы следующие два утверждения:*

1. *Случайные величины η_ν и ξ одинаково распределены.*
2. $E\nu = M$.

Доказательство. Докажем вначале две вспомогательные формулы:

$$P(r(\eta) \leq M\alpha) = 1 - \frac{1}{M}, \quad (3)$$

$$P(\eta < t, r(\eta) > M\alpha) = \frac{P(\xi < t)}{M}. \quad (4)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} P(r(\eta) \leq M\alpha) &= \iint_{r(x) \leq My} q(x)p_\alpha(y) dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \left(\int_{r(x)/M}^1 dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \left(1 - \frac{r(x)}{M} \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) dx - \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \frac{p(x)}{q(x)} dx = \\ &= 1 - \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 - \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\eta < t, r(\eta) > M\alpha) &= \iint_{\substack{x < t, \\ r(x) > My}} q(x)p_\alpha(y) dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^t q(x) \left(\int_0^{r(x)/M} dy \right) dx = \int_{-\infty}^t q(x) \frac{r(x)}{M} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^t q(x) \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^t p(x) dx = \frac{P(\xi < t)}{M}.$$

Используя независимость случайных величин и равенство (3), получим:

$$\begin{aligned} P(\nu = n) &= \\ &= P(r(\eta_1) \leq M\alpha_1, \dots, r(\eta_{n-1}) \leq M\alpha_{n-1}, r(\eta_n) > M\alpha_n) = \\ &= P(r(\eta_1) \leq M\alpha_1) \times \dots \times P(r(\eta_{n-1}) \leq M\alpha_{n-1}) \times \\ &\times P(r(\eta_n) > M\alpha_n) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\right) = \frac{1}{M} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

при $n = 1, 2, \dots$. Поэтому случайная величина $(\nu - 1)$ имеет геометрическое распределение вероятностей с параметром $1/M$ (см. параграф 12 на стр. 35) и (по Теореме 18)

$$E(\nu - 1) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) / \frac{1}{M} = M - 1.$$

Значит, $E\nu = M$ и $P(\nu < +\infty) = 1$. Далее, используя равенства (3) и (4), получим:

$$\begin{aligned} P(\eta_\nu < t) &= P(\eta_\nu < t, \nu < +\infty) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(\eta_\nu < t, \nu = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\eta_n < t, \nu = n) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(\eta_n < t, r(\eta_1) \leq M\alpha_1, \dots, r(\eta_{n-1}) \leq M\alpha_{n-1}, \\ &\quad r(\eta_n) > M\alpha_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(r(\eta_1) \leq M\alpha_1) \times \dots \times P(r(\eta_{n-1}) \leq M\alpha_{n-1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{P}(\eta_n < t, r(\eta_n) > M\alpha_n) = \\
& = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(r(\eta_1) \leq M\alpha_1)^{n-1} \mathbf{P}(\eta_n < t, r(\eta_n) > M\alpha_n) = \\
& = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-1} \frac{\mathbf{P}(\xi < t)}{M} = \\
& = \frac{\mathbf{P}(\xi < t)}{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-1} = \mathbf{P}(\xi < t).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{P}(\eta_\nu < t) \equiv \mathbf{P}(\xi < t)$. Теорема доказана. \square

Представим алгоритм моделирования случайной величины ξ .

Алгоритм

Шаг 1. $n := 1$.

Шаг 2. Получить α_n и η_n .

Шаг 3. Если $r(\eta_n) > M\alpha_n$, то $\xi := \eta_n$

и закончить выполнение алгоритма,

иначе $n := n + 1$ и перейти к шагу 2.

Замечание 4. Для построения алгоритма нужно знать величину M . Подчеркнем, что в качестве M можно использовать *оценку сверху* (а не только точное значение) $\sup\{r(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Обсудим трудоемкость этого алгоритма. Цикл алгоритма работает ν раз и $\mathbf{E} \nu = M$. Ясно, что $M \geq 1$ и $M = 1 \iff q \equiv p$. Для эффективности представленного алгоритма моделирования нужно выполнение следующих условий:

1. Случайную величину η легко моделировать.
2. M небольшое, q похоже на p .
3. Неравенство $r(\eta_n) > M\alpha_n$ легко проверять.

Замечание 5. Метод отбора также называется методом исключения.

Пример 2. Пусть плотность распределения случайной величины ξ задается следующей формулой:

$$p(x) = \begin{cases} 2(x^2 + x^5), & \text{при } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{при } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Получим алгоритм моделирования ξ .

В качестве вспомогательной случайной величины η возьмем случайную величину α , равномерно распределенную на промежутке $[0, 1]$. Тогда

$$q(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{при } x \notin [0, 1], \end{cases}$$

$$r(x) = p(x)/q(x) = p(x),$$

$$M = \sup\{r(x) : x \in \mathbb{R}\} = \max\{p(x) : x \in [0, 1]\} = p(1) = 4.$$

Применяя Теорему 6, получим следующий алгоритм моделирования ξ .

Алгоритм

Шаг 1. $n := 1$.

Шаг 2. Получить α_{2n-1} и α_{2n} .

Шаг 3. Если $\alpha_{2n}^2 + \alpha_{2n}^5 > 2\alpha_{2n-1}$, то $\xi := \alpha_{2n}$

и закончить выполнение алгоритма,

иначе $n := n + 1$ и перейти к шагу 2.

Замечание 6. Рассмотренный метод далек от оптимального (значение $M = 4$ достаточно велико, q мало похоже на p). Мы выбрали $\eta = \alpha$ по соображениям простоты, а не эффективности.

2.3. Метод суперпозиции

Пусть случайные величины ξ и $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют функции распределения F и F_1, F_2, \dots, F_n соответственно, и при всех $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x), \quad (5)$$

где все $p_i > 0$ и $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Пусть дискретная случайная величина ν не зависит от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, и пусть ее закон распределения вероятностей задается следующей таблицей:

i	1	2	...	n
$P(\nu = i)$	p_1	p_2	...	p_n

Теорема 7. Случайная величина $\eta = \xi_\nu$ имеет функцию распределения F .

Доказательство. Найдем функцию распределения η :

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P(\eta < x) = P(\xi_{\nu} < x) = \sum_{i=1}^n P(\xi_{\nu} < x, \nu = i) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(\xi_i < x, \nu = i) = \sum_{i=1}^n P(\xi_i < x) P(\nu = i) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i F_i(x) = F(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Представим алгоритм моделирования случайной величины ξ .

Алгоритм

Шаг 1. Получить ν и $i := \nu$.

Шаг 2. Получить ξ_i , $\xi := \xi_i$

и закончить выполнение алгоритма.

Замечание 7. 1. О методах моделирования дискретной случайной величины ν рассказано в параграфе 7 “Дискретное распределение” (стр. 28).

2. Метод суперпозиции называют рандомизацией моделирования распределений.

3. Метод суперпозиции иногда называют методом смеси.

4. Метод суперпозиции удобно применять тогда, когда исходную функцию распределения F можно представить в виде смеси (5) функций распределения таких случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, которые *легко моделировать*.

5. Обобщение Теоремы 7 можно найти, например, в [6].

Пример 3. Пусть функция распределения случайной величины ξ задается следующей формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ (x^2 + x^4) / 2, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Применяя Теорему 7, формулу (2) и алгоритм моделирования дискретного распределения (стр. 29), получим следующий алгоритм моделирования ξ .

Алгоритм

Шаг 1. Получить α_1 и α_2 .

Шаг 2. Если $\alpha_1 < 1/2$, то $\xi := \sqrt{\alpha_2}$, иначе $\xi := \sqrt[4]{\alpha_2}$.

Закончить выполнение алгоритма.

3. МОДЕЛИРУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ

1. Равномерное распределение на промежутке $[a, b]$. Функцией распределения является

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{при } a < x \leq b, \\ 1, & \text{при } x > b, \end{cases} \quad (6)$$

а плотностью

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Теорема 8. *Моделирующей формулой для равномерного распределения на промежутке $[a, b]$ является $\xi = a + (b - a)\alpha$.*

Доказательство сразу следует из Теоремы 3 и Теоремы 4. Кроме того, доказательство легко выполнить непосредственно. При $a \leq x \leq b$ найдем функцию распределения ξ :

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= P(\xi < x) = P(a + (b - a)\alpha < x) = \\ &= P\left(\alpha < \frac{x - a}{b - a}\right) = \frac{x - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Например, получить и напечатать значения десяти независимых равномерно распределенных на промежутке $[2, 5]$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{10}$ можно следующим образом:

for $i := 1$ to 10 do WriteLn($2 + (5 - 2) * \text{Random}$);

2. Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$. Функцией распределения является

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

а плотностью

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 9. *Моделирующей формулой показательного распределения с параметром λ является*

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha. \quad (9)$$

Доказательство несложно выполнить с помощью Теоремы 3 и Теоремы 4. Но мы сделаем это непосредственно. При $x > 0$ найдем функцию распределения ξ :

$$\begin{aligned} P(\xi < x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln \alpha < x\right) = P(\ln \alpha > -x\lambda) = \\ &= P(\alpha > e^{-x\lambda}) = 1 - e^{-x\lambda}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

3. Гамма-распределение. Мы рассмотрим частный случай гамма-распределения с параметрами (n, λ) , где n — натуральное число, $\lambda > 0$ (в этом случае распределение легко моделировать, и именно это распределение нам потребуется в параграфе 6 и Теореме 17). Функцией распределения является

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \exp(-\lambda x), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

а плотностью

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Моделирующая формула:

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right). \quad (12)$$

Для доказательства формулы (12) нам потребуются следующие утверждения.

Теорема 10. Если случайные величины ξ и η абсолютно непрерывны и независимы, то случайная величина $\xi + \eta$ тоже абсолютно непрерывна, и ее плотность распределения определяется по формуле

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x-y)p_{\eta}(y)dy, \quad (13)$$

где p_{ξ} и p_{η} — плотности распределения случайных величин ξ и η .

Доказательство можно найти, например, в [18, 20]. \square

Теорема 11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые, показательно распределенные случайные величины с параметром λ . Тогда случайная величина $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ имеет гамма-распределение с параметрами n и λ .

Доказательство выполним индукцией по n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Докажем индукционный переход от $n - 1$ к n . Представив η_n в виде $\eta_n = \eta_{n-1} + \xi_n$, и применяя формулы (13), (8) и (11), при $x > 0$ получим:

$$\begin{aligned} p_{\eta_n}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\eta_{n-1}}(x-y)p_{\xi_n}(y)dy = \int_0^{+\infty} p_{\eta_{n-1}}(x-y)\lambda e^{-\lambda y}dy = \\ &= \int_0^x \frac{\lambda^{n-1}(x-y)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-2)!} \int_0^x (x-y)^{n-2} dy = \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(n-2)!(n-1)} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 12. *Формула (12) является моделирующей формулой гамма-распределения с параметрами (n, λ) , где n — натуральное число, $\lambda > 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — независимые, равномерно распределенные на промежутке $[0, 1]$ случайные величины. Случайные величины

$$\xi_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_1, \quad \xi_2 = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_2, \quad \dots, \quad \xi_n = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_n$$

независимы, и, по Теореме 9, имеют показательное распределение с параметром λ . По Теореме 11 случайная величина

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \ln \alpha_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

имеет гамма-распределение с параметрами n и λ . Теорема доказана. □

Замечание 8. Методы моделирования произвольного гамма-распределения можно найти, например, в [6, 7].

4. Стандартное нормальное распределение. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение вероятностей (нормальное распределение вероятностей с параметрами 0 и 1, где 0 — математическое ожидание ξ , а 1 — дисперсия ξ), если ее плотность распределения задается формулой

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Краткое обозначение: $\xi \sim N(0, 1)$.

Нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 13. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ распределен с плотностью $p_\xi(x_1, \dots, x_n)$, и соотношения

[illegible]

представляют собой взаимно однозначное и дифференцируемое преобразование $\eta = \Psi(\xi)$ с невырожденным якобианом. Тогда плотность распределения вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ определяется выражением:

$$p_\eta(\mathbf{y}) = p_\xi(\Psi^{-1}(\mathbf{y})) \left| \frac{D\Psi^{-1}}{D\mathbf{y}} \right|, \quad (15)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, Ψ^{-1} — преобразование, обратное к (14), а под знаком модуля стоит якобиан этого преобразования.

Доказательство. Согласно определению плотности распределения вектора имеем:

$$\begin{aligned} \int_B p_\eta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \mathbf{P}(\eta \in B) = \mathbf{P}(\Psi(\xi) \in B) = \\ &= \mathbf{P}(\xi \in \Psi^{-1}(B)) = \int_{\Psi^{-1}(B)} p_\xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Сделав в последнем интеграле замену переменных: $\mathbf{x} = \Psi^{-1}(\mathbf{y})$, приходим к соотношению

$$\int_B p_\eta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_B p_\xi(\Psi^{-1}(\mathbf{y})) \left| \frac{D\Psi^{-1}}{D\mathbf{y}} \right| d\mathbf{y},$$

которое и доказывает Теорему 13. \square

Замечание 9. Ограничения на преобразование Ψ в Теореме 13 достаточно накладывать на множестве $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : p_\xi(x_1, \dots, x_n) > 0\}$.

При моделировании удобно получать значения сразу двух независимых нормальных случайных величин.

Теорема 14. *Моделирующими формулами двух независимых стандартных нормальных случайных величин ξ_1 и ξ_2 являются*

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos(2\pi\alpha_2), \\ \xi_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin(2\pi\alpha_2). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Тогда двумерная случайная величина $\zeta = (\xi_1, \xi_2)$ имеет стандартное двумерное нормальное распределение. Ее плотность $p_\zeta(x, y)$ равна:

$$p_\zeta(x, y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Перейдем к полярным координатам (с помощью замены $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$). Через $\eta = (R, \Phi)$ обозначим новую двумерную случайную величину, где R — радиус ($0 \leq R < +\infty$) и Φ — угол ($\Phi \in [0, 2\pi)$). По формуле (15) ее плотность $p_\eta(r, \varphi)$

равна:

$$\begin{aligned}
 p_\eta(r, \varphi) &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| p_\zeta(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| \exp \left(-\frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} r \exp \left(-\frac{r^2}{2} \right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Из формулы (16) следует, что случайные величины R и Φ независимы. При этом

$$p_R(r) = \begin{cases} r \exp(-r^2/2), & \text{при } r \geq 0, \\ 0, & \text{при } r < 0, \end{cases}$$

а случайная величина Φ равномерно распределена на промежутке $[0, 2\pi)$.

Моделирующей формулой для Φ (Теорема 8) является $2\pi\alpha$. Найдём моделирующую формулу для R . Легко сосчитать, что

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - \exp(-r^2/2), & \text{при } r \geq 0, \\ 0, & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Используя метод обратных функций, и находя $F_R^{-1}(y)$, получим моделирующую формулу для R :

$$y = 1 - \exp(-r^2/2), \quad -r^2/2 = \ln(1 - y), \quad r = \sqrt{-2 \ln(1 - y)}.$$

Полученную формулу $R = \sqrt{-2 \ln(1 - \alpha)}$ можно немного упростить, если воспользоваться тем, что случайные величины $1 - \alpha$ и α одинаково распределены. Таким образом, пришли

к следующей паре моделирующих формул (в полярных координатах):

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2 \ln \alpha_1}, \\ \Phi = 2\pi\alpha_2, \end{cases}$$

где (с учетом независимости R и Φ) используются независимые случайные величины α_1 и α_2 . Возвращаясь к прямоугольной системе координат, получим:

$$\begin{cases} \xi_1 = R \cos \Phi = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos(2\pi\alpha_2), \\ \xi_2 = R \sin \Phi = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin(2\pi\alpha_2). \end{cases}$$

Теорема доказана. □

Приведем еще один способ моделирования пары независимых стандартных нормальных случайных величин (в [1] он назван *методом полярных координат для нормального распределения*). Идейно этот метод похож на предыдущий, но использует более сложный способ моделирования равномерного распределения на окружности (что позволяет избежать вычисления функций синус и косинус). Этот метод моделирования удобнее описать с помощью алгоритма.

Алгоритм

Шаг 1. Получить α_1 и α_2 ,

$$z_1 := 2 * \alpha_1 - 1, \quad z_2 := 2 * \alpha_2 - 1,$$

$$d := z_1 * z_1 + z_2 * z_2.$$

Шаг 2. Если $d \geq 1$, то перейти к шагу 1.

Шаг 3. $t := \sqrt{-2 * \ln d/d},$

$$\xi_1 := t * z_1, \quad \xi_2 := t * z_2,$$

закончить выполнение алгоритма.

Доказательство правильности представленного метода достаточно длинное, и потому опущено. Его можно найти, например, в [1].

В заключение укажем приближенный метод моделирования стандартных нормальных случайных величин. На основе центральной предельной теоремы случайная величина

$$\eta^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right)$$

асимптотически нормальна с параметрами 0 и 1. Легко сосчитать, что $E \alpha = 1/2$ и $D \alpha = 1/12$. Поэтому

$$E \eta^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n E \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) = 0,$$

$$D \eta^{(n)} = \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n D \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right) = \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n D \alpha_i = 1.$$

Особенно удобным является значение $n = 12$, так как

$$\eta^{(12)} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6.$$

Обычно считают, что $\eta^{(12)}$ практически нормальна (если, конечно, большие значения $|\eta^{(12)}|$ не играют существенную роль).

Представленные методы просты и их легко реализовать на компьютере. Рассказ о других методах моделирования нормальных случайных величин можно найти, например, в [1] и [2].

5. Нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (краткое обозначение: $N(a, \sigma^2)$). Случайная величина ξ имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами a и σ^2 (a — математическое ожидание ξ , σ^2 — дисперсия ξ), если ее плотность распределения задается формулой

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Случайную величину $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ легко получить с помощью линейного преобразования стандартной нормальной случайной величины η ($\eta \sim N(0, 1)$) по формуле $\xi = a + \sigma\eta$.

6. Распределение хи-квадрат. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимы, и каждая из них имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Говорят, что случайная величина χ_n^2 , определенная как

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2, \quad (17)$$

имеет хи-квадрат распределение с n степенями свободы. Ясно, что χ_n^2 принимает положительные значения. Ее плотность $p_n(x)$ задается такой формулой:

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-x/2), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ есть гамма-функция, и при ее вычислении можно воспользоваться следующими свойствами: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$ (в частности, $\Gamma(n+1) = n!$ для $n = 0, 1, 2, \dots$).

При *четном* n функция распределения χ_n^2 определяется такой формулой:

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{n/2-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{x}{2}\right)^i \exp(-x/2), & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Из сопоставления формул (11) и (18) ясно, что для моделирования хи-квадрат распределения с *четным* числом степеней свободы n можно воспользоваться формулой (12):

$$\chi_n^2 = -2 \ln \left(\prod_{i=1}^{n/2} \alpha_i \right). \quad (20)$$

Если же число степеней свободы n *нечетно*, то можно представить случайную величину χ_n^2 в виде $\chi_n^2 = \chi_{n-1}^2 + \xi_n^2$. Случайную величину χ_{n-1}^2 можно получить по формуле (20). Стандартную нормальную случайную величину ξ_n можно моделировать одним из описанных в параграфе 4 (стр. 20) способов.

Замечание 10. Случайная величина ξ_n^2 имеет плотность p_1 (формула (18)). Ее можно моделировать методом отбора, и при этом, по совету [6], использовать неравенство:

$$\sqrt{\frac{2}{x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \leq q_0(x) = \begin{cases} \sqrt{2/x}, & \text{при } 0 < x < 2, \\ \exp(-x/2), & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Случайная величина с плотностью, пропорциональной q_0 , легко моделируется стандартным методом обратных функций (сама q_0 плотностью не является).

Замечание 11. Можно моделировать хи-квадрат распределение непосредственно по формуле (17).

7. Дискретное распределение. Пусть распределение вероятностей дискретной случайной величины ξ задается следующей таблицей:

x_1	x_2	\dots	x_n
p_1	p_2	\dots	p_n

Здесь x_1, x_2, \dots, x_n — множество всех значений случайной величины ξ , а p_1, p_2, \dots, p_n — вероятности этих значений, т. е.

$$p_1 = P(\xi = x_1), p_2 = P(\xi = x_2), \dots, p_n = P(\xi = x_n).$$

При этом должно выполняться соотношение $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Опишем процесс моделирования случайной величины ξ . Разобьем интервал $[0, 1]$ на n интервалов, длины которых равны p_1, p_2, \dots, p_n . Координатами концов этих интервалов будут $S_0 = 0, S_1 = p_1, S_2 = p_1 + p_2, \dots, S_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k, \dots, S_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Полученные интервалы занумеруем числами $1, 2, \dots, n$. Для моделирования ξ мы получим значение α и найдем тот интервал (среди n интервалов разбивающих промежуток $[0, 1]$), в который попадает точка с координатой α . Если эта точка попадает в интервал с номером k , то будем считать, что $\xi = x_k$. Таким образом, $\xi = x_1$, если $\alpha \leq S_1$, $\xi = x_2$, если $S_1 < \alpha \leq S_2$, $\xi = x_3$, если $S_2 < \alpha \leq S_3$, и т. д. (т. е. $\xi = x_k$, если $S_{k-1} < \alpha \leq S_k$ при $k \in \{2, \dots, n\}$).

Легко убедиться в правильности описанного метода. Действительно,

$$P(\xi = x_k) = P(S_{k-1} < \alpha \leq S_k) = S_k - S_{k-1} = p_k.$$

Замечание 12. Описанный метод моделирования дискретных случайных величин является следствием Теоремы 3, и потому называется *методом обратных функций моделирования дискретных распределений*.

Процесс моделирования опишем с помощью алгоритма, в котором нужный интервал ищется путем перебора всех интервалов слева направо.

Алгоритм 1

Шаг 1. Получить α , $k := 1$.

Шаг 2. Если $\alpha \leq S_k$, то $\xi := x_k$

и закончить выполнение алгоритма.

Шаг 3. $k := k + 1$, перейти к шагу 2.

Замечание 13. Алгоритм будет работать в среднем быстрее, если вероятности p_1, p_2, \dots, p_n упорядочить по убыванию (т. е. перестроить таблицу так, чтобы выполнялись неравенства $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$). Упорядочить элементы массива можно с помощью алгоритмов сортировки, о которых рассказано в [21–23].

Поиск интервала можно ускорить, если применить метод деления пополам:

Алгоритм 2

Шаг 1. Получить α , $\ell := 1$, $r := n$.

Шаг 2. Если $\ell = r$, то $\xi := x_\ell$
и закончить выполнение алгоритма.

Шаг 3. $m := \lceil (\ell + r)/2 \rceil$.

Шаг 4. Если $\alpha \leq S_m$, то $r := m$ иначе $\ell := m + 1$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Здесь $[x]$ — целая часть числа x .

В случае, когда вероятности всех значений одинаковы (т. е. $p_1 = \dots = p_n = 1/n$), процедура моделирования сильно упрощается и сводится к следующей моделирующей формуле:

$$\xi = x_k, \quad \text{где} \quad k = [n\alpha] + 1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} P(\xi = x_k) &= P([n\alpha] + 1 = k) = P([n\alpha] = k - 1) = \\ &= P(k - 1 \leq n\alpha < k) = P((k - 1)/n \leq \alpha < k/n) = \\ &= k/n - (k - 1)/n = 1/n. \end{aligned}$$

Замечание 14. Запрограммировать получение k можно при помощи стандартной математической функции $\text{Random}(n)$ языка Турбо Паскаль, т. е. написать $k := \text{Random}(n) + 1$.

Аналогичный метод можно применить и в том случае, когда вероятности всех значений являются рациональными числами, и, значит, могут быть представлены в виде $p_1 = m_1/m$,

$p_2 = m_2/m, \dots, p_n = m_n/m$, где m_1, m_2, \dots, m_n и m — натуральные числа. Поясним этот метод на примере моделирования распределения, задаваемого следующей таблицей:

x_1	x_2	x_3
2/6	3/6	1/6

Преобразуем эту таблицу таким образом:

x_1	x_1	x_2	x_2	x_2	x_3
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

и обозначим $y_1 = y_2 = x_1$, $y_3 = y_4 = y_5 = x_2$, $y_6 = x_3$. Моделирующей формулой в этом случае будет $\xi = y_k$ при $k = [6\alpha] + 1$.

8. Дискретное равномерное распределение на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Это распределение вероятностей задается следующей таблицей:

0	1	...	$n-1$
$1/n$	$1/n$...	$1/n$

Теорема 15. Моделирующей формулой дискретного равномерного распределения на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$ является $\xi = [n\alpha]$.

Доказательство. Действительно, при $0 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= P([n\alpha] = k) = P(k \leq n\alpha < k+1) = \\ &= P(k/n \leq \alpha < (k+1)/n) = (k+1)/n - k/n = 1/n. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание 15. В языке программирования Турбо Паскаль есть стандартная математическая функция $\text{Random}(n)$ для моделирования этого распределения.

9. Распределение Бернулли. Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром p ($0 < p < 1$), если $P(\xi = 1) = p$, $P(\xi = 0) = 1 - p$.

Теорема 16. *Моделирующей формулой распределения Бернулли является*

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha < p, \\ 0, & \text{при } \alpha \geq p. \end{cases} \quad (21)$$

Доказательство. Действительно, $P(\xi = 1) = P(\alpha < p) = p$ и $P(\xi = 0) = 1 - P(\xi = 1) = 1 - p$. Теорема доказана. \square

10. Биномиальное распределение. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) (где $0 < p < 1$, n — натуральное число), если

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Приведем два способа моделирования.

Первым методом будет “прямое” моделирование, основанное на том, что это распределение описывает число “успехов” (значений 1) в серии из n испытаний Бернулли. Моделирующей формулой здесь будет

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n,$$

где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Бернулли с параметром p .

Второй способ аналогичен методу моделирования дискретных распределений, реализованному в алгоритме 1. При этом для вычисления вероятностей используется соотношение

$$\frac{P(\xi = k)}{P(\xi = k - 1)} = \frac{p(n - k + 1)}{(1 - p)k}.$$

Алгоритм

Шаг 1. Получить α ,

$$k := 0, \quad c := p/(1 - p), \quad r := (1 - p)^n, \quad S := r.$$

Шаг 2. Если $\alpha \leq S$, то $\xi := k$

и закончить выполнение алгоритма.

Шаг 3. $k := k + 1$, $r := r * c * (n - k + 1)/k$,

$S := S + r$, перейти к шагу 2.

Замечание 16. Этот алгоритм работает в среднем быстрее при $p \leq 1/2$. Поэтому при $p > 1/2$ лучше получить значение случайной величины η , имеющей биномиальное распределение с параметрами $(n, 1 - p)$, и затем положить $\xi = n - \eta$.

11. Распределение Пуассона. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ ($\lambda > 0$), если

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Приведем два способа моделирования. Первый способ аналогичен методу моделирования дискретных распределений, реализованному в алгоритме 1, а также алгоритму моделирования биномиального распределения. При этом для вычисления вероятностей используется соотношение

$$\frac{P(\xi = k)}{P(\xi = k - 1)} = \frac{\lambda}{k}.$$

Второй способ задает следующая теорема.

Теорема 17. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ , и пусть

$$\xi = \max\{n : \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n < 1\}$$

(полагаем, что $\xi = 0$ в том случае, когда $\eta_1 \geq 1$). Тогда случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ .

Доказательство. В силу Теоремы 11 случайная величина $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$ имеет гамма-распределение с параметрами n и λ . Используя формулу (10), получим

$$\begin{aligned} P(\xi = n) &= \\ &= P(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n < 1, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n + \eta_{n+1} \geq 1) = \\ &= P(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n < 1) - \\ &- P(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n + \eta_{n+1} < 1) = \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \exp(-\lambda) - 1 + \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i!} \exp(-\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание 17. С учетом формулы (12) при моделировании следует воспользоваться равносильностью следующих двух неравенств:

$$-\frac{1}{\lambda}(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \dots + \ln \alpha_n) < 1$$

и

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n > \exp(-\lambda).$$

12. Геометрическое распределение. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p (где $0 < p < 1$), если

$$P(\xi = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 18. Пусть случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p . Тогда $E\xi = (1 - p)/p$.

Доказательство легко выполнить с использованием производящих функций (см., например, [20]). \square

Укажем три способа моделирования.

Первый способ основан на том, что это распределение описывает число “неудачных” испытаний в схеме Бернулли, произошедших до первого “успеха” (до того, как было получено значение 1) и задается следующей моделирующей формулой:

$$\xi = \max\{n : \eta_n = 0\},$$

(полагаем, что $\xi = 0$ в том случае, когда $\eta_1 = 1$). Здесь $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Бернулли с параметром p .

Второй способ аналогичен методу моделирования дискретных распределений, реализованному в алгоритме 1, а также алгоритму моделирования биномиального распределения. При этом для вычисления вероятностей используется соотношение

$$\frac{P(\xi = k)}{P(\xi = k - 1)} = 1 - p.$$

Третий способ основан на следующих теоремах.

Теорема 19. Пусть η — показательно распределенная случайная величина с параметром λ . Тогда случайная величина $\xi = [\eta]$ имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1 - \exp(-\lambda)$.

Доказательство. Используя формулу (7), получим:

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= P([\eta] = k) = P(k \leq \eta < k + 1) = \\ &= 1 - e^{-\lambda(k+1)} - 1 + e^{-\lambda k} = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 20. Случайная величина

$$\xi = [\ln \alpha / \ln(1 - p)]$$

имеет геометрическое распределение с параметром p .

Доказательство. По Теореме 9 случайная величина

$$\eta = \frac{\ln \alpha}{\ln(1 - p)} = \frac{-1}{-\ln(1 - p)} \ln \alpha$$

имеет показательное распределение вероятностей с параметром $\lambda = -\ln(1 - p)$. По Теореме 19 случайная величина

$$\xi = [\eta] = [\ln \alpha / \ln(1 - p)]$$

имеет геометрическое распределение с параметром

$$1 - \exp(-\lambda) = 1 - \exp(\ln(1 - p)) = 1 - (1 - p) = p.$$

Теорема доказана. □

Методы моделирования других случайных величин, а также рассказ об общих методах моделирования можно найти в [1–11].

4. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ХИ-КВАДРАТ

Проверить правильность работы моделирующих процедур можно с помощью критерия согласия хи-квадрат К. Пирсона. Критерий согласия К. Пирсона опирается на теорему, также носящую имя К. Пирсона. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в множестве Y . Разобьем область значений Y на r непересекающихся множеств Y_1, Y_2, \dots, Y_r . Пусть $p_i = P(\xi_k \in Y_i)$ — вероятность для ξ_k попасть в Y_i (очевидно, что $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$). Множества Y_1, Y_2, \dots, Y_r нужно выбрать так, чтобы все p_i были положительны. Получим значения n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Обозначим через m_i количество значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, попавших в Y_i . (Ясно, что $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$.) Числа m_1, m_2, \dots, m_r будем называть наблюдаемыми частотами. Введем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема К. Пирсона. *Распределение χ^2 при $n \rightarrow +\infty$ слабо сходится к хи-квадрат распределению с $(r - 1)$ степенями свободы, т. е. при $\forall x \in \mathbb{R} \ P(\chi^2 < x) \rightarrow P(\chi_{r-1}^2 < x)$ при $n \rightarrow +\infty$.*

Теорему К. Пирсона можно использовать для проверки гипотезы о том, что вероятности p_1, p_2, \dots, p_r приняли определенные значения q_1, q_2, \dots, q_r . Далее будем называть эту гипотезу гипотезой H и записывать следующим образом:

$$H : p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_r = q_r.$$

Допустим, мы пытались моделировать распределение P_ξ (т. е. мы хотели, чтобы полученные нами случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ имели распределение P_ξ). Тогда для проверки правильности моделирования нужно взять $q_1 = P_\xi(Y_1)$, $q_2 = P_\xi(Y_2), \dots, q_r = P_\xi(Y_r)$ (где $P_\xi(Y_i) = P(\xi \in Y_i)$ — вероятность для ξ_k попасть в Y_i при правильном моделировании).

Величины nq_i (где $q_i = P(\xi \in Y_i)$) называются ожидаемыми частотами (при выполнении гипотезы H в среднем именно такое количество значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ должно попасть в Y_i). Рассмотрим статистику

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - nq_i)^2}{nq_i} = n \sum_{i=1}^r \left(\frac{m_i}{n} - q_i \right)^2 / q_i.$$

Статистика X^2 называется статистикой хи-квадрат Пирсона для простой гипотезы.

Известно (см. [12] или [13]), что по закону больших чисел $\frac{m_i}{n} \rightarrow p_i = P(\xi_k \in Y_i)$ при $n \rightarrow +\infty$. Ясно, что $\frac{X^2}{n}$ представля-

ет собой квадрат некоего расстояния между двумя r -мерными векторами: вектором относительных частот $\left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \dots, \frac{m_r}{n}\right)$ и вектором вероятностей (q_1, q_2, \dots, q_r) . От евклидова расстояния это расстояние отличается лишь тем, что разные координаты входят в него с разными весами.

Обсудим поведение статистики X^2 в случае, когда гипотеза H верна, и в случае, когда H неверна. Если H верна, то асимптотическое поведение X^2 при $n \rightarrow +\infty$ указывает теорема К. Пирсона. Если H неверна, то $X^2 \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Метод проверки гипотезы:

1. Сосчитать полученное при моделировании значение статистики X^2 .
2. Приблизительно (используя теорему К. Пирсона) найти вероятность $P(\chi^2 \geq X^2)$ (т. е. сосчитать $P(\chi_{r-1}^2 \geq X^2)$).

Гипотеза H должна быть отвергнута, если полученное в опыте значение X^2 слишком велико. Слова “слишком велико” означают, что вероятность $P(\chi^2 \geq X^2)$ — малая величина и, следовательно, маловероятно случайно получить такое же, как в опыте, или еще большее расхождение между вектором частот и вектором вероятностей.

“Традиционная” интерпретация вероятностей (см. [15]) приводится в следующей таблице:

Вероятность	Интерпретация
> 0.10	Данные согласуются с гипотезой
≈ 0.05	Есть некоторые сомнения в истинности гипотезы
≈ 0.02	Довольно сильный довод против гипотезы
≈ 0.01	Гипотеза почти наверняка не подтверждается

Замечание 18. 1. Использовать теорему К. Пирсона для приближенного вычисления вероятности $P(\chi^2 \geq X^2)$ можно только при больших n . Считается достаточным, если все ожидаемые частоты $nq_i \geq 10$.

2. Если r — нечетное число, то вероятность $P(\chi_{r-1}^2 \geq X^2)$ легко сосчитать, используя формулу (19):

$$P(\chi_{r-1}^2 \geq X^2) = 1 - F_{r-1}(X^2).$$

Если же r — четное число, то для вычисления вероятности $P(\chi_{r-1}^2 \geq X^2)$ можно применить методы численного интегрирования плотности (18):

$$P(\chi_{r-1}^2 \geq X^2) = 1 - \int_0^{X^2} p_{r-1}(x) dx.$$

Рассказ о методах численного интегрирования можно найти, например, в [24–26].

Кроме того, для вычисления вероятности $P(\chi_{r-1}^2 \geq X^2)$ можно воспользоваться таблицами [19] или какой-нибудь математической программой (например, Maple).

5. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ КОЛМОГОРОВА

Если моделируемая случайная величина имеет *непрерывную* функцию распределения, то проверить правильность моделирования можно с помощью критерия Колмогорова. Пусть мы имеем выборку $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ объема n . Обозначим истинную функцию распределения, которой подчиняются случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, через $G(x)$, эмпирическую (выборочную) функцию распределения — $F_n(x)$, а гипотетическую функцию распределения (которую должны получить при правильном моделировании) — $F(x)$. Эмпирической функцией распределения, построенной по выборке $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, называется функция $F_n(x)$, равная доле таких значений ξ_i , что $\xi_i < x$, $i = 1, \dots, n$,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x)}(\xi_i),$$

где

$$\mathbf{1}_{(-\infty, x)}(\xi_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } \xi_i < x, \\ 0, & \text{при } \xi_i \geq x. \end{cases}$$

Гипотеза H о том, что истинная функция распределения есть $F(x)$, записывается в виде:

$$H : G = F.$$

Если гипотеза H верна, то F_n и F должны проявлять определенное сходство, и различие между ними должно убывать с увеличением n . Для количественного выражения схождения функ-

ций F_n и F воспользуемся *статистикой Колмогорова*:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|.$$

Очевидно, что D_n — случайная величина, поскольку ее значение зависит от случайного объекта F_n . Если гипотеза H справедлива и $n \rightarrow +\infty$, то $F_n \rightarrow F$ и $D_n \rightarrow 0$. Если же гипотеза H неверна, то $F_n \rightarrow G$ и $G \neq F$, а поэтому

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow \sup_{-\infty < x < +\infty} |G(x) - F(x)|.$$

Эта последняя величина положительна, так как G не совпадает с F . Такое различие в поведении D_n в зависимости от того, верна H или нет, позволяет использовать D_n как статистику для проверки H . Ясно, что гипотеза H должна быть отвергнута, если полученное в эксперименте значение статистики D_n окажется слишком большим. Но для этого нужно знать, как распределена статистика D_n при гипотезе $H : F = G$ при данных n и G .

Замечательное свойство D_n состоит в том, что если $F = G$, т. е. если гипотетическое распределение указано правильно, то закон распределения статистики D_n оказывается *одним и тем же* для всех непрерывных функций G . Он зависит только от объема выборки n .

При малых n для статистики D_n при гипотезе H составлены таблицы процентных точек. Например, в [19] они доведены до $n = 100$. При больших n ($n \geq 100$) распределение D_n (при гипотезе H) указывает предельная теорема А.Н. Колмогорова. Она говорит о статистике $\sqrt{n}D_n$ (поскольку сама величина $D_n \rightarrow 0$

при H , и ее приходится умножать на неограниченно растущую величину, чтобы распределение стабилизировалось).

Асимптотическое приближение. Теорема Колмогорова утверждает, что при справедливости H и непрерывности G для любого $z > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sqrt{n}D_n < z) = K(z),$$

где функция $K(z)$ задается следующей формулой:

$$K(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}.$$

Алгоритм проверки гипотезы. По исходной выборке надо вычислить значение статистики D_n по формуле

$$D_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left[\frac{k}{n} - F(\xi_{(k)}), F(\xi_{(k)}) - \frac{k-1}{n} \right].$$

Здесь через $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$ обозначены элементы *вариационного ряда*, построенного по исходной выборке. Вариационным рядом называют выборку, перенумерованную в порядке возрастания $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. Упорядочить элементы выборки можно с помощью алгоритмов сортировки, о которых рассказано в [21–23].

Затем (при больших n) нужно вычислить вероятность $1 - K(\sqrt{n}D_n)$. Гипотеза H должна быть отвергнута, если полученное в опыте значение D_n слишком велико. Слова “слишком велико” означают, что вероятность $1 - K(\sqrt{n}D_n)$ — малая величина и, следовательно, маловероятно случайно получить такое

же, как в опыте, или еще большее расхождение между F_n и F . “Традиционная” интерпретация вероятностей (см. [15]) приведена в таблице на странице 40.

Другие методы проверки правильности моделирования можно найти в [1–3, 8–19]. В частности, для проверки правильности моделирования можно использовать различные *критерии согласия*, описанные в указанной литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1977. Т. 2.
2. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Советское радио, 1971.
3. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
4. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1968.
5. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.

8. Кирьянов Б.Ф., Одинцов О.А., Кознов А.В. Лабораторный практикум по математическому моделированию; НПИ. Новгород, 1992.
9. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986.
10. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. Мн.: Университетское, 1987.
11. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999.
12. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М, Финансы и статистика, 1995.
13. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М, 1998.
14. Медик В.А., Токмачев М.С., Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии: Руководство: В 2 т. Т. 1. Теоретическая статистика. / Под ред. Ю.М. Комарова. М.: Медицина, 2000.
15. Справочник по прикладной статистике. В 2 т. Т. 1. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. М.: Финансы и статистика, 1989.
16. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1997.

17. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998.
18. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1965.
19. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
20. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.
21. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2000.
22. Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы. М.: Мир, 1985.
23. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999.
24. Панов Е.Ю. Основные алгоритмы численных методов: Учеб.-метод. указания; НГПИ. Новгород, 1991.
25. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
26. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Моделирование случайных величин	3
2. Общие методы моделирования	5
3. Моделирующие формулы	16
4. Критерий согласия хи-квадрат	37
5. Критерий согласия Колмогорова	41
Список литературы	44