21301244053_Arini Shintasari

Nama : Arini Shintasari
NIM : 21301244053

EMT Untuk Visualisasi dan Komputasi Geometri

1. Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi geometri merupakan kumpulan beberapa sintaks atau rumus yang akan digunakan untuk menentukan apa yang dibutuhkan.

Pada fungsi geometri ini dibagi menjadi tiga fungsi, yaitu:
a) Fungsi untuk menggambar objek geometri
b) Fungsi geometri analitik (numerik dan simbolik)
c) Fungsi khusus untuk geometri simbolik

Sebelum menggunakan fungsi-fungsi pada geometri, kita memanggil file "geometry.e" terlebih dahulu

```
>load geometry
```

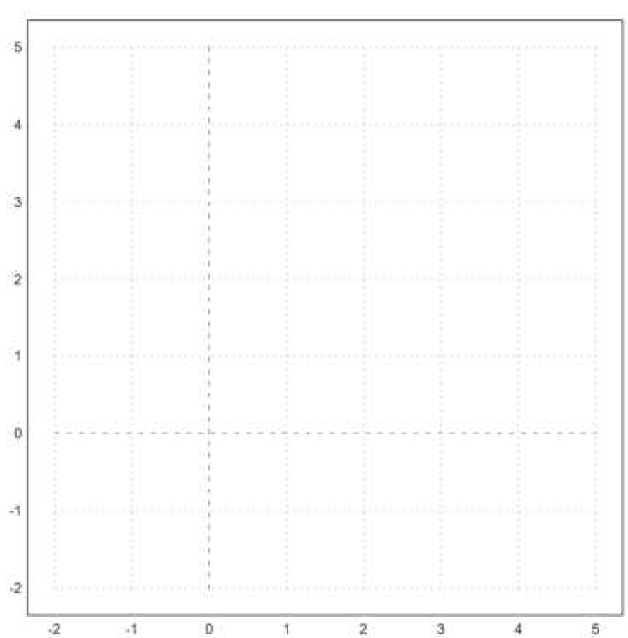
```
Numerical and symbolic geometry.
```

a) Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri

Fungsi ini bertujuan untuk membantu langkah-langkah dalam menggambar objek-objek pada geometri. Seperti, menentukan nilai asli, menentukan rentang pada bidang koordinat, menentukan pusat bidang koordinat dan batas sumbu, menggambar suatu titik, menggambar ruas garis, menggambar lingkaran, dan menuliskan label.

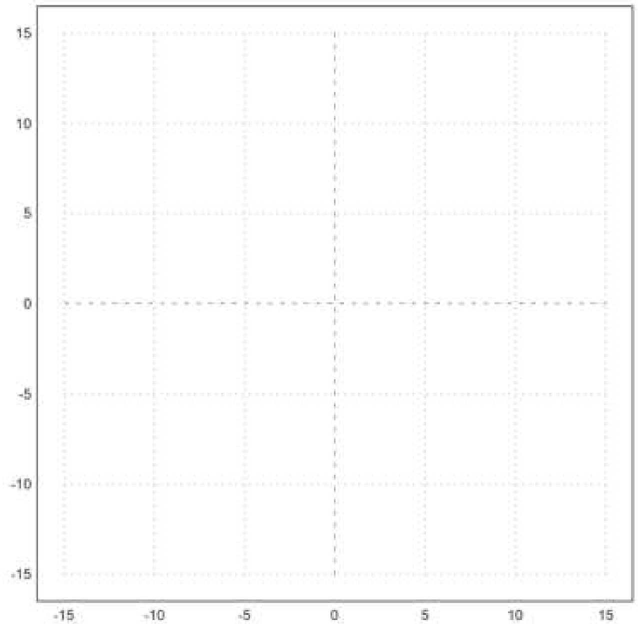
1. setPlotRange(x1,x2,y1,y2) merupakan fungsi untuk menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat. x1 menunjukkan batas terkecil sumbu x dan x2 menunjukkan batas terbesar sumbu x. Kemudian y1 menunjukkan batas terkecil sumbu y dan y2 menunjukkan batas terbesar sumbu y.

```
>setPlotRange(-2,5,-2,5):
```



2. setPlotRange(r) merupakan fungsi untuk menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat yang pusat koordinatnya berada di titik (0,0).

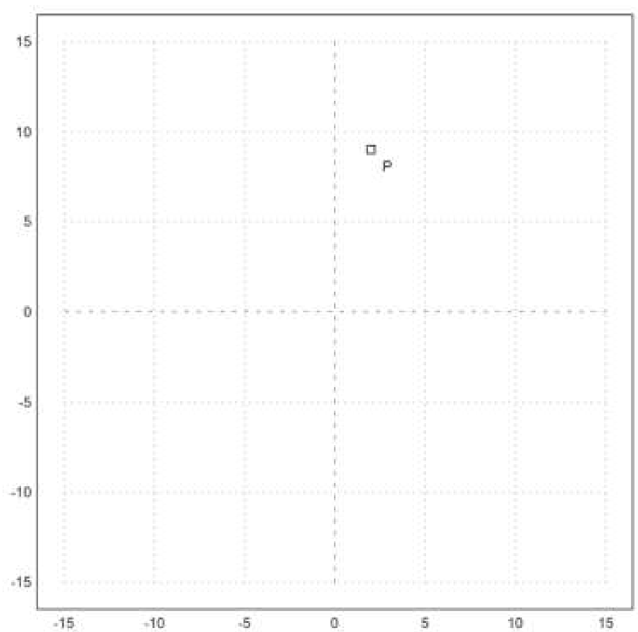
```
>setPlotRange(15):
```



Perbedaan antara setPlotRange(x1,x2,y1,y2) dengan setPlotRange(r) yaitu jika kita menginginkan posisi bidang koordinat yang simetris maka disarankan untuk menggunakan fungsi yang setPlotRange(r) karena pada fungsi ini akan menampilkan bidang dengan jarak yang sama pada masing-masing sumbu. Tetapi, jika ingin menggambar bidang koordinat bebas kita dapat menggunakan fungsi setPlotRange(x1,x2,y1,y2) karena fungsi ini dapat kita sesuaikan dengan titik pada objek yang akan digambar.

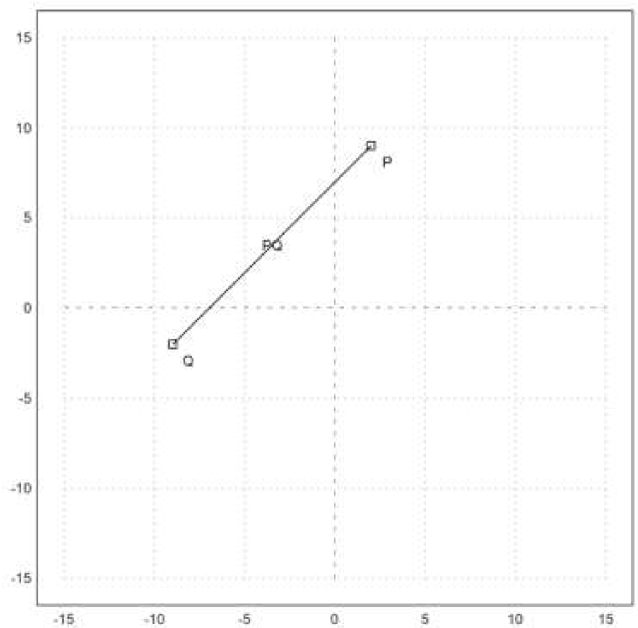
3. plotPoint(P,"P") merupakan fungsi untuk menggambar titik P dan kemudian diberi label P. Titik P disini berupa suatu koordinat (x,y).

```
>P=[2,9]; plotPoint(P,"P"):
```



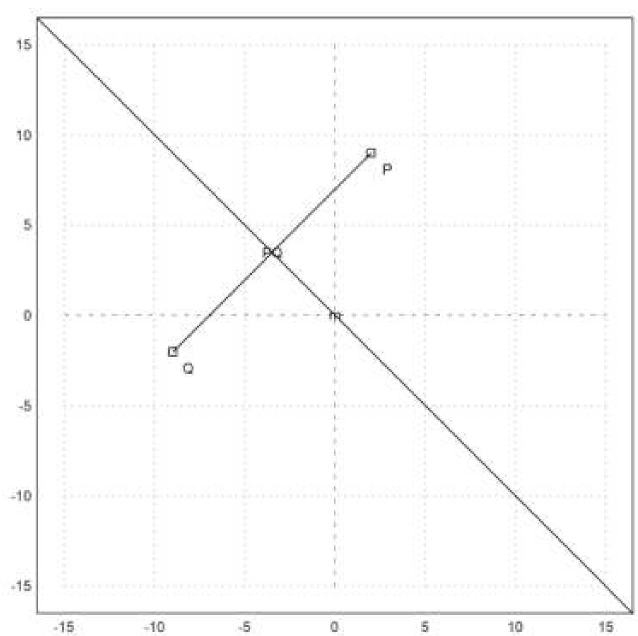
4. plotSegment(P,Q,"PQ",d) merupakan fungsi untuk menggambar ruas garis PQ kemudian diberi label "PQ", yang mana panjang antara ruas garis itu dengan posisi label sejauh d satuan panjang.

```
>P=[2,9]; Q=[-9,-2]; plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q");
>plotSegment(P,Q,"PQ",1):
```



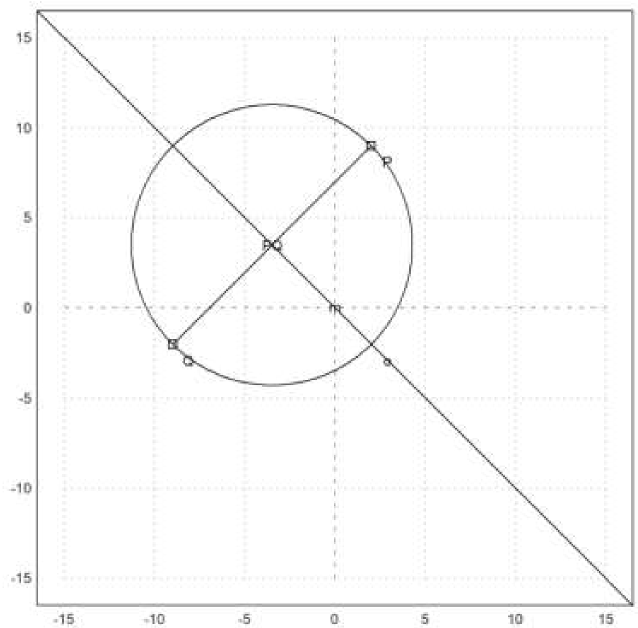
5. plotLine(m,"m",d) merupakan fungsi untuk menggambar garis m dan kemudian diberi label "m", yang mana jarak antara garis dengan posisi label sejauh d satuan panjang.

```
>m=middlePerpendicular(P,Q);
>plotLine(m,"m",2):
```



6. plotCircle(a,"a",v,d) merupakan fungsi untuk menggambar lingkaran yang berpusat di c dan diberi label "c".

```
>a=lineIntersection(lineThrough(P,Q),m);
>b=distance(a,P);
>plotCircle(circleWithCenter(a,b),"o"):
```



7. plotLabel(label, P, V, d) merupakan fungsi untuk menuliskan label pada posisi P yang sudah ditentukan.

b) Fungsi Geometri Analitik

Fungsi ini bertujuan untuk membantu menentukan operasi vektor, menggambar garis, menentukan titik potong dua garis, menentukan titik tengah. Selain itu, fungsi ini bertujuan untuk menentukan hasil kuadrat jarak, menentukan luas, dan menentukan garis bagi sudut.

1) turn(v, phi) merupakan fungsi untuk memutar vektor v dan jaraknya sejauh phi.

2) turnLeft(v) atau turnRight(v) merupakan fungsi untuk memutar vektor v ke arah kiri atau kanan.

3) normalize(v) merupakan fungsi yang menjelaskan normal vektor v.

4) crossProduct(v,w) merupakan fungsi yang akan menampilkan hasil kali vektor v dan w.

5) lineThrough(A,B) merupakan fungsi yang akan menampilkan garis, yang mana garis tersebut melalui titik A dan titik B.

```
>A=[1,2]; B=[2,1];
>g=$lineThrough(A,B)
```

$$[-(B-A)_2\,,(B-A)_1\,,[-(B-A)_2\,,(B-A)_1]\cdot A]$$

6) lineWithDirection(A,v) merupakan fungsi yang akan menampilkan garis yang melalui titik A dan searah dengan vektor v.

7) getLineDirection(g) merupakan fungsi yang akan menentukan vektor arah (gradien) garis g.

```
>$getLineDirection(g)
```

$$[g_2, -g_1]$$

8) getNormal(g) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan vektor normal (tegak lurus) garis g.

9) getPointOnLine(g) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan titik yang berada pada garis g.

10) perpendicular(A,g) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan garis yang melalui titik A dan tegak lurus terhadap garis g.

```
>$h=perpendicular(A,g)
```

$$h = [g_2, -g_1, [g_2, -g_1]\cdot A]$$

11) parallel(A,g) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan garis yang melalui titik A dan sejajar terhadap garis g.

```
>$m=parallel(A,g)
```

$$m = [g_1, g_2, [g_1, g_2] \cdot A]$$

12) lineIntersection(g,h) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan titik potong dua garis, yaitu garis g dan garis h.

```
>$lineIntersection(g,h)
```

$$\left[\frac{g_2\,h_3 - h_2\,g_3}{h_1\,g_2 - g_1\,h_2}, \frac{h_1\,g_3 - g_1\,h_3}{h_1\,g_2 - g_1\,h_2}\right]$$

13) projectToLine(A,g) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan proyeksi titik A pada garis g.

```
>$projectToLine(A,g)
```

$$\left[\frac{g_2\,[g_2, -g_1] \cdot A - g_1\,[-g_1, -g_2] \cdot A}{g_2^2 + g_1^2}, \frac{-g_1\,[g_2, -g_1] \cdot A - g_2\,[-g_1, -g_2] \cdot A}{g_2^2 + g_1^2}\right]$$

14) distance(A,B) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan jarak antara titik A dengan titik B.

```
>distance(A,B)
```

```
1.41421356237
```

15) distanceSquared(A,B) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan kuadrat jarak titik A dan titik B.

```
>distanceSquared(A,B)
```

```
2
```

16) quadrance(A,B) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan kuadrat jarak titik A dan titik B.

```
>quadrance(A,B)
```

```
2
```

17) areaTriangle(A,B,C) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan luas segitiga ABC.

```
>A=[1,2]; B=[2,1]; C=[3,3];
>areaTriangle(A,B,C)
```

```
1.5
```

18) computeAngle(A,B,C) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan besar sudut ABC.

```
>A=[1,2]; B=[2,1]; C=[3,3];
>computeAngle(A,B,C)
```

```
1.2490457724
```

19) angleBisector(A,B,C) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan garis bagi sudut ABC.

```
>A=[1,2]; B=[2,1]; C=[3,3];
>angleBisector(A,B,C)
```

```
[-1.63246,  -0.264911,  -3.52982]
```

20) circleWithCenter(A,r) merupakan fungsi yang digunakan untuk menggambar lingkaran yang berpusat di A dan jari-jari r.

21) getCircleCenter(c) merupakan fungsi yang digunakan untuk menemukan pusat lingkaran c.

22) getCircleRadius(c) merupakan fungsi yang digunakan untuk menemukan jari-jari lingkaran c.

23) circleThrough(A,B,C) merupakan fungsi yang digunakan untuk menggambar lingkaran yang melalui titik A,B,C.

24) middlePerpendicular(A,B) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan titik tengah AB.

```
>A=[1,2]; B=[2,1]; C=[3,3];
>middlePerpendicular(A,B)
```

```
[-1,  1,  0]
```

25) lineCircleIntersections(g,c) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan titik potong garis g dengan lingkaran c.

26) circleCircleIntersections(c1,c2) merupakan fungsi yang digunakan untuk menentukan titik potong lingakaran c1 dan lingkaran c2.

27) planeThrough(A,B,C) merupakan fungsi yang digunakan untuk menggambar bidang yang melalui titik A,B,C.

c) Fungsi-fungsi Khusus untuk Geometri Simbolik

Fungsi ini bertujuan untuk membantu menentukan persamaan garis dengan berbagai syarat dan juga menentukan kuadrat jarak.

1. getLineEquation(g,x,y) merupakan fungsi untuk persamaan garis g yang telah dinyatakan dalam x dan y.

```
>A &= [2,1]; B &= [1,2]; C &= [4,4]; // menentukan tiga titik A, B, C
>c &= lineThrough(B,C); // c=BC
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$3\,y-2\,x=4$$

$$\left[y=\frac{2\,x}{3}+\frac{4}{3} \right]$$

2. getHesseForm(g,x,y,A) merupakan fungsi untuk bentuk Hesse garis g dan dinyatakan dalam x dan y dengan titik A berada pada sisi positif (atas atau kanan) garis. Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan titik, sehingga titik itu berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Kemudian dengan memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C)
```

$$\frac{3\,y-2\,x-4}{\sqrt{13}}$$

3. quad(A,B) merupakan fungsi untuk menentukan kuadrat jarak AB. Umumnya, fungsi ini digunakan untuk menentukan Phytagoras.

```
>a &= quad (B,C); $a,
```

$$13$$

4. spread(a,b,c) merupakan fungsi spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c yaitu kuadrat dari sin alpha dengan diketahui alpha merupakan sudut yang menghadap sisi a.

5. crosslaw(a,b,c,sa) merupakan fungsi untuk persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dan dengan panjang sisi a,b,c.

```
>$crosslaw(a,b,b,sa)
```

$$\left(2\,b-13\right)^2=4\,b^2\,\left(1-sa\right)$$

6. triplespread(sa,sb,sc) merupakan fungsi untuk persamaan spread sa,sb,sc dan dimana persamaan itu akan membentuk suatu segitiga.

```
>$triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2 = 2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

7. doublespread(sa) merupakan fungsi untuk spread sudut rangkap Spread dua kali phi dengan sa sama dengan kuadrat dari sin(phi) spread a.

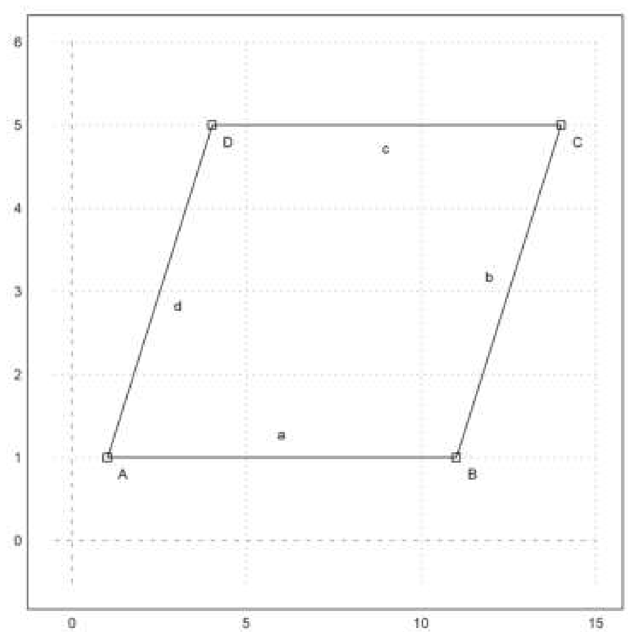
```
>$doublespread(sa)
```

$$4\,(1-sa)\,sa$$

Latihan

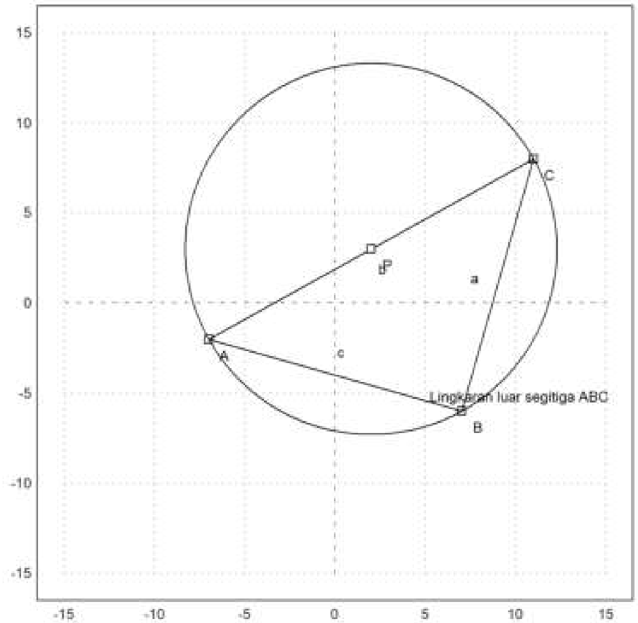
1. Gambarkan bangun jajar genjang ABCD. Titik A(1,1), B(11,1), C(14,5), D(4,5).

```
>setPlotRange(-0.5,15,-0.5,6); // mendefinisikan bidang koordinat
>A=[1,1]; plotPoint (A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[11,1]; plotPoint (B,"B");
>C=[14,5]; plotPoint (C,"C");
>D=[4,5]; plotPoint (D,"D");
>plotSegment (A,B,"a"); // a=AB
>plotSegment (B,C,"b"); // b=BC
>plotSegment (C,D,"c"); // c=CD
>plotSegment (D,A,"d"): // d=DA
```



2. Gambarkan lingkaran luar segitiga ABC dengan A(-7,-2), B(7,-6), C(11,8).

```
>setPlotRange(15);
>A=[-7,-2]; plotPoint (A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[7,-6]; plotPoint (B,"B");
>C=[11,8]; plotPoint (C,"C");
>plotSegment (A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment (B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment (C,A,"b"); // b=CA
>m=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga
>P=getCircleCenter(m); // titik pusat lingkaran m
>R=getCircleRadius(m); // jari-jari lingkaran m
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik "P"
>plotCircle(m,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



2. Objek-Objek Geometri Lainnya

Kali ini, akan dibahas:
a) Titik tengah suatu garis
b) Titik potong dua garis
c) Titik potong garis dan lingkaran
d) Titik potong dua lingkaran

a) Titik Tengah Suatu Garis

Titik tengah suatu garis adalah titik yang berada tepat di tengah garis tersebut, sehingga jarak dari titik ini ke ujung-ujung garis tersebut adalah sama. Dalam matematika, untuk menemukan titik tengah suatu garis, Kita dapat menggunakan formula berikut:

Jika Kita memiliki dua koordinat ujung garis (x1, y1) dan (x2, y2), maka koordinat titik tengahnya (x, y) dapat dihitung sebagai berikut:

$$x = \frac{(x1 + x2)}{2}$$

$$y = \frac{(y1 + y2)}{2}$$

Ini berarti Kita menjumlahkan koordinat x dari kedua ujung garis dan kemudian membaginya dengan 2 untuk menemukan koordinat x titik tengah. Demikian juga, Kita menjumlahkan koordinat y dari kedua ujung garis dan membaginya dengan 2 untuk menemukan koordinat y titik tengah.

Titik tengah suatu garis juga dapat ditemukan dengan metode geometri. Kita dapat menggambar dua garis diagonal dari sudut-sudut yang berlawanan pada segiempat yang dibentuk oleh garis tersebut. Titik pertemuan kedua diagonal ini adalah titik tengah garis.

Jadi, titik tengah suatu garis adalah titik yang terletak persis di tengah garis tersebut, dengan jarak yang sama dari kedua ujung garisnya. Ini adalah konsep dasar dalam geometri dan matematika yang sering digunakan dalam berbagai konteks, seperti pembuatan grafik, pemodelan geometri, dan banyak aplikasi lainnya.

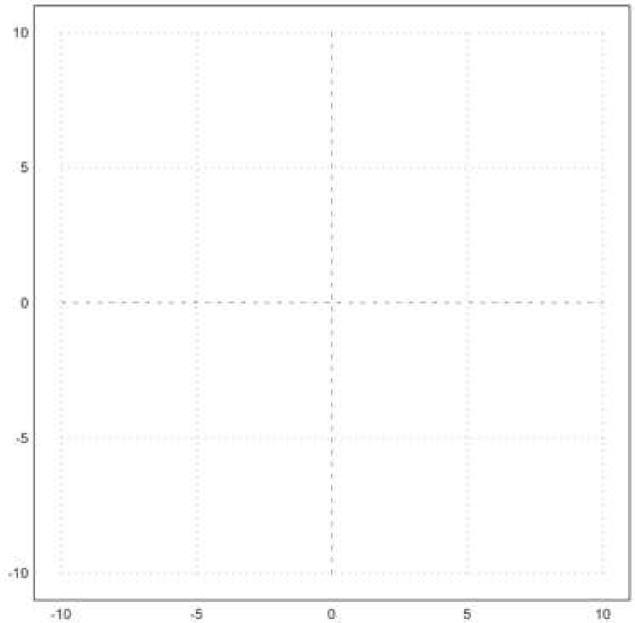
CONTOH :

Diberikan ruas garis AB yang melalui dua titik A dan titik B. Dengan koordinat titik A dan titik B berturut-turut (1,0) dan (5,0). tentukan koordinat titik tengah ruas garis AB

Penyelesaian

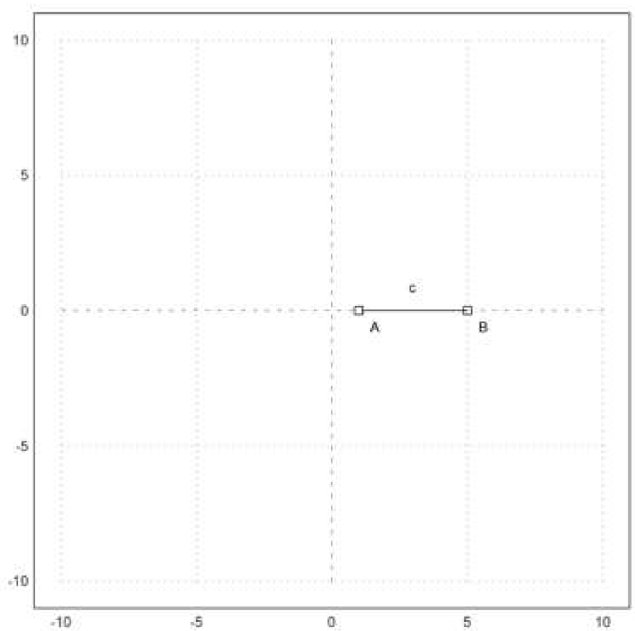
Langkah pertama membuat bidang kartesius

```
>setPlotRange(10):
```

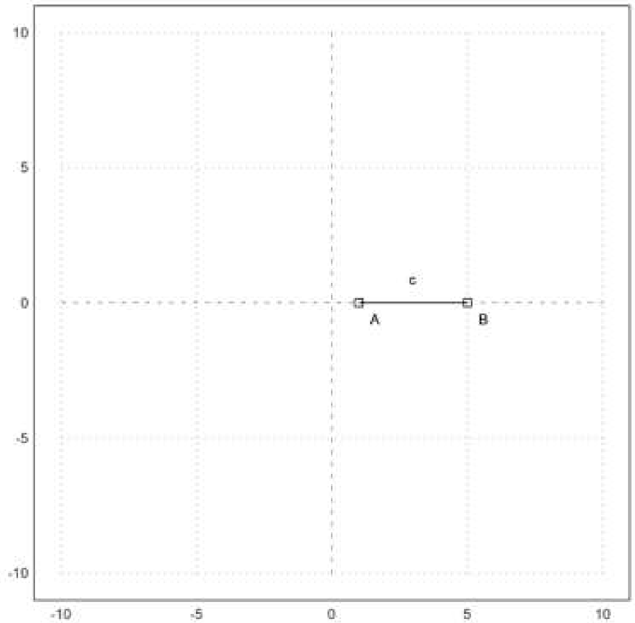


Selanjutnya buat ruas garis yang melalui 2 titik A dan B yang akan kita cari titik tengahnya pada bidang kartesius

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"):
```

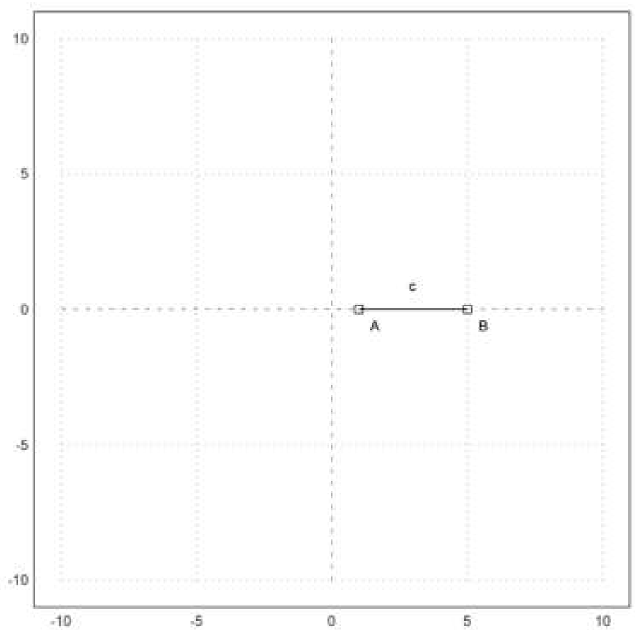



```
>B=[5,0]; plotPoint(B,"B")
>plotSegment(A,B,"c"):
```



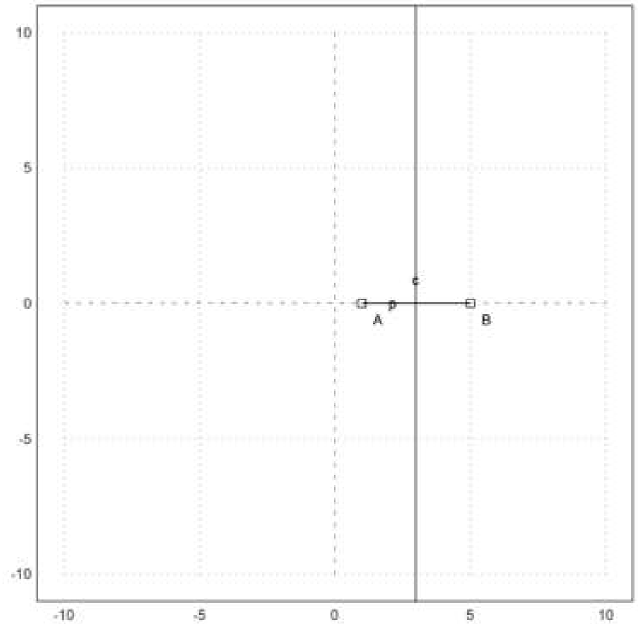
Berikutnya buat garis h yang tegak lurus ruas garis AB dan memotong tepat di tengah ruas garis AB

```
>h= middlePerpendicular(A,B):
```

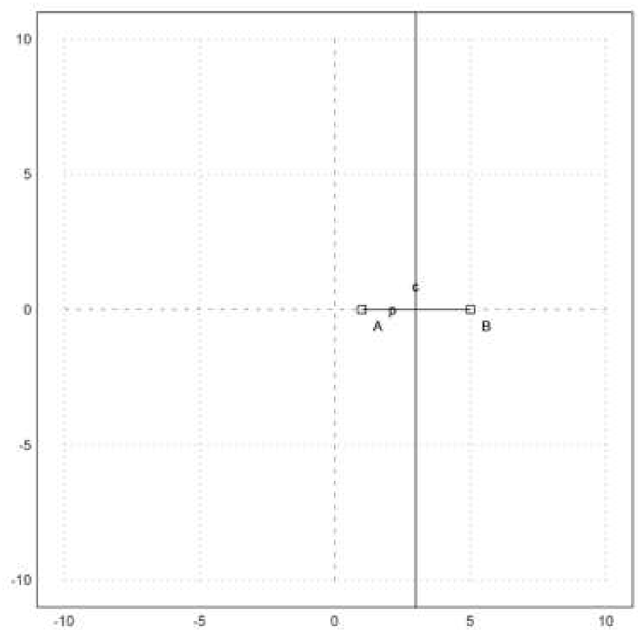


Kemudian kita menentukan koordinat titik D yaitu perpotongan garis h dan ruas garis AB. titik D adalah titik tengah ruas garis AB

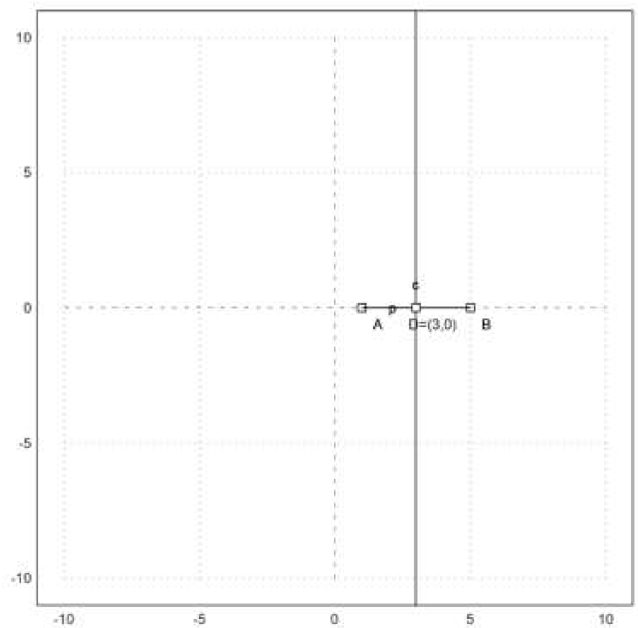
```
>plotLine(h):
```




```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(A,B)):
```




```
>plotPoint(D,value=1):
```



Latihan

1. Diberikan ruas garis l yang melalui dua titik F dan titik G. Dengan koordinat titik F dan titik G berturut-turut (2,0) dan (2,6). tentukan koordinat titik tengah ruas garis l

```
>setPlotRange(10);
>G=[2,0]; plotPoint(G,"G");
>F=[2,6]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(G,F,"l");
>h= middlePerpendicular(G,F);
>plotLine(h);
>R=lineIntersection(h,lineThrough(G,F));
>plotPoint(R,value=1);
```

2. Diberikan ruas garis k yang melalui dua titik S dan titik R. Dengan koordinat titik S dan titik R berturut-turut (-5,0) dan (3,6). tentukan koordinat titik tengah ruas garis k

```
>setPlotRange(10);
>S=[-5,0]; plotPoint(S,"S");
>R=[3,6]; plotPoint(R,"R");
>plotSegment(S,R,"k");
>h= middlePerpendicular(S,R);
>plotLine(h);
>D=lineIntersection(h,lineThrough(S,R));
>plotPoint(D,value=1);
```

b) Titik Potong Dua Garis

Titik potong dua garis adalah titik di mana dua garis lurus berpotongan satu sama lain. Dalam konteks geometri atau matematika, dua garis yang berpotongan akan memiliki satu titik potong, yang merupakan titik yang terletak pada kedua garis tersebut. Titik potong ini memiliki koordinat yang spesifik dalam sistem koordinat yang digunakan.

Dalam geometri Euclidean, jika dua garis sejajar (paralel), maka mereka tidak akan memiliki titik potong. Namun, jika dua garis tidak sejajar, maka mereka akan memiliki satu titik potong yang dapat dihitung atau ditentukan.

Secara matematis, untuk menemukan titik potong dua garis, kita dapat menggunakan sistem persamaan linier. Jika kita memiliki dua persamaan linier yang mewakili dua garis, Kita dapat menyelesaikan sistem persamaan ini untuk menemukan nilai koordinat titik potong. Biasanya, kita akan menggunakan metode substitusi, eliminasi, atau grafik untuk menemukan titik potongnya.

CONTOH :
Diberikan titik A(0,2), B(2,0), C(0,0), dan D(2,2). c merupakan ruas garis AB dan b merupakan Ruas garis

CD. tentukan koordinat titik potong dua ruas garis tersebut!

Penyelesaian:

langkah pertama kita menentukan luas bidang kartesius terlebih dahulu

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

selanjutnya kita membuat ruas garis c dan b

```
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,0]; plotPoint(C,"C");
>D=[2,2]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(C,D,"b"); // b=CD
```

berikutnya kita akan menentukan koordinat titik potongnya

```
>lineThrough(A,B); // garis yang melalui A dan B
>lineThrough(C,D); // garis yang melalui C dan D
>E=lineIntersection(lineThrough(A,B),lineThrough(C,D)); // E adalah titik potong c dan b
>plotPoint(E,value=1); // koordinat E ditampilkan
```

Latihan

1. Diberikan dua garis yang melewati titik koordinat sebagai berikut:
garis AB : titik A(2,3)dan titik B(0,1)
garis CD : titik C(0,3) dan titik D(3,0)
tentukan koordinat titik potong kedua garis tersebut!

```
>setPlotRange(5);
>A=[2,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
>D=[3,0]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(C,D,"b"); // b=CD
>lineThrough(A,B);
>lineThrough(C,D);
>E=lineIntersection(lineThrough(A,B),lineThrough(C,D));
>plotPoint(E,value=1);
```

c) Titik Potong Garis dan Lingkaran

Titik potong antara garis dan lingkaran adalah titik di mana sebuah garis lurus memotong lingkaran. Untuk memahami konsep ini secara lengkap, perlu dipahami beberapa hal terkait dengan garis dan lingkaran.

Garis: Garis adalah himpunan tak terbatas titik yang terletak sepanjang jalur yang sama, dan garis ini dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk persamaan matematis, seperti persamaan linier. Sebuah garis memiliki kemiringan (gradien) dan titik potong sumbu y (intersep) yang memungkinkan kita untuk menggambarkannya atau menganalisanya dalam sistem koordinat.

Lingkaran: Lingkaran adalah himpunan semua titik yang berjarak sama dari satu titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran. Jarak ini disebut sebagai jari-jari lingkaran. Persamaan matematis dari lingkaran adalah

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

di mana (a, b) adalah koordinat pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran.

Ketika kita berbicara tentang titik potong antara garis dan lingkaran, ada beberapa kemungkinan:

Tidak Ada Titik Potong: Garis tersebut mungkin tidak memotong lingkaran sama sekali jika jarak antara garis dan pusat lingkaran lebih besar dari jari-jari lingkaran.

Satu Titik Potong: Garis mungkin hanya memotong lingkaran di satu titik jika garis tersebut menyentuh lingkaran secara tepat pada satu titik, dengan jarak antara garis dan pusat lingkaran sama dengan jari-jari lingkaran.

Dua Titik Potong: Garis bisa memotong lingkaran di dua titik berbeda jika garis melintasi lingkaran.

Untuk menentukan titik potong antara garis dan lingkaran, kita perlu menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan garis (yang bisa berupa persamaan linier) dan persamaan lingkaran. Ini bisa menghasilkan titik potong yang merupakan koordinat di mana garis memotong lingkaran. Dalam kasus lingkaran, ini sering digunakan dalam masalah geometri dan trigonometri untuk menemukan titik potong dan berbagai sifat lainnya dari bangun geometri.

CONTOH :
Diberikan lingkaran berjari jari 4 dengan titik pusat di (1,0). diberikan dua titik B dan C dengan koordinat berturut-turut (0,0) dan (2,1). Apabila dibuat garis yang melalui titik B dan C serta memotong lingkran,tentukan koordinat titik potong garis pada lingkaran terebut!

Langkah pertama, kita membuat lingkaran dan garis yang melalui B dan C serta memotong lingkaran

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [0,0]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Berikutnya kita mencari koordinat titik P1 dan P2 yang merupakan titik potong garis dengan lingkaran

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1; P2;
>plotPoint(P1); plotPoint(P2);
```

Latihan

1. Diberikan lingkaran berjari jari 5 dengan titik pusat di J(1,0). diberikan dua titik M dan N dengan koordinat berturut-turut (-1,2) dan (3,-2). Apabila dibuat garis yang melalui titik M dan N serta memotong lingkran,tentukan koordinat titik potong terebut!

```
>J &:= [1,0]; c=circleWithCenter(J,5);
>M &:= [-1,2]; N &:= [3,-2]; l=lineThrough(M,N);
>setPlotRange(7); plotCircle(c); plotLine(l);
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1; P2;
>plotPoint(P1); plotPoint(P2);
```

e) Titik Potong Dua Lingkaran

Titik potong dua lingkaran adalah titik atau titik-titik di mana dua lingkaran berpotongan, yang berarti bahwa titik-titik tersebut terletak pada kedua lingkaran sekaligus. Titik potong ini dapat ditemukan jika dua lingkaran saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan satu sama lain.

Dalam kasus titik potong dua lingkaran, ada beberapa skenario yang mungkin terjadi:

Dua Lingkaran Saling Bersilangan: Ini berarti bahwa dua lingkaran sepenuhnya tumpang tindih satu sama lain, dan titik potongnya akan ada di setiap titik tumpang tindih.

Dua Lingkaran Saling Menyilangi: Dalam situasi ini, dua lingkaran saling melintasi satu sama lain, tetapi tidak sepenuhnya tumpang tindih. Oleh karena itu, akan ada dua titik potong yang berbeda di mana kedua lingkaran berpotongan.

Dua Lingkaran Bersinggungan: Jika dua lingkaran bersinggungan, maka mereka hanya memiliki satu titik potong yang merupakan titik sentuh antara kedua lingkaran. Jika lingkaran tersebut bersinggungan di dalam, maka mereka akan memiliki satu titik potong di dalam satu lingkaran, dan jika bersinggungan di luar, maka titik potongnya berada di luar kedua lingkaran.

Untuk menentukan titik potong antara dua lingkaran, kita dapat menggunakan prinsip geometri dan aljabar. Secara matematis, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan lingkaran pertama dan lingkaran kedua. Persamaan umum lingkaran adalah

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

di mana (h, k) adalah pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggabungkan persamaan lingkaran pertama dan kedua, kita dapat menemukan titik potongnya.

Dalam beberapa kasus, bisa tidak ada titik potong jika kedua lingkaran berada pada posisi yang tidak saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan. Pemahaman tentang titik potong dua lingkaran penting dalam berbagai aplikasi matematika dan ilmu pengetahuan, terutama dalam geometri dan rekayasa.

CONTOH:

Diberikan 2 lingkaran berjari jari sepanjang ruas garis AB dengan titik A(2,2) merupakan titik pusat lingkaran petama dan titik B (-1,-2) merupakan titik pusat lingkaran kedua.kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. tentukan koordinat p1 dan p2!

langkah pertama, kita membuat 2 lingkaran tersebut

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B)); //lingkaran 1 dengan titik pusat di A dan berjari-jari AB
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B)); // lingkaran 2 dengan titik pusat di B dan berjari-jari AB
```

Berikutnya kita menggambar garis yang melalui perpotongan dua lingkaran tersebut

```
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  plotLine(l);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
>plotPoint(P1,value=1); plotPoint(P2,value=1); // koordinat titik potong 2 lingkaran
```

CONTOH :

Diberikan 2 lingkaran berjari jari 4 dengan titik A(2,3) merupakan titik pusat lingkaran petama dan titik B (-3,-3) merupakan titik pusat lingkaran kedua.kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. tentukan koordinat p1 dan p2!

langkah pertama, kita membuat 2 lingkaran tersebut

```
>A=[2,3];
>B=[-3,-3];
>c1=circleWithCenter(A,4);
>c2=circleWithCenter(B,4);
```

Berikutnya kita menggambar garis yang melalui perpotongan dua lingkaran tersebut

```
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  plotLine(l);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
>plotPoint(P1,value=1); plotPoint(P2,value=1); // Koordinat titik potong 2 Lingkaran
```

Latihan

1. Diberikan 2 lingkaran berjari jari sepanjang ruas garis AB dengan titik A(2,3) dan titik B (-2,-2).kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. tentukan koordinat p1 dan p2!

```
>A=[2,3]; B=[-2,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B)); //lingkaran 1 dengan titik pusat di A dan berjari-jari AB
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B)); // lingkaran 2 dengan titik pusat di B dan berjari-jari AB
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(10); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  plotLine(l);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
>plotPoint(P1,value=1); plotPoint(P2,value=1); // koordinat titik potong 2 lingkaran
```

```
>$getLineEquation(t,x,y); $solve(%,y) | expand;
```

3. Persamaan Garis

Akan dibahas mengenai persamaan yang melewati 2 titik dan juga persamaan berbagai garis pada segitiga, atau biasa kita sebut garis istimewa segitiga, yang mencakup:

a) Persamaan Garis yang melewati 2 titik
b) Persamaan Garis yang melewati ruas garis Tinggi suatu segitiga
c) Persamaan Garis Sumbu
d) Persamaan Garis berat
e) Persamaan Garis bagi

a) Persamaan Garis yang melewati 2 titik

Persamaan garis yang melalui dua titik, juga dikenal sebagai persamaan titik-dua-titik, adalah cara umum untuk menggambarkan garis lurus dalam sistem koordinat. Untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik tertentu, dua titik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

Setelah kita mendapatkan koordinat 2 titik tersebut, kita membuat garis yang melewati 2 titik (titik A dan B) lalu kita cari persamaannya, sedemikian sehingga saat x1 disubtitusi ke persamaan maka menghasilkan nilai y1, juga saat x2 disubtitusi ke persamaan maka didapat nilai y2 didengan perintah EMT yaitu:

lineThrough(A,B);

setelah itu kita mengambar garis tersebut, dan dihitung persamaannya dengan menggunakan perintah:

getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)

Untuk contohnya misal diberikan 2 titik A dan B dengan koordinat sebagai berikut:

$$A(-7,-2) \quad dan \quad B(5,10)$$

Tentukan persamaan dari garis yang melewati titik A dan titik B tersebut!

Penyelesaian

Menggambarkan garis tersebut pada plot range

```
>A=[-7,-2];
>B=[5,10];
>setPlotRange(10);
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>color(2);
>plotLine(lineThrough(A,B),"AB");
>color(1);
```

mencari persamaan garis yang melalui A dan B

```
>A&=[-7,-2];
>B&=[5,10];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(%,y) | expand;
```

Latihan

1. Diberikan titik A dan B berturut-turut adalah (12,4) dan (-7,-5), tentukan persamaan garis yang melewati 2 titik tersebut

```
>setPlotRange(15);
>A=[12,4]; plotPoint(A);
>B=[-7,-5]; plotPoint(B);
>lineThrough(A,B);
>plotLine(lineThrough(A,B),"ab");
>A&=[12,4];
>B&=[-7,-5];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(%,y) | expand;
```

2. Diberikan 4 titik yang masing-masing adalah A(4,5) B(2,-3) C(0,-4) D(2,5) dibuat menjadi garis yang melewati AB dan melewati DC.
periksalah apakah saat kedua garis tersebut jika memiliki persamaan yang berbentuk y=mx+c, koefisien x kedua persamaan itu bernilai sama?

```
>A=[4,5];
>B=[2,-3];
>C=[0,-4];
>D=[2,5];
>setPlotRange(5);
```

```
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>plotPoint(C);
>plotPoint(D);
>plotLine(lineThrough(A,B),"AB");
>plotLine(lineThrough(C,D),"DC");
>A&=[4,5];
>B&=[2,-3];
>C&=[0,-4];
>D&=[2,5];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y); $solve(%,y) | expand;
>$getLineEquation(lineThrough(C,D),x,y); $solve(%,y) | expand;
```

3. Jika titik A dan B beturut-turut adalah (4,4) dan (-2,-2) apakah titik C(0,0) memenuhi persamaan tersebut?

```
>A=[4,4];
>B=[-2,-2];
>C=[0,0];
>setPlotRange(5);
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>plotLine(lineThrough(A,B),"AB");
>A&=[4,4];
>B&=[-2,-2];
>C&=[0,0];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y); $solve(%,y) | expand;
```

b) Persamaan Garis yang melewati Ruas Garis Tinggi Suatu Segitiga

Garis tinggi dalam segitiga adalah ruas garis yang ditarik dari sudut segitiga ke sisi yang berlawanan secara tegak lurus. Dengan kata lain, garis tinggi merupakan jarak vertikal dari salah satu sudut segitiga ke sisi yang berlawanan, dan garis ini membentuk sudut siku-siku dengan sisi tersebut. misal terdapat:

$$\triangle ABC, dengan A(3,0); B(-2,0); dan C(2,2)$$

membuat plot gambar garis tinggi pada segitiga tersebut

```
>setPlotRange(3); //membuat plot kartesius
```

membuat segitiga ABC

```
>A=[3,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[-2,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

membuat garis tinggi

```
>g=lineThrough(B,A);
>h=perpendicular(C,g);
>I = lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1);
>color(2);
>plotSegment(C,I,"garis tinggi");
>color(1);
```

mencari persamaan garis yang melewati garis tinggi segitiga ABC

```
>A&=[3,0];
>B&=[-2,0];
>C&=[2,2];
>g&=lineThrough(B,A);
>h&=perpendicular(C,g);
>$getLineEquation(h,x,y);
>$solve(%,x) | expand;
```

latihan

1. Bila terdapat:

maka bagaimanakah letak garis tinggi segitiga yang berasal dari titik sudut B? beserta persamaan garis yang melewati garis tinggi tersebut

membuat segitiga ABC

```
>setPlotRange(10);
>A=[-6,10]; B=[8,4]; C=[0,-9];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(C,B,"a"); plotSegment(A,C,"b");
```

membuat garis tinggi segitiga ABC dari titik sudut B

```
>t=perpendicular(B,lineThrough(A,C));
>o=lineIntersection(lineThrough(A,C),t); plotPoint(o,"O",value=1);
>color(2); plotSegment(B,o,"garis tinggi BO"); color(1);
```

membuat persamaan garis yang melewati garis tinggi tersebut

```
>A&=[-6,10]; B&=[8,4]; C&=[0,-9];
>t&=perpendicular(B,lineThrough(A,C));
>o&=lineIntersection(lineThrough(A,C),t);
>$getLineEquation(lineThrough(o,B),x,y);
> $solve(%,y) | expand;
```

2. jika terdapat ruas garis tinggi segitiga siku-siku ABC dengan A(0,12), B(0,0), dan C(9,0) dari titik sudut B, tentukan persamaan garis yang melewati garis tinggi tersebut!

```
>setPlotRange(15);
>A=[0,12]; B=[0,0]; C=[9,0];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(C,B,"a"); plotSegment(A,C,"b");
>t=perpendicular(B,lineThrough(A,C));
>o=lineIntersection(lineThrough(A,C),t); plotPoint(o,"O",value=1);
>color(2); plotSegment(B,o,"garis tinggi BO"); color(1);
>plotLine(lineThrough(B,o),"garis melewati tinggi");
>A&=[0,12]; B&=[0,0]; C&=[9,0];
>t&=perpendicular(B,lineThrough(A,C));
>o&=lineIntersection(lineThrough(A,C),t);
>$getLineEquation(lineThrough(o,B),x,y);
> $solve(%,y) | expand;
```

c) Persamaan Garis Sumbu

Definisi garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus.
misal terdapat,

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(3,4);\ B(-5,-4);\ dan\ C(3,-4)$$

tentukan persamaan garis sumbu dari ruas garis BC

membuat plot garis sumbu pada segitiga tersebut

```
>setPlotRange(5);
>A=[3,4]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[-5,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>color(2);
>p=middlePerpendicular(B,C); plotLine(p,"garis sumbu");
>color(1);
```

mencari persamaan garis sumbu tersebut

```
>B&=[-5,-4];
>C&=[3,-4];
>p&=middlePerpendicular(B,C);
>$getLineEquation(p,x,y);
```

latihan

1. Tentukan apakah y=3x+2 merupakan persamaan garis sumbu dari garis EF dengan E(3,1) dan F(-3,3)

```
>E=[3,1];
>F=[-3,3];
>setPlotRange(3);
>plotPoint(E);
>plotPoint(F);
>plotSegment(E,F,"EF");
>color(2);
>p=middlePerpendicular(E,F); plotLine(p,"garis sumbu");
>color(1);
>F&=[3,1];
>e&=[-3,3];
>p&=middlePerpendicular(e,F);
>$getLineEquation(p,x,y); $solve(%,y) | expand;
```

2. diberikan ruas garis CD yang koordinat C(-4,5) dan D(9,4), tentukan persamaan garis sumbu dari garis CD tersebut!

```
>C=[-4,5];
>D=[9,4];
>setPlotRange(10);
>plotPoint(C);
>plotPoint(D);
>plotSegment(C,D,"CD");
>color(2);
>p=middlePerpendicular(C,D);
>plotLine(p,"garis sumbu");
>color(1);
>C&=[-4,5];
>D&=[9,4];
>p&=middlePerpendicular(C,D);
>$getLineEquation(p,x,y); $solve(%,y) | expand;
```

3. diberikan ruas garis AB yang koordinat titik-titik nya A(0,y1) dan B(x1,0) dengan y1 adalah bilangan bulan ini (misal agustus=8) dan x1 adalah tanggal hari ini. Hitunglah persamaan garis sumbu dari ruas garis AB tersebut!

d) Persamaan Garis Berat

Dalam matematika, garis berat dalam sebuah segitiga adalah garis yang menghubungkan salah satu sudut segitiga dengan titik tengah sisi yang berlawanan. Setiap segitiga memiliki tiga garis berat yang masing-masing berasal dari salah satu sudut segitiga dan menuju titik tengah sisi yang berlawanan. Garis berat ini juga dikenal sebagai garis median karena mereka memotong sisi segitiga pada titik tengahnya.

Dalam konteks segitiga, garis berat memiliki beberapa sifat penting. Salah satunya adalah ketika ketiga garis berat bersimpang-siuran di satu titik tunggal yang disebut pusat gravitasi atau pusat berat segitiga. Titik ini membagi setiap garis berat dalam perbandingan 2:1, yang berarti bahwa jarak dari titik tengah sisi ke sudut yang berlawanan adalah dua kali jarak dari pusat gravitasi ke titik tengah sisi. Garis berat dalam segitiga juga sering digunakan dalam perhitungan geometri dan trigonometri untuk menentukan berbagai sifat dan properti segitiga, seperti panjang sisi, luas, dan lainnya.

misal terdapat:

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(-4,0);\ B(5,0);\ dan\ C(3,4)$$

membuat plot garis berat

```
>setPlotRange(5);
>A=[-4,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[5,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,4]; plotPoint(C,"C");
```

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>t=middlePerpendicular(A,B);
>O=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)); plotPoint(O,value=1);
>color(2);
>plotSegment(O,C,"garis Berat");
>color(1);
>A&=[-4,0];
>B&=[5,0];
>C&=[3,4];
>t&=middlePerpendicular(A,B);
>O&=lineIntersection(t,lineThrough(A,B));
>p&=lineThrough(O,C);
>$getLineEquation(p,x,y) ;
>$solve(%,y)| expand;
```

latihan

1. terdapat segitiga ABC dengan A(-12,-8) B(14,14) dan C(0,-16), tentukan persamaan garis-garis beratnya

```
>setPlotRange(20);
>A=[-20,-15]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[20,20]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,-16]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>t1=middlePerpendicular(A,B);
>O1=lineIntersection(t1,lineThrough(A,B)); plotPoint(O1,value=1);
>t2=middlePerpendicular(C,B);
>O2=lineIntersection(t2,lineThrough(C,B)); plotPoint(O2,value=1);
>t3=middlePerpendicular(A,C);
>O3=lineIntersection(t3,lineThrough(A,C)); plotPoint(O3,value=1);
>color(2);
>plotSegment(O1,C,"");
>plotSegment(O2,A);
>plotSegment(O3,B,"garis Berat");
>color(1);
>A&=[-20,-15];
>B&=[20,20];
>C&=[5,-16];
>t1&=middlePerpendicular(A,B);
>O1&=lineIntersection(t1,lineThrough(A,B));
>t2&=middlePerpendicular(C,B);
>O2&=lineIntersection(t2,lineThrough(C,B));
>t3&=middlePerpendicular(A,C);
>O3&=lineIntersection(t3,lineThrough(A,C));
>$getLineEquation(lineThrough(O1,C),x,y) ;
>$solve(%,y)| expand;
```

```
>$getLineEquation(lineThrough(O2,A),x,y) ;
>$solve(%,y)| expand;
```

```
>$getLineEquation(lineThrough(O3,B),x,y) ;
>$solve(%,y)| expand;
```

2. dari soal no 1, terdapat 3 titik baru yang berada di tengah tengah AB, AC, BC. buat segitiga dari 3 titik baru tersebut dan cari garis beratnya

e) Garis bagi

Garis bagi adalah garis yang membagi sudut menjadi dua sudut yang besarnya sama. Nama lain garis bagi dalam bahasa inggris adalah angle bisector yang dapat dijelaskan sebagai garis yang memotong sudut sehingga sudut tersebut terbagi menjadi dua bagian yang memiliki besar yang sama. Artinya, garis ini adalah garis pembagi yang membagi sudut menjadi dua sudut seimbang. misalkan terdapat:

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(-4,-4);\ B(3,-4);\ dan\ C(3,4)$$

$$kita\ ingin\ mencari\ garis\ bagi\ dari: \quad \angle ABC$$

membuaat plot garis bagi pada segitiga tersebut

```
>setPlotRange(5);
>A=[-4,-4]; plotPoint(A,"A"); //definisi dan gambar tiga titik
>B=[3,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>t=angleBisector(A,B,C);
>o=lineIntersection(t,lineThrough(A,C));
>color(2);
>plotLine(t,"garis Bagi sudut ABC");
>color(1);
```

mencari persamaan garis bagi

```
>A&=[-4,-4];
>B&=[3,-4];
>C&=[3,4];
>t&=angleBisector(A,B,C);
>$getLineEquation(t,x,y) ;
>$solve(%,y) | expand;
```

latihan

1. tentukan persamaan garis bagi sudut ABC jika A(-5,-5), B(10,0), dan C(-5,5)

```
>setPlotRange(10);
>A=[-5,-5]; plotPoint(A,"A"); //definisi dan gambar tiga titik
>B=[10,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[-5,5]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>t=angleBisector(A,B,C);
>o=lineIntersection(t,lineThrough(A,C));
>color(2);
>plotLine(t,"garis Bagi sudut ABC");
>color(1);
```

mencari persamaan garis bagi

```
>A&=[-5,-5];
>B&=[10,0];
>C&=[-5,5];
>t&=angleBisector(A,B,C);
>$getLineEquation(t,x,y);
>$solve(%,y) | expand;
```

2. tentukan persamaan garis bagi sudut DEF jika D(6,-4), E(8,10), dan F(-4,2)

```
>setPlotRange(10);
>D=[0,-10]; plotPoint(D,"D"); //definisi dan gambar tiga titik
>E=[10,10]; plotPoint(E,"E");
>F=[-10,0]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f");
>plotSegment(E,F,"d");
>plotSegment(D,F,"e");
>t=angleBisector(D,E,F);
>o=lineIntersection(t,lineThrough(D,F));
>color(2);
>plotLine(t,"garis Bagi sudut DEF");
>color(1);
```

```
>D&=[0,-10];
>e&=[10,10];
```

```
>F&=[-10,0];
```

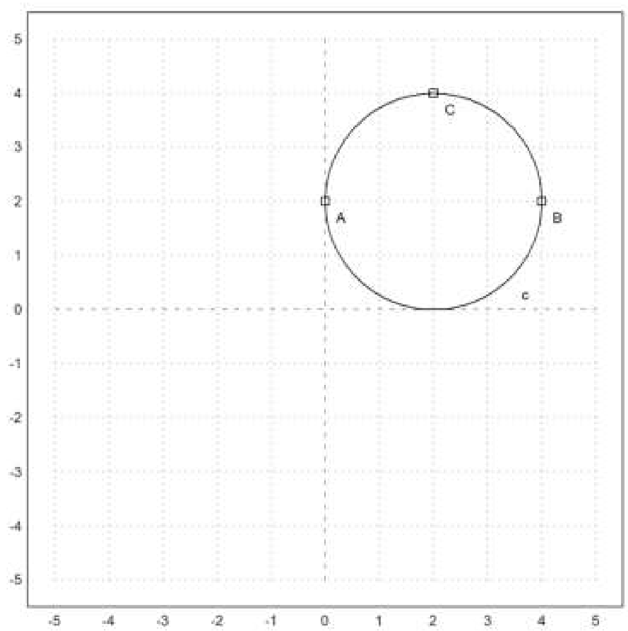
```
>t&=angleBisector(D,E,F);
>$getLineEquation(t,x,y) ;
>$solve(%,y) | expand;
```

4. Menentukan titik pusat dan jari-jari suatu lingkaran

Definisi lingkaran
Lingkaran didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang memiliki jarak yang sama dari satu titik tertentu yang disebut pusat lingkaran.

Unsur-unsur pelengkap di lingkaran :
a) Titik pusat : titik yang berada di tengah lingkaran
b) Diameter : tali busur yang melewati titik pusat lingkaran
c) Jari-jari : jarak antara titik pusat dan garis lingkaran

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5); //  menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[4,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,4]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran melalui tiga titik yaitu titik A, B, C
>o=getCircleCenter(c); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotCircle(c):
```




```
>o
```

```
    [2,  2]
```

```
>R=getCircleRadius(c); // jari-jari lingkaran luar
>R
```

```
    2
```

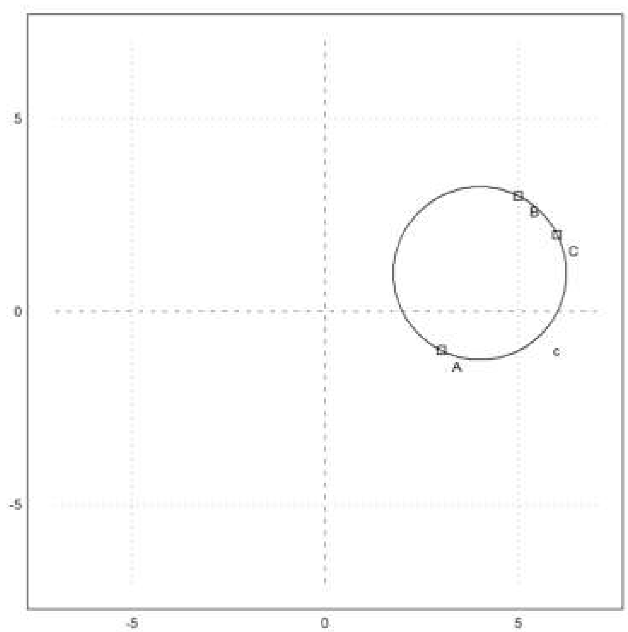
```
>2*R
```

```
    4
```

latihan

1.Diketahui sebuah lingkaran melalui tiga titik dengan koordinat A(3, –1), B(5, 3), dan C(6, 2). Tentukan pusat lingkaran dan hitunglah jari-jari lingkaran tersebut

```
>setPlotRange (-7,7,-7,7);
>A=[3,-1]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,3]; plotPoint(B,"B");
>C=[6,2]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C);
>o=getCircleCenter(c);
>plotCircle(c):
```




```
>o
```

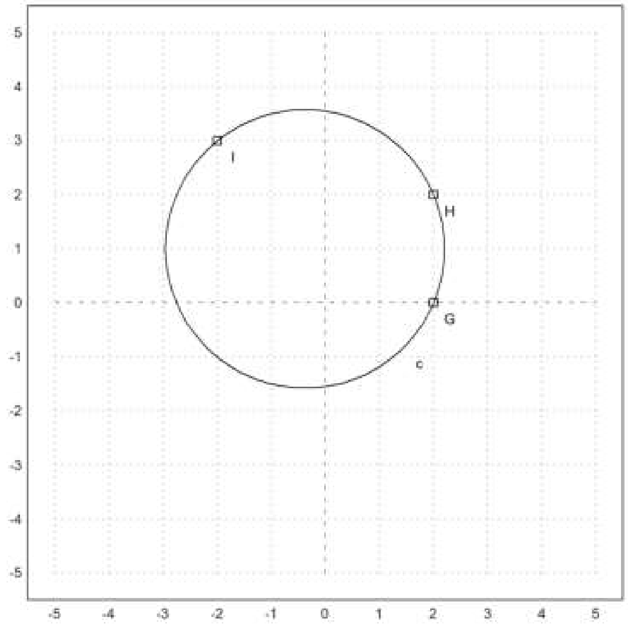
```
[4,  1]
```

```
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>R
```

```
2.2360679775
```

2.Diketahui sebuah lingkaran melalui tiga titik dengan koordinat G(2, 0), H(2, 2), dan I(-2, 3). Tentukan pusat lingkaran dan hitunglah jari-jari lingkaran tersebut

```
>setPlotRange (5);
>G=[2,0]; plotPoint(G,"G");
>H=[2,2]; plotPoint(H,"H");
>I=[-2,3]; plotPoint(I,"I");
>c=circleThrough(G,H,I);
>o=getCircleCenter(c);
>plotCircle(c):
```



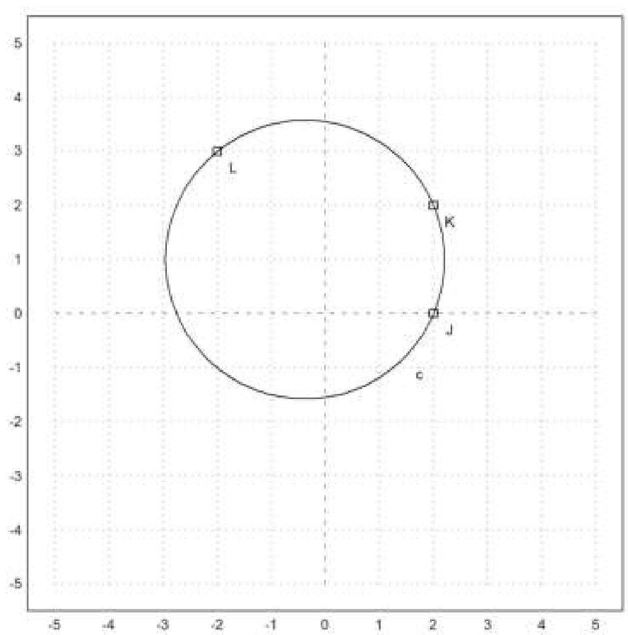

```
>o
```

```
[-0.375,  1]
```

```
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
```

3.Diketahui sebuah lingkaran melalui tiga titik dengan koordinat J(3, 4), K(-2, 3), dan L(-2, 4). Tentukan pusat lingkaran dan hitunglah jari-jari lingkaran tersebut

```
>setPlotRange (5);
>J=[2,0]; plotPoint(J,"J");
>K=[2,2]; plotPoint(K,"K");
>L=[-2,3]; plotPoint(L,"L");
>c=circleThrough(J,K,L);
>o=getCircleCenter(c);
>plotCircle(c):
```



a) Menentukan Persamaan Lingkaran yang Melalui Tiga Titik

Persamaan lingkaran mengacu pada cara untuk menentukan persamaan matematis yang merepresentasikan lingkaran dengan menggunakan variabel dan konstanta tertentu.

Persamaan lingkaran adalah persamaan matematis yang menggambarkan hubungan antara variabel dan konstanta yang digunakan untuk menghasilkan lingkaran. Persamaan tersebut biasanya ditulis dalam bentuk umum, yaitu

di mana (a, b) adalah koordinat pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran.

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

Latihan

1.Carilah Persamaan Lingkaran yang melalui titik G(-2,0),H(0,2),I(2,0)

```
>G::=[-2,0]; H::=[0,2]; I::=[2,0];
>LL &= circleThrough(G,H,I); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

2.Carilah Persamaan Lingkaran yang melalui titik J(-4,0),K(0,4),L(4,0)dan cari titik pusatnya

```
>J::=[-4,0]; K::=[0,4]; L::=[4,0];
>LL &= circleThrough(J,K,L); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$y^2+x^2=16$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$[0,0]$$

3.Carilah Persamaan Lingkaran yang melalui titik M(-4,0),N(0,0),O(-2,-2)dan cari titik pusat dan jari-jarinya

```
>M::=[-4,0]; N::=[0,0]; O::=[-2,-2];
>LL &= circleThrough(M,N,O); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$y^2+(x+2)^2=4$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$[-2,0]$$

```
>$getCircleRadius(LL)
```

$$2$$

5. Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

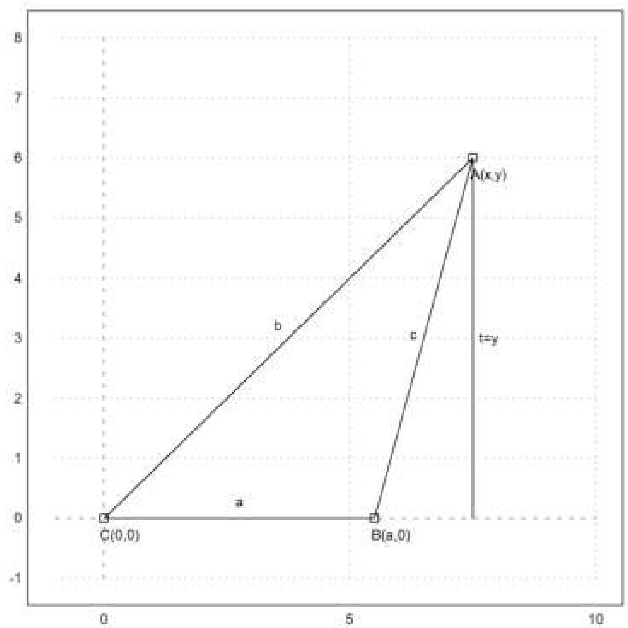
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
  plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
 plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

$$[]$$

Ekstrak solusi dari y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
                         ^
```

Kita mendapatjan formula Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(13, b, [-2,3,4]\right) = \frac{13\,|ysol|}{2}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas = \frac{13\ |ysol|}{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang banyak diketahui.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
    useglobal; return 13*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
        ^
```

Dan jelas juga bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 13*abs(ysol)/2
%ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga dapat bekerja.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [-2,3,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
                              ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
                         ^
```

Dan buatlah fungsinya.

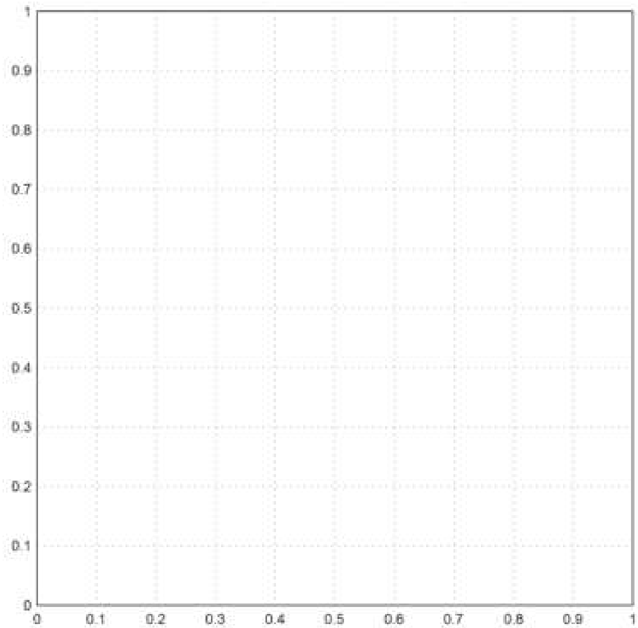
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$0$$

$$0$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 sampai 4. Diketahui bahwa kita memperoleh elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

DImana (xm,ym) merupakan pustanya, serta u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{169}{d^2}$$

Dapat dilihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal jika segitiga tersebut sama sisi. Kami ingin memperolehnya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found 13
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns ...
                                                      ^
```

Kita mendapatkan nilai minimum yang dimiliki oleh segitiga dengan salah satu sisinya 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

```
Maxima said:
solve: all variables must not be numbers.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(eqns,[a,b]) ...
                  ^
```

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found 13
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... la,    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...
                                                     ^
```

Kita bisa membuat plot-nya

Pertama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
                     ^
```

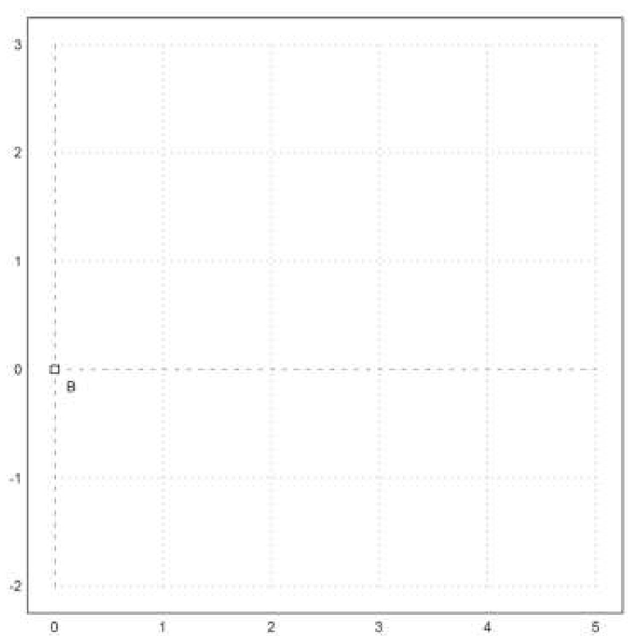
```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0, 0]$$

$$[13, 0]$$

Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

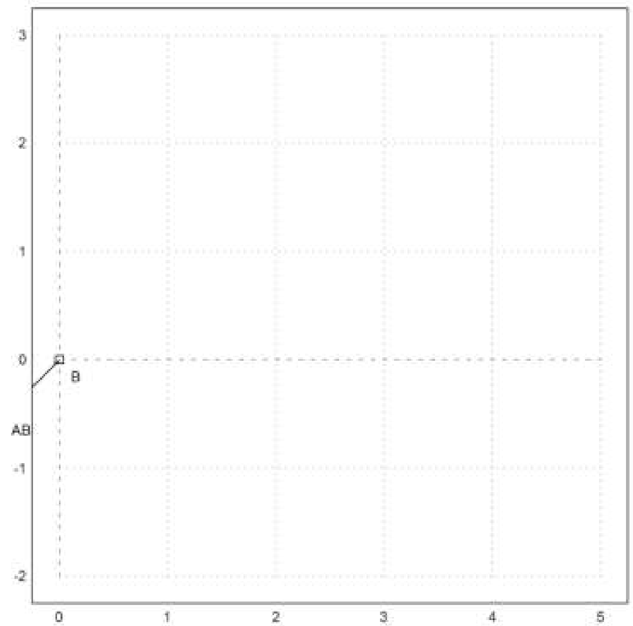
```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
 a=4; b=3; c=2; ...
 plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
 plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmennya.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
 plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
```

```
 plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung garis tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkarannya.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

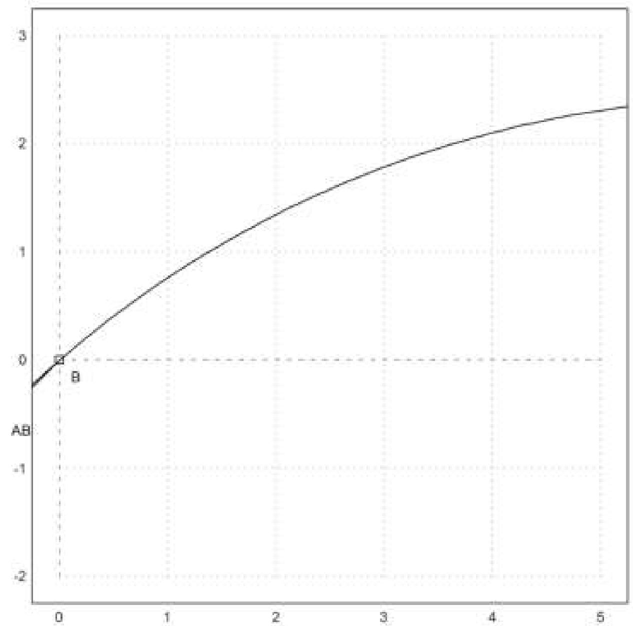
Kita mendapatkan rumus jari-jari lingkaran luar.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{197}}{\sqrt{2}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
 plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Dengan menggunakan geometri, kita memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa cek, apakah ini benar adanya pada Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$[8, 18, 32]$$

6. Garis Euler dan Parabola

Euler line/Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, antara lain orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasinya, kita menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

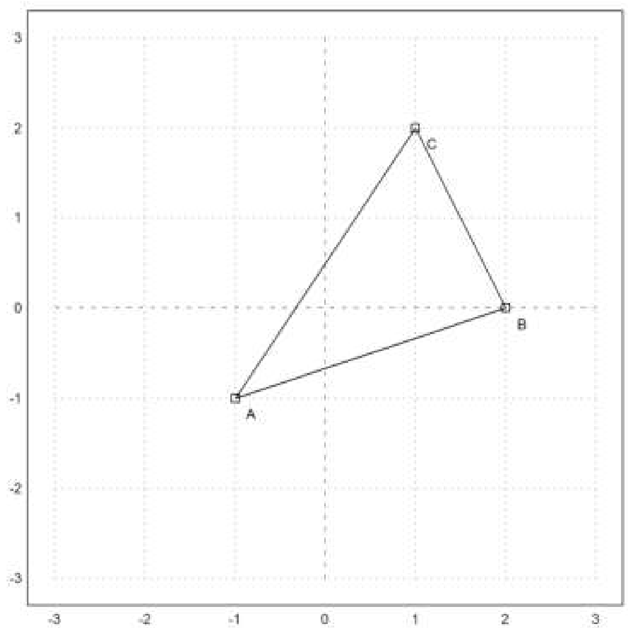
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menjumlahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kami harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan dapatkan juga rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari Hesseform. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

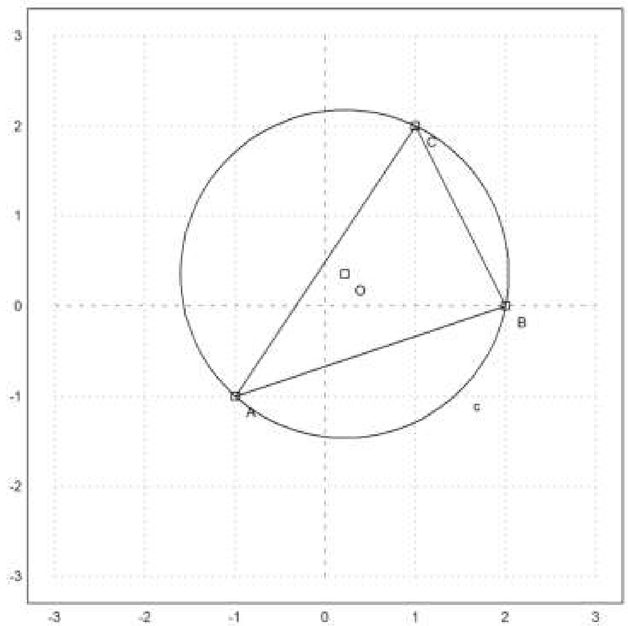
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U bersifat simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (ortocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
   perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

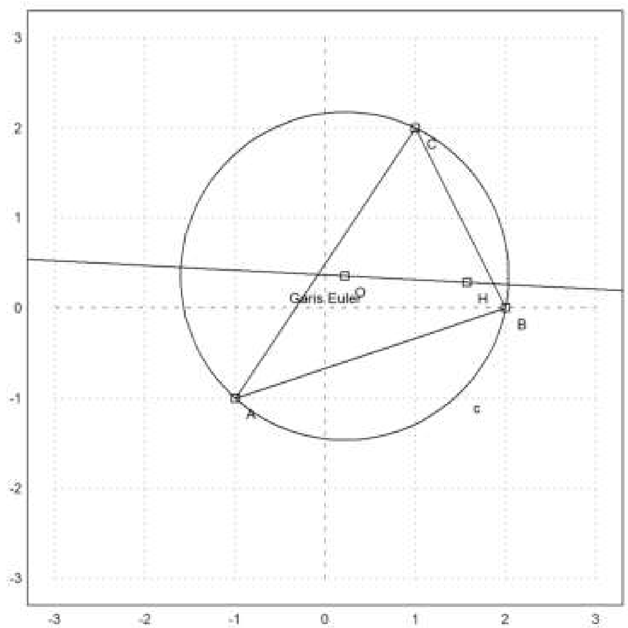
Sekarang kita dapat menghitung garis segitiga Euler.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot tadi.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

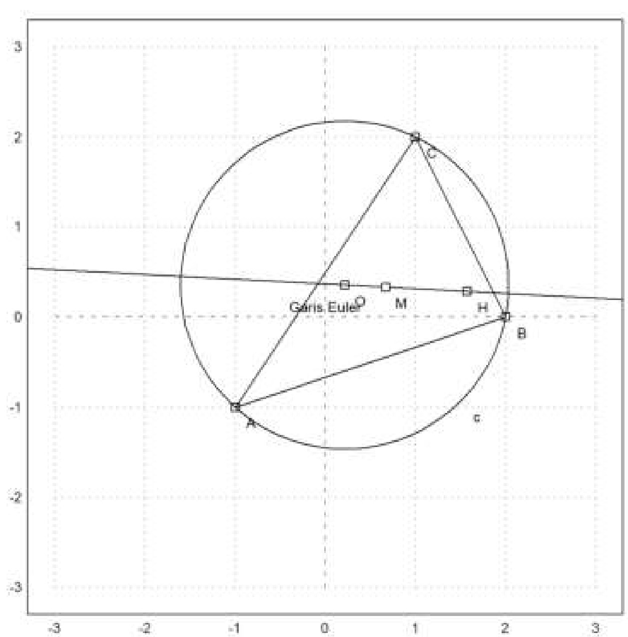


Pusat gravitasi seharusnya berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsinya mencakup fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

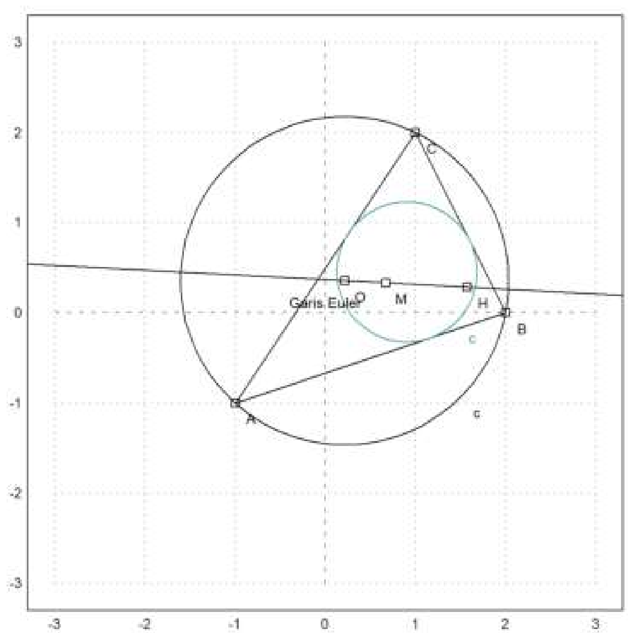
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

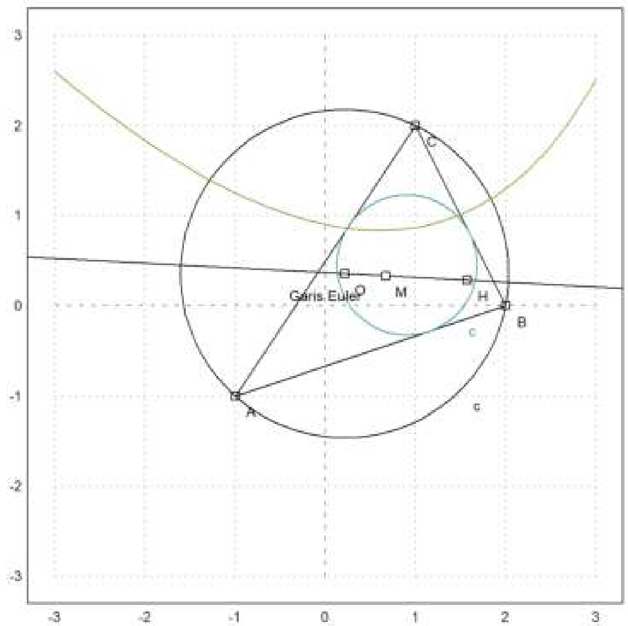
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

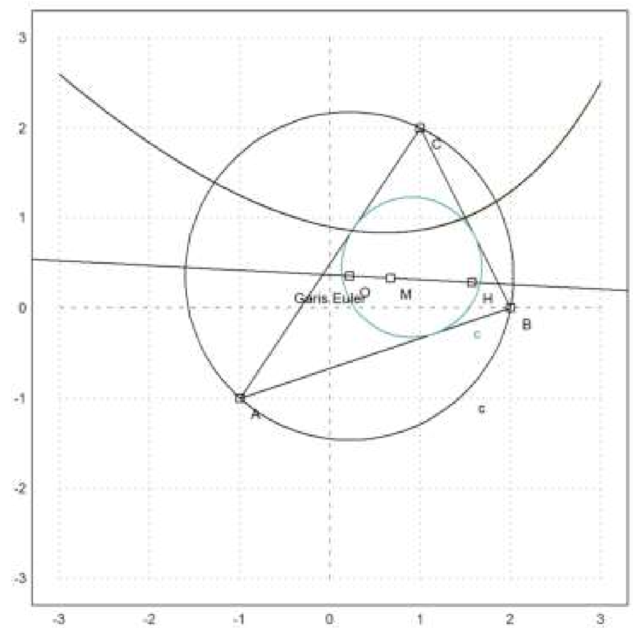
```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                        y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama pada plot menunjukkan bahwa itu memang solusi yang kita cari. Secara teori memberitahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

6. Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan penyebaran. Dengan menggunakan hal ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

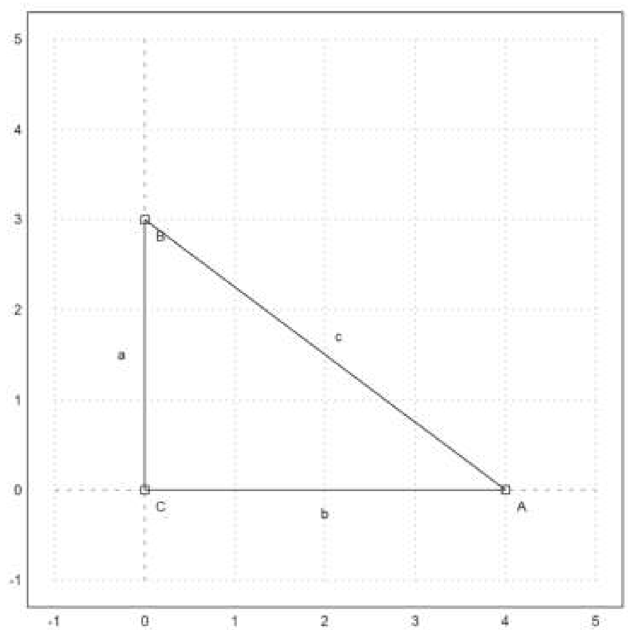
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keunggulan utama trigonometri rasional yaitu perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah perhitungan rasional simbolik seringkali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
 setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

dimana wa adalah sudut di A. Cara umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara kasar.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama tentang trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah jarak yang dikuadratkan. Di bawah ini, a, b, dan c menyatakan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Pengertian trigonometri rasional yang kedua adalah penyebaran. Penyebaran mengukur pembukaan antar garis. Nilainya 0 jika garisnya sejajar, dan 1 jika garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Luas garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

dimana a dan c adalah kuadran suatu segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya berada di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja ini lebih mudah dihitung daripada sudutnya. Namun Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum cosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "cross law/hukum silang" berikut.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah jarak di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diterapkan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$(cc+bb-aa)^2 = 4\,bb\,cc\,(1-saa)$$

Dalam kasus kita, kita dapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan hukum silang ini untuk mencari penyebaran di A. Untuk melakukannya, kita membuat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk penyebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukannya dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami bisa mendapatkan hasilnya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600\,(1-x)$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kami sudah mengetahui hal ini. Pengertian penyebaran merupakan kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk persamaan umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut suatu segitiga dengan mengetahui kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[x = \frac{-cc^2 - (-2\,bb - 2\,aa)\;cc - bb^2 + 2\,aa\,bb - aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisinya

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

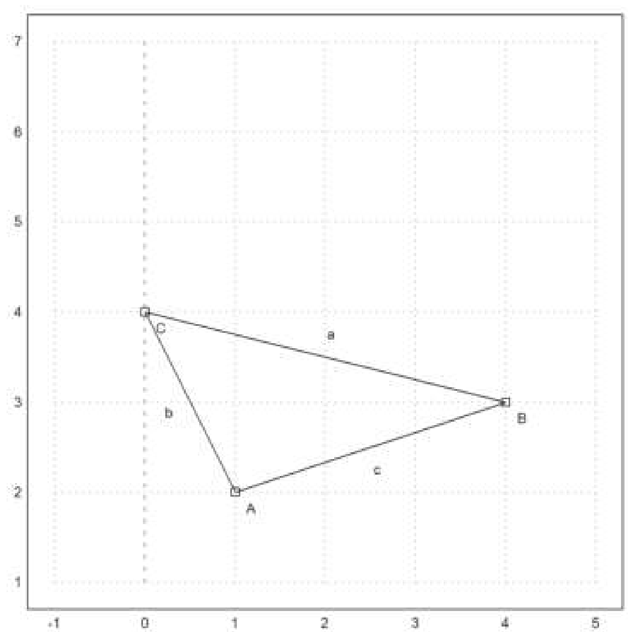
```
67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh lebih lanjut.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
 setPlotRange(-1,5,1,7); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg;
```



Dengan menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan fungsi jarak file Euler untuk geometri. Fungsi jarak menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memuat fungsi kuadran antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan floating point.

$$A =< 1,2 > \quad B =< 4,3 >, \quad C =< 0,4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4,1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3,-1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$4 = 200\,(1-x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometri.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita berusaha, yaitu dengan menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan hal ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha pada sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga tersebut. Jangan lupa, bahwa kita sedang berhadapan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa memberikan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Formula Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk sebuah segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang benar, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4-\left(-2\,b^2-2\,a^2\right)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}{4\,a^2\,c^2}$$

$$\frac{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}{16}$$

The Triple Spread Rule/Aturan Penyebaran Tiga Kali Lipat

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama.

Namun, tiga spread segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut mana pun yang besarnya 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena spread/menyebarnya

$$\alpha, \pi-\alpha$$

hal itu sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatifnya sama, maka aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Namun persamaan tersebut memiliki solusi kedua, dimana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4}, x=0\right]$$

Penyebaran 90° jelas sama dengan 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$(y+x+1)^2=2\left(y^2+x^2+1\right)+4\,x\,y$$

$$[x=1-y]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Sehingga kita dapat mencari penyebaran sudut dua kali lipat tersebut. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

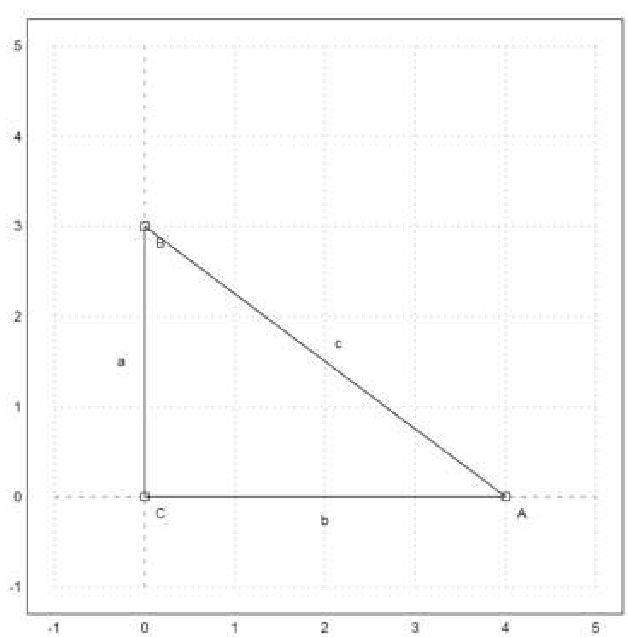
$$\left[x=4\,a-4\,a^2, x=0\right]$$

```
                           - 4 (a - 1) a
```

Angle Bisectors/Pembagi Sudut

Situasi yang kita sudah tau.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
 setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Namun kita ingin menyelesaikannya secara umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga kali lipat.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut membagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2\,x+\frac{a}{b+a}\right)^2=2\,\left(2\,x^2+\frac{a^2}{\left(b+a\right)^2}\right)+\frac{4\,a\,x^2}{b+a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebarannya ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

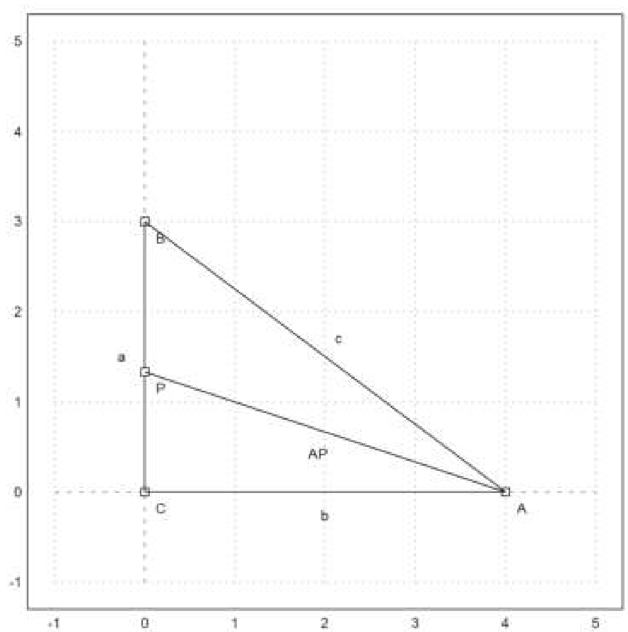
```
18°26'5.82''
```

Titik P merupakan perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus pada segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku di segitiga mana pun. Jika digabungkan, maka hal ini akan diterjemahkan ke dalam apa yang disebut dengan "spread law"/"hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a,b,c menunjukkan qudrance.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita memperolehnya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga bisa menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita peroleh dengan rumus trigonometri.

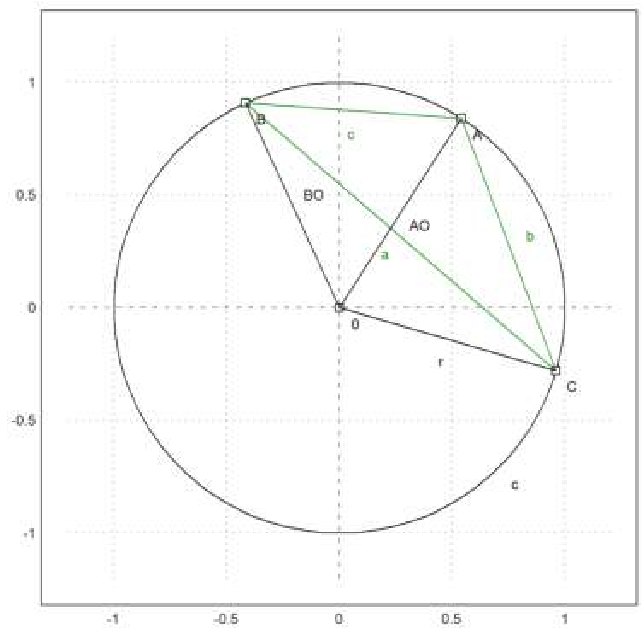
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

The Chord Angle/Sudut Akord

Lihatlah contoh berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
 color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
 A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
 plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
 insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus jari-jari kuadrat dari perilingkaran dalam kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasil untuk poin kita A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah sudut pusatnya.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

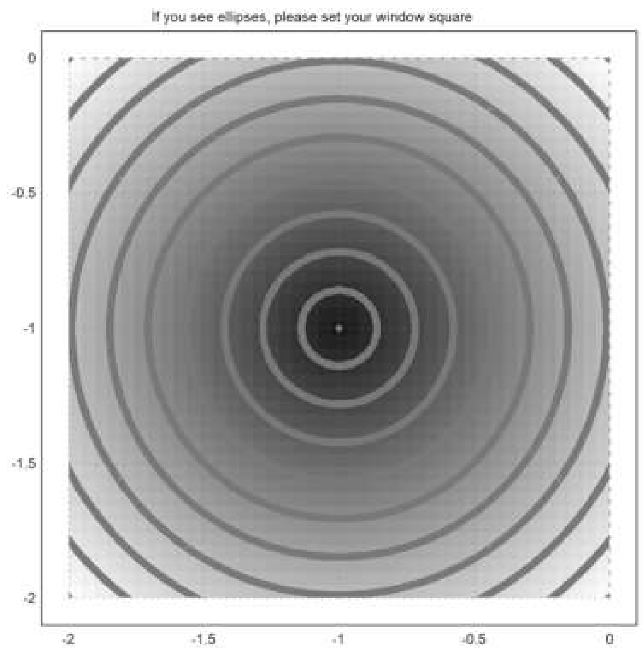
$$0$$

7. Jarak Minimal pada Bidang

a) Preliminary remark/Catatan pendahuluan

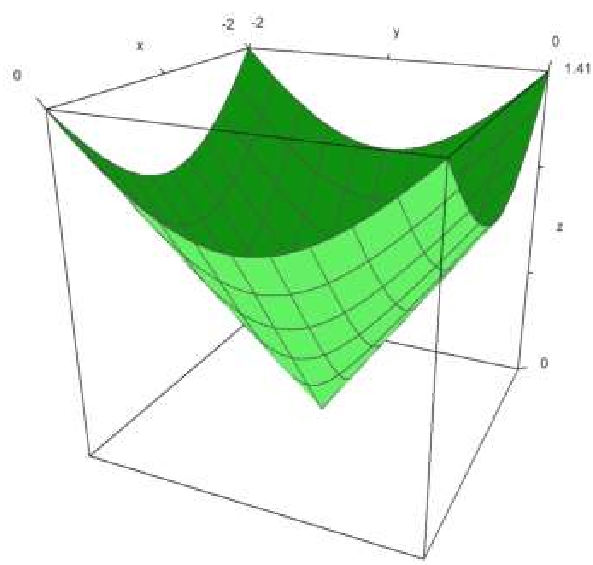
Fungsi yang didefinisikan menuju ke titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, mempunyai garis datar yang cukup sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
 title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga cukup sederhana:
bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

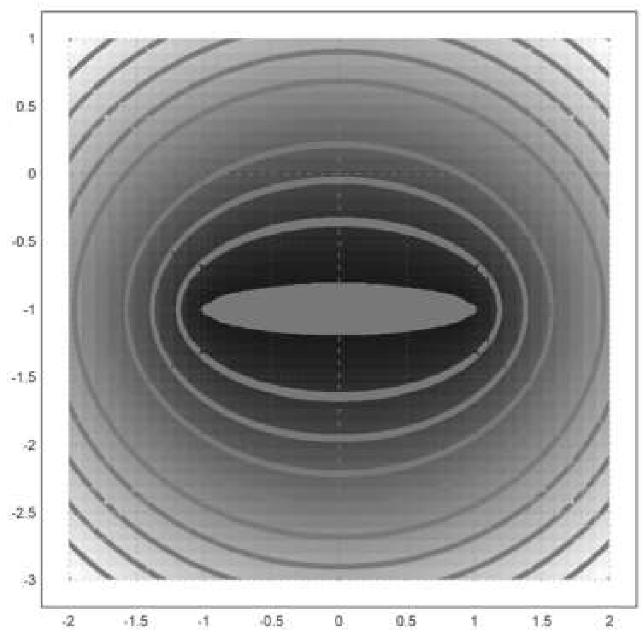


Tentu saja minimum 0 dicapai di A.

b) Two points/Dua poin

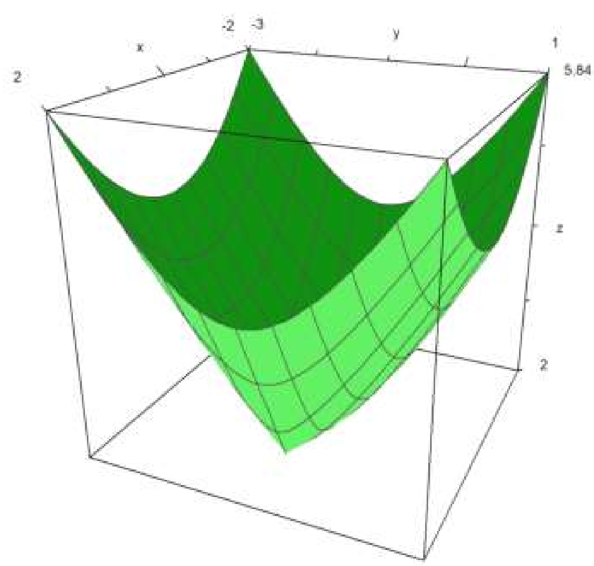
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan "well-known fact/fakta yang diketahui" bahwa kurva tingkat berbentuk elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada ruas [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



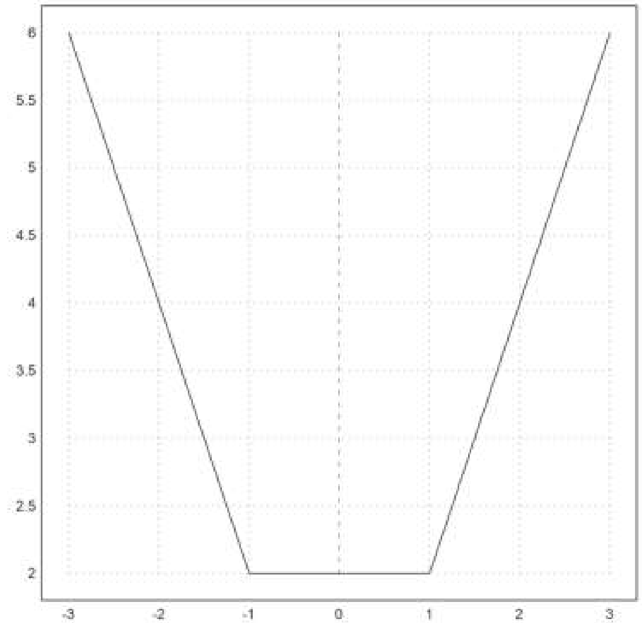
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



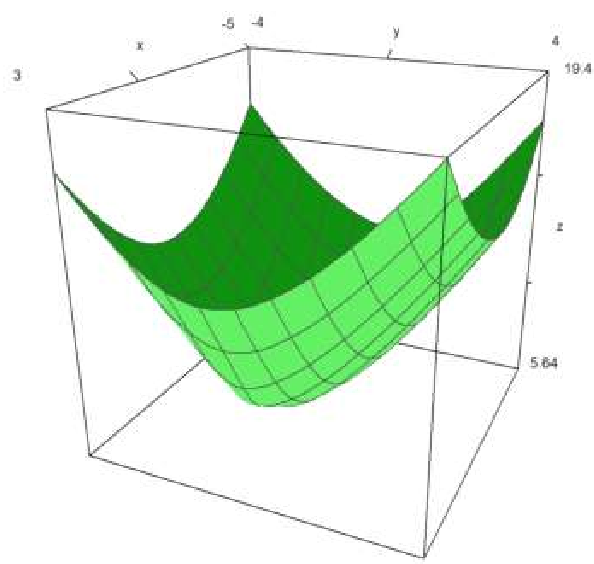
c) Three points/Tiga titik

Kini segalanya menjadi lebih sederhana: Tidak diketahui secara luas bahwa MA+MB+MC mencapai nilai minimumnya pada satu titik pada bidang tersebut, namun untuk menentukannya tidaklah mudah:

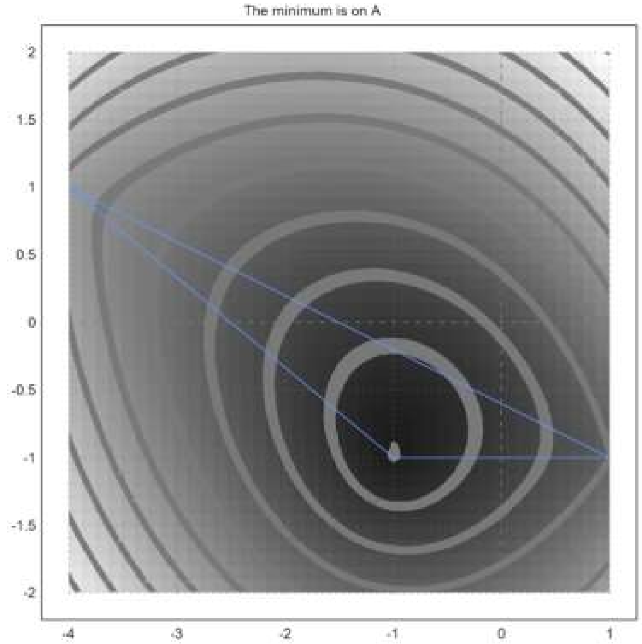
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik tersebut (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

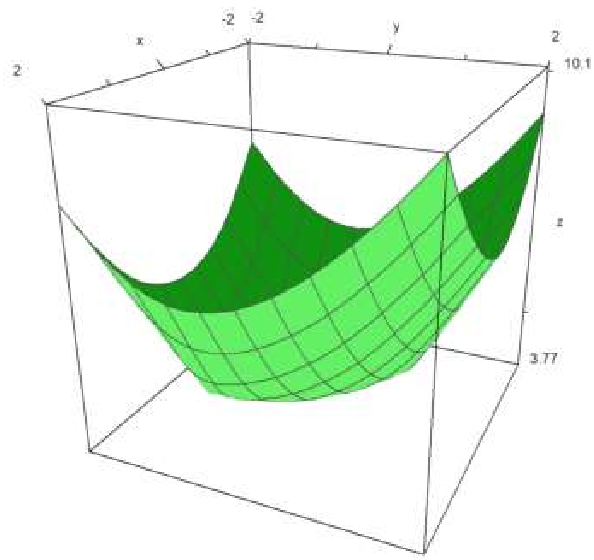



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

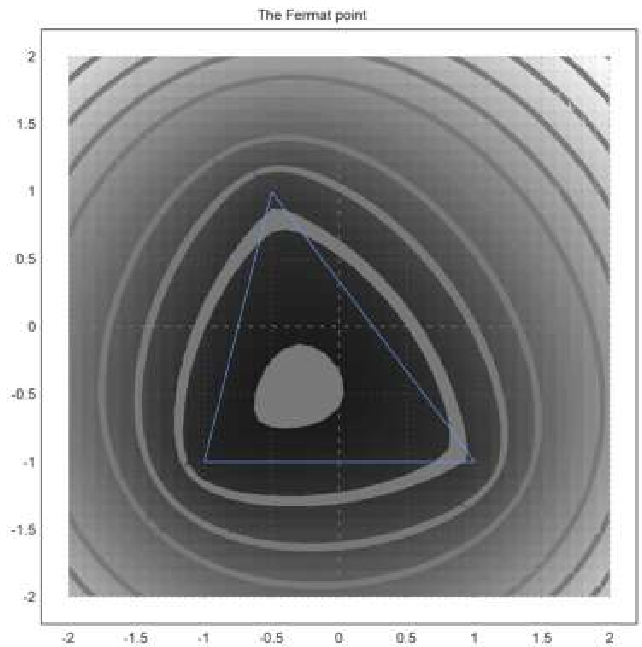


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, maka titik minimum ada di titik F di bagian dalam segitiga, yaitu satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing sudutnya 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



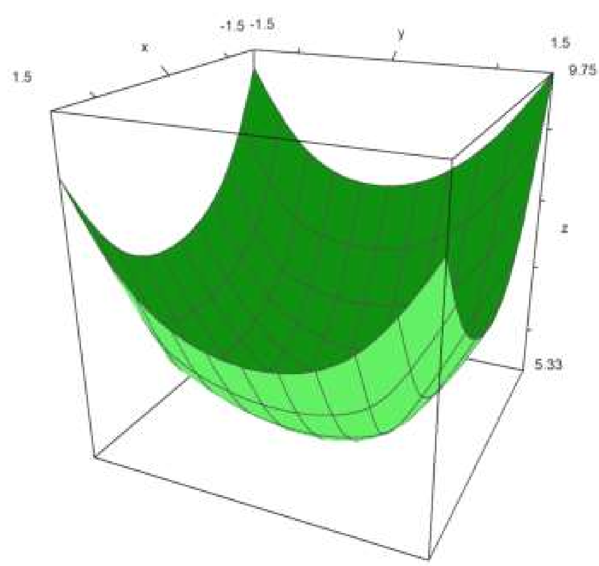
Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "contour lines"...

Semua hal di atas ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para peminat lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga FA+FB+FC minimal disebut titik Fermat segitiga. Namun nampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Pokoknya tradisinya adalah memperhatikan hal ini F...

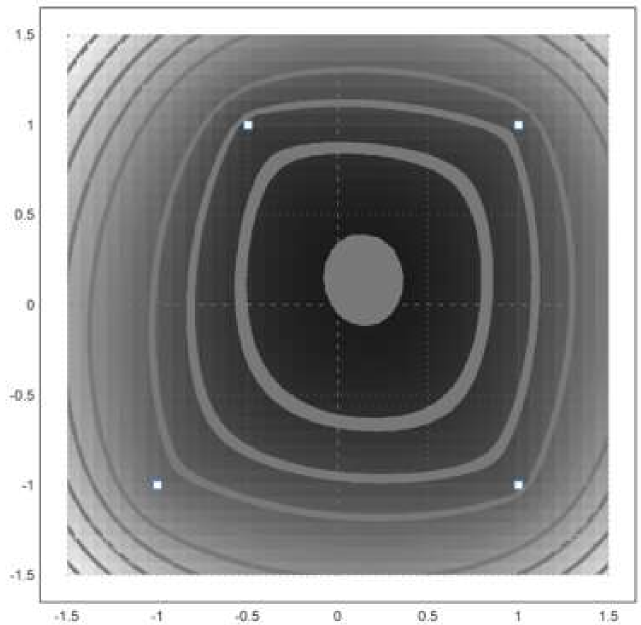
Four points/Empat titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan poin ke-4,D, dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakanlah Anda seorang operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus memasang antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada nilai minimum dan tidak tercapai di simpul A, B, C, atau D:

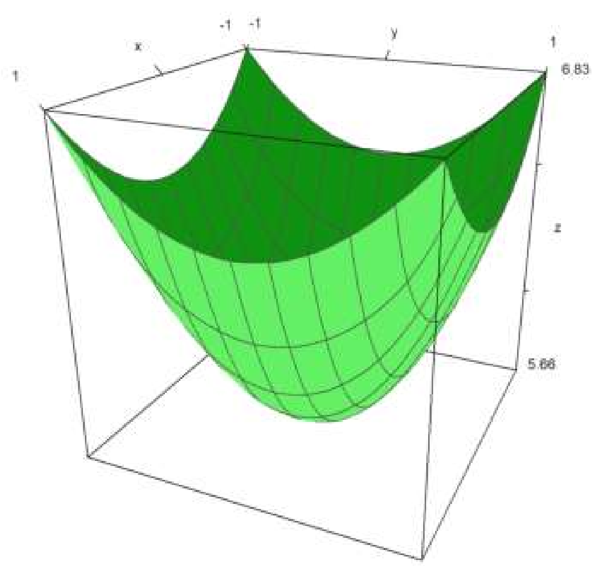
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,   0.142857]
```

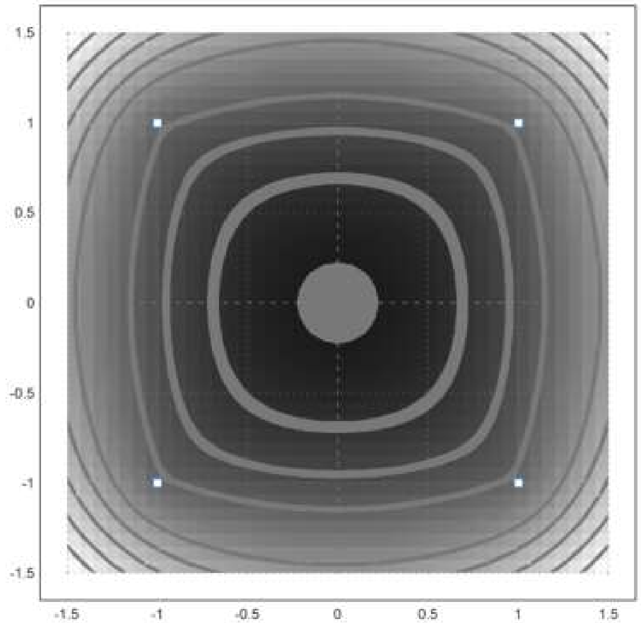
Nampaknya dalam hal ini koordinat titik optimal bersifat rasional atau mendekati rasional...

Sekarang ABCD adalah persegi, kita berharap titik optimalnya adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



8. Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika diperhatikan gambar di bawah, terlihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

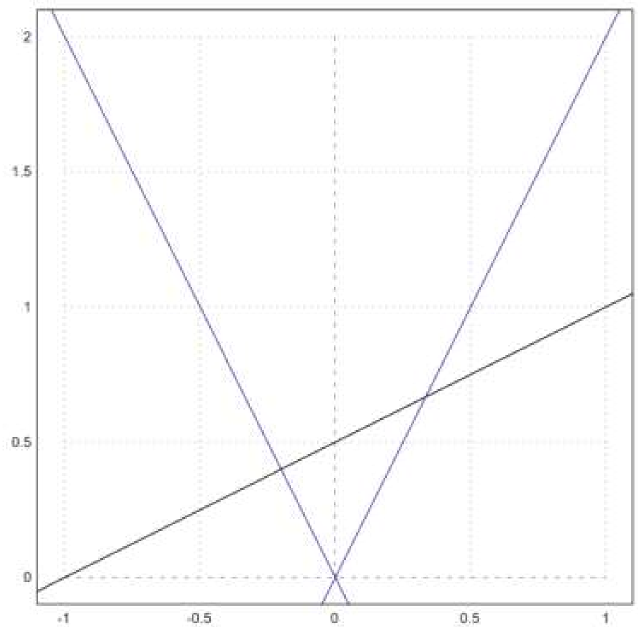
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami sudah mem-plot semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan tentukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

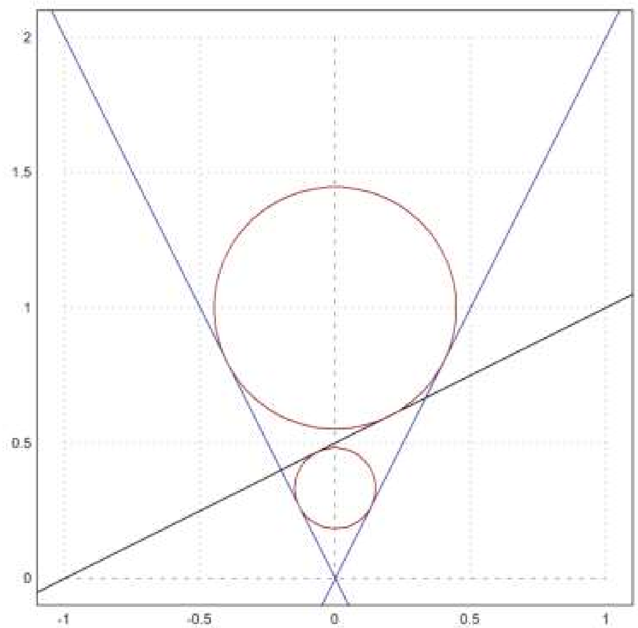
```
[0.333333,   1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,   0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita panggil fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kita harus mengaturnya dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis kedua bola tersebut ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang dibatasi pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita buat dua titik pada lingkaran, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Lalu kita buat dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

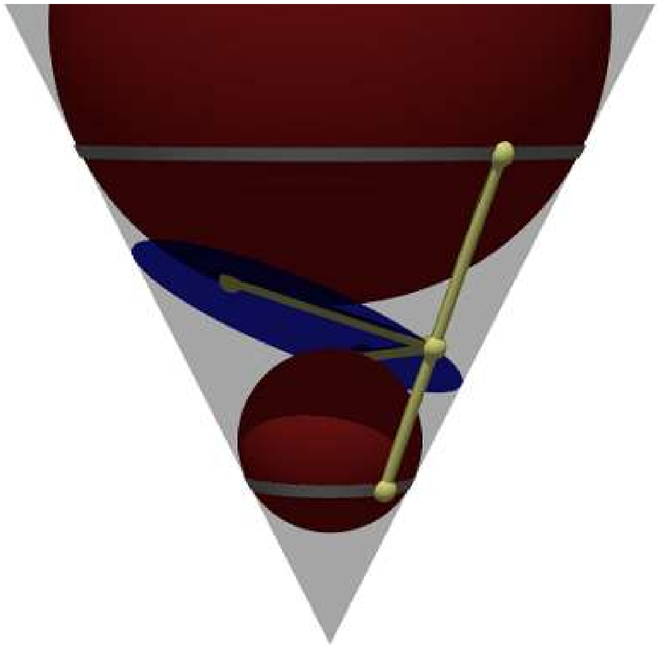
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```

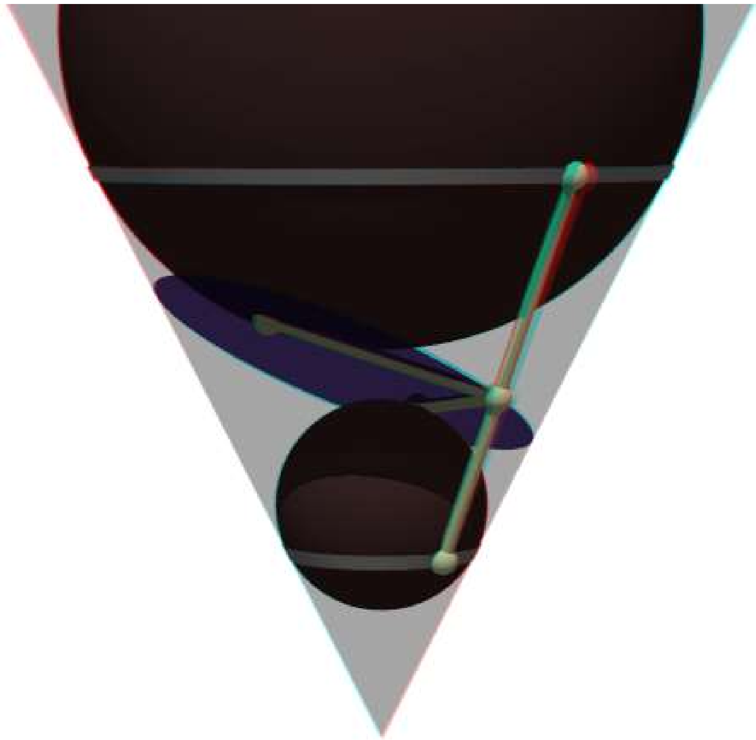


Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
 global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
 writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
 writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
 writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
 gp=g();
 pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
 vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
 writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
 P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
 writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
 P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
 writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
 P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
 writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
 P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
 writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
 t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
 writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
 pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
 pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
 writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
 pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
 writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
 endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk melihat efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



9. Geometri Bumi

Di buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
 [-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bulat).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
 S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
 S 7°34.333' E 110°49.683'
 S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola ideal lainnya. Vektor ini adalah [heading,distance] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
 65°20'26.60''
```

```
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak sedekat itu, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
                             ^
```

Terdapat fungsi untuk judulnya, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180 ° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degpri
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung area segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan pada asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
                                ^
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata -rata segitiga untuk menghitung jari -jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke suatu posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola ideal. Hal yang sama terjadi di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
                         ^
```

Heading/judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kami tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kami menambahkan heading dan jarak ke posisi orginal. Ini benar, karena kami tidak menghitung fungsi terbalik dengan tepat, tetapi mengambil perkiraan jari -jari bumi.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana saja di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan tujuan yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambah 10 kali sepersepuluh jarak, pakai jurusan Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh sekali.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
 S 6°11.250' E 106°48.372'
      1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi yang mempunyai garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, melainkan jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
      79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah perjalanan kita. Untuk tujuan kasarnya, kita sesuaikan pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
   loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
      79.69°
      81.67°
      83.71°
      85.78°
      87.89°
      90.00°
      92.12°
      94.22°
      96.29°
      98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
      0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
   loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
      0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
   loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
 S 7°46.998' E 110°21.966'
 S 7°37.422' E 110°0.573'
 S 7°27.829' E 109°39.196'
 S 7°18.219' E 109°17.834'
 S 7°8.592' E 108°56.488'
 S 6°58.948' E 108°35.157'
 S 6°49.289' E 108°13.841'
 S 6°39.614' E 107°52.539'
 S 6°29.924' E 107°31.251'
```

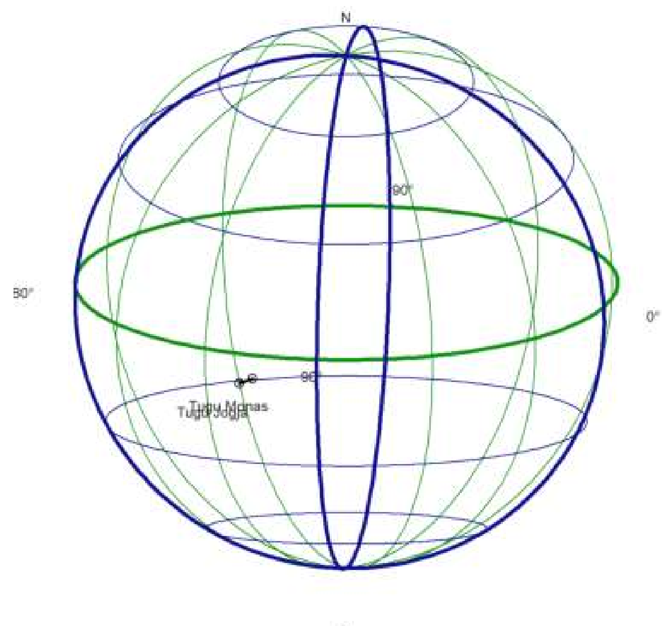
```
 S 6°20.219' E 107°9.977'
 S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kita menulis sebuah fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
 useglobal;
 plotearth;
 plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
 plotposline(v);
 endfunction
```

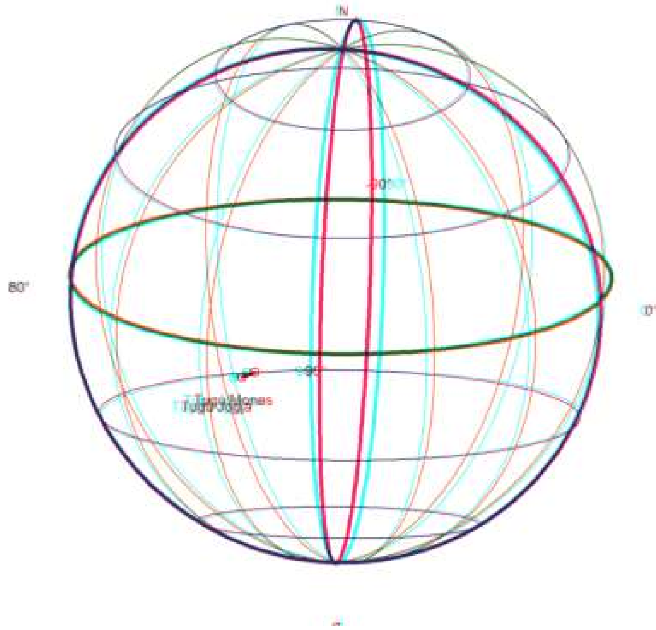
Sekarang plot-kan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.