

COMENTARIOS AL FINAL DEL INFORME

Ondas estacionarias en tanzas

Estudio de modos normales y velocidad de propagación en cuerdas con extremos fijos forzadas armónicamente

Rodriguez Arianna, Cardoso Magalí Alejandra, Martínez Agustín Pablo

arinnarodri2004@gmail.com, magali4076@gmail.com, fontamartinex@gmail.com

Laboratorio 2C, 2°C. 2023

Departamento de Física, FCEyN, UBA

Para el estudio de ondas estacionarias unidimensionales, ~~se propone analizar~~ ^{"se propuso" o directamente "se analizaron"} los modos de excitación de una tanza ^{y se estudió} calculando la velocidad de propagación de las ondas en dicho medio para diferentes valores de tensión y densidad. Se utilizaron 3 tanzas de diferente densidad y se observó, excepto en la de menor densidad, que las **velocidades teóricas y experimentales** no presentaron diferencias significativas bajo el criterio de 1 sigma, así como tampoco se presentaron al variar la tensión para la tanza de densidad media.

En la comparación entre la longitud de la tanza medida directamente y la obtenida mediante la longitud de onda observada, tampoco se observaron diferencias significativas, y por la configuración espacial se vio que el wave driver actuaba como extremo fijo. Se concluyó que tanto variando la densidad como variando la tensión, ~~se pueden obtener velocidades de propagación confiables~~. Finalmente, al unir 2 tanzas de distintas densidades, con una misma frecuencia se lograron excitar modos distintos en cada una, ~~y se observó que la unión entre ellas actuaba como extremo fijo, y gracias a la configuración L1 y L2 elegida, la unión entre ellas ..~~

método 1: v según de la densidad y tensión de la cuerda

método 2: v según las frecuencias y longitudes de los modos normales y su relación de dispersión

los resultados no difirieron significativamente de la relación esperada con la tensión y densidad de la cuerda

1. Introducción

Las ondas transversales en una cuerda con densidad uniforme que oscila ^{aproximadamente} en un plano, pueden describirse como ondas unidimensionales. A la onda resultante de la suma de 2 ondas de igual frecuencia pero distinto sentido de propagación, se la denomina onda estacionaria; en un tiempo t , el desplazamiento del equilibrio ψ de cada punto x de la misma, se lo puede expresar como:

$$\psi(x, t) = 2A_0 \sin(2\pi x/\lambda + \alpha) \cos(ft2\pi + \varphi_0), \quad (1)$$

donde A_0 es la amplitud de la perturbación, f es la frecuencia temporal, φ_0 es la fase inicial y λ es la longitud de la onda que junto a α dependen de las condiciones de contorno. Para el caso de ambos extremos fijos α es cero, y λ depende del modo m y de la longitud de la soga L de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{2L}{m}. \quad \checkmark \quad (2)$$

La Ecuación (1) es una expresión de la solución general de la ecuación de..

(1) es una de las soluciones de la ecuación de ondas clásica unidimensional:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3)$$

~~compuesta por la derivada segunda temporal de ψ a la izquierda del igual, y el producto de la derivada segunda espacial de ψ y la velocidad de propagación v al otro lado. A partir de esta expresión, se llega a la relación de dispersión:~~

$$v = f \lambda. \quad (4)$$

Quizás conviene plantear la introducción al revés. Doy un ejemplo que habría que pulir: Se tiene una cuerda de densidad ρ atada en sus extremos y sometida a una tensión T . Describiendo la fuerza que siente un punto de la cuerda en la posición x a partir del desplazamiento $\psi(x)$ confinado a un plano, se plantea la Ley de Newton $F = m a$ y se obtiene la ecuación de ondas clásicas unidimensional donde la velocidad de propagación de la onda $v = \dots$. Una expresión de la solución general a esta ecuación es donde \sin y \cos . Esta solución puede pensarse como la suma de dos ondas propagantes de igual frecuencia en sentidos opuestos, etc

Si la soga está sometida a una tensión T , v puede vincularse con ésta y con la densidad de la soga ρ :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (5)$$

Por otro lado, se pueden atar por un extremo 2 sogas de densidades uniformes pero distintas entre sí y manipular la unión como una sola soga. Al ser sometidas a la misma frecuencia y a la misma tensión ambas partes de densidad ρ_1 y ρ_2 , debe cumplirse que:

$$\frac{v_1 m_1}{2L_1} = \frac{v_2 m_2}{2L_2} \quad , \quad \text{al revés. explicación en hoja escaneada} \quad (6)$$

donde v , m y L son la velocidad de propagación, el modo y la longitud de cada soga respectivamente, y cada parte del igual representa a las frecuencias de cada soga. Luego, si las condiciones son tales que se genera un nodo en la unión, se cumple:

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (7)$$

El objetivo de este informe ^{fue} ~~es~~ estudiar las ondas estacionarias en tanzas con extremos fijos para distintos valores de tensión y densidad. En un primer experimento, variando dichos factores, se comparará: la velocidad ~~teórica~~ calculada con (5), con la experimental obtenida según (4); y la longitud de la tanza medida, con la longitud efectiva obtenida mediante el λ medido en cada modo. Luego, en un segundo experimento se ^{unieron} ~~unían~~ 2 tanzas de diferentes densidades lineales, y según (6) se ^{buscó} ~~buscará~~ una frecuencia en la que se produzca un nodo en la unión de ambas, esperando que se cumpla (7).

2. Desarrollo experimental

Para estudiar ondas estacionarias en cuerdas se utilizó:

- Soporte con polea. La misma se consideró ideal en todo el experimento
- Generador de funciones con error despreciable
- Tanzas con densidades uniformes y distintas entre sí:

tanza 1 = $(0,0420 \pm 0,0001) \text{ mg/mm}$

tanza 2 = $(0,2455 \pm 0,0002) \text{ mg/mm}$

tanza 3 = $(0,5352 \pm 0,0003) \text{ mg/mm}$

Para el Experimento 1, se utilizaron recortes de $L = (815 \pm 1) \text{ mm}$ de cada tanza.

Para el Experimento 2, se utilizaron $L_1 = (540 \pm 1) \text{ mm}$ de la tanza 1 y

$L_3 = (300 \pm 1) \text{ mm}$ de la tanza 3.

- Pesos adicionales para variar la tensión:

$P_1 = (49,89 \pm 0,01) \text{ g}$

$P_2 = (100,01 \pm 0,01) \text{ g}$

- Soporte para la tensión, de peso = $(63,69 \pm 0,01) \text{ g}$
- Cinta métrica con precisión de 1 mm
- Una balanza con precisión de 0,01 g y otra con precisión de 0.0001 g.

conviene presentar el diagrama experimental y describirlo a partir de la figura

unidades separadas del paréntesis por un espacio y no en cursiva

en lugar de enlistar valores conviene presentarlos en tabla



Para calcular la densidad de cada tanza, se midió con la cinta métrica su longitud y se pesó un recorte de las mismas con la balanza de mayor precisión. Se obtuvo la densidad como la razón entre el peso medido y la longitud utilizada.

se calculó v según la ecuación (5), y se estimaron las frecuencias de los modos normales según la relación de dispersión (4) y la ecuación (2)

• 2.1 Experimento 1: Variación de densidad y tensión

Con un sistema similar al que se esquematiza en la Fig. 1, sin peso añadido en el soporte, se calcularon las frecuencias teóricas para cada modo. Luego, con el generador de funciones se buscó en torno a esos valores cuáles eran las frecuencias de resonancia correspondientes al sistema. El procedimiento se repitió para las 3 tanzas.

Con la tanza 2 además, se realizó el mismo procedimiento para otros 3 pesos distintos sobre el soporte, variando así la tensión, registrando entonces medidas para 4 tensiones diferentes:

$T_1 = (0,62 \pm 0,01)N$ - generada por el soporte

$T_2 = (1,11 \pm 0,01)N$ - generada por el soporte y el peso adicional P_1

$T_3 = (1,60 \pm 0,02)N$ - generada por el soporte y el peso adicional P_2

$T_4 = (2,09 \pm 0,02)N$ - generada por el soporte, y los pesos adicionales P_1 y P_2

Se logró registrar datos hasta el modo 4, dado que a partir del modo 5 la ubicación de los nodos fue difícil de apreciar por el observador.

La amplitud utilizada fue constantemente 4Vpp. De haber utilizado mayor voltaje, se podrían haber apreciado más modos. Se colocó además, una pantalla negra detrás de la tanza que con el contraste facilitó la observación. En algunos casos, haciendo de nuevo uso del contraste, se apagó la luz de la habitación y se iluminó la tanza con la linterna de un celular, dejando la pantalla negra de fondo. Una vez hallado el modo y la frecuencia, por observación directa se registraron las longitudes de onda correspondientes.

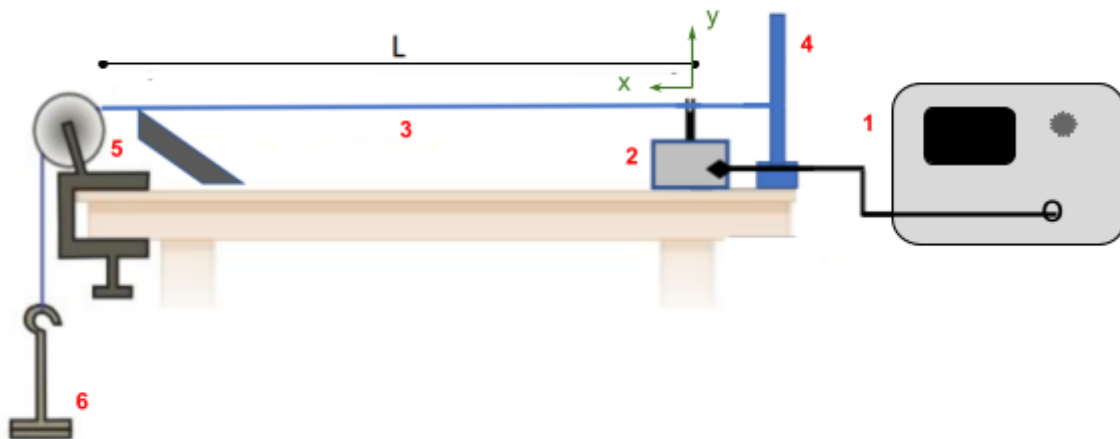


Fig. 1 Esquema del sistema utilizado para los experimentos. El generador de funciones (1) se conecta al Wave Driver (2) para excitar a la tanza (3) con la frecuencia que se le indique. La tanza está por un extremo atada a un pie (4), y por otro extremo pasa por una polea (5) y luego se ata a un soporte (6) con el que se podrá variar la tensión. El largo L de la tanza se consideró desde el punto que está en contacto con el Wave Driver hasta el punto en el que se dobla debido a la polea. En verde se indica el sistema de referencia que tiene como origen el punto de contacto de la tanza con el Wave Driver.

- Faltan las marcas y modelos de los instrumentos (generador de funciones y wave driver)

Debe tenerse en cuenta que para este experimento se realizaron varias aproximaciones con el objetivo de ajustarse lo más posible a las condiciones teóricas, se consideró: a la polea utilizada como ideal, la densidad de las tanzas como uniformes, el movimiento del wave-driver como perfectamente armónico, y se despreció el efecto de la gravedad a lo largo de la tanza. Dichos factores que se aproximan son algunas de las fuentes de incerteza para esta práctica.

• 2.2 Experimento 2: Tanzas unidas con diferente densidad

Para este experimento, no se sumó peso al soporte que por sí solo generaba la tensión, y se utilizaron $L_1 = (54,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ de la tanza 1 y $L_3 = (30,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ de la tanza 3. Se eligieron este par de tanzas con el fin de tener la mayor diferencia de densidad entre sí, y se eligió esta relación entre sus longitudes con el objetivo de excitar distintos modos en cada tanza. Por un extremo de cada una, se ataron. Luego, armando otra vez un sistema como el de la Fig. 1, el otro extremo de la tanza 3 se ató al pie, quedando ésta en contacto con el wave driver; y el otro extremo de la tanza 1 se ató al soporte. Para excitar modos en cada tanza como se ejemplifica en la Fig. 2, se utilizaron 2 relaciones: al inicio, la tanza menos densa en modo 1, y la otra tanza en modo 2 con frecuencia $f = (116 \pm 2) \text{ Hz}$; luego, la tanza menos densa en modo 2 y la otra tanza en modo 4, en la que vale mencionar que fue difícil apreciar la configuración espacial.

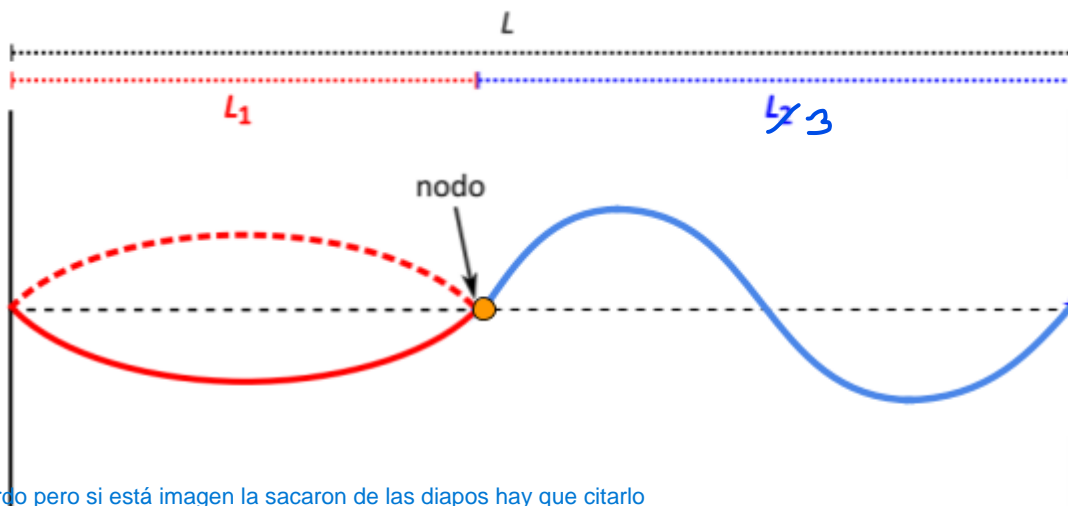


Fig. 2 Esquema de 2 tanzas de distinta densidad, representadas en rojo y azul, de longitud L_1 y L_3 , cada una, siendo L el largo total resultado de la unión. En este ejemplo, se excitó el modo 1 en una cuerda (rojo) y el modo 2 en la otra (azul). Se observa un nodo en la unión entre ellas que, por la configuración espacial, se deduce que actúa como extremo fijo.

3. Resultados y discusión

• 3.1 Experimento 1: Variación de densidad y tensión

Mediante (4), utilizando la frecuencia en la que se hallaron los modos para cada tanza y las longitudes de onda medidas en 2.1, se obtuvo una velocidad de propagación efectiva para cada densidad y cada modo, realizando un ajuste no lineal (Fig. 3).

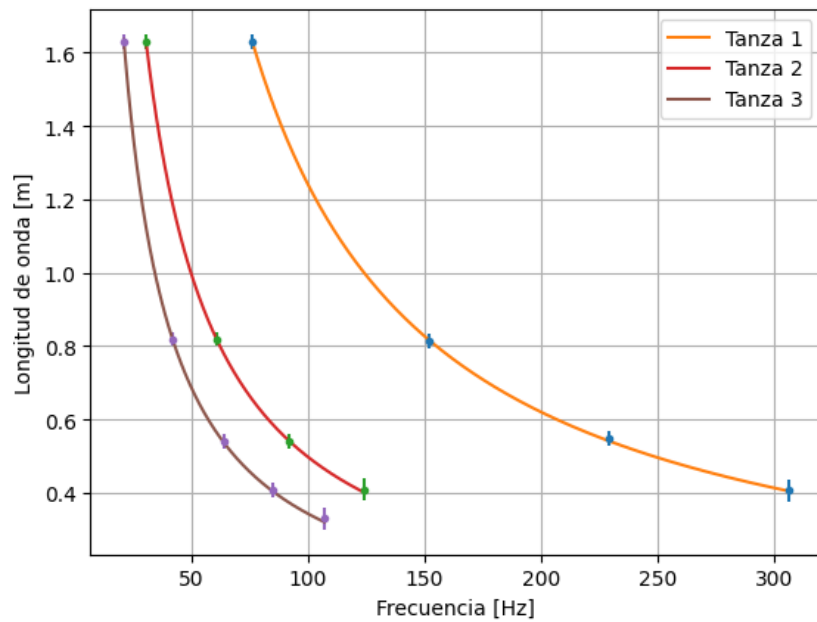
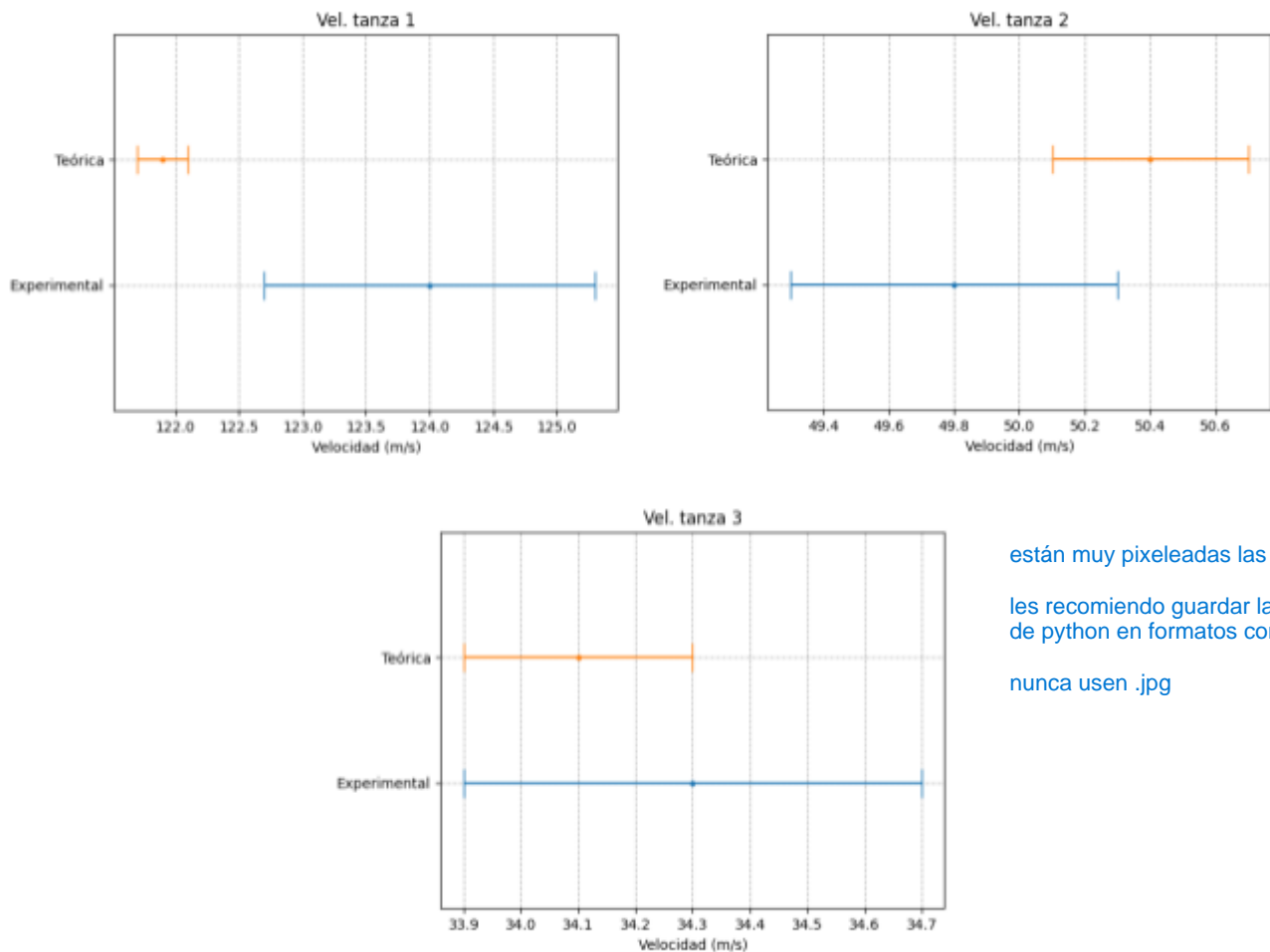


Fig. 3 Ajustes de la longitud de onda en función de la frecuencia según la (4), registradas en ondas estacionarias en modo 1 hasta el modo 4, en 3 tanzas con densidades distintas. El fin fue obtener las velocidades de propagación correspondientes, siendo la tanza 1 la de menor densidad y la 3 la de mayor (ver ítem 1 y 2 del Apéndice).

En la Fig. 3 se observa que las 3 tanzas parten de una misma longitud de onda con distintas frecuencias, en este caso, la frecuencia fundamental de cada cuerda, siendo ésta misma mayor a medida que la densidad de la tanza es menor. Esto tiene sentido considerando (4) y (5) donde puede verse que la densidad y la frecuencia son variables inversamente proporcionales.

Luego, se comparó las velocidades de propagación efectivas con las teóricas, que se calcularon utilizando la densidad de la tanza y la tensión medidas directamente según (5) (Fig. 4).



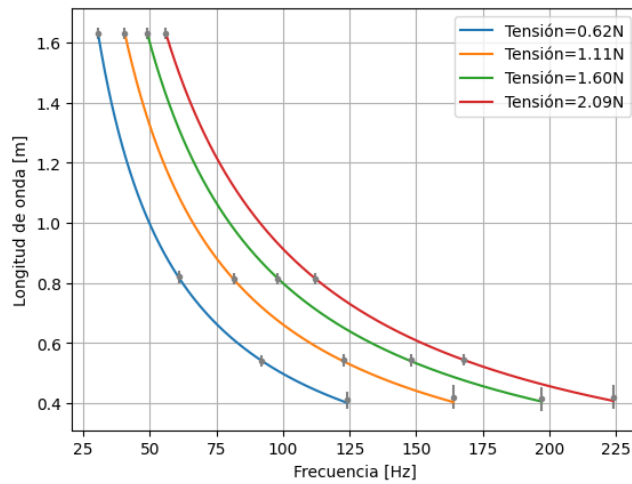
están muy pixeleadas las imágenes!
 les recomiendo guardar las imágenes de python en formatos como .png o .svg
 nunca usen .jpg

Fig. 4 Comparación de la velocidad de propagación teórica (según (5)) con la experimental (según (4)), en 3 tanzas de densidades distintas, crecientes desde la tanza 1 a la 3. A diferencia de con la tanza 1, se observa que en las tanzas 2 y 3 los resultados se superponen.

Para las tanzas 2 y 3 no se observaron diferencias significativas teniendo como criterio 1 sigma. Con el mismo criterio, sí se tuvo diferencia significativa para las velocidades de la tanza 1, pero si se utilizara como criterio 2 sigmas, habría superposición también para los resultados de esta tanza.

Luego de variar la densidad, para la tanza 2 se utilizaron además otras 3 tensiones distintas y se realizó un ajuste análogo al anterior, como se ve en la Fig. 5, donde se cumple que a medida que la tensión aumenta, también aumenta la frecuencia de resonancia **ya que son directamente proporcionales según (4) y (5)**. Además, para cada caso se compararon la velocidad de propagación teórica con la experimental y manteniendo 1 sigma como criterio, no se observaron diferencias significativas (Fig. 6).

no son directamente proporcionales, f va como $T^{1/2}$



estaría bueno complementar con parámetros de bondad del ajuste como χ^2 reducido y t-student para los parámetros!

Fig. 5 Ajustes de la longitud de onda en función de la frecuencia según la (4), registradas en ondas estacionarias en modo 1 hasta el modo 4, en una tanza sometida a 4 distintas tensiones. Mediante el ajuste se obtuvieron las velocidades de propagación correspondientes.

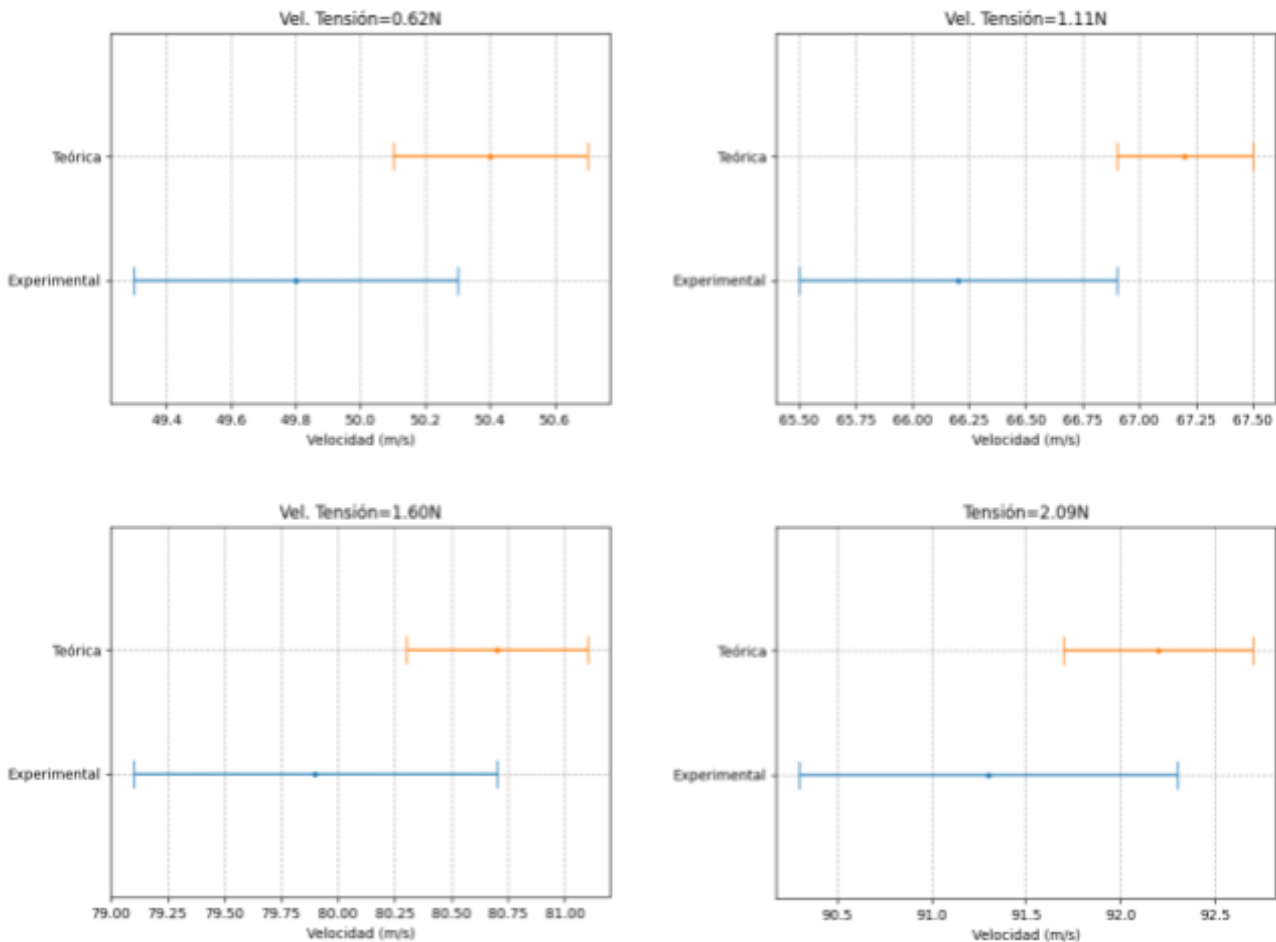


Fig. 6 Comparación entre la velocidad teórica (5) y la experimental (4) para una tanza sometida a 4 tensiones distintas. A criterio de 1 sigma, no se observan diferencias significativas.

Se buscó también la longitud efectiva de cada tanza mediante (2) utilizando las longitudes de onda medidas en cada modo. Debido a que se cuentan con solamente 4 datos para cada cuerda (4 modos), no es conveniente realizar un ajuste lineal para la obtención del mismo; por lo tanto, se calculó una longitud efectiva promedio entre los modos de cada cuerda:

$$L_{eff1} = (0.82 \pm 0.02) m$$

$$L_{eff2} = (0.82 \pm 0.04) m$$

$$L_{eff3} = (0.81 \pm 0.03) m$$

Dichas longitudes efectivas (para las tanzas 1, 2 y 3 respectivamente), se corresponden a la distancia entre el wave-driver y la polea; donde el wave-driver actuaría como un extremo fijo para el sistema. A pesar de que la condición que impone el dispositivo se corresponde a un extremo forzado, se observó que la amplitud de dicho movimiento era prácticamente nulo en comparación a las magnitudes de movimiento del resto de la tanza.

✓

• **3.2 Experimento 2: Tanzas unidas con diferente densidad**

Con base en (6), se calcularon 2 frecuencias con las que se excitaba un modo distinto en cada tanza. En ambos casos, se observó un nodo en la unión de las tanzas de distinta densidad y se cumplieron las relaciones de (7). La configuración espacial demostró que la unión actuaba como extremo fijo y se observaron los modos que se esperaban según lo calculado: la tanza de menor densidad en modo 1, y la otra tanza en modo 2 con frecuencia $f = (116 \pm 2)Hz$; luego, la tanza de menor densidad en modo 2 y la otra tanza en modo 4.

Considerando la expresión de la frecuencia en (6), se calculó la longitud experimental de cada tanza con la velocidad de propagación teórica (obtenida en el Experimento 1) y con la frecuencia experimental en la que se halló el nodo en la unión, y se las denominó $L1_{exp}$ y $L2_{exp}$. Esta longitud se comparó en cada tanza con la medida con la cinta métrica, y no se observaron diferencias significativas bajo el criterio de 2 sigmas (Fig. 7)

4. Conclusiones

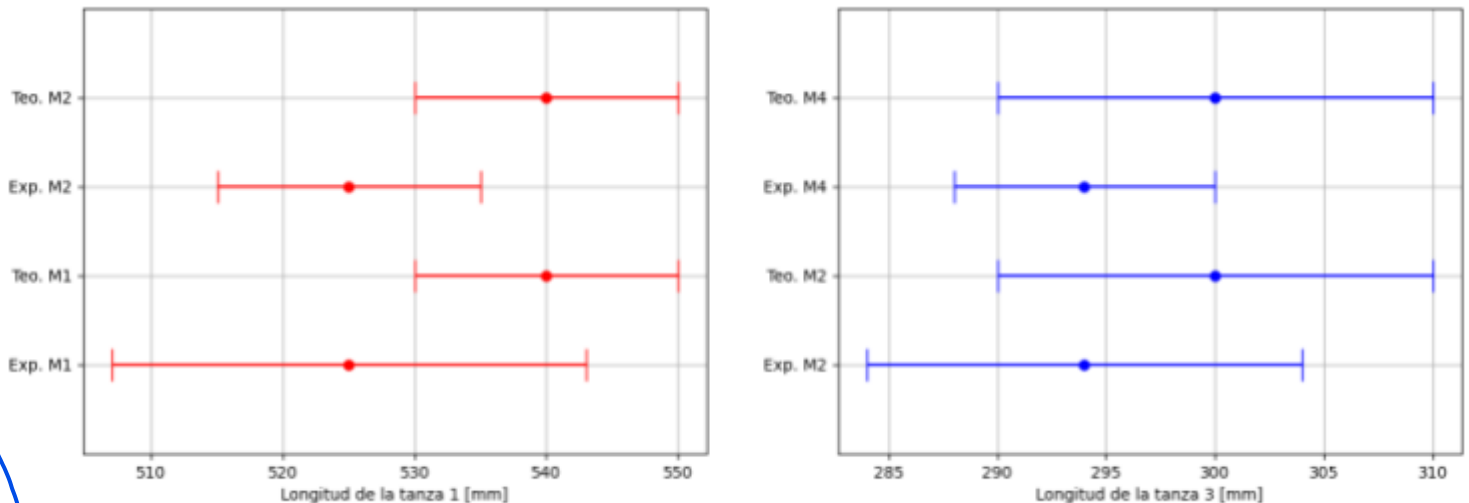


Fig. 7 Comparaciones de las longitudes de la tanza 1 en rojo y de la 3 en azul, siendo la de menor y la de mayor densidad respectivamente. Para la tanza 1, se comparan la longitud teórica (Teo.) con la experimental (Exp.) de cada modo (M1 y M2). De forma análoga, para la tanza 3 se comparan la longitud teórica (Teo.) con la experimental (Exp.) de cada modo (M2 y M4). Para el intervalo se utilizaron 2 sigmas y no se observaron diferencias significativas en ningún caso con este criterio.

acá

Se concluye que tanto el primer método de variar las densidades como el segundo de variar las tensiones, son confiables para medir la velocidad de propagación de una onda unidimensional en tanzas con longitudes y densidades como las que se utilizaron en este experimento. Con el sistema utilizado, pueden estudiarse ondas con condiciones de ambos contornos fijos, ya que el wave-driver se considera que funciona como tal. También se considera confiable medir la longitud L de la tanza como se muestra en la Fig.1 ya que la misma no presentó diferencias significativas con la longitud efectiva (manteniendo el criterio de 1 sigma). Pero, si se quisieran estudiar modos más altos que el 4 (lo cual se aconseja para poder obtener mayor cantidad de datos), se recomienda experimentar con mayores longitudes de tanza y amplitudes en el generador de funciones que las que se utilizaron en este experimento, para conseguir una visualización de la configuración espacial con menos dificultades.

Finalmente, lograron observarse distintos modos en la unión de tanzas con diferentes densidades con 2 frecuencias distintas, pero no se pudo experimentar con otras frecuencias dado que la configuración espacial de la tanza más densa era difícil de distinguirla por el observador, por lo que se refuerzan las recomendaciones dadas.

está bien. pero para mí lo más importante serían estas cosas:

- se pudo observar que al excitar la cuerda armónicamente se generaron las ondas estacionarias esperadas. En particular, se observaron las resonancias en frecuencias discretizadas, llamadas modos normales, correspondientes a las condiciones de contorno de extremos fijos.
- Se estudiaron las resonancias para cuerdas de distintas densidades y sometidas a distintas tensiones. De dichos modos normales se midieron la longitud de onda y frecuencia, y de estas mediciones se obtuvo con un ajuste la velocidad de propagación de la onda usando la relación de dispersión $v = \lambda \times f$. -Por otro lado se calculó v para las mismas configuraciones pero usando su relación con la densidad y la tensión, cuya relación fue corroborada.

los métodos fueron compatibles pero se encontró que este último permite obtener v con menos incerteza.

algo así! obviamente más pulido y con algún resultado cuantitativo. 9

5. Apéndice

5.1 Ajustes realizados en las Fig. 3 y 5:

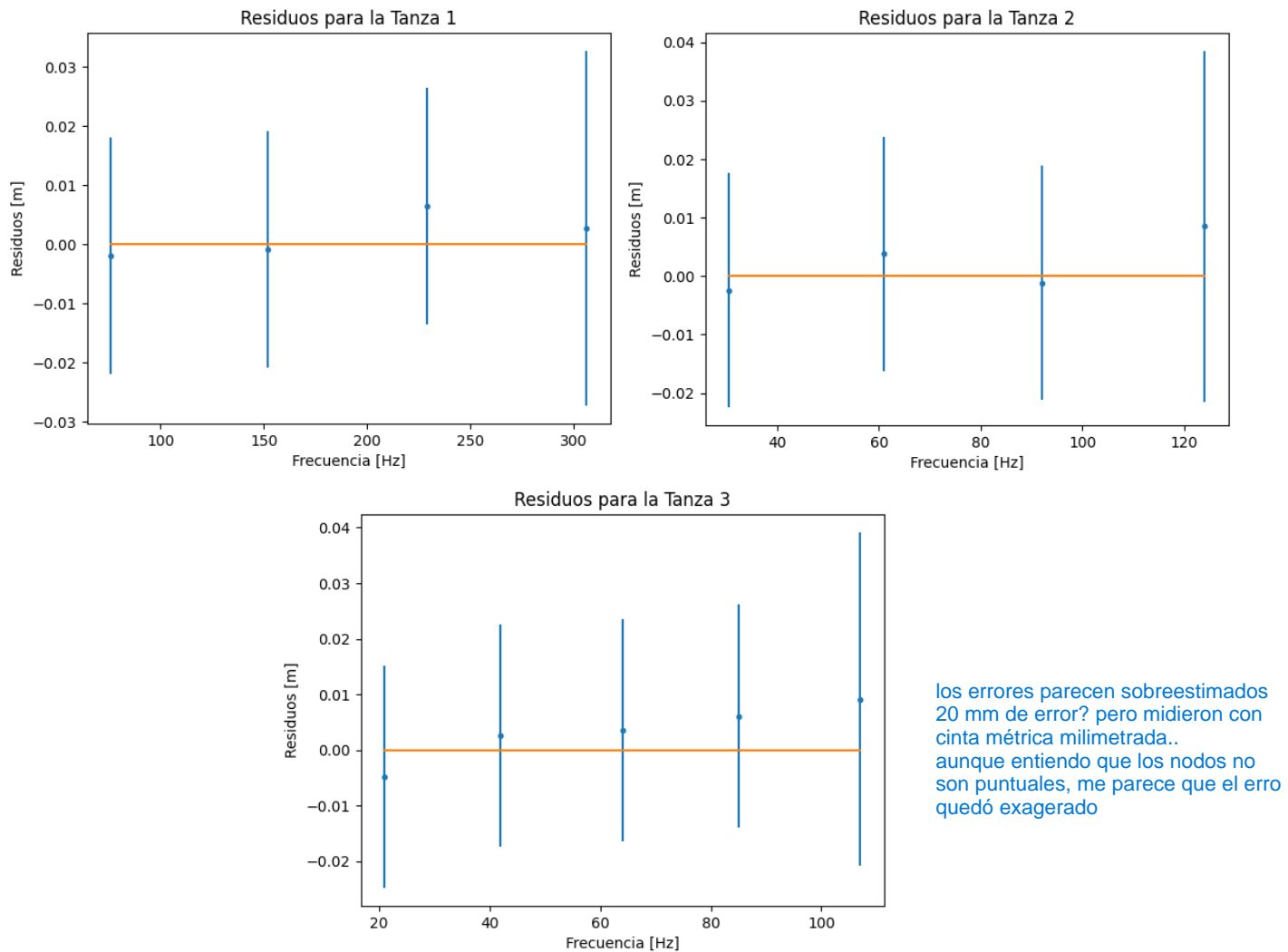


Fig. 8 Residuos para los ajustes realizados en la Fig. 3. No se observan patrones, sin embargo, al ser pocos datos no se consideran totalmente representativos.

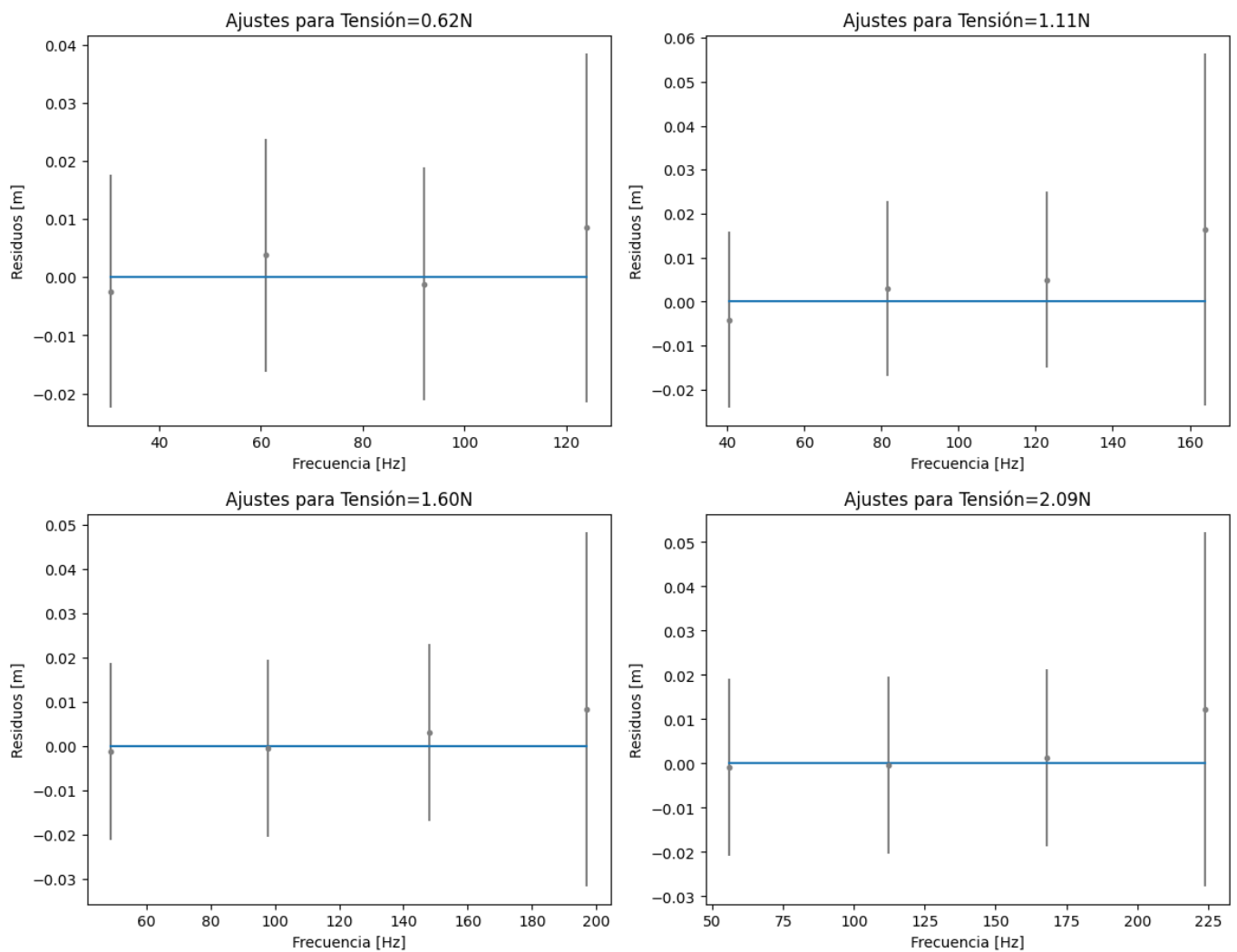


Fig. 9 Residuos para los ajustes realizados en la Fig. 5. No se observan patrones, sin embargo, al ser pocos datos no se consideran totalmente representativos.

Para el análisis de resultados del experimento 1, se presentó la dificultad de tener pocos datos de medición, por haber medido tan solo 4 modos, como se muestra en las Fig. 8 y 9. Por ésto, se optó por calcular las velocidades de propagación para cada modo, utilizando (4), para luego calcular un valor promedio de todas velocidades obtenidas, repitiendo este proceso para cada valor de densidad y tensión. Los resultados obtenidos mediante este procedimiento no presentaron diferencias significativas (bajo criterio de 1 sigma) con los resultados obtenidos a partir del ajuste, lo cual marca que el ajuste no es errado. Por lo tanto, con el objetivo de tener una representación más gráfica de los resultados, se optó por presentar los ajustes.

6. Bibliografía

- [1]: “F2: Ondas”, Ricardo A. Depine, [link](#)
- [2]: “Ondas: es física”, O. E. Martínez [link](#)

Algunos comentarios:

la redacción siempre siempre se puede mejorar, pero parten de una buena base. Tengan más cuidado con los tiempos verbales en todas las secciones del informe (resumen, intro, desarrollo, conclusiones)

me parece incómodo para la lectura presentar todos los desarrollos experimentales y luego los resultados.
tiene más sentido hacer una sección de los primeros experimentos y otra sección con lo de la unión de las dos cuerdas, y que cada sección incluya sus resultados.

lo bueno de graficar cosas a medida que uno va midiendo es que quizás podrían haber notado que las mediciones de λ tienen un error sobreestimado e intentar corregir eso en el momento.

sobre los ajustes faltaría complementar con algunos parámetros cuantitativos, como el χ^2 y el t-student del parámetro

sobre los resultados de la velocidad, están bien presentados con sus barras de error de forma que se los pueda comparar. pero faltaría algo cuantitativo para entender su magnitud. por ejemplo podrían calcular los errores porcentuales

$E_r = 100 \times \Delta X / X$ (en módulo). Por ejemplo, (540 ± 10) m/s. es mucho 10 m/s de incerteza? o es una medición copada?
calculamos el error porcentual y obtenemos que es del 2%. me copa ver ese número.

El informe está muy bien! Destaco que es ordenado, descriptivo pero conciso; y los gráficos que eligieron hacer condensaron y ordenaron sus resultados

Cualquier desacuerdo o consulta, me la pueden hacer. También vale buscar segundas opiniones sobre lo mismo a otros docentes.

Saludos,
Carolina