

ESTUDIO DEL CAOS EN CIRCUITO RL CON DIODO

Nicolás Arcuschin Moreno, Zoe Zaidán¹

Grupo N° 4, Fecha: 15/03/2022

Laboratorio 3 - Verano 2022
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Resumen

En este trabajo se caracterizó el comportamiento aperiódico y caótico de un sistema RL-Diodo, obteniendo su frecuencia de resonancia que resultó $f = (125 \pm 1)$ kHz y la capacidad del diodo, $C = (161, 1 \pm 3, 3)$ pF. El circuito presentó bifurcaciones en $V_a = (1, 410 \pm 0, 001)$ V, $V_b = (3, 350 \pm 0, 001)$ V y $V_c = (3, 900 \pm 0, 001)$ V, respectivamente. Además, se calculó el cociente de Fiegenbaum obteniendo un valor de $\delta_2 = (4, 311 \pm 0, 035)$. Por otro lado, examinando los diagramas de fases, se analizó el comportamiento del sistema alrededor de las bifurcaciones, en la zona caótica y en una ventana estable. Por último, se observó el fenómeno de histéresis en el diodo y se proveyó una hipótesis sobre su procedencia.

1. Introducción

En el presente informe, se estudiará el comportamiento caótico y aperiódico de un circuito RL con un diodo.

Cabe preguntarse qué es el caos físicamente. Este término se utiliza para designar comportamientos aperiódicos de un sistema, aparentemente ruidosos o aleatorios [1].

Generalmente, este estado del sistema puede ser predicho puesto que se observa el fenómeno de *bifurcación de duplicación del periodo*, es decir, el sistema toma un nuevo comportamiento con el doble de periodo que el original a partir de un valor particular de un cierto parámetro. En el caso competente, este parámetro será el voltaje entregado a un circuito RL con un diodo.

1.1. Diagrama de bifurcación

Una forma de esquematizar el comportamiento de un sistema dinámico caótico es componer un diagrama de bifurcación, como el que se muestra en la Fig. (1), donde se observa una correspondencia entre el parámetro r y la respuesta del sistema x . Cada bifurcación indica una sucesiva duplicación del periodo y una división en dos de la respuesta. Para ciertas zonas, el comportamiento es caótico por lo que el sistema puede caer en cualquier punto dentro de la sección.

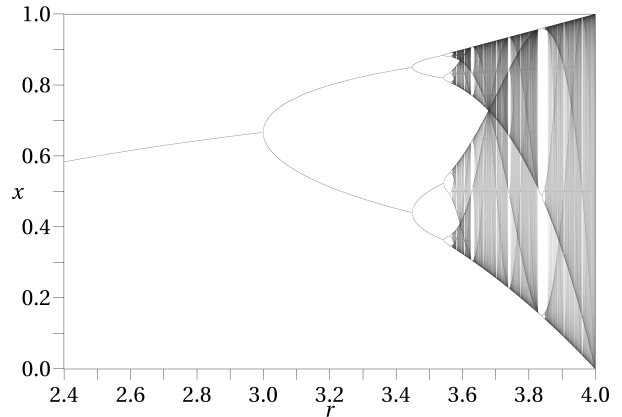


Figura 1: Diagrama de bifurcación para el mapa logístico que modela el valor final de la población de una especie, en porcentaje, según el parámetro r [2].

1.2. Constante de Fiegenbaum

Se puede ver que la distancia entre bifurcaciones sucesivas se hace cada vez más pequeña a lo largo del eje horizontal. En particular, existe una relación entre ellas dada por:

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (1)$$

donde r_n es el valor del parámetro en donde ocurre la n -ésima bifurcación.

Además, este cociente converge cuando $n \rightarrow \infty$ a un valor particular, llamado constante de Fiegenbaum, que

¹nicolas.arcuschin.00@gmail.com ,zoecnba@gmail.com

vale $\delta \approx 4,669$ [3].

1.3. Caos en circuito RL con diodo

Un circuito RL-Diodo, como el de la Fig.(2), exhibe un comportamiento de bifurcaciones y caos [4].

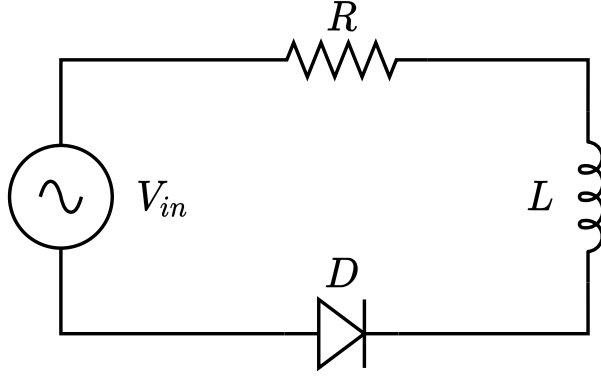


Figura 2: Esquema de circuito RL-Diodo. Se conecta en serie una fuente alterna V_{in} a una resistencia R con una inductancia L y finalmente a un diodo en polarización inversa D .

Se sabe debido a la naturaleza del diodo que este tiene dos comportamientos, conductivo y no conductivos. En el modo conductivo este actúa como una batería dejando pasar la corriente mientras que en el modo no conductivo actúa como un capacitor. Por ende, el sistema exhibe una frecuencia de resonancia [5] dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

y la función transferencia T dada por

$$T = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| \quad (3)$$

donde V_{out} es la caída de potencial de un componente y V_{in} el potencial entregado por la fuente. En particular, en los circuitos con resonancia esta función se modela como

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + (xp)^2}} \quad (4)$$

donde $x = \omega/\omega_0$ y $p = R\sqrt{C/L}$, siendo L la inductancia del circuito, R la resistencia y C su capacitancia, en este caso, del diodo.

El objetivo de este trabajo será caracterizar un circuito RL-Diodo encontrando su frecuencia de resonancia heurísticamente con lo que se despejará la capacidad del diodo con Ec. 2. Luego, fijando la frecuencia en resonancia, se esbozará un diagrama de bifurcación midiendo la amplitud de los picos de la señal eléctrica durante cada periodo. Finalmente se graficarán los diagramas de fase del sistema tomando como variables conjugadas la carga

Q del diodo y la corriente I que pasa por la malla. Utilizando los diagramas de fase se obtendrá cualitativamente el comportamiento del sistema para ciertos voltajes de entrada de la fuente.

2. Desarrollo experimental, resultados y análisis

Se utilizó un sistema experimental como el de la Fig.(3), compuesto por una fuente de corriente alterna (GF) marca *TEKTRONIX AFG1022*, un osciloscopio (OSC) marca *TEKTRONIX TBS 1052B-EDU*, una resistencia $R = (118,2 \pm 0,8) \Omega$, una inductancia $L = (10,06 \pm 0,21) \text{ mH}$ de resistencia interna $r_L = (13,0 \pm 0,3) \Omega$ y un diodo 1N4007.

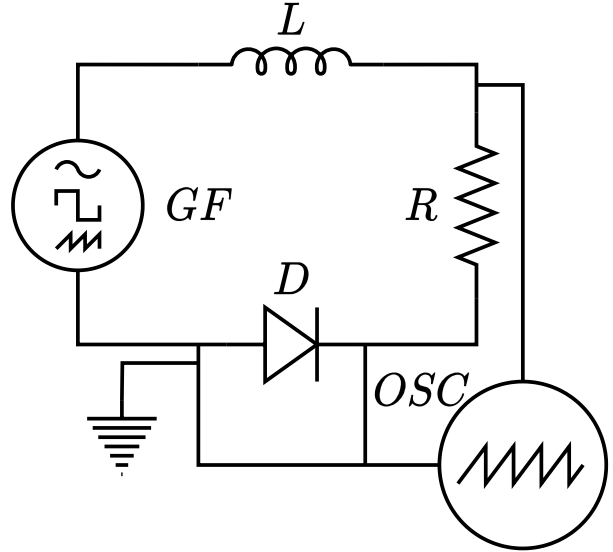


Figura 3: Montaje experimental utilizado. Un generador de funciones (GF) es conectado a una inductancia L , una resistencia R y a un diodo D en serie. El osciloscopio recibe las señales de la caída de potencial sobre el diodo en un canal y sobre el diodo y la resistencia en otro.

En primer lugar, se realizó un barrido de frecuencias a 0,1V, buscando la frecuencia de resonancia del sistema midiendo la caída de potencial sobre el diodo y dividiéndola por el potencial de entrada para calcular la transferencia según la Ec. (3). Esta frecuencia resultó $f = (125 \pm 1) \text{ kHz}$ (ver Apéndice [A]). Con este valor, mediante la Ec. (2), se calculó la capacidad del diodo, que resultó $C = (161,1 \pm 3,3) \text{ pF}$.

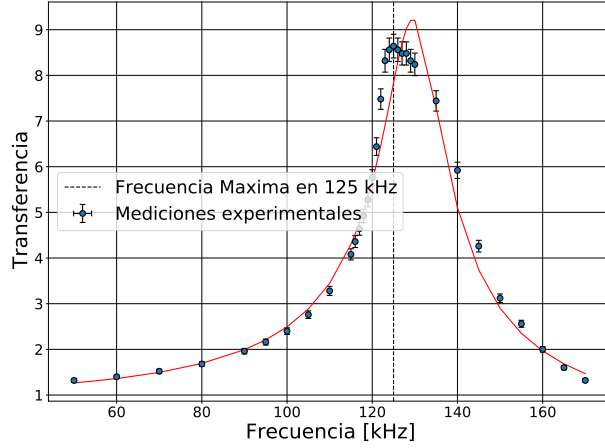


Figura 4: Gráfico de la transferencia sobre el diodo en función de la frecuencia. En rojo se puede ver el ajuste de las mediciones experimentales dado por Ec. (4).

Se puede ver que si bien el pico del ajuste de la Fig. (4) no coincide con el valor medido, este se acerca y vale $f = (129,94 \pm 0,36)$ kHz (ver Apéndice [B]). Se nota en las mediciones experimentales que la caída de la transferencia T no se realiza con la misma pendiente que la obtenida por los parámetros del ajuste. Esto es una diferencia funcional respecto del modelo dado por Ec. (4) alrededor del pico de resonancia.

Luego, como se muestra en la Fig. (3), se midió la caída de potencial en el diodo y en el par resistencia-diodo. De esta manera, se realizó un barrido en voltajes del cual se obtuvo el diagrama de bifurcación del sistema (Fig. (5)). Se observa que la primera bifurcación se da en $V_a = (1,410 \pm 0,001)$ V, la segunda en $V_b = (3,350 \pm 0,001)$ V y la tercera en $V_c = (3,900 \pm 0,001)$ V (ver Apéndice [A]). Se encuentra además un voltaje de saturación en los voltajes negativos del diodo que se obtiene cuando el voltaje de entrada es ≈ 2 V. Este potencial de saturación se determina como el voltaje de ruptura del diodo para el cual una corriente suficientemente negativa logra que el diodo conduzca a un potencial constante.

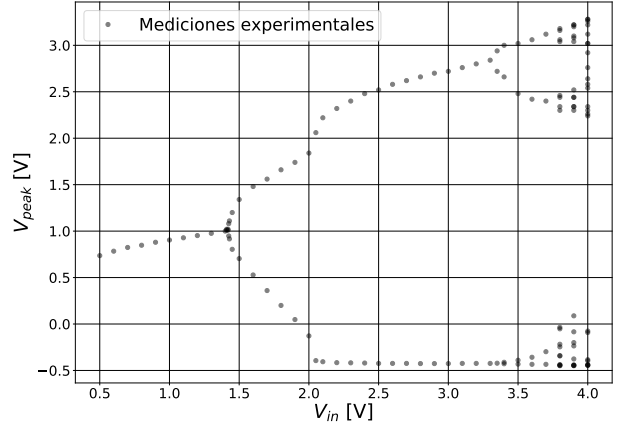


Figura 5: Diagrama de bifurcación del voltaje medido sobre el diodo y del potencial de entrada. Cada bifurcación muestra un cambio en la periodicidad de los picos de la señal eléctrica.

Además, a partir de los valores de las bifurcaciones, se calculó, según la Ec. (1) la relación entre estos. Resultó así $\delta_2 = (4,311 \pm 0,035)$ (ver Apéndice [A]). Este valor, no se solapa con el esperado teóricamente y difiere de él en menos de un 7 %. De todas formas, esto tiene sentido físico ya que el valor teórico considera el límite $n \rightarrow \infty$ y, en el caso estudiado, $n=2$.

Por otro lado, otra forma de estudiar el comportamiento caótico en el sistema RL-diodo es mediante diagramas de fase. Por este motivo, se realizaron los correspondientes diagramas para $V_1 = 1,51$ V, $V_2 = 3,40$ V, $V_3 = 4,00$ V y $V_4 = 20,00$ V, graficando la carga sobre el diodo en función de la corriente circulante por la malla. Para este análisis se obtuvo directamente del osciloscopio las mediciones de voltaje de cada canal y luego se trató los datos de voltaje con un promedio móvil de ventana 32.

En el primer caso, el diagrama se visualiza en la Fig. (6), justo después de la primera bifurcación.

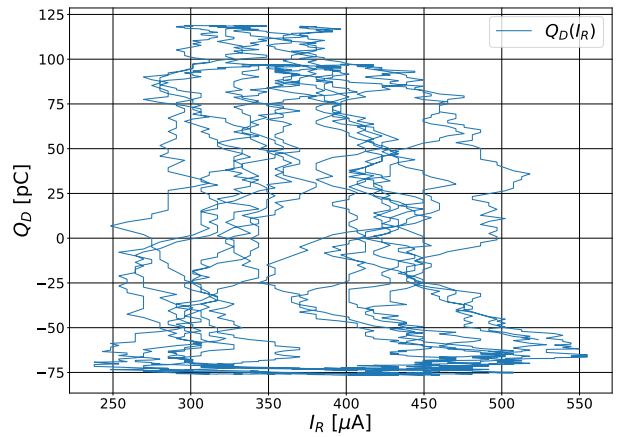


Figura 6: Diagrama de fase a 1,51 V. Se graficó la carga sobre el diodo en función de la corriente en la malla.

Se puede observar el comportamiento periódico inestable

table viendo como las curvas se acumulan en la parte inferior y superior del grafico pero teniendo una gran variación en su trayecto. Se determinó que aunque la periodicidad tuviera dos ciclos alrededor de la bifurcación (Fig. (5)) este cambia rápidamente de uno a otro.

Para el V_2 , luego de la segunda bifurcación, el diagrama de fases se esboza en la Fig. (7):

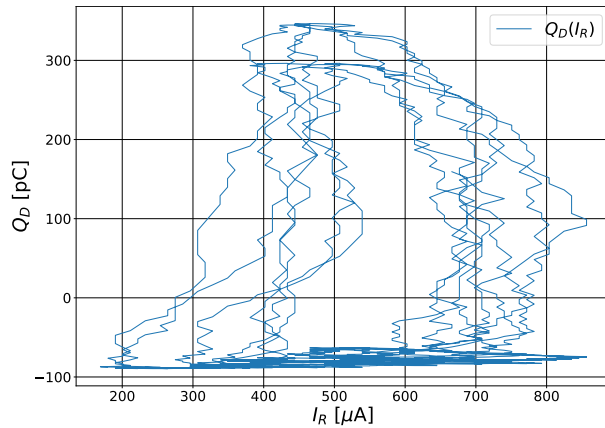


Figura 7: Diagrama de fase para $V_{in} = 3, 4$ V. Se graficó la carga sobre el diodo en función de la corriente en la malla.

Se puede ver un comportamiento similar al de la Fig. (6) aunque con las distintas periodicidades mas definidas. Además, se pierde levemente la inestabilidad de las trayectorias.

En cambio, para el diagrama de la Fig. (8), a V_3 , luego de la tercera bifurcación, se observa el fenómeno de caos propiamente dicho. No existe periodicidad definida en la trayectoria de la curva. Aun así, tiene una mayor densidad de curvas alrededor de $Q_D = 200$ pC e $I_R = 500$ μA. Aunque no se obtuvo un muestreo del comportamiento del sistema en el diagrama de bifurcación (Fig. 5) se nota, para los voltajes de entrada donde el comportamiento es caótico, la agrupación de las amplitudes alrededor de una rama de la bifurcación.

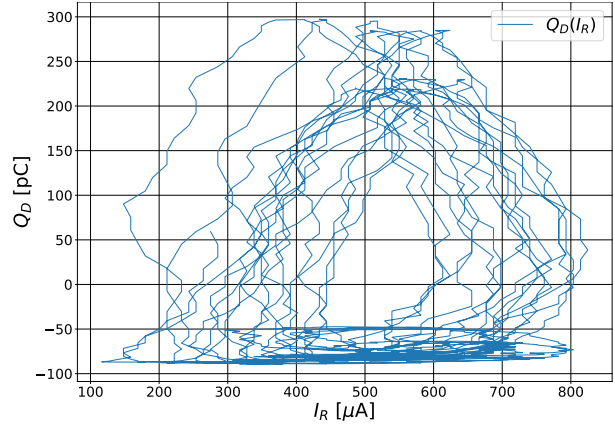


Figura 8: Diagrama de fase para $V_{in} = 4$ V. Se graficó la carga sobre el diodo en función de la corriente en la malla.

Por último, para V_4 de la Fig. (9), se observa un voltaje para el cual las trayectorias se estabilizan. Viendo el gráfico se pueden determinar al menos 3 periodos diferentes. Esto corrobora la noción de que periodos 3, 5 y 6 tienden a ocurrir en ventanas del diagrama de bifurcación estables [6].

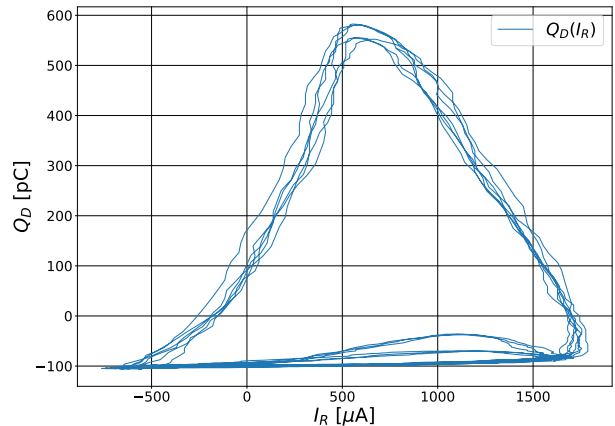


Figura 9: Diagrama de fase para $V_{in} = 20$ V. Se graficó la carga sobre el diodo en función de la corriente en la malla.

Por otro lado, se realizaron los mapas de Poincaré (Fig. (10), (11), (12) y (13)) para estos mismos voltajes. La teoría predice que para un sistema periódico, este diagrama debería verse como un solo punto; mientras que para sistemas aperiódicos, como el caso trabajado, deberían mostrar una variedad de puntos distantes entre sí distribuidos de forma aleatoria. Para realizar los mapas se graficaron los diagramas de fase de manera estroboscópica colocando un punto por periodo de la onda.

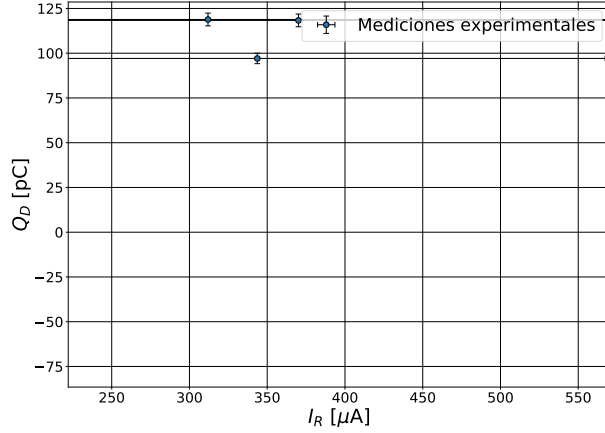


Figura 10: Mapa de Poincaré para $V_{in} = 1,51$ V. Se graficó la carga sobre el diodo en función de la corriente en la malla obtenida de la resistencia.

Para la Fig. (10) se ve como los puntos obtenidos varían entre dos valores cercanos en carga. Lo que coincide con lo observado en el diagrama de bifurcación (Fig. (5)) y el diagrama de fase (Fig. (6)).

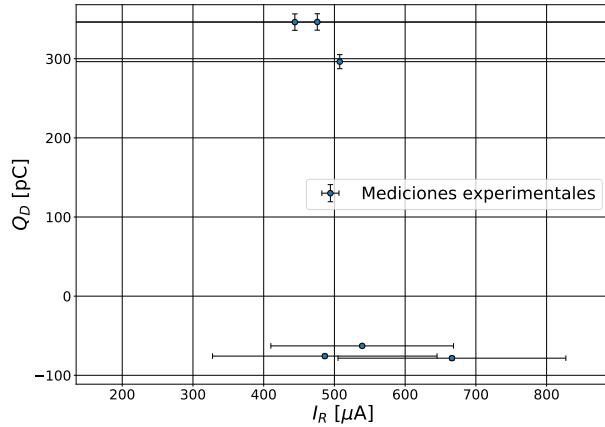


Figura 11: Mapa de Poincaré para $V_{in} = 3,4$ V

Nuevamente, en la Fig. (11), se corresponde el diagrama de fase con el mapa de Poincaré, se ven 4 agrupaciones de puntos bien definidas que se corresponden a la bifurcación observada en Fig. (5).

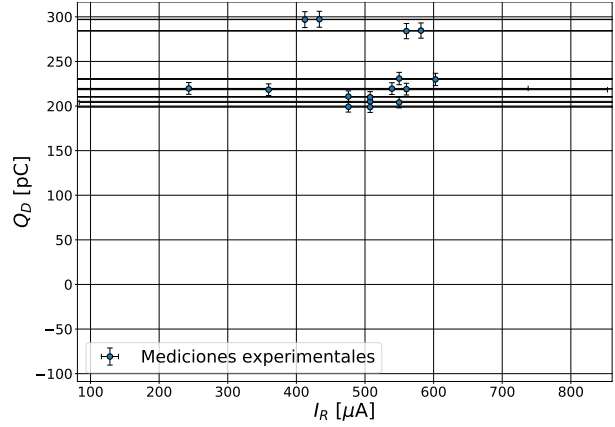


Figura 12: Mapa de Poincaré para $V_{in} = 4$ V

En el caso de Fig. (12) las agrupaciones de puntos que se correspondían a un comportamiento caótico en el diagrama de fase, debido al error en el eje horizontal, no pueden ser distinguidas una de otras.

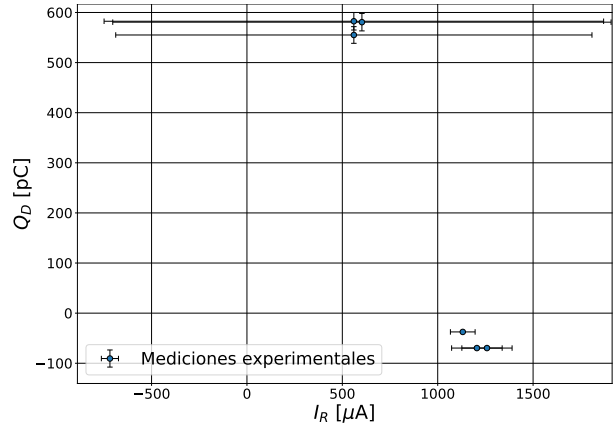


Figura 13: Mapa de Poincaré para $V_{in} = 20$ V

Por ultimo, en la Fig. (13) se ven al menos 3 grupos bien definidos de puntos, lo que coincide con lo observado en el diagrama de fase (Fig. (9)).

Además, para otro sistema con el mismo montaje pero frecuencia de resonancia $f = (114 \pm 1)$ kHz, ya que tenía una capacitancia inducida por un elemento de medición, se observó que el diodo presentaba histéresis en la primera bifurcación, en la región entre 1,71 V y 1,78 V.

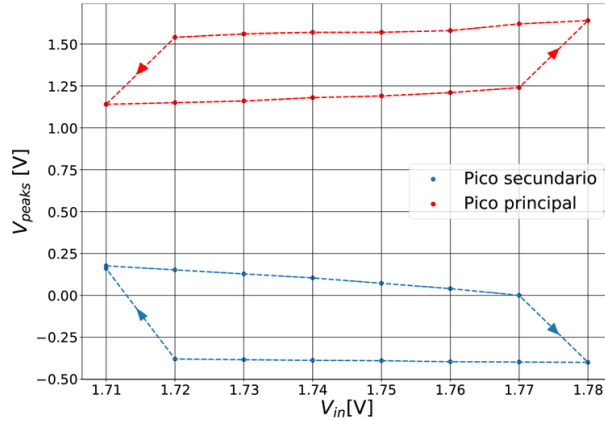


Figura 14: Histéresis en la región de voltaje [1,71V;1,78V]. El pico principal, en rojo, se refiere al pico de mayor amplitud en el periodo mientras que el pico secundario, en azul, se refiere al pico de menor amplitud.

Se hipotetiza que este efecto se debe a una posible pendiente negativa de resistencia diferencial en la curva característica $I - V$ del diodo cuando es operado en la frecuencia de resonancia. Esto coincidiría con la noción de que, de ser así, y si la bifurcación es del tipo Hopf subcrítica, el sistema presenta histéresis [7]. Para confirmar esta teoría haría falta obtener la curva $I - V$ del diodo operándolo a la frecuencia de resonancia ω_0 .

3. Conclusión

En conclusión, la frecuencia de resonancia del sistema resultó $f = (125 \pm 1)$ kHz y la capacidad del diodo, $C = (161,1 \pm 3,3)$ pF, presentando bifurcaciones en $V_a = (1,410 \pm 0,001)$ V, $V_b = (3,350 \pm 0,001)$ V y $V_c = (3,900 \pm 0,001)$ V, respectivamente, obteniendo la constante de Fieigenbaum para $n = 2$ como $\delta_2 = (4,311 \pm 0,035)$. Además, tomando a la carga y a la corriente como variables conjugadas, se observó en los diagramas de fases el comportamiento del sistema cerca de la primera bifurcación (Fig. (6)), en un periodo 4 (Fig. (7)), en la zona caótica (Fig. (8)), y en una ventana estable luego de la franja caótica (Fig. (9)). Se realizó además el mapa de Poincaré para cada diagrama de fase realizado, graficando las mediciones estroboscópicamente (Fig. (10), Fig. (11), Fig. (12) y Fig. (13)), cuyo análisis se corresponde al obtenido por el estudio de las trayectorias de carga y corriente excepto para el tercer caso.

Finalmente, se obtuvo alrededor de la zona de bifurcación que el diodo presentaba el fenómeno de histeresis en el que cambiaba abruptamente de amplitud al aumentar el voltaje de entrada sin tener la misma caída al disminuirlo (Fig. (14)). Se hipotetiza la causa de este fenómeno debido a una posible resistencia diferencial negativa en la

curva $I - V$ del diodo.

Referencias

- [1] Steven H. (Steven Henry) author Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Includes bibliographical references and index. Second edition. Boulder, CO : Westview Press, a member of the Perseus Books Group, [2015], [2015]. URL: <https://search.library.wisc.edu/catalog/9910223127702121>.
- [2] Robert M. May. "Simple mathematical models with very complicated dynamics". En: *Nature* 261.5560 (jun. de 1976), págs. 459-467. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/261459a0](https://doi.org/10.1038/261459a0). URL: <https://doi.org/10.1038/261459a0>.
- [3] Mitchell J. Feigenbaum. "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations". En: *Journal of Statistical Physics* 19.1 (jul. de 1978), págs. 25-52. ISSN: 1572-9613. DOI: [10.1007/BF01020332](https://doi.org/10.1007/BF01020332). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01020332>.
- [4] Sabieh Anwar Junaid Alam. "Chaising Chaos with an RL-Diode Circuit". En: *LUMS School of Science and Engineering* (mar. de 2010). URL: https://physlab.org/wp-content/uploads/2016/04/Chasing_chaos_revised.pdf.
- [5] Jeffrey Lang Anant Agarwal. *Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits*, Morgan Kaufmann. 1st. Elsevier In, 2005. ISBN: 1558607358.
- [6] James Testa, José Pérez y Carson Jeffries. "Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator". En: *Phys. Rev. Lett.* 48 (11 mar. de 1982), págs. 714-717. DOI: [10.1103/PhysRevLett.48.714](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.714). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.714>.
- [7] C. R. Wallis y S. W. Teitsworth. "Hopf bifurcations and hysteresis in resonant tunneling diode circuits". En: *Journal of Applied Physics* 76.7 (1994), págs. 4443-4445. DOI: [10.1063/1.357343](https://doi.org/10.1063/1.357343). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.357343>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.357343>.

A. Apéndice de Errores

El error de la frecuencia de resonancia fue determinado por la unidad mínima en la que se realizó el barrido alrededor del máximo de transferencia, es decir, 1 kHz. Para el caso de los errores de las bifurcaciones, se tomó como incerteza la última cifra significativa de la medición

en el generador de funciones. Para las constantes de Fiegenbaum, se propagó la incerteza de manera usual.

En cuanto al caso de las incertezas para los diagramas de Poincaré, se calculó primero la incerteza de los voltajes medidos del osciloscopio y luego se la propagó.

B. Ajuste de la campana de resonancia

En cuanto al ajuste de la Fig. (4), su R^2 resultó 0,96 por lo que se puede decir que la recta ajustada explica considerablemente mejor los datos que la curva que pasa por la media de ellos. Por otro lado, el p-value del χ^2 dio 1 por lo que se podría inferir que la distribución del ajuste se condice con la de los datos observados.

Además, se realizaron los residuos del ajuste de la

campana de resonancia, que se visualizan en la Fig. (15).

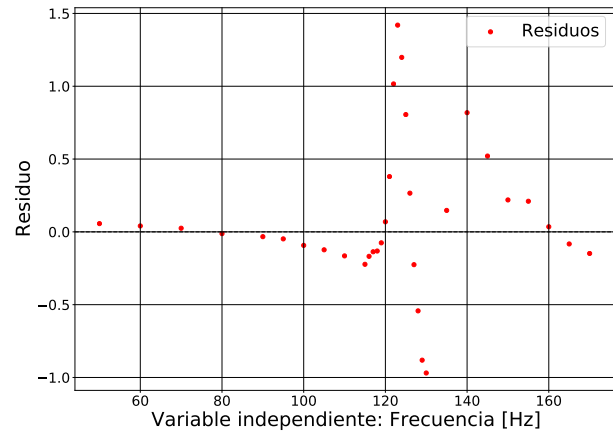


Figura 15: Gráfico de los residuos del ajuste de la Fig. (4).