Solución General del Potencial - Separacion de Variables

May 10, 2025

1 Coordenadas Cartesianas

1.1 Base en x, y

Espacio acotado

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left[A_{nm}\, e^{+\kappa_{nm} z} + B_{nm}\, e^{-\kappa_{nm} z}\right], \quad \kappa_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}. \tag{1}$$

Espacio no acotado

$$\Phi(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)}\left[A(k_x,k_y)\, e^{+\kappa z} + B(k_x,k_y)\, e^{-\kappa z}\right]\frac{dk_x\, dk_y}{(2\pi)^2}, \quad \kappa = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \tag{2}$$

1.2 Base en x, z

Espacio acotado

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right)\left[C_{np}\, e^{+\kappa'_{np} y} + D_{np}\, e^{-\kappa'_{np} y}\right], \quad \kappa'_{np} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2}. \tag{3}$$

Espacio no acotado

$$\Phi(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_z z)}\left[C(k_x,k_z)\, e^{+\kappa' y} + D(k_x,k_z)\, e^{-\kappa' y}\right]\frac{dk_x\, dk_z}{(2\pi)^2}, \quad \kappa' = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}. \tag{4}$$

1.3 Base en y, z

Espacio acotado

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sin\!\Big(\frac{m\pi y}{b}\Big)\sin\!\Big(\frac{p\pi z}{c}\Big)\Big[E_{mp}\,e^{+\kappa''_{mp}x}+F_{mp}\,e^{-\kappa''_{mp}x}\Big],\quad \kappa''_{mp}=\sqrt{\Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2+\Big(\frac{p\pi}{c}\Big)^2}. \tag{5}$$

Espacio no acotado

$$\Phi(x,y,z)=\iint_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_y y+k_z z)}\Big[E(k_y,k_z)\,e^{+\kappa'' x}+F(k_y,k_z)\,e^{-\kappa'' x}\Big]\frac{dk_y\,dk_z}{(2\pi)^2},\quad \kappa''=\sqrt{k_y^2+k_z^2}. \tag{6}$$

2 Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z) la separación da siempre un modo angular $e^{im\varphi}$ $(m\in\mathbb{Z})$ y una parte radial y otra en z.
En φ siempre tenemos base

2.1 Base en φ,ρ

En esta base se toma $Q_\nu(\varphi)=e^{i\nu\varphi},\ \nu\in\mathbb{Z}$.

Espacio acotado: $\rho\in[0,a]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ Se imponen $R(\rho=a)=0$, de modo que los ceros discretos vienen de $\alpha_{\nu n}=n$-ésimo cero de J_ν. Definimos $\kappa_{\nu n}=\alpha_{\nu n}/a$.

$$\boxed{\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[E_{\nu n}\,e^{+\kappa_{\nu n}z}+F_{\nu n}\,e^{-\kappa_{\nu n}z}\Big]\,J_\nu\!\Big(\alpha_{\nu n}\,\tfrac{\rho}{a}\Big)\,e^{i\nu\varphi}.}$$

Espacio no acotado: $\rho\in[0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi]$ El espectro radial es ahora continuo $k\geq 0$; definimos $\kappa=k$.

$$\boxed{\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\Big[E_\nu(k)\,e^{+k z}+F_\nu(k)\,e^{-k z}\Big]\,J_\nu(k\,\rho)\,e^{i\nu\varphi}\,\frac{k\,dk}{2\pi}.}$$

2.2 Base en φ,z

Aquí se separa φ y z, quedando ρ como variable restante.

Espacio acotado: $\varphi\in[0,2\pi]$, $z\in[0,c]$ Modos angulares $e^{i\nu\varphi}$ y longitudinales $\sin(n\pi z/c)$. Para finitud en $\rho=0$ y ceros en $\rho=a$, usamos ceros de I_ν o K_ν según la BC. Definimos $\beta_{\nu n}=n$-ésimo cero de la función radial en $\rho=a$.

$$\boxed{\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{\nu n}\,I_\nu\!\Big(\beta_{\nu n}\,\rho\Big)\,e^{i\nu\varphi}\,\sin\!\Big(\tfrac{n\pi z}{c}\Big).}$$

Espacio no acotado: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in (-\infty, \infty)$ Para decaimiento radial usamos los K_ν.

$$\boxed{\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_\nu(k_z)\, K_\nu\big(\kappa\, \rho\big)\, e^{i\nu\varphi}\, e^{ik_z z}\, \frac{dk_z}{2\pi}, \quad \kappa = \sqrt{k_z^2}.}$$

3 Coordenadas Esféricas

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) se separa en $\Phi \sim Q_m(\varphi)\, \Theta_{\ell m}(\theta)\, R(r)$, con $Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$, y $\Theta_{\ell m}(\theta) = P_\ell^m(\cos\theta)$, $\ell \geq |m|$.

3.1 Base en φ, θ

Espacio acotado: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ Modos angulares discretos:

$$Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad \Theta_{\ell m}(\theta) = P_\ell^m(\cos\theta), \quad m = -\ell, \ldots, \ell,\ \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

La parte radial satisface

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell+1)R - \lambda\, r^2 R = 0.$$

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Big[A_{\ell m}\, r^\ell + B_{\ell m}\, r^{-(\ell+1)}\Big]\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.}$$

Espacio no acotado: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ Para el caso Helmholtz $\lambda = -k^2$:

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} \Big[A_{\ell m}(k)\, j_\ell(kr) + B_{\ell m}(k)\, n_\ell(kr)\Big]\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}\, \frac{2k^2\, dk}{\pi}.}$$

Para Helmholtz modificado $\lambda = +\kappa^2$, reemplaza j_ℓ, n_ℓ por i_ℓ, k_ℓ.

3.2 Base en φ, r

Espacio acotado: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, R]$ Modos azimutales y discretos en r:

$$Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad R_{mn}(r) = j_m\!\Big(\alpha_{mn}\, \tfrac{r}{R}\Big),$$

donde α_{mn} es el n-ésimo cero de j_m. La parte $\Theta(\theta)$ satisface $(1/\sin\theta)(\sin\theta\, \Theta')' + [\ell(\ell+1)]\Theta = 0$, así:

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\, j_m\!\Big(\alpha_{mn}\, \tfrac{r}{R}\Big)\, e^{im\varphi}\, P_m(\cos\theta).}$$

Espacio no acotado: $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \infty)$ Aquí r continuo y $\Theta = P_m$:

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} D_m(k)\, h_m^{(1)}(kr)\, e^{im\varphi}\, P_m(\cos\theta)\, \frac{2k^2\, dk}{\pi},}$$

con $h_m^{(1)}$ ondas salientes (o usa $h_m^{(2)}$ para entrantes).