Appunti di Meccanica

G.Rodari

8 marzo 2017

Indice

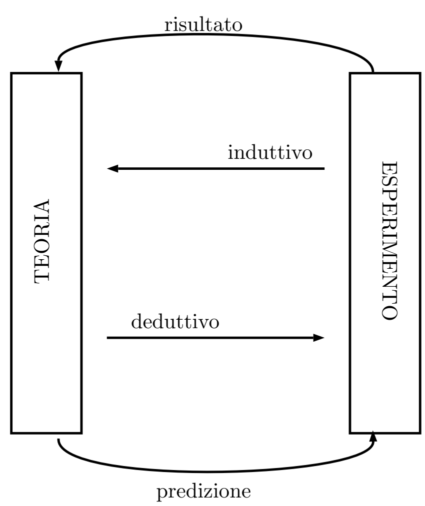
1 Introduzione 7-3-2017 **2**
1.1 La Meccanica: metodi e misure . . . 2
1.2 Vettori e operazioni . . . 3
1.2.1 Prodotto per scalare . . . 3
1.2.2 Somma e differenza di vettori . . . 3
1.2.3 Prodotto scalare . . . 3
1.2.4 Prodotto vettoriale . . . 3
1.2.5 Versore . . . 4
1.3 Riferimento cartesiano . . . 4
1.3.1 Operazioni vettoriali in coordinate cartesiane . . . 4

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La Meccanica: metodi e misure

La meccanica é la branca della fisica che si propone di studiare i fenomeni di moto dei corpi attraverso una *modellizzazione*: si riducono i corpi in gioco nel fenomeno osservato ad un sistema di punti materiali, la cui struttura e le cui relazioni sono descrivibili attraverso leggi matematiche; per situazioni particolarmente semplici parleremo di *punto materiale*, un oggetto dotato di tre gradi di libertá. Per descrivere i dati sperimentali attraverso delle leggi é necessario un confronto continuo tra risultati teorici e sperimentali, un'alternanza tra deduzione e induzione. Nello studio dei sistemi fisici si devono riconoscere le caratteristiche di un fenomeno, associate a delle *grandezze fisiche*, che possono essere numericamente rappresentate una volta definita un'unitá di misura.



Studiando i sistemi meccanici, ci interesserá dare risposte a due classi di problemi:

1. Conoscendo le forze che agiscono sul sistema dedurre il moto.
2. Conoscendo il moto dei corpi dedurre le forze.

Tutte le grandezze che entreranno in gioco possono essere derivate da tre grandezze fondamentali:

- lunghezza $[l]$
- tempo $[t]$
- massa $[m]$

Ad esempio nel caso dell'energia avremo:

$$[E] = [m][l]^2[t]^{-2}$$

1.2 Vettori e operazioni

Per descrivere molte grandezze sará comodo utilizzare i *vettori* entitá matematiche rappresentate da un segmento orientato, dotato di:

- $|\vec{v}|$ modulo del vettore: ha le dimensioni della grandezza rappresentata

- direzione: retta su cui giace il vettore

- verso: 'da che parte' va la freccina

Spesso i vettori saranno individuati dal loro punto di applicazione Q e dal loro estremo libero P.
IMMAGINE VETTORE Sono definite alcune operazioni:

1.2.1 Prodotto per scalare

$$k\vec{\mathbf{v}}$$

1.2.2 Somma e differenza di vettori

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$$
$$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$$

1.2.3 Prodotto scalare

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$$

1.2.4 Prodotto vettoriale

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin\theta$$

1.2.5 Versore

$$\frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|} = \hat{\mathbf{u}}$$

si ottiene un vettore modulo 1 **adimensionale**, con la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{\mathbf{v}}$

1.3 Riferimento cartesiano

Per poter individuare con semplicitá un vettore é utile fissare un sistema di riferimento cartesiano, costruito considerando tre direzioni ortogonali 'individuate' da versori. IMMAGINE
Dato un sistema di riferimento, un vettore potrá essere individuato con una terna di scalari:

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

In generale risulta che $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = |\vec{\boldsymbol{v}}|^2$. Inoltre si hanno le seguenti relazioni tra versori:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \end{cases}$$

1.3.1 Operazioni vettoriali in coordinate cartesiane

In coordinate cartesiane le operazioni vettoriali possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) + (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) = \\ &= (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} &= (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) = \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) = \\ = (a_xb_y - a_yb_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\mathbf{k}} \end{gathered}$$

In particolare il prodotto vettoriale puó essere visto come determinante della matrice:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$