

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Εργασία 1

Αριστείδης Δασκαλόπουλος (ΑΕΜ: 10640)

4 Απριλίου 2025

## Εισαγωγή

**Στόχος Εργασίας:** Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων με Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων.

Το δοθέν σύστημα που καλούμαστε να μελετήσουμε είναι ενός απλού εκκρεμούς με ροπή εισόδου, του οποίου η εξίσωση έπεται από γραμμικοποίηση ( $\sin(q) \simeq q$  για μικρές γωνίες  $q$ ) δίνεται από την σχέση (1).

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t) \Rightarrow \ddot{q}(t) + \frac{c}{mL^2}\dot{q}(t) + \frac{g}{L}q(t) = \frac{1}{mL^2}u(t) \quad (1)$$

Ως έξοδο του συστήματος θεωρούμε την  $q(t)$  όπου εκφράζει την γωνία εκτροπής του εκκρεμούς σε rad, ενώ η είσοδος ελέγχου μας είναι η  $u(t)[N \cdot m]$ .

Στα πλαίσια της εργασίας, το πρώτο βήμα που θα υλοποιήσουμε—έπειτα από μια συνοπτική μαθηματική ανάλυση—είναι να προσομοιώσουμε την ακριβή απόκριση του συστήματος με χρήση ενός ODE solver (**ode45**) στο MATLAB, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, και:

- Είσοδο  $u(t) = A_0 \sin(\omega t)$ ,  $\forall t > 0$
- Γνωστές παραμέτρους:

$$m = 0.75, L = 1.25, c = 0.15, g = 9.81, A_0 = 4 \text{ και } \omega = 2.$$

Στην συνέχεια, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, θα εκτιμούμε στα διάφορα ερωτήματα τις παραμέτρους  $m$ ,  $L$  και  $c$ , εξάγοντας κάθε φορά συμπεράσματα για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας.

## Θέμα 1

### Ερώτημα Α

Το σύστημά μας, όπως φαίνεται και από την σχέση (1), πρόκειται για ένα γραμμικό χρονοαμετάβλητο σύστημα (ΓΧΑ) μίας εισόδου,  $u(t)$ , και μίας εξόδου,  $q(t)$  (MEME) χωρίς παραγώγους στην είσοδο. Άρα οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος στη μορφή  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ —όπου για το διάνυσμα κατάστασης,  $x(t)$ , ισχύει  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T$ —προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}_1(t) = \ddot{q}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

$$(2) \xrightarrow{(1)} \ddot{x}_2(t) = \ddot{q}(t) = -\frac{c}{mL^2}\dot{q}(t) - \frac{g}{L}q(t) + \frac{1}{mL^2}u(t) \xrightarrow{\substack{q(t)=x_1(t) \\ \dot{q}(t)=\dot{x}_1(t)}} \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{c}{mL^2}x_2(t) - \frac{g}{L}x_1(t) + \frac{1}{mL^2}u(t).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} u(t). \quad (3)$$

#### Εξισώσεις Κατάστασης του Συστήματος

Όπως είναι φανερό και από την σχέση (3) έχουμε γράψαμε τις εξισώσεις κατάστασης στην μορφή  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , με:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix}$$

και για την έξοδο έχουμε:  $q(t) = Cx(t)$  με  $C = [1 \ 0]$ .

Όσον αφορά την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, μπορούμε να την προσδιορίσουμε από τις εξισώσεις κατάστασης παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ q(t) = Cx(t) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Laplace}} \left. \begin{array}{l} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Q(s) = CX(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(s) = [C(sI - A)^{-1}B] U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$$

Θεωρώντας στην παραπάνω σχέση μηδενικές αρχικές συνθήκες (όπως υποδεικνύεται και στο ερώτημα Β), δηλαδή  $x(0) = 0$ , βρίσκουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (4)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει τις τιμές των  $A$ ,  $B$  και  $C$  επομένως αντικαθιστώντας τις στην σχέση 4 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} G(s) &= (1 \ 0) \left[ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s + \frac{c}{mL^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{s \cdot (s + \frac{c}{mL^2}) + \frac{g}{L}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} s + \frac{c}{mL^2} & 1 \\ -\frac{g}{L} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{c}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \cdot \frac{1}{mL^2}. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της 1 (και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$$s^2Q(s) + \frac{c}{mL^2}sQ(s) + \frac{g}{L}Q(s) = \frac{1}{mL^2}U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{mL^2}s + \frac{g}{L}} \cdot \frac{1}{mL^2}.$$

## Ερώτημα Β

Έχοντας πλέον συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους μας,  $m = 0.75$ ,  $L = 1.25$ ,  $c = 0.15$  και  $g = 9.81$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τα παρακάτω:

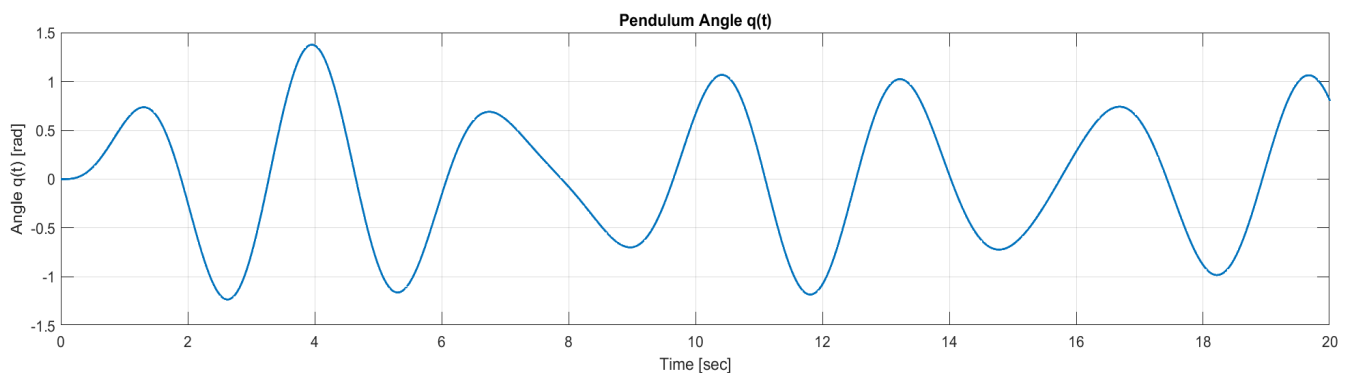
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7.848 & -0.128 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.853 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad G(s) = \frac{0.853}{s^2 + 0.128s + 7.848}.$$

Άρα οι εξισώσεις κατάστασης είναι (λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $q(t) = x_1(t)$  και  $\dot{q}(t) = x_2(t)$ ):

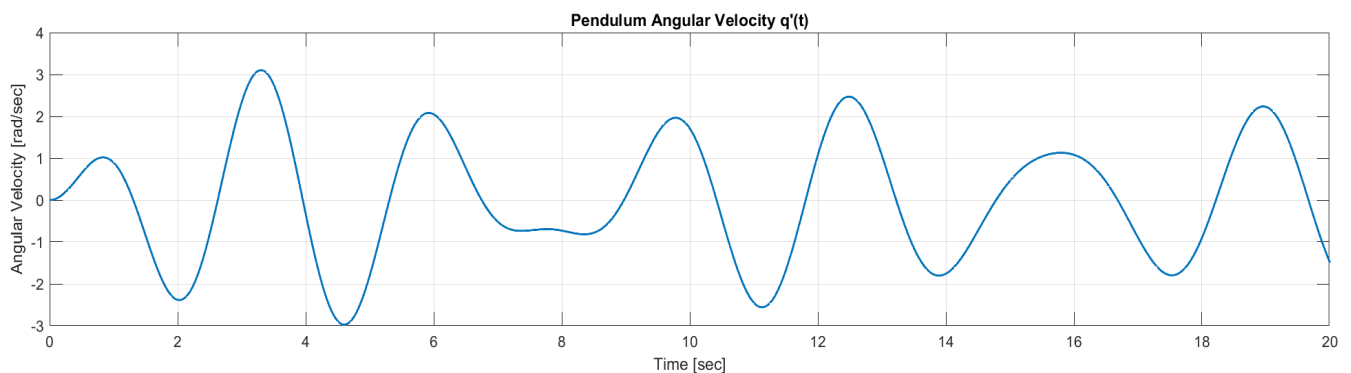
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7.848 & -0.128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.853 \end{pmatrix} u(t). \quad (5)$$

Όσον αφορά για τον παρονομαστή της  $G(s)$ , πρόκειται για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\det(sI - A)$  οι ρίζες του οποίου είναι οι  $-0.064 + 2.8 \cdot j$  και  $-0.064 - 2.8 \cdot j$ . Οι λύσεις της χαρακτηριστικής αυτής εξίσωσης ανήκουν στο ανοικτό αρνητικό ημιεπίπεδο, συνεπώς το σύστημα που μελετάμε είναι ευσταθές.

Περνάμε τώρα στην προσομοίωση της απόκρισης του συστήματος με μια ODE solver (ode45) στο MATLAB. Παρακάτω παραθέτουμε τις ζητούμενες γραφικές παραστάσεις των καταστάσεων του συστήματος για χρόνο προσομοίωσης 20[sec] και βήμα ολοκλήρωσης  $dt = 10^{-4}$ [sec] (μικρό βήμα για ακριβή αποτελέσματα). Ο εκτελέσιμος κώδικας που "τρέχει την προσομοίωση" (λύνει τις εξισώσεις κατάστασης) και εξάγει τις γραφικές παραστάσεις είναι ο *mainProblem1.m*.

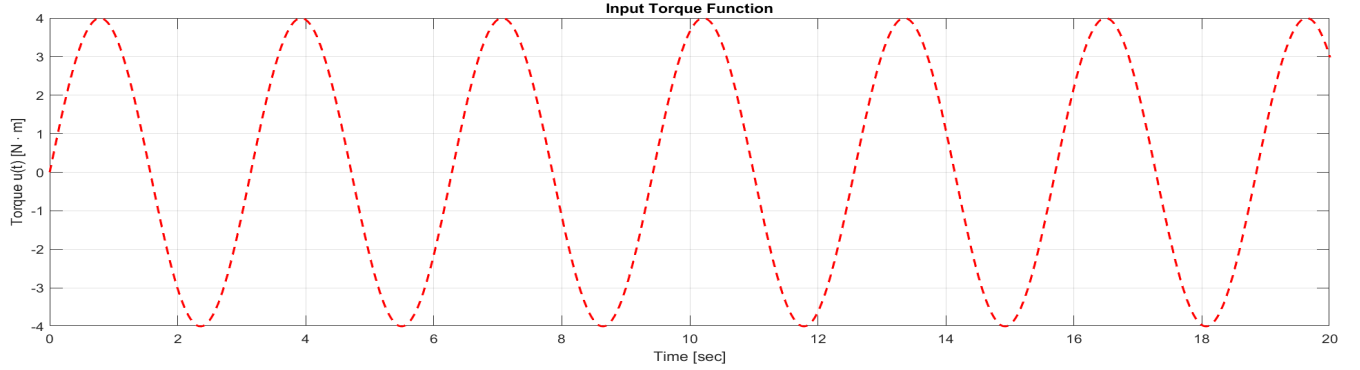


Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της εξόδου (γωνία  $q(t) = x_1(t)$ ) ως συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας  $\dot{q}(t) = x_2(t)$  ως συνάρτηση του χρόνου.

Για λόγους πληρότητας και σύγκρισης με τις γραφικές παραστάσεις των καταστάσεων του συστήματος (σχήματα 1 και 2), παραθέτουμε και την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς εισόδου του συστήματος  $u(t)$ :



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς εισόδου  $u(t) = A_0 \sin(\omega t)$  συναρτήσεως του χρόνου.

## Θέμα 2

### Θεωρία Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων μη-πραγματικού χρόνου, καθώς δεν είναι δυνατή η εξαγωγή αποτελέσματος εντός μίας περιόδου δειγματοληψίας.

Η μέθοδος διατυπώνεται ως εξής:

Αρχικά το σύστημά μας πρέπει μετασχηματιστεί σε μορφή  $q = \theta^T \phi$  (η γραμμική αυτή παραμετροποίηση παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα), όπου  $\theta$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων και  $\phi$  το διάνυσμα των γνωστών μεγεθών ( $q$  είναι η εξόδος). Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εφαρμόζεται για την προσέγγιση των αγνώστων παραμέτρων.

Το σφάλμα ορίζεται ως:

$$e(i) = q(i) - \hat{q}(i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

και η συνάρτηση κόστους που επιδιώκουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι το άθροισμα των τετραγώνων αυτών των σφαλμάτων:

$$V(\theta, z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} e^2(i, \theta)$$

Η επιθυμητή λύση είναι το  $\theta$  που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους:  $\arg \min_{\theta} V(\theta, z)$ .

### Διατύπωση σε Πίνακες

Το διάνυσμα εξόδου διαμορφώνεται ως:

$$q = [q(1) \quad q(2) \quad \dots \quad q(N)]^T$$

Με βάση αυτό, κατασκευάζουμε τον πίνακα  $\Phi$  ως:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \dots & \phi_M(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N) & \dots & \phi_M(N) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

όπου  $\phi_k(i)$  είναι η  $i$ -οστή μέτρηση της  $k$ -στης συνιστώσας του διανύσματος  $\Phi$ . Το σφάλμα διαμορφώνεται πλέον ως:

$$e = q - \Phi \cdot \theta$$

και η εκτίμηση των παραμέτρων  $\theta$  προκύπτει από τη λύση του ακόλουθου προβλήματος:

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta} \frac{1}{2N} \|e\|_2^2$$

Η δε συνάρτηση κόστους γράφεται ως:

$$V_N = \frac{1}{2N} \|q - \Phi\theta\|_2^2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή ως προς  $\theta$ , συνεπώς το ελάχιστό της είναι μοναδικό και μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση:  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ , από την οποία προκύπτει τελικά ότι:

$$\theta_0 = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T q \quad (7)$$

Όπως είναι εμφανές από τα παραπάνω το μόνο βήμα που μένει να κάνουμε πριν την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$ , είναι να φέρουμε το σύστημα σε γραμμική μορφή—ακολουθώντας την διαδικασία της γραμμικής παραμετροποίησης—ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Αρχικά, ορίζουμε ένα διάνυσμα  $\theta^*$  στο οποίο συγκεντρώνουμε όλες τις παραμέτρους της (1)

$$\theta^* = [a_1 \ a_2 \ b_0]^T.$$

Υπενθυμίζουμε πως το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση, ΔΕ (1), 2ης τάξης είναι της μορφής  $\ddot{q} = -a_1 \dot{q} - a_2 q + b_0 u$ —με παραμέτρους  $a_1 = \frac{c}{mL^2}$ ,  $a_2 = \frac{g}{L}$  και  $b_0 = \frac{1}{mL^2}$ .

Επίσης ορίζουμε διάνυσμα  $\Delta$  που περιλαμβάνει όλα τα σήματα εισόδου-εξόδου με τις παραγώγους τους:

$$\Delta = [-\dot{q} \ -q \ u]^T.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύστημα γράφεται στην μορφή:

$$\ddot{q} = \theta^{*T} \cdot \Delta \quad (8)$$

Στην παραπάνω μορφή η έξοδος του συστήματος εκφράζεται ως το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος των παραμέτρων  $\theta^*$  με το διάνυσμα όλων των σημάτων  $\Delta$  και είναι σε *γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή*.

Παρατηρούμε πως σε κανένα από τα ερωτήματα Α και Β δεν μας επιτρέπεται να θεωρήσουμε γνωστή την δεύτερη παράγωγο  $\ddot{q}$ . Επομένως πρέπει να απαλλαχθούμε από τον όρο αυτόν, αντικαθιστώντας τον με ένα γνωστό/μετρήσιμο μέγεθος. Για να πετύχουμε το ζητούμενο, φιλτράρουμε και τα δύο μέλη της (8) με κατάλληλης τάξης ευσταθές φίλτρο,  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ .

## Ερώτημα Α

Για το ερώτημα Α θεωρούμε πως το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  και η είσοδος  $u(t)$  είναι μετρήσιμα. Αυτό σημαίνει πως έχουμε μετρήσεις για την τιμή  $\dot{q}(t)$  αλλά όχι για την  $\ddot{q}(t)$ , οπότε μπορούμε για απλότητα να επιλέξουμε εδώ ένα φίλτρο πρώτης τάξης:

$$\frac{1}{\Lambda(s)}, \quad \text{με } \Lambda(s) = s + \lambda_1, \quad \lambda = [\lambda_1]^T,$$

με την ρίζα του πολυωνύμου αυτού να κυμαίνεται στο αριστερό ανοιχτό ημιεπίπεδο,  $\lambda_1 < 0$ , για να έχουμε ευστάθεια.

Φιλτράρουμε και τα δύο μέρη της ΔΕ (8) με το φίλτρο μας,  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ , και έχουμε:

$$\frac{\ddot{q}}{\Lambda(s)} = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)} \Rightarrow \frac{s}{\Lambda(s)} \dot{q} = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)}, \quad \text{με } \Delta = [-\dot{q} \quad -q \quad u]^T.$$

Όπως βλέπουμε από την παραπάνω σχέση, καταφέραμε να διώξουμε την 2η παράγωγο και τώρα έχουμε απλώς την  $\dot{q}$ , η οποία σε αυτό το ερώτημα είναι μετρήσιμη. Το δε φίλτρο  $\frac{s}{\Lambda(s)}$  είναι υλοποιήσιμο καθώς ο βαθμός του αριθμητή δεν ξεπερνάει αυτόν του παρονομαστή.

Αντικαθιστώντας το  $s = \Lambda(s) - \lambda_1$  έχουμε:

$$z = \frac{s}{\Lambda(s)} \dot{q} = \frac{\Lambda(s) - \lambda_1}{\Lambda(s)} \dot{q} = \dot{q} - \frac{\lambda_1}{\Lambda(s)} \dot{q}. \quad (9)$$

Ορίζουμε  $\zeta$  το διάνυσμα:

$$\zeta = \left[ -\frac{1}{\Lambda(s)} \dot{q} \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} q \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u \right],$$

άρα:

$$z = \theta^{*T} \cdot \zeta = -\frac{a_1}{\Lambda(s)} \dot{q} - \frac{a_2}{\Lambda(s)} q + \frac{b_0}{\Lambda(s)} u,$$

και αντικαθιστώντας το  $z$  της πάνω σχέσης, με την σχέση (9) προκύπτει τελικά:

$$\dot{q} = -\frac{a_1}{\Lambda(s)} \dot{q} - \frac{a_2}{\Lambda(s)} q + \frac{b_0}{\Lambda(s)} u + \frac{\lambda_1}{\Lambda(s)} \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = (a_1 - \lambda_1) \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + b_0 \zeta_3 \Rightarrow \dot{q} = \theta_\lambda^T \zeta, \quad (10)$$

οπου:

$$\theta_\lambda = [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 \quad b_0]^T.$$

Αφού πλέον όλα τα μεγέθη είναι γνωστά και μετρήσιμα εκτός από το διάνυσμα  $\theta_\lambda$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους του συστήματος.

**Σχόλιο:** Στην παραπάνω ανάλυση θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει ένα φίλτρο 2ης τάξης (όπως κάνουμε και στο ερώτημα Β). Όμως η επιλογή ενός μικρότερης τάξεως φίλτρου είναι—όπως θα δούμε και στα παρακάτω διαγράμματα—επαρκής για να κάνει ακριβώς καλές εκτιμήσεις.

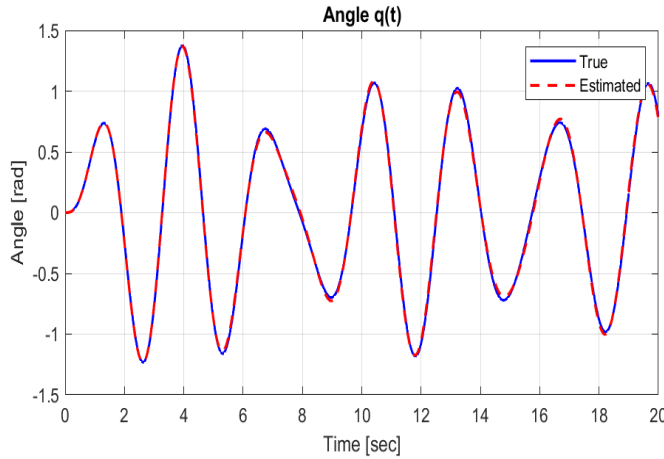
## Εκτίμηση Παραμέτρων - Προσομοίωση

Στο αρχείο *mainProblem2\_3a.m* βρίσκεται το εκτελέσιμο για την εκτίμηση των παραμέτρων και την εξαγωγή των ζητούμενων γραφικών παραστάσεων. Ο κώδικας ακολουθεί την θεωρητική ανάλυση που αναπτύξαμε ως τώρα για την εκτίμηση των παραμέτρων.

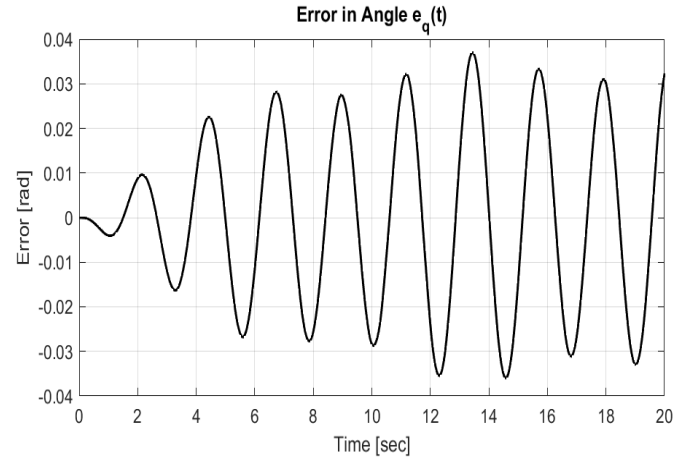
Για την επιλογή κατάλληλου φίλτρου, μέσω trial and error καταλήξαμε ότι  $\lambda_1 = 0.2$  ( $> 0$  άρα ικανοποιείται η συνθήκη για ευστάθεια) είναι μια τιμή που δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Κατά τη διάρκεια των δοκιμών παρατηρήσαμε ότι όσο μειώνεται η τιμή του  $\lambda_1$ , δηλαδή όσο πιο κοντά πηγαίνει στο μηδέν, τόσο ελαττώνεται το RMS (Root Mean Square) του σφάλματος της εκτίμησης  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$ . Θεωρητικά, απλά χρησιμοποιώντας έναν ολοκληρωτή (ή, στην πράξη, μια διάταξη με πόλο ακριβώς κοντά στο 0) θα έχουμε τα βέλτιστα αποτελέσματα (για αυτό το ερώτημα).

Αλλάζοντας την τιμή του  $\lambda_1$  για  $\lambda_1 < 1$ , παρατηρούμε να υπάρχει αισθητή διαφορά μόνο στην εκτίμηση του  $c$ . Προσπαθήσαμε, λοιπόν, με την επιλογή μας να αφήσουμε ένα μικρό, αλλά συγκρίσιμο με τα υπόλοιπα, σφάλμα για  $c$ .

Παρακάτω παραθέτουμε τις γραφικές παράστασης της πραγματικής  $q(t)$  (true) και της  $\hat{q}(t)$  (estimated) στο κοινό διάγραμμα 4α' για οπτική σύγκριση. Όμως, όπως φαίνεται και από την γραφική παράσταση της διαφοράς τους  $e_q(t)$  (σχήμα 4β') δεν υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ τους (είναι πάντα μικρότερη του 0.04). Αυτό οφείλεται στο ότι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων έκανε ακούρντως καλή εκτίμηση των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$ . Το σχετικό σφάλμα της εκτίμησης των παραμέτρων αυτών φαίνεται στην εικόνα 5.



(α')



(β')

Problem 2a - Estimated Parameters:

$m\_est = 0.7525$  (true: 0.7500, error: 0.33%)

$L\_est = 1.2416$  (true: 1.2500, error: 0.67%)

$c\_est = 0.1492$  (true: 0.1500, error: 0.51%)

RMS Error:

$RMS\ e\_q = 0.019920$ ,  $RMS\ e\_q\_dot = 0.056151$

Σχήμα 5

## Ερώτημα Β

Για το ερώτημα Β θεωρούμε πως μόνο η γωνία  $q(t)$  και η είσοδος  $u(t)$  είναι μετρήσιμα. Αυτό σημαίνει πως δεν έχουμε μετρήσεις για τις  $\dot{q}(t)$  και  $\ddot{q}(t)$ , οπότε επιλέγουμε εδώ ένα φίλτρο δεύτερης τάξης:

$$\frac{1}{\Lambda(s)}, \quad \text{με } \Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2, \quad \lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T,$$

όπου οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού πρέπει να κυμαίνονται στο αριστερό ανοιχτό ημιεπίπεδο για να έχουμε ευστάθεια.

Φιλτράρουμε και τα δύο μέρη της ΔΕ (8) με το φίλτρο μας,  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ , και έχουμε:

$$\frac{\ddot{q}}{\Lambda(s)} = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)} \Rightarrow \frac{s^2}{\Lambda(s)} q = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)}, \quad \text{με } \Delta = [-sq \quad -q \quad u]^T.$$

Όπως βλέπουμε από την παραπάνω σχέση, καταφέραμε να διώξουμε την 2η παράγωγο και τώρα έχουμε απλώς την  $q$ , η οποία είναι μετρήσιμη. Το δε φίλτρο  $\frac{s^2}{\Lambda(s)}$  είναι υλοποιήσιμο καθώς ο βαθμός του αριθμητή δεν ξεπερνάει αυτόν του παρονομαστή.

Αντικαθιστώντας το  $s^2 = \Lambda(s) - \lambda_1 s - \lambda_2$  έχουμε:

$$z = \frac{s^2}{\Lambda(s)} q = \frac{\Lambda(s) - \lambda_1 s - \lambda_2}{\Lambda(s)} q = q - \frac{\lambda_1 s + \lambda_2}{\Lambda(s)} q \quad (11)$$

Ορίζουμε  $\zeta$  το διάνυσμα:

$$\zeta = \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)} q \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} q \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u \right]$$

Άρα:

$$z = \theta^{*T} \cdot \zeta = -\frac{a_1 s}{\Lambda(s)} q - \frac{a_2}{\Lambda(s)} q + \frac{b_0}{\Lambda(s)} u,$$

και αντικαθιστώντας το  $z$  της πάνω σχέσης, με την σχέση (11) προκύπτει τελικά:

$$q = -\frac{a_1 s}{\Lambda(s)} q - \frac{a_2}{\Lambda(s)} q + \frac{b_0}{\Lambda(s)} u + \frac{\lambda_1 s + \lambda_2}{\Lambda(s)} q \Rightarrow q = (a_1 - \lambda_1)\zeta_1 + (a_2 - \lambda_2)\zeta_2 + b_0\zeta_3 \Rightarrow q = \theta_\lambda^T \zeta, \quad (12)$$

όπου:

$$\theta_\lambda = [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 - \lambda_2 \quad b_0]^T.$$

Αφού πλέον όλα τα μεγέθη είναι γνωστά και μετρήσιμα εκτός από το διάνυσμα  $\theta_\lambda$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους του συστήματος.

## Εκτίμηση Παραμέτρων - Προσομοίωση

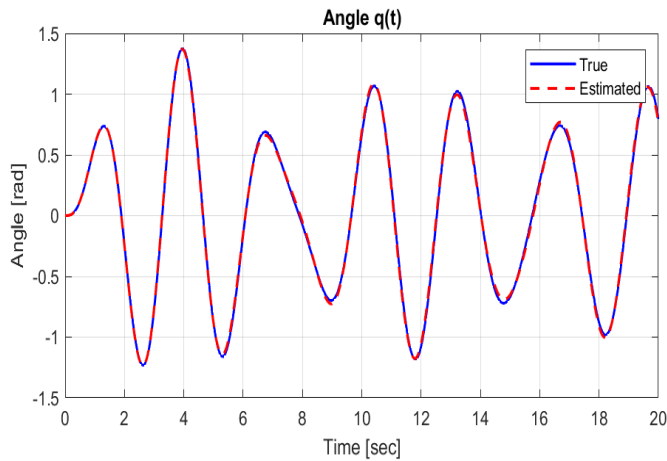
Στο ίδιο αρχείο με το προηγούμενο ερώτημα (*mainProblem2\_3a.m*) βρίσκεται το εκτελέσιμο για την εκτίμηση των παραμέτρων και την εξαγωγή των ζητούμενων γραφικών παραστάσεων. Ο κώδικας και πάλι ακολουθεί την θεωρητική ανάλυση που αναπτύξαμε στην πάνω υποενότητα για την εκτίμηση των παραμέτρων.

Για την επιλογή κατάλληλου φίλτρου, μέσω trial and error—και για συνοχή με το ερώτημα Α—καταλήξαμε ότι τα  $\lambda_1 = 0.6$  και  $\lambda_2 = 0.08$  (όπου από την χαρακτηριστική εξίσωση βγάζουμε ρίζες τις  $-0.4$  και  $-0.2$ , άρα ικανοποιείται η συνθήκη για ευστάθεια) είναι αρκούντως καλές επιλογές που δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Κατά τη διάρκεια των δοκιμών παρατηρήσαμε ότι, γενικά όσο οι ρίζες πλησιάζουν στον φανταστικό άξονα (από τα αριστερά) τόσο ελαττώνεται το RMS (Root Mean Square) του σφάλματος της εκτίμησης  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$  (προφανώς, για την εύρεση του βέλτιστου  $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]$  θα πρέπει να ακολουθηθεί κάποια τεχνική βελτιστοποίησης λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψιν την γνώστη/περιορισμούς που έχουμε για τις παραμέτρους του προβλήματος).

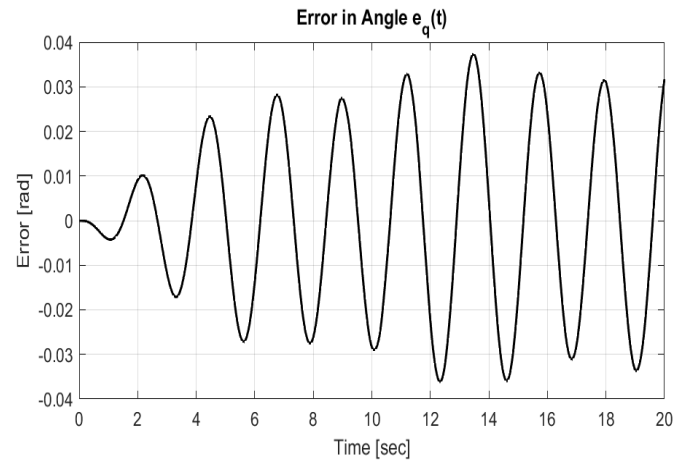
Παρακάτω παραθέτουμε τις γραφικές παράστασης της πραγματικής  $q(t)$  (true) και της  $\hat{q}(t)$  (estimated) στο κοινό διάγραμμα δά' για οπτική για σύγκριση. Όμως, όπως φαίνεται και από την



γραφική παράσταση της διαφοράς τους  $e_q(t)$  (σχήμα 6β') δεν υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ τους (είναι πάντα μικρότερη του 0.04). Αυτό οφείλεται στο ότι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων έκανε αρχούντως καλή εκτίμηση των παραμέτρων  $m$ ,  $L$  και  $c$ . Το σχετικό σφάλμα της εκτίμησης των παραμέτρων αυτών φαίνεται στην εικόνα 7.



(α')



(β')

Problem 2b - Estimated Parameters:

$m\_est = 0.7525$  (true: 0.7500, error: 0.33%)

$L\_est = 1.2417$  (true: 1.2500, error: 0.67%)

$c\_est = 0.1476$  (true: 0.1500, error: 1.58%)

RMS Error:

RMS  $e\_q = 0.020098$ , RMS  $e\_q\_dot = 0.056723$

Σχήμα 7

### Σχόλιο:

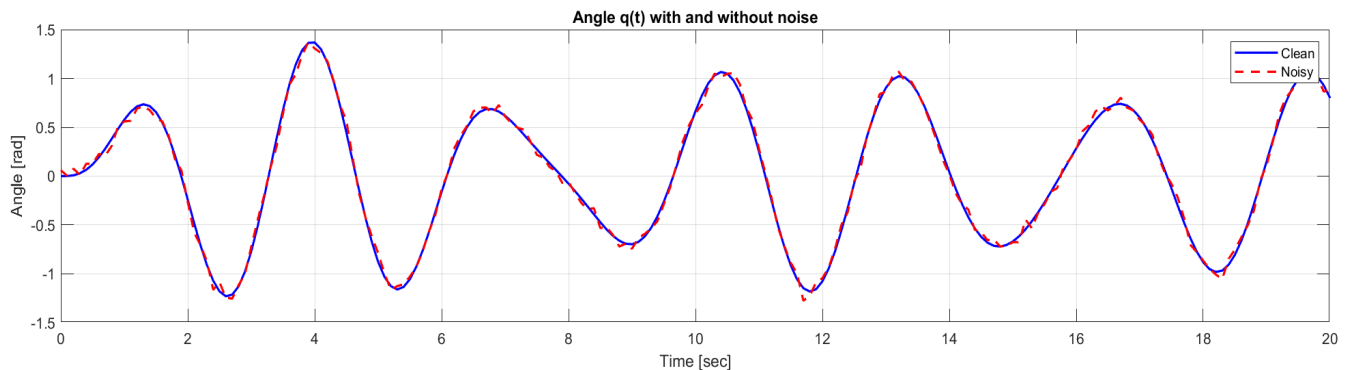
Παρόλο που βλέπουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση το σφάλμα της εκτίμησης (RMS) είναι μεγαλύτερο (ελάχιστα) από ότι στην μεθοδολογία 2a, στην οποία λαμβάνουμε υπόψιν και το  $\dot{q}(t)$ , είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι στα αποτελέσματα της εκτίμησης παίζει ρόλο και το φίλτρο που επιλέξαμε. Υπάρχει δηλαδή περίπτωση να επιλέξουμε ένα φίλτρο εδώ που να δώσει εν τέλει καλύτερες εκτιμήσεις από ότι η 2a για το δεδομένο πρόβλημα. Η επιλογή του φίλτρου επίσης παίζει σημαντικό ρόλο και στην επίδραση του θορύβου που θα δούμε στην συνέχεια.

## Θέμα 3

### Ερώτημα Α

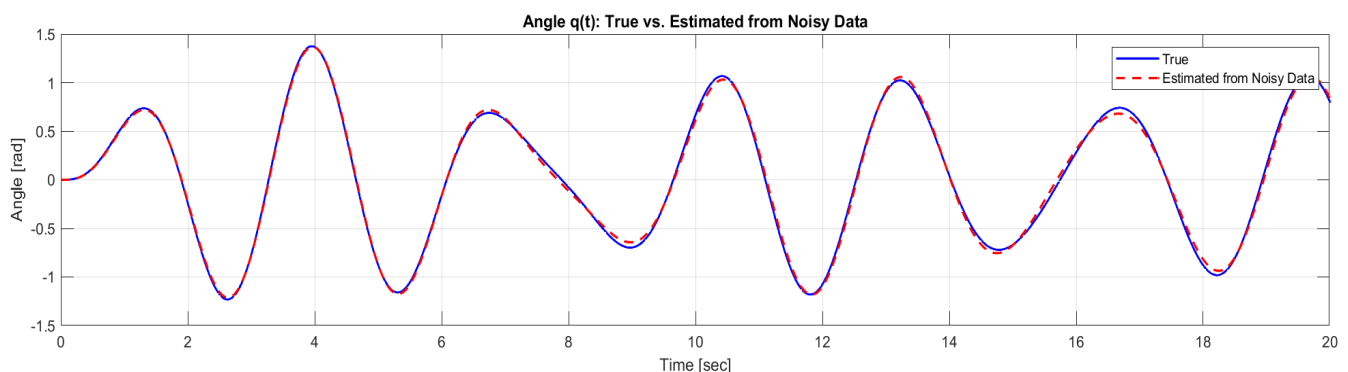
Στις μετρήσεις των σημάτων  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  (όταν το λεμβάνουμε υπόψιν), και  $u(t)$  στο αρχείο *main Problem2\_3a.m*, εισάγεται λευκός Gaussian θόρυβος. Η τυπική απόκλιση του θορύβου επηρεάζεται από τις μεταβλητές *noise\_level* \* τις οποίες στην ανάλυση που παρουσιάζουμε θα τις έχουμε σταθερά στην τιμή 0.05.

Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά την γραφική παράσταση του  $q(t)$  πριν και μετά την προσθήκη θορύβου:



Σχήμα 8

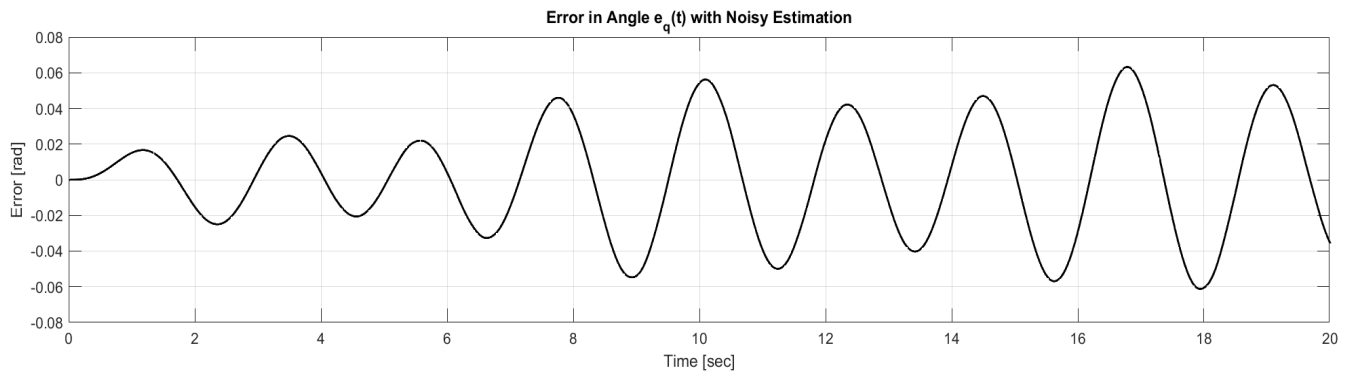
Στην συνέχεια, θεωρώντας πως το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  και η είσοδος ελέγχου  $u(t)$  είναι μετρήσιμα, εκτελούμε την ακριβώς ίδια μέθοδο/αλγόριθμο εκτίμησης με αυτήν που παρουσιάσαμε στο Θέμα 2 - Ερώτημα Α, αλλά αυτήν την φορά χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις που έχουν noise. Παρακάτω παραθέτουμε τα αποτελέσματα (σχήματα 9, 10):



Σχήμα 9

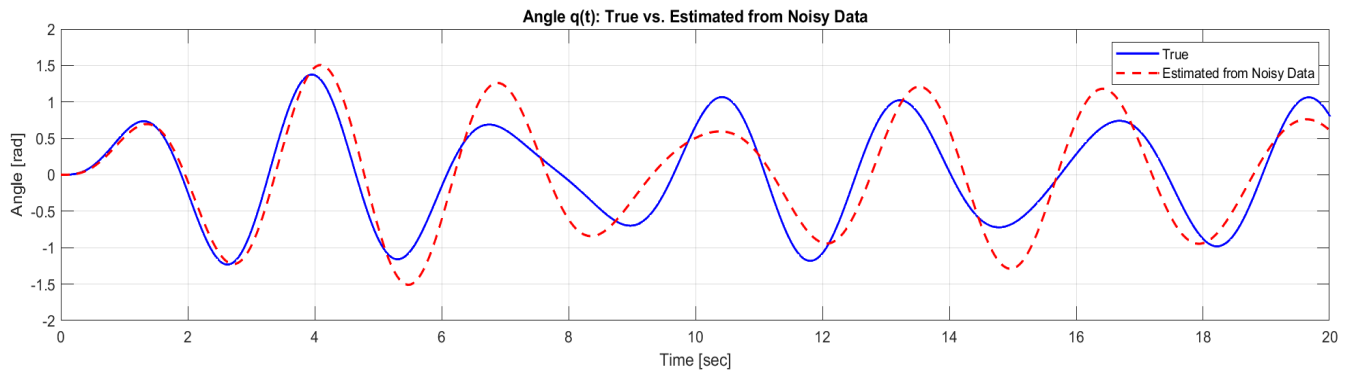
Όπως φαίνεται και από το σχήμα 9, που δείχνει την εκτιμώμενη απόκριση σε σύγκριση με την πραγματική, αλλά και από το σχήμα 10 που εκφράζει το σφάλμα  $e_q(t)$ , η εκτιμώμενη απόκριση/έξοδος  $q(t)$  - παρά την προσθήκη θορύβου - δεν διαφέρει σημαντικά σε σχέση με την πραγματική.

Σε αντίστοιχα συμπεράσματα θα καταλήξουμε, αν κοιτάξουμε και τα παρακάτω σχήματα 11 και 12 που αναφέρονται στην περίπτωση όπου έχουμε φίλτρο δεύτερης τάξης και δεν θεωρούμε γνωστή την μέτρηση  $\dot{q}(t)$ . Βέβαια, παρατηρούμε ότι σε αυτά τα διαγράμματα φαίνεται πως ο θόρυβος επηρεάζει περισσότερο την εκτίμηση σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Κάτι τέτοιο οφείλεται, μεταξύ

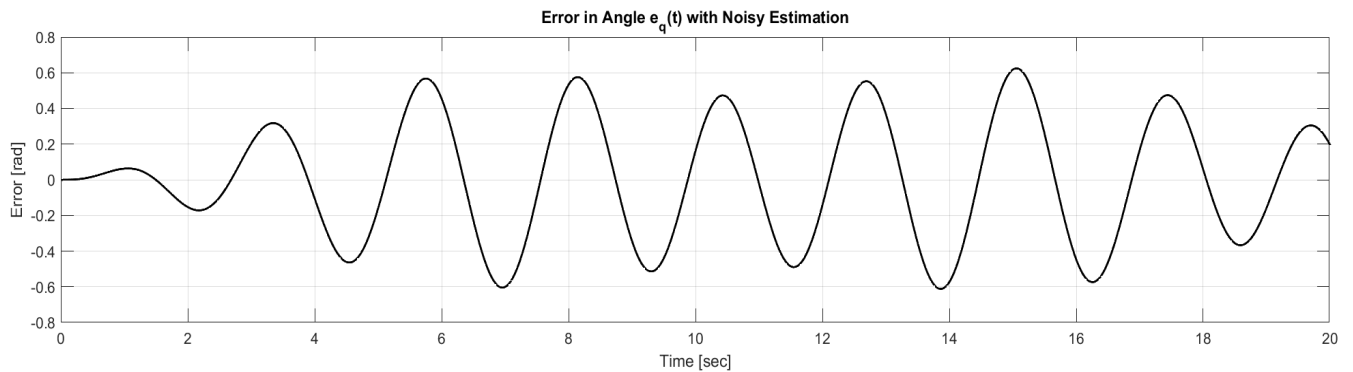


Σχήμα 10

άλλων, και στην επιλογή του φίλτρου μας. Απομακρύνοντας λίγο τους πόλους από τον φανταστικό άξονα (π.χ.  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ) θα είχαμε καλύτερη συμπεριφορά στην επίδραση θορύβου, όπως μας δείχνουν δοκιμές που κάναμε.



Σχήμα 11



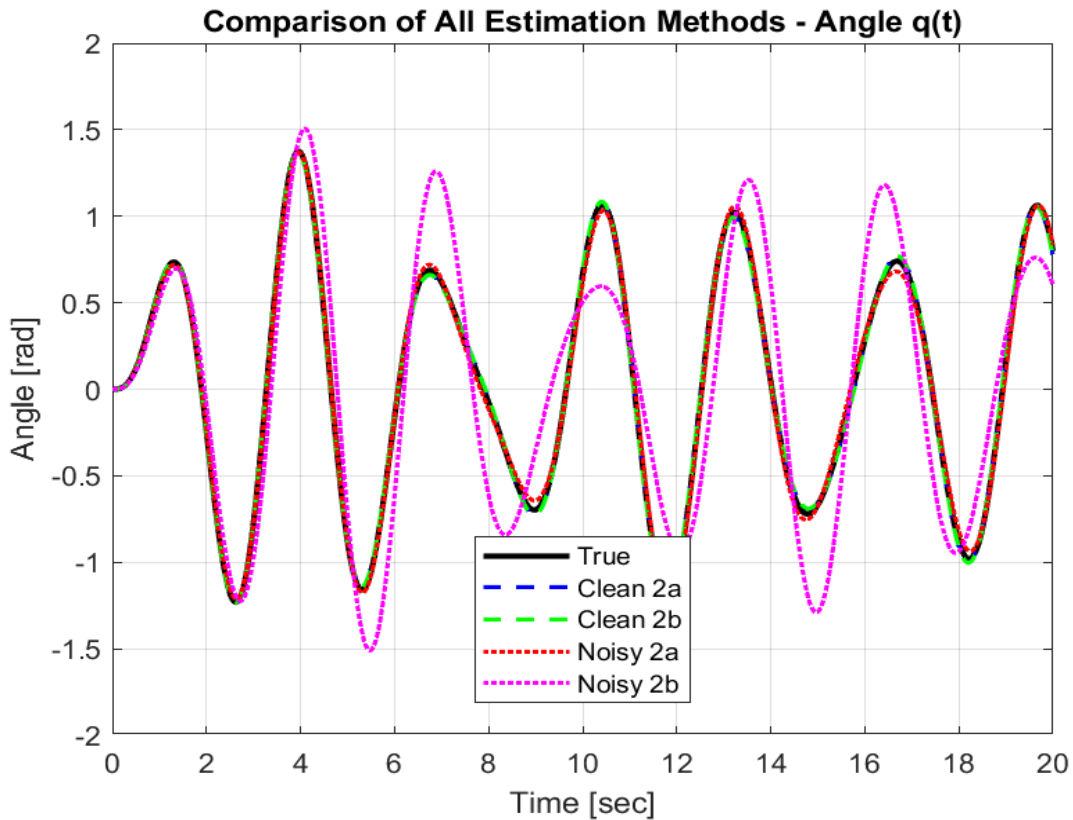
Σχήμα 12

Πριν προχωρήσουμε με την σύγκριση των εκτιμήσεων μεταξύ τους και δείξουμε τα logs με τα error percentage και τα εκτιμώμενα αποτελέσματα, πρέπει να αναφέρουμε πως η επίδραση του θορύβου απαιτεί στατιστική ανάλυση για να μελετηθεί και εδώ αποφασίσαμε να δείξουμε τις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες όντως φαινόνταν να έχουμε μεγάλες/μετρήσιμες οπτικά διαφορές. Διαφορετικά, επιλέγοντας εναλλακτικά φίλτρα (όπως το  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$  που αναφέραμε) θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε προσομοιώσεις που δεν θα είχαν οπτική διαφορά μεταξύ τους.

Παρακάτω βλέπουμε στο κοινό διάγραμμα 13 όλες τις εκτίμησεις της  $q(t)$  μαζί με την πραγματική τιμή της, κάθε χρονική στιγμή. Όπως εξηγήσαμε και παραπάνω η εκτίμηση που φαίνεται να επηρεάζεται περισσότερο από τον θόρυβο είναι αυτή της 2b, η οποία δεν θεωρεί μετρήσιμο το  $\dot{q}(t)$ , και αυτός είναι ένας ακόμη λόγος για τον οποίο η μέθοδος αυτή περιμέναμε να έχει όντως χειρότερα αποτελέσματα (δηλαδή να είναι πιο ευαίσθητη στον θόρυβο) από την 2a μεθοδολογία.

Αντίθετα, η 2a μεθοδολογία μετράει, μαζί με τον αθροιστικό WGN (white gaussian noise), το διάνυσμα καταστάσεων  $[q(t), \dot{q}(t)]$ , και άρα είναι λογικό—έχοντας πρόσβαση σε περισσότερα δεδομένα και μετρήσεις—να είναι ανθεκτικότερη στην προσθήκη WGN.

Τα παραπάνω επαληθεύονται και από τον πίνακα/εικόνα 14 των αποτελεσμάτων των εκτιμήσεων των παραμέτρων της κάθε μεθόδου, όπου δείχνει την μεθοδολογία 2b να αποκλίνει περισσότερο απ' όλες τις υπόλοιπες.



Σχήμα 13

## Ερώτημα Β

Για να διερευνηθεί η επίδραση της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$  στην ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων του συστήματος, χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που περιλαμβάνεται στο αρχείο *main Problem3b.m*. Στο αρχείο αυτό, αξιολογείται η επίδοση των δύο διαφορετικών μεθόδων εκτίμησης: 2a (όπου θεωρείται γνωστή η παράγωγος  $\dot{q}(t)$ ) και 2b, ως προς το  $T_s$ .

Για διάφορες τιμές της περιόδου δειγματοληψίας (πήραμε ενδεικτικά  $T_s \in \{0.02, 0.04, \dots, 0.2\}$ ), δημιουργήσαμε τα γραφήματα: 15 16α' 16β' και 17, που απεικονίζουν το σχετικό σφάλμα εκτίμησης (σε απόλυτη τιμή) των παραμέτρων ως συνάρτηση του  $T_s$ .

Όπως ήταν αναμενόμενο, με την αύξηση της περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$  έχουμε αύξηση και στο σφάλμα της κάθε εκτίμησης των παραμέτρων (η σχέση αυτή από τα δεδομένα που πήραμε φαίνεται

Problem 3a.2 - Estimated Parameters with Noisy Data (Method 2b):

m: true=0.7500, clean=0.7525 (error: 0.33%), noisy=0.6903 (error: 7.96%)

L: true=1.2500, clean=1.2417 (error: 0.67%), noisy=1.4186 (error: 13.49%)

c: true=0.1500, clean=0.1476 (error: 1.58%), noisy=0.1660 (error: 10.66%)

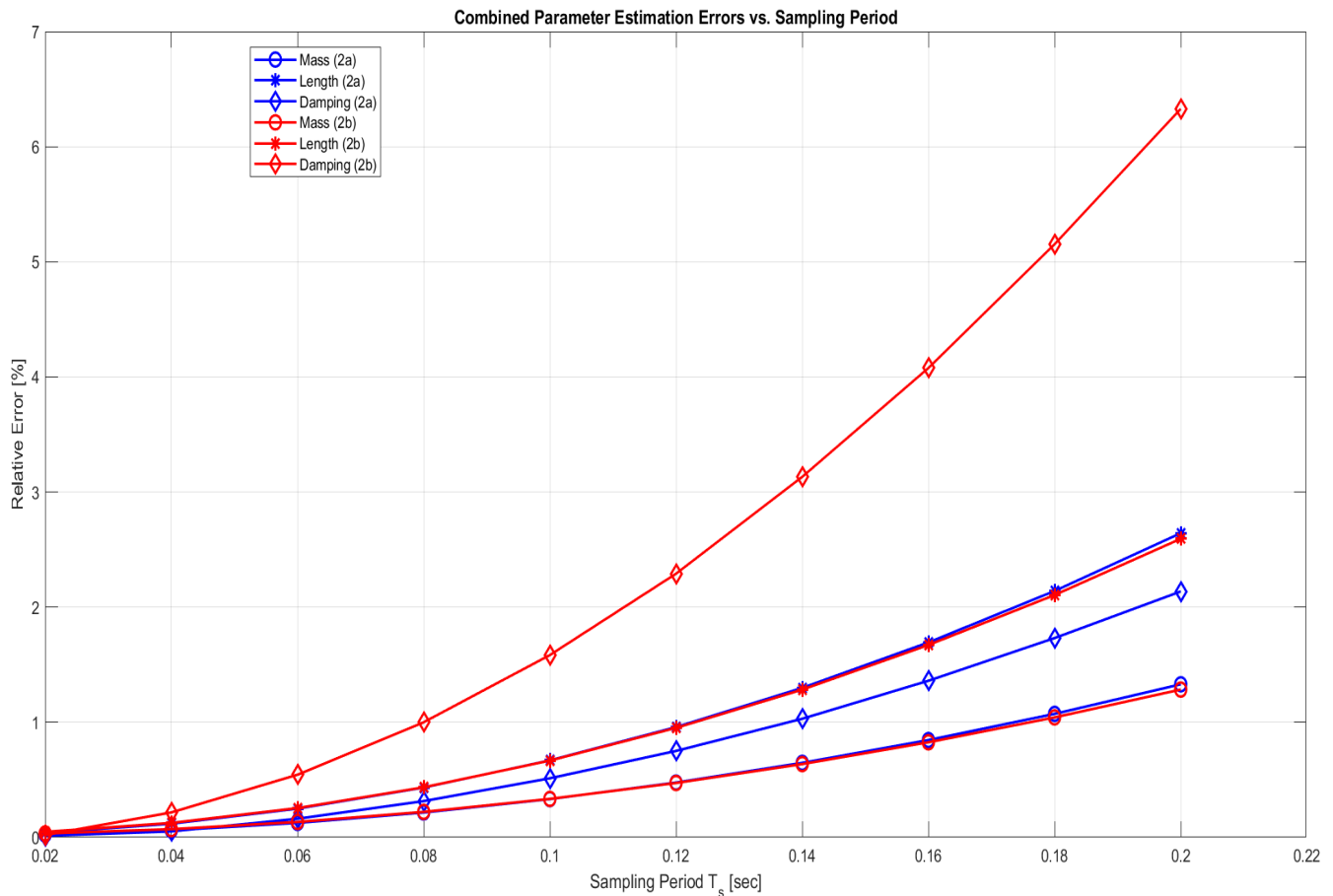
RMS Error with Noisy Data (Method 2b):

RMS  $e_q$  = 0.340395

Comparison of Parameter Estimates:

Parameter	True	Clean 2a	Clean 2b	Noisy 2a	Noisy 2b
m	0.7500	0.7525	0.7525	0.7597	0.6903
L	1.2500	1.2416	1.2417	1.2625	1.4186
c	0.1500	0.1492	0.1476	0.1446	0.1660

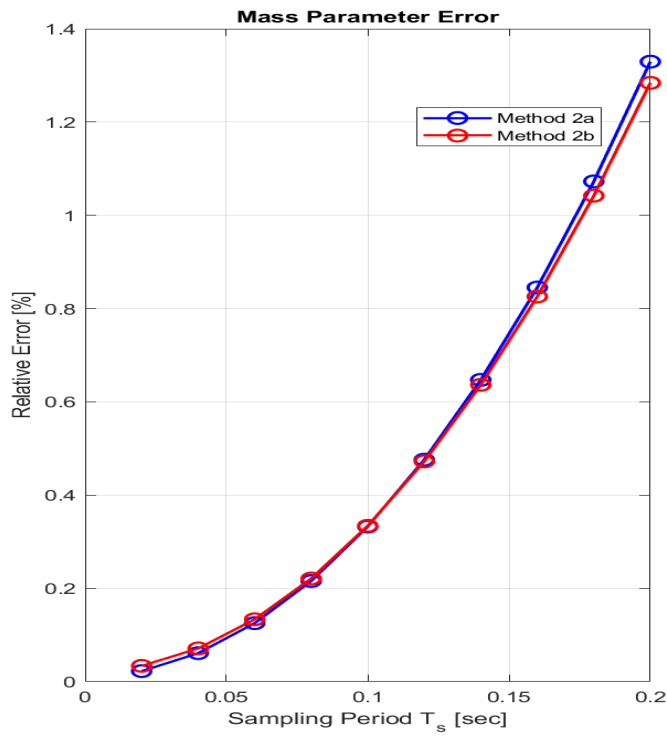
Σχήμα 14



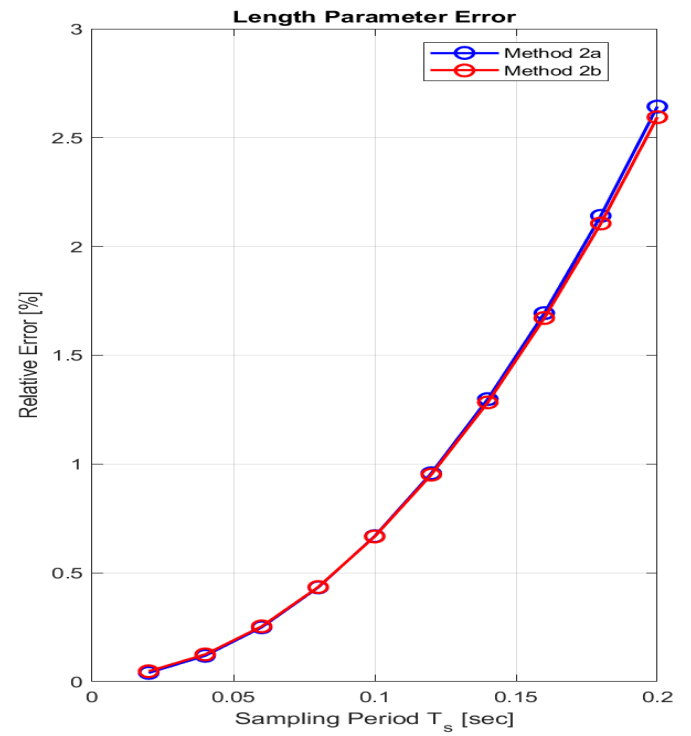
Σχήμα 15

να είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού - αν και ένας έλεγχος μηδενικής υπόθεσης δεν θα μπορούσε με τόσο λίγα δεδομένα να απορρίψει το ενδεχόμενο να έχουμε εκθετική εξάρτηση).

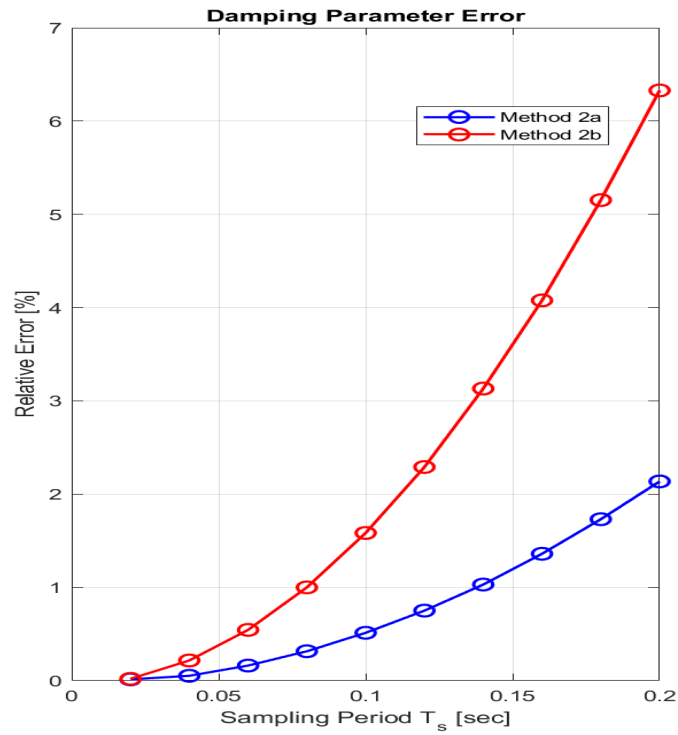
Από το Σχήμα 17 φαίνεται πως η μέθοδος 2b, η οποία δεν λαμβάνει υπόψιν την  $\dot{q}(t)$ , επηρεάζεται



( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )



Σχήμα 17

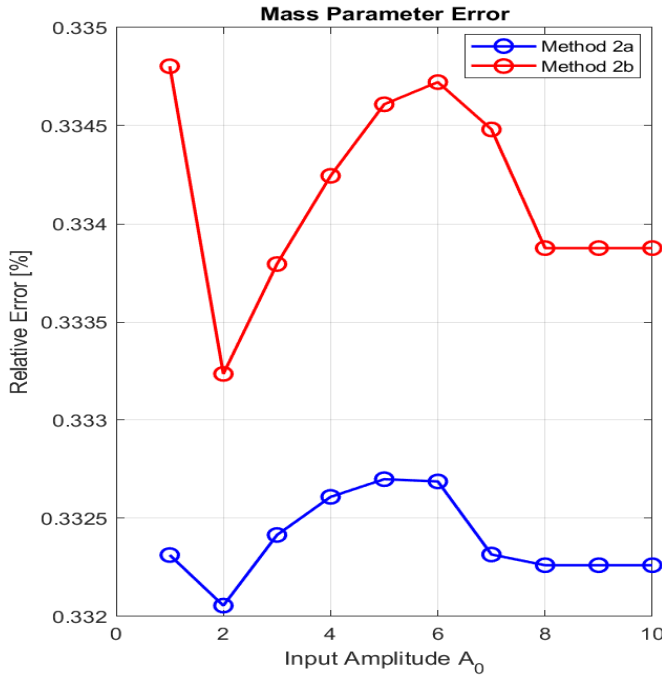
πολύ περισσότερο (σχεδόν διπλάσιο σφάλμα εν τέλει) από την μεταβολή της  $T_s$  για την μέτρηση της  $c$  (damping parameter), ενώ για τις υπόλοιπες παραμέτρους φαίνεται να έχουμε παραπλήσια απόκριση στην αύξηση του  $T_s$ .

## Ερώτημα Γ

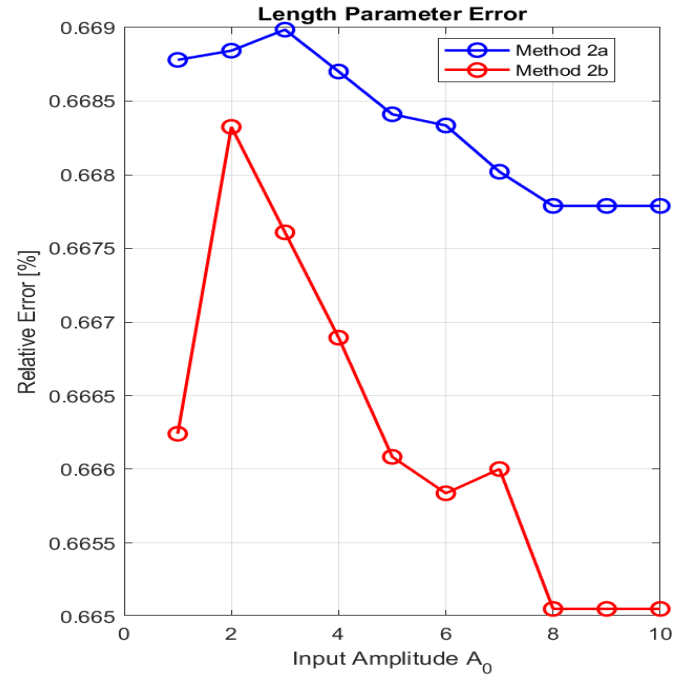
Για να διερευνηθεί η επίδραση του πλάτους εισόδου  $A_0$  στην ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων του συστήματος, χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας που περιλαμβάνεται στο αρχείο *mainProblem3c.m*. Στο αρχείο αυτό, αξιολογείται η επίδοση των δύο διαφορετικών μεθόδων εκτίμησης: 2a (όπου θεωρείται γνωστή η παράγωγος  $\dot{q}(t)$ ) και 2b, ως προς το  $A_0$ —διατηρώντας σταθερή την περίοδο δειγματοληψίας στα  $T_s = 0.1$  [sec].

Για διάφορες τιμές του πλάτους εισόδου (πήραμε ενδεικτικά  $A_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ), δημιουργήσαμε τα γραφήματα: 18α' 18β' και 19, που απεικονίζουν το *σχετικό σφάλμα* εκτίμησης (σε απόλυτη τιμή) των παραμέτρων ως συνάρτηση του  $A_0$ .

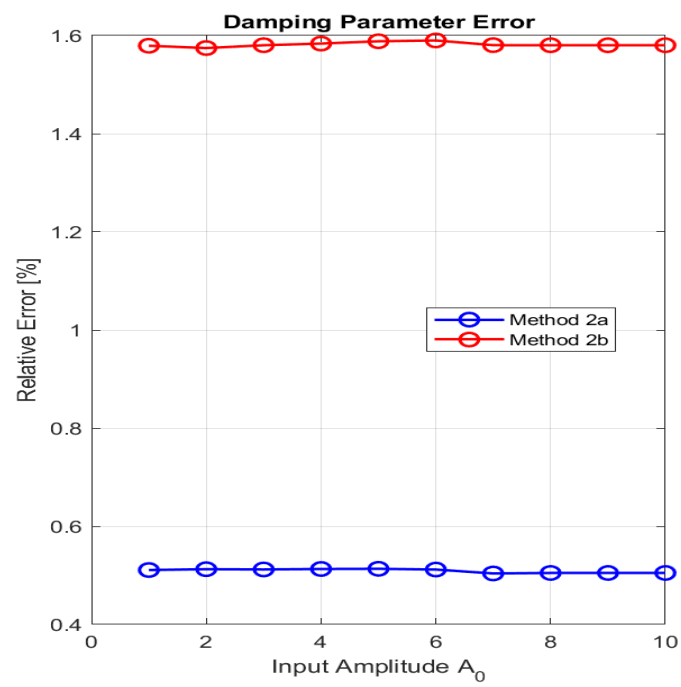
Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αύξηση του πλάτους εισόδου  $A_0$  επηρεάζει ελάχιστα το σφάλμα εκτίμησης για όλες τις παραμέτρους. Αυτό σημαίνει ότι επίδραση του  $A_0$  στην ακρίβεια εκτίμησης είναι εξαιρετικά μικρή, με τις μεταβολές του σφάλματος να εμφανίζονται μόλις στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο (της τάξης του  $10^{-3}\%$ ). Αυτό υποδηλώνει ότι, για το συγκεκριμένο σύστημα και τις συνθήκες προσομοίωσης, η επιλογή του πλάτους εισόδου δεν αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την ακρίβεια της εκτίμησης των παραμέτρων.



(α')



(β')



Σχήμα 19