

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Εργασία 2

Αριστείδης Δασκαλόπουλος (ΑΕΜ: 10640)

2 Μαΐου 2025

## Θέμα 1 Εισαγωγή

*Στόχος: Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων με τις Μεθόδους Πραγματικού Χρόνου:  
Κλίσης και Lyapunov*

Το δοθέν σύστημα που καλούμαστε να μελετήσουμε είναι ένα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με εξωτερική δύναμη, του οποίου η εξίσωση δίνεται από την σχέση (1):

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}u(t), \quad (1)$$

όπου  $x(t)[m]$  η μετατόπιση,  $m > 0$  η μάζα,  $b > 0$  σταθερός συντελεστής απόσβεσης,  $k > 0$  η σταθερά του ελατηρίου, και  $u(t)$  η εξωτερική δύναμη.

Στα πλαίσια της ανάλυσής μας θεωρούνται μετρήσιμες οι καταστάσεις  $x(t)$  και  $\dot{x}(t)$ , όπως και η είσοδος  $u(t)$ . Επίσης οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων προς εκτίμηση είναι:

$$m = 1.315, b = 0.225 \text{ και } k = 0.725.$$

Το σύστημά μας, όπως φαίνεται και από την σχέση (1), πρόκειται για ένα γραμμικό χρονοα-μετάβλητο σύστημα (ΓΧΑ) μίας εισόδου,  $u(t)$ , και μίας εξόδου,  $x(t)$  (MEME) χωρίς παραγώγους στην είσοδο. Προτού προχωρήσουμε με τα ερωτήματα του θέματος, θα γράψουμε τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος στη μορφή  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ —όπου για το διάνυσμα κατάστασης,  $\mathbf{x}(t)$ , ισχύει  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ . Έχουμε:

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t), \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{x}(t). \quad (2)$$

Άρα:

$$(2) \xrightarrow{(1)} \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) \xrightarrow{\substack{x(t)=x_1(t) \\ \dot{x}(t)=x_2(t)}} \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{b}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t). \quad (3)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι ιδιοτιμές του  $2 \times 2$  πίνακα,  $\mathbf{A}$ , είναι συζυγείς μιγαδικές και βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο. Επίσης, η παραπάνω ανάλυση χρησιμεύει στην προσομοίωση του συστήματος με χρήση ενός ODE solver στο MATLAB.

Στην συνέχεια, με χρήση διαφόρων μεθόδων πραγματικού χρόνου (on-line), θα εκτιμούμε στα διάφορα ερωτήματα τις παραμέτρους  $m$ ,  $b$  και  $k$ , εξάγοντας κάθε φορά συμπεράσματα για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας, μέσω των ζητούμενων γραφικών παραστάσεων.

## Ερώτημα Α

### Εισαγωγή

Για την εφαρμογή της μεθόδου πρέπει το σύστημα να είναι σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Γι' αυτό, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Αρχικά, ορίζουμε ένα διάνυσμα  $\theta^*$  στο οποίο συγκεντρώνουμε όλες τις παραμέτρους της (1)

$$\theta^* = [a_1 \ a_2 \ b_0]^T.$$

Υπενθυμίζουμε πως το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση, ΔΕ (1), 2ης τάξης είναι της μορφής  $\ddot{x} = -a_1\dot{x} - a_2x + b_0u$  με παραμέτρους  $a_1 = \frac{b}{m}$ ,  $a_2 = \frac{k}{m}$  και  $b_0 = \frac{1}{m}$ .

Επίσης, ορίζουμε διάνυσμα  $\Delta$  που περιλαμβάνει όλα τα σήματα εισόδου-εξόδου με τις παραγώγους τους:

$$\Delta = [-\dot{x} \ -x \ u]^T.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύστημα γράφεται στην μορφή:

$$\ddot{x} = \theta^{*T} \cdot \Delta \quad (4)$$

Η παραπάνω μορφή εκφράζει την δεύτερη παράγωγο της  $x(t)$  ως το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος των παραμέτρων  $\theta^*$  με το διάνυσμα όλων των (γνωστών) σημάτων  $\Delta$  και είναι σε *γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή* (γραμμική ως προς  $\theta^*$ ).

- Παρατηρούμε όμως, πως σε κανένα από τα επόμενα ερωτήματα δεν μας επιτρέπεται να θεωρήσουμε γνωστή την δεύτερη παράγωγο  $\ddot{x}$ . Επομένως πρέπει να απαλλαχθούμε από τον όρο αυτόν, λαμβάνοντας υπόψιν ότι μετρήσιμα είναι μόνο τα  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  και  $u(t)$ . Για να πετύχουμε το ζητούμενο, φιλτράρουμε και τα δύο μέλη της (4) με κατάλληλης τάξης ευσταθές φίλτρο,  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ . Για απλότητα, μπορούμε να επιλέξουμε ένα φίλτρο πρώτης τάξης:

$$\frac{1}{\Lambda(s)}, \quad \text{με } \Lambda(s) = s + \lambda_1, \quad \lambda = [\lambda_1]^T,$$

με την ρίζα του πολυνύμου αυτού να κυμαίνεται στο αριστερό ανοιχτό ημιεπίπεδο,  $\lambda_1 > 0$ , για να έχουμε ευστάθεια. Υπενθυμίζουμε ότι και το αρχικό μας σύστημα είναι ευσταθές, μίας και—όπως προέκυψε από την εισαγωγική ανάλυση—οι ιδιοτιμές του  $2 \times 2$  πίνακα ( $A$ ), της (3), βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό ημιεπίπεδο.

- Φιλτράροντας και τα δύο μέρη της ΔΕ (4) με το  $\frac{1}{\Lambda(s)}$ , παίρνουμε:

$$\frac{\ddot{x}}{\Lambda(s)} = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)} \Rightarrow \frac{s}{\Lambda(s)} \dot{x} = \theta^{*T} \cdot \frac{\Delta}{\Lambda(s)}, \quad \text{με } \Delta = [-\dot{x} \ -x \ u]^T.$$

Όπως βλέπουμε από την παραπάνω σχέση, καταφέραμε να διώξουμε την 2η παράγωγο και τώρα έχουμε απλώς την  $\dot{x}$ , η οποία είναι μετρήσιμη. Το δε φίλτρο  $\frac{s}{\Lambda(s)}$  είναι υλοποιήσιμο καθώς ο βαθμός του αριθμητή δεν ξεπερνάει αυτόν του παρονομαστή.

- Αντικαθιστώντας το  $s = \Lambda(s) - \lambda_1$  έχουμε:

$$z = \frac{s}{\Lambda(s)} \dot{x} = \frac{\Lambda(s) - \lambda_1}{\Lambda(s)} \dot{x} = \dot{x} - \frac{\lambda_1}{\Lambda(s)} \dot{x}. \quad (5)$$

Ορίζουμε  $\zeta$  το διάνυσμα:

$$\zeta = \left[ -\frac{1}{\Lambda(s)} \dot{x} \quad -\frac{1}{\Lambda(s)} x \quad \frac{1}{\Lambda(s)} u \right],$$

άρα:

$$z = \theta^{*T} \cdot \zeta = -\frac{a_1}{\Lambda(s)}\dot{x} - \frac{a_2}{\Lambda(s)}x + \frac{b_0}{\Lambda(s)}u,$$

και αντικαθιστώντας το  $z$  της πάνω σχέσης, με την σχέση (5) προκύπτει τελικά:

$$\dot{x} = -\frac{a_1}{\Lambda(s)}\dot{x} - \frac{a_2}{\Lambda(s)}x + \frac{b_0}{\Lambda(s)}u + \frac{\lambda_1}{\Lambda(s)}\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = (a_1 - \lambda_1)\zeta_1 + a_2\zeta_2 + b_0\zeta_3 \Rightarrow \dot{x} = \theta_\lambda^T \zeta, \quad (6)$$

οπου:

$$\theta_\lambda = [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 \quad b_0]^T.$$

Από την (6) είναι φανερό ότι φέραμε το σύστημα στην μορφή  $\boxed{y = \theta^{*T} \cdot \phi}$ , με  $\theta^* = \theta_\lambda$ ,  $y = \dot{x}$  και  $\phi = \zeta$ . Σε αυτήν, όλα τα μεγέθη είναι γνωστά και μετρήσιμα εκτός από το διάνυσμα  $\theta_\lambda$ , οπότε μπορούμε να προχωρήσουμε την ανάλυσή μας.

### Εναλλακτικός Τρόπος

Μπορούμε να φέρουμε το σύστημά μας στην ίδια μορφή, ακολουθώντας τα βήματα που παρουσιάζουμε συνοπτικά παρακάτω:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -a_1\dot{x}(t) - a_2x(t) + b_0u(t) \Rightarrow \\ \ddot{x}(t) + \lambda_1\dot{x}(t) &= \lambda_1\dot{x}(t) - a_1\dot{x}(t) - a_2x(t) + b_0u(t) \xrightarrow{\substack{\text{M/L} \\ \dot{x}(t)=y(t)}} sY + \lambda_1Y = \lambda_1Y - a_1Y - a_2X + b_0U \Rightarrow \\ (s + \lambda_1)Y &= (\lambda_1 - a_1)Y - a_2X + b_0U \Rightarrow Y = -\frac{a_1 - \lambda_1}{s + \lambda_1}Y - \frac{a_2}{s + \lambda_1}X + \frac{b_0}{s + \lambda_1}U \Rightarrow \\ y &= [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 \quad b_0]^T \cdot \left[ -\frac{1}{s + \lambda_1}\dot{x} \quad -\frac{1}{s + \lambda_1}x \quad \frac{1}{s + \lambda_1}u \right]. \end{aligned}$$

### Εφαρμογή Μεθόδου Μέγιστης Καθόδου

- Για τον προσδιορισμού του  $\hat{\theta}$  θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης (*identifier*):

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}(t) \cdot \phi(t),$$

όπου η έξοδος  $\hat{y}(t)$  αποτελεί εκτίμηση της εξόδου  $y(t)$  του πραγματικού συστήματος. Με βάση τα παραπάνω, ορίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης:

$$e = y - \hat{y} = \theta^{*T} \cdot \phi - \hat{\theta}^T \cdot \phi = (\theta^* - \hat{\theta})^T \cdot \phi.$$

Γράφοντας  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ , έχουμε:  $e = -\tilde{\theta} \cdot \phi$ . Υπενθυμίζουμε ότι το  $e(t)$  είναι μετρήσιμο σήμα, οπότε μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στην σχεδίαση, σε αντίθεση με το  $e_\theta = \tilde{\theta}$  που δεν είναι μετρήσιμο (αλλά πρέπει να αποδειχθεί η ευστάθειά του).

- Ως συνάρτηση κόστους του  $e$ , την οποία θα ελαχιστοποιούμε ως προς  $\hat{\theta}$ , παίρνουμε την:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(y - \hat{\theta} \cdot \phi)^2}{2}.$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε το:

$$\arg \min_{\hat{\theta}} K(\hat{\theta}).$$

- Για να το βρούμε αυτό, λαμβάνουμε υπόψιν ότι η  $K(\hat{\theta})$  είναι κυρτή  $\forall t \geq 0$ —επομένως κάθε τοπικό ελάχιστό της θα είναι και ολικό και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla K(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta^*} = 0,$$

από την οποία κατόπιν πράξεων παίρνουμε:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -(y - \hat{\theta}\phi)\phi$$

- Από την μέθοδο της κλίσης έχουμε ότι:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) = \gamma(y - \hat{\theta}\phi)\phi = \gamma \cdot e \cdot \phi, \quad \hat{\theta}(0) = \theta_0, \quad (7)$$

όπου  $\gamma > 0$  μια σταθερά και  $\hat{\theta}(0)$  η αρχική τιμή του  $\hat{\theta}$  (τυχαίας επιλογής).

- Άρα από την (7) βγάζουμε ότι:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \dot{a}_1 = \gamma e \phi_1, & \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_{1,0} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \dot{a}_2 = \gamma e \phi_2, & \hat{\theta}_2(0) = \hat{\theta}_{2,0} \\ \dot{\hat{\theta}}_3 = \dot{b}_0 = \gamma e \phi_3, & \hat{\theta}_3(0) = \hat{\theta}_{3,0} \end{cases}, \quad \text{με} \quad \begin{cases} \phi_1 = -\frac{1}{s+\lambda_1} \dot{x} \Rightarrow \dot{\phi}_1 = -\lambda_1 \phi_1 - \dot{x}, & \phi_1(0) = 0 \\ \phi_2 = -\frac{1}{s+\lambda_1} x \Rightarrow \dot{\phi}_2 = -\lambda_1 \phi_2 - x, & \phi_2(0) = 0 \\ \phi_3 = +\frac{1}{s+\lambda_1} u \Rightarrow \dot{\phi}_3 = -\lambda_1 \phi_3 + u, & \phi_3(0) = 0 \end{cases},$$

και συνολικά όλη η παραπάνω ανάλυση θα μας δώσει τιμές για τις:

- $\hat{\theta}_1 = \hat{a}_1 - \lambda_1 = \hat{b}/\hat{m} - \lambda_1,$
- $\hat{\theta}_2 = \hat{a}_2 = \hat{k}/\hat{m}$  και
- $\hat{\theta}_3 = \hat{b}_0 = 1/\hat{m}$

και, όπως είναι φανερό, από αυτές μπορούν να προκύψουν και οι εκτιμήσεις  $\hat{m}$ ,  $\hat{b}$  και  $\hat{k}$ .

### Σχόλιο

Το πραγματικό σύστημα, όπως έχουμε αναφέρει, είναι ευσταθές (άρα και για φραγμένη είσοδο, θα έχουμε φραγμένη έξοδο). Δεν μπορούμε όμως να ισχυριστούμε απευθείας το ίδιο και για το σύστημα αναγνώρισης. Το γεγονός ότι το  $\hat{\theta}(t)$  παράγεται μέσω της (7) μπορεί να οδηγήσει το σύστημα αναγνώρισης σε αστάθεια. Πρέπει επομένως, προτού προχωρήσουμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων του MATLAB, να μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος αναγνώρισης, με βάση την (7).

Θα μελετήσουμε τώρα την ευστάθεια του συστήματος όταν αυτό λειτουργεί με τις εκτιμώμενες παραμέτρους  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  και  $\hat{b}_0$  αντί για τις πραγματικές τους τιμές. Για τον σκοπό αυτό, επιλέγεται ως συνάρτηση Lyapunov η  $V = \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \geq 0$ . Υπολογίζοντας την παράγωγό της, προκύπτει:

$$\dot{V} = \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \phi^2 \tilde{\theta}^2 = -\gamma e^2 \leq 0$$

Εφόσον  $\tilde{\theta} \in L_\infty$  και  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ , με  $\theta^*$  σταθερά, συνεπάγεται ότι  $\hat{\theta} \in L_\infty$ . Επιπλέον, η  $V$  είναι μη αρνητική και φθίνουσα, άρα κάτω φραγμένη, γεγονός που συνεπάγεται ότι το όριό της στο άπειρο υπάρχει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{\theta}(t)) = V_\infty$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της παραγώγου της  $V$  ως προς τον χρόνο, λαμβάνουμε:

$$\int_0^\infty e^2 d\tau = -\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau = -\frac{1}{\gamma} [V_\infty - V(0)]$$

με  $V(0) = \frac{\hat{\theta}(0)^2}{2}$ , οπότε καταλήγουμε ότι  $e \in L_2$ .

Περαιτέρω, γνωρίζουμε ότι  $\hat{y} = \hat{\theta}^T \phi$ . Δεδομένου ότι  $\hat{\theta}, \phi \in L_\infty$ , προκύπτει  $\hat{y} \in L_\infty$ . Για το σφάλμα εξόδου  $e = y - \hat{y}$  ισχύει επίσης  $e \in L_\infty$ . Συνεπώς, έχουμε  $e \in L_2 \cap L_\infty$  και  $\dot{e} \in L_\infty$ . Εφαρμόζοντας το λήμμα του Barbalat, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Επιπλέον, επειδή  $\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e \phi$ , και δεδομένου ότι  $e(t) \rightarrow 0$  και  $\phi \in L_\infty$ , προκύπτει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}} = 0$$

Συνοψίζοντας, για είσοδο που ικανοποιεί τις συνθήκες  $\phi, \dot{\phi} \in L_\infty$ , ο αναδρομικός νόμος μεταβολής των εκτιμώμενων παραμέτρων  $\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e \phi$  εγγυάται ότι δεν θα έχουμε απόκλιση της εκτιμώμενης εξόδου,  $\hat{y}$ , από την πραγματική έξοδο,  $y$ , του συστήματος.

### Παρατήρηση:

Στην παραπάνω ανάλυση προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την διαφορά  $e = y - \hat{y}$ . Όμως, με την χρήση του φίλτρου πρώτης τάξης, το  $y$  που έχουμε αναφέρεται στο  $\dot{x}$  και όχι στο  $x$ . Άρα, το σήμα με το οποίο συγκρίνουμε το μοντέλο με το πραγματικό σύστημα είναι το  $\dot{x}(t)$ , που σημαίνει ότι ακόμη και αν ελαχιστοποιήσουμε την διαφορά των δύο σημάτων των παραγώγων **δεν** συνεπάγεται και ελαχιστοποίηση της διαφοράς των σημάτων των  $x(t)$  (αλλά συνεπάγεται σταθερό ρυθμό μεταβολής της διαφοράς αυτών). Αυτό δεν μας αποτρέπει να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας ως έχει, όμως για πληρότητα θα παραθέσουμε εδώ και την ανάλυση με χρήση ενός φίλτρου δεύτερης τάξης, ώστε το  $y$  στον τύπο του σφάλματος,  $e$ , να αναφέρεται στο ίδιο και  $x$ .

Συνοπτικά, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα παίρνουμε το ζητούμενο:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -a_1\dot{x}(t) - a_2x(t) + b_0u(t) \Rightarrow$$

$$\ddot{x}(t) + \lambda_1\dot{x}(t) + \lambda_2x(t) = \lambda_1\dot{x}(t) - a_1\dot{x}(t) + \lambda_2x(t) - a_2x(t) + b_0u(t) \xrightarrow{\substack{M/L \\ \dot{x}(t)=z(t)}} \ddot{z}(t) + \lambda_1\dot{z}(t) + \lambda_2z(t) = \lambda_1\dot{z}(t) - a_1\dot{z}(t) + \lambda_2z(t) - a_2z(t) + b_0u(t)$$

$$s^2X + \lambda_1sX + \lambda_2X = \lambda_1Z - a_1Z + \lambda_2X - a_2X + b_0U \Rightarrow (s^2 + \lambda_1s + \lambda_2)X = -(a_1 - \lambda_1)Z - (a_2 - \lambda_2)X + b_0U \Rightarrow$$

$$X = -\frac{a_1 - \lambda_1}{(s^2 + \lambda_1s + \lambda_2)}Z - \frac{a_2 - \lambda_2}{(s^2 + \lambda_1s + \lambda_2)}X + \frac{b_0}{(s^2 + \lambda_1s + \lambda_2)}U \Rightarrow$$

$$y = [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 - \lambda_2 \quad b_0]^T \cdot \left[ -\frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_2}\dot{x} \quad -\frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_2}x \quad \frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_2}u \right].$$

Προφανώς, για να έχουμε ευστάθεια, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην επιλογή των  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  μίας και οι ρίζες του πολυωνύμου δευτέρου βαθμού πρέπει να κυμαίνονται στο αριστερό ανοικτό ημιεπίπεδο.

Ακολουθώντας την ίδια μαθηματική ανάλυση βρίσκουμε και πάλι πως για να έχουμε ελαχιστοποίηση του σφάλματος πρέπει να ικανοποιείται και πάλι η (7). Άρα το τελικό σύστημα που θα πρέπει να λυθεί είναι το:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \dot{a}_1 = \gamma e \phi_1, & \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_{1,0} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \dot{a}_2 = \gamma e \phi_2, & \hat{\theta}_2(0) = \hat{\theta}_{2,0} \\ \dot{\hat{\theta}}_3 = \dot{b}_0 = \gamma e \phi_3, & \hat{\theta}_3(0) = \hat{\theta}_{3,0} \end{cases}, \text{ με } \begin{cases} \phi_1 = -\frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_2}\dot{x} \Rightarrow \ddot{\phi}_1 = -\lambda_1\dot{\phi}_1 - \lambda_2\phi_1 - \dot{x}, & \phi_1(0) = 0 \\ \phi_2 = -\frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_2}x \Rightarrow \ddot{\phi}_2 = -\lambda_1\dot{\phi}_2 - \lambda_2\phi_2 - x, & \phi_2(0) = 0 \\ \phi_3 = +\frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_2}u \Rightarrow \ddot{\phi}_3 = -\lambda_1\dot{\phi}_3 - \lambda_2\phi_3 + u, & \phi_3(0) = 0 \end{cases},$$

και συνολικά όλη η παραπάνω ανάλυση θα μας δώσει τιμές για τις:

- $\hat{\theta}_1 = \hat{a}_1 - \lambda_1 = \hat{b}/\hat{m} - \lambda_1$ ,
- $\hat{\theta}_2 = \hat{a}_2 - \lambda_2 = \hat{k}/\hat{m} - \lambda_2$  και
- $\hat{\theta}_3 = \hat{b}_0 = 1/\hat{m}$

και πάλι, όπως είναι φανερό, από αυτές μπορούν να προκύψουν και οι εκτιμήσεις  $\hat{m}$ ,  $\hat{b}$  και  $\hat{k}$ .

## Αποτελέσματα Προσομοίωσης MATLAB

Το αρχείο στο οποίο βρίσκεται ο κώδικας για όλο το Ερώτημα Α είναι το *mainTopic1\_a.m*. Σε αυτό μπορούμε να επιλέξουμε αν ο εκτιμητής μας θα εφαρμόσει την ανάλυση με φίλτρο πρώτης ή δεύτερης τάξης, μέσω της μεταβλητής: **filter\_version** (γραμμή23). Αν αυτή ισούται με 1, τότε αναφερόμαστε στην ανάλυση με φίλτρο πρώτης τάξης και με 2, σε φίλτρο δεύτερης. Ο δε κώδικας τρέχει τόσο για είσοδο  $u(t) = 2.5$  (περίπτωση i) όσο και για την ημιτονοειδή είσοδο  $u(t) = 2.5 \sin(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  (περίπτωση ii).

Για κάθε περίπτωση φίλτρου, με trial and error βρίσκουμε κατάλληλες τιμές για τα  $\lambda_1$ ,  $\gamma$  (και  $\lambda_2$ ), ώστε οι εκτιμήσεις μας να είναι αρκούντως καλές (και η απόκλιση/σφάλμα της εξόδων  $\hat{y}(t)$  του μοντέλου να μην διαφέρει σημαντικά από από αυτήν του πραγματικού συστήματος). Υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί  $\lambda_1$ ,  $\gamma$  (και  $\lambda_2$ ) που μπορούν να δώσουν επαρκώς καλά αποτελέσματα αλλά, για τις ανάγκες της παρουσιάσής μας στην αναφορά, επιλέγουμε να δείξουμε μόνο έναν ενδεικτικό συνδυασμό ανά περίπτωση φίλτρου. Επίσης προσέχουμε την αρχικοποίηση που κάνουμε στο  $\theta$ , μιας και αν αρχίσουμε από το μηδέν θα έχουμε αρχικά μεγάλο σφάλμα που θα "χαλαί" το scaling στα διαγράμματα. Με κατάλληλες δοκιμές μπορούμε να βρούμε αρχικές τιμές που να οδηγούν σε σύγκλιση των εκτιμώμενων παραμέτρων (αρκούντως κοντά στις πραγματικές τιμές), μέσα στο χρονικό διάστημα της προσομοίωσης (20 sec).

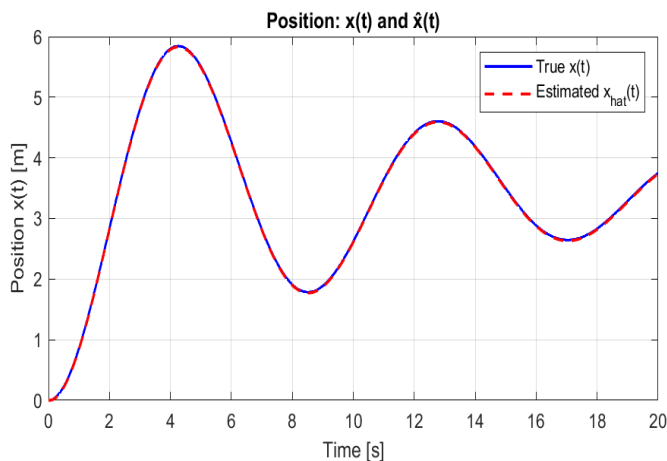
### Περίπτωση Φίλτρου Πρώτης Τάξης

Για την περίπτωση του φίλτρου πρώτης τάξης θέτουμε:

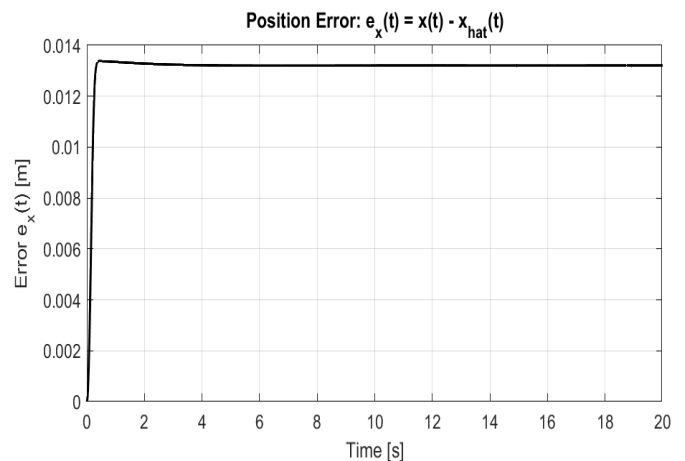
- **filter\_version = 1**
- **lambda1 = 0.2**
- **gamma = 50**

(i)  $u(t) = 2.5$

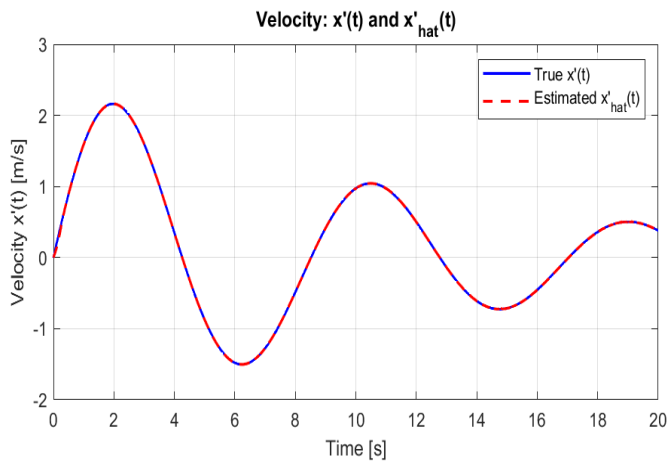
Για την υποπερίπτωση της σταθερής εισόδου λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:



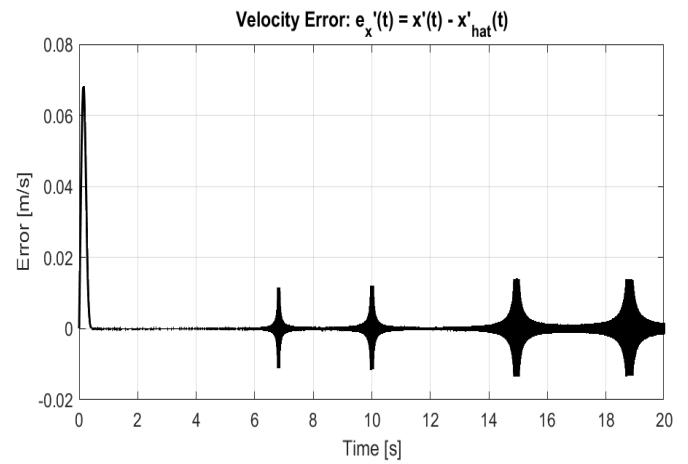
(α')



(β')



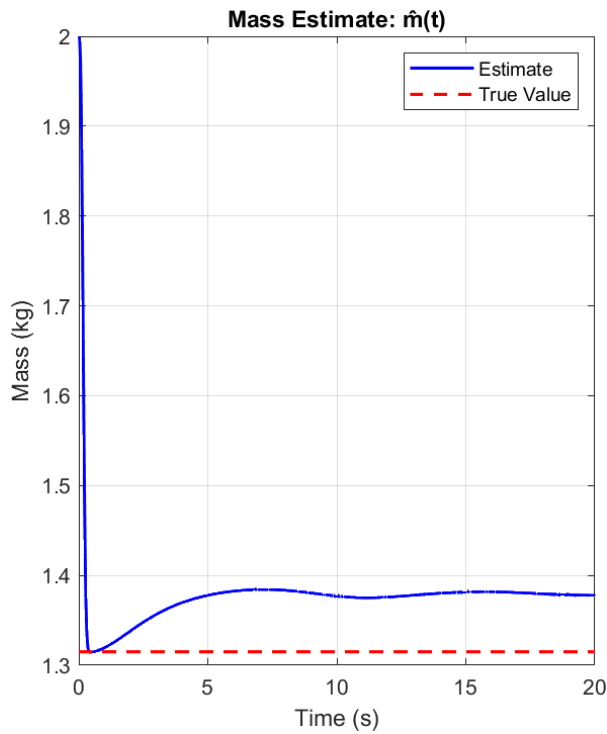
( $\alpha'$ )



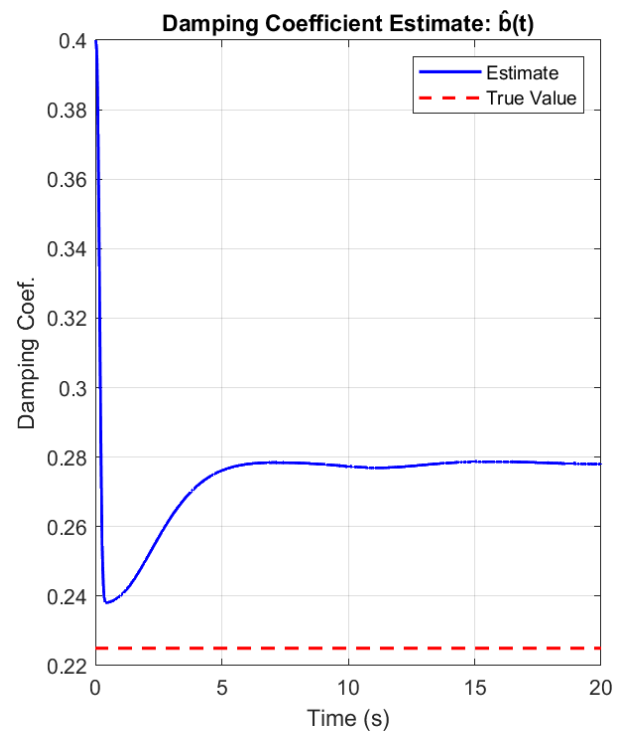
( $\beta'$ )

Υπενθυμίζουμε ότι με το φίλτρο πρώτης τάξης προέκυψε σφάλμα προς ελαχιστοποίηση το  $e = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$ , με αποτέλεσμα στην πράξη να στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση τις διαφορές των παραγώγων του  $x(t)$  (διαφορά πραγματικού - μοντέλου). Ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση όμως είναι φανερό ότι μπορούμε να κάνουμε αρκούντως καλές προσομοιώσεις που να έχουν μικρό σφάλμα σε σχέση με το πραγματικό μοντέλο, και αυτό οφείλετε στο fine tuning της παραμέτρου  $\gamma$  (αλλά και στην επιλογή του  $\lambda$ , όπως και των κατάλληλων αρχικών συνθηκών).

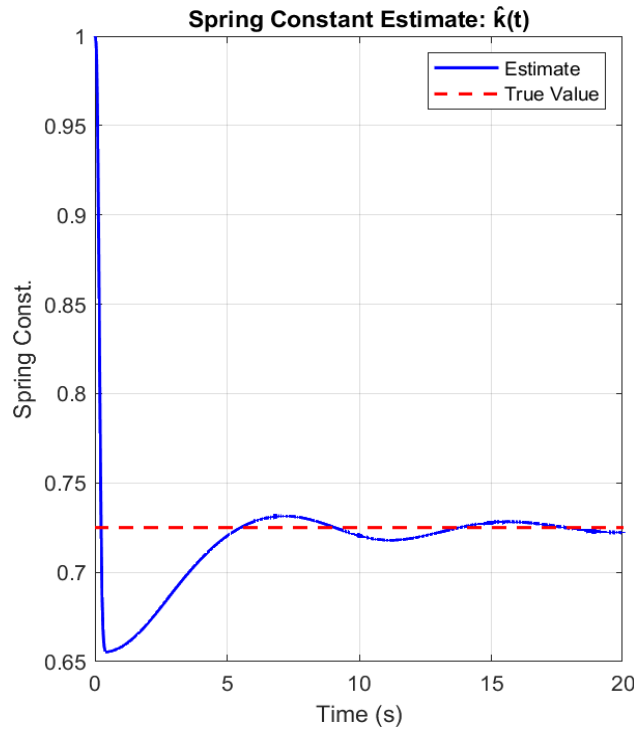
Βέβαια, η μικρή διαφορά στο σφάλμα δεν συνεπάγεται άμεσα και καλή εκτίμηση όλων των παραμέτρων του συστήματος. Παρακάτω παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις των εκτιμήσεων αυτών για να μπορέσουμε να εξάγουμε σχετικά συμπεράσματα. (Σημαντικό για την ανάλυση των παρακάτω είναι σε κάθε διάγραμμα να κοιτάμε το scale των γραφικών παραστάσεων.)



( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )



Σχήμα 4

Παρά τις προσπάθειες να καταφέρουμε να εκτιμούμε σωστά και τις τρεις παραμέτρους, πάντα τουλάχιστον μια από αυτές αποκλίνει σε αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό από τις άλλες. Αυτό οφείλεται, μεταξύ άλλων, στην είσοδο την οποία δίνουμε για να κάνουμε την εκτίμηση (αν και σημαντικό ρόλο παίζει και το ίδιο το φίλτρο, όπως θα δούμε στην συνέχεια). Η σταθερή είσοδος (που δεν περιλαμβάνει κάποια συχνότητα), όπως θα δούμε και συγκριτικά με την ημιτονοειδή, δεν μπορεί να κάνει το ίδιο καλές εκτιμήσεις των παραμέτρων κάτι που δικαιολογείται από την Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης, ΣΕΔ. Δεδομένου δηλαδή ότι έχουμε  $n (= 3)$  αγνώστους προς εκτίμηση, χρειαζόμαστε  $n/2$  διαφορετικές συχνότητες για να κάνουμε ακριβή εκτίμηση σε καθεμία από αυτές.

Παρακάτω παραθέτουμε τις τελικές εκτιμήσεις των παραμέτρων, με τα σχετικά σφάλματα από τις πραγματικές τιμές τους. Πρέπει να τονίσουμε ότι ως *Final estimates* ονομάζουμε όχι την τελική εκτίμηση στα 20sec αλλά τον μέσο όρο των τελευταίων 5 εκτιμήσεων της κάθε παραμέτρου. Με αυτόν τον τρόπο (και σε συνδυασμό με περαιτέρω στατιστική ανάλυση—εύρεση τυπικής απόκλισης, κλπ.) μπορούμε να έχουμε μια καλύτερη/πληρέστερη εικόνα για το πού κυμαίνονται οι τιμές των εκτιμήσεων, αποφεύγοντας να πέφτουμε σε outliers.

```
Constant Input u(t) = 2.5 | gamma = 50.00 | lambda = 0.20:
True parameters: m = 1.315, b = 0.225, k = 0.725
Final estimates: m = 1.378, b = 0.278, k = 0.722
Relative errors: m = 4.78%, b = 23.56%, k = 0.37%
```

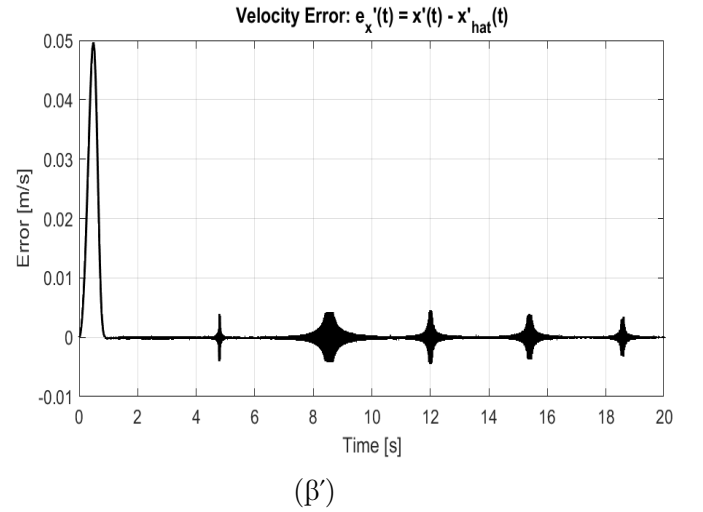
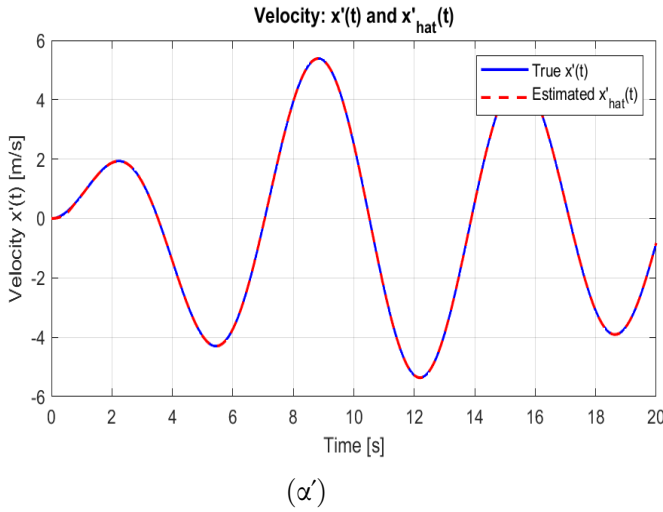
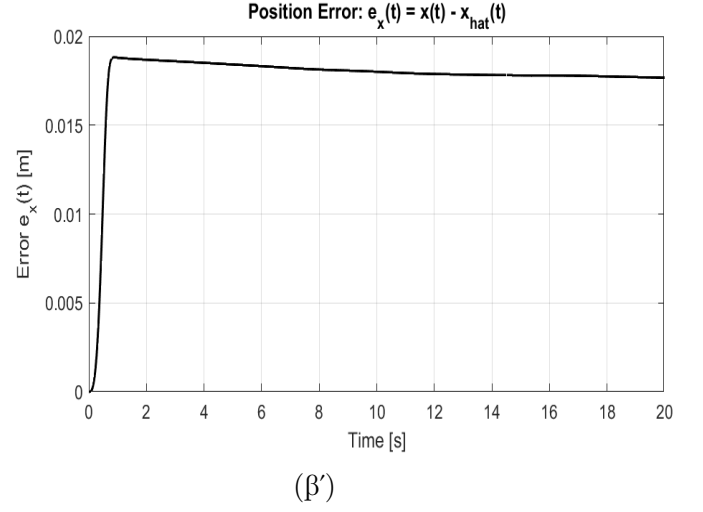
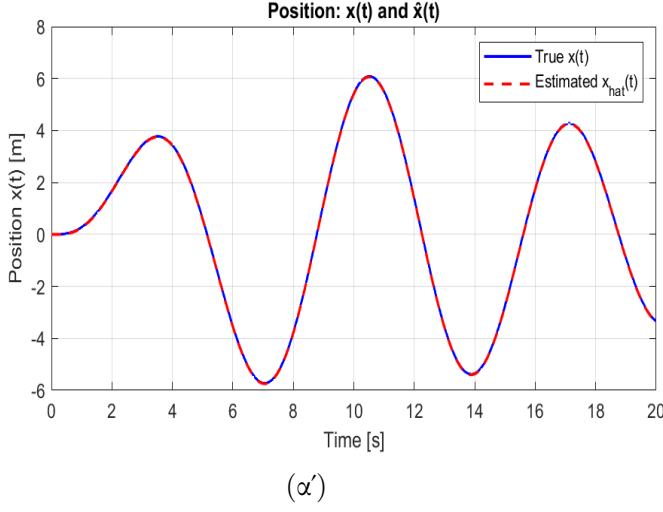
Σχήμα 5

Από τον πάνω πίνακα των logs είναι φανερό αυτό που αναφέραμε και στην ανάλυση των διαγραμμάτων των  $\hat{m}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$ , &  $\hat{k}(t)$ , ότι δηλαδή η μία παράμετρος (σε αυτήν την περίπτωση το  $\hat{b}(t)$ ) δεν μπορεί να εκτιμηθεί στην ίδια τάξη ακρίβειας με τις άλλες δύο).



(ii)  $u(t) = 2.5 \sin(t)$

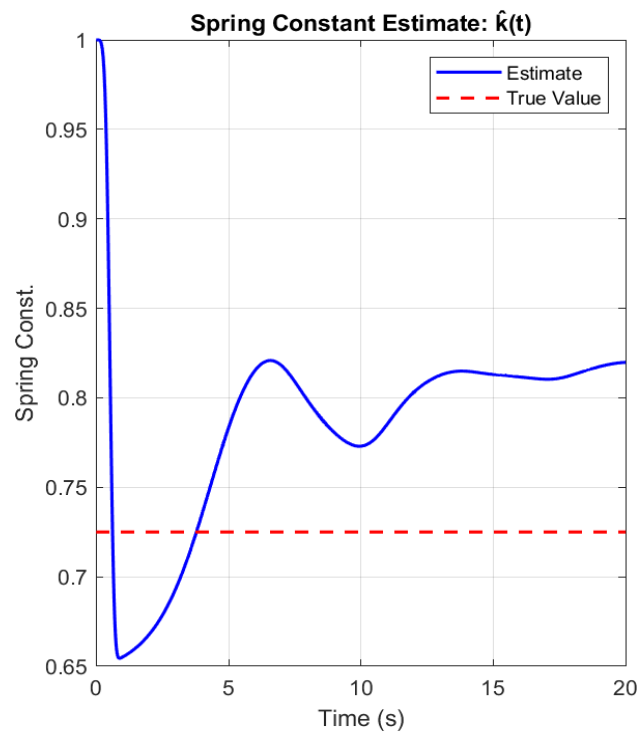
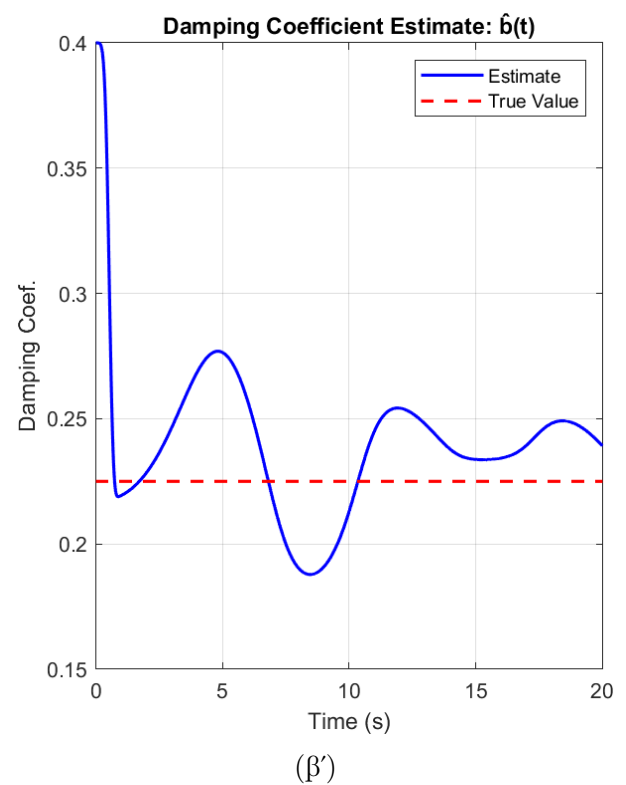
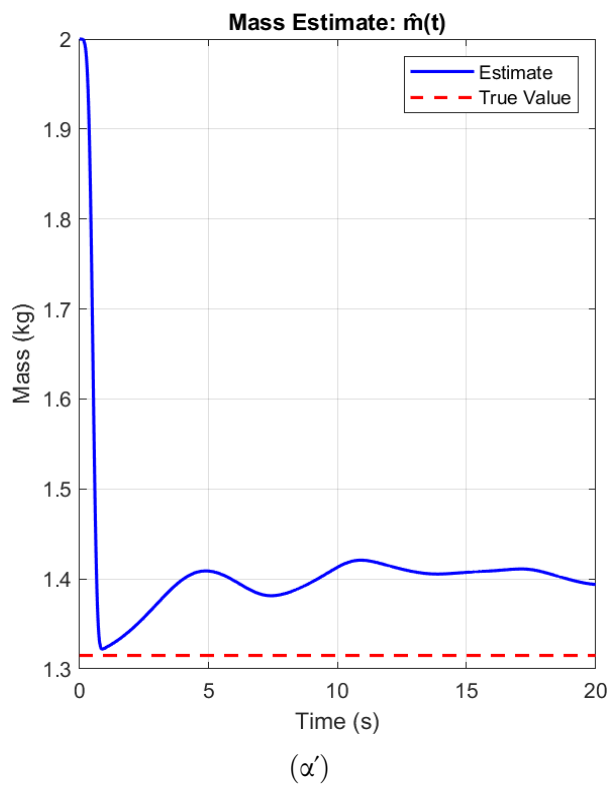
Για την υποπερίπτωση της ημιτονοειδούς εισόδου λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:



Συγκρίνοντας τα παραπάνω με τα διαγράμματα του υποερωτήματος (i) βλέπουμε αρχικά ότι έχουμε ελαφρώς μεγαλύτερο σφάλμα στην διαφορά  $e_x = x - \hat{x}$ . Παρόλα αυτά, κοιτώντας τις γραφικές παραστάσεις που αναφέρονται στο  $e = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$  (που άλλωστε αυτό ελαχιστοποιούμε), φαίνεται να έχουμε μικρότερο σφάλμα σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Η καλύτερη προσομοίωση του συστήματος οφείλεται (όπως έχουμε ήδη αναφέρει) στο γεγονός ότι πλέον δεν έχουμε ως είσοδο απλώς έναν DC όρο, αλλά ένα ημιτονοειδές σήμα (μίας συχνότητας).

Και πάλι, για να δούμε αν όντως έχουν γίνει σωστές εκτιμήσεις όλων των παραμέτρων παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις των  $\hat{m}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$ , &  $\hat{k}(t)$  για να μπορέσουμε να εξάγουμε σχετικά συμπεράσματα.

Για συνοχή με το προηγούμενο ερώτημα κρατήσαμε τις ίδιες τιμές για τα  $\gamma$  και  $\lambda$  και σε αυτήν την περίπτωση εισόδου. Με κατάλληλο fine tuning θα μπορούσαμε να είχαμε ακόμη καλύτερα αποτελέσματα, όμως τα συμπεράσματα που εξάγουμε σε κάθε περίπτωση είναι ανάλογα, μιας και—όπως φαίνεται τόσο από τα διαγράμματα όσο και από τα printed logs—πλέον τα σφάλματα των εκτιμήσεων έχουν ίδια τάξη μεγέθους (δεν υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ τους). Επίσης,



Σχήμα 9

συγκρίνοντας τον μέσο όρο των τριών σφαλμάτων για τις δύο περιπτώσεις εισόδου, βλέπουμε ότι τώρα έχουμε ελαφρώς μικρότερο μέσο σφάλμα εκτίμησης απ' ό,τι στην περίπτωση της DC εισόδου. Και πάλι τονίζουμε ότι σημαντικό ρόλο στην εκτίμηση παραμέτρων παίζει και το ίδιο το φίλτρο, όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Παρακάτω παραθέτουμε τις τελικές εκτιμήσεις των παραμέτρων, με τα σχετικά σφάλματα από τις πραγματικές τιμές τους.

```
Sinusoidal Input u(t) = 2.5*sin(t) | gamma = 50.00 | lambda = 0.20:
True parameters: m = 1.315, b = 0.225, k = 0.725
Final estimates: m = 1.394, b = 0.239, k = 0.820
Relative errors: m = 6.00%, b = 6.33%, k = 13.08%
```

Σχήμα 10

Από τα πάνω printed logs είναι φανερό πλέον μπορούμε να διατηρήσουμε μια "ισορροπία" στα σφάλματα ώστε κανένα να μην αποκλίνει σημαντικά από από τα υπόλοιπα (και καμία παράμετρος να μην αποκλίνει σημαντικά από την πραγματική της τιμή). Γι' αυτό άλλωστε, όπως είδαμε, μπορέσαμε να ελαχιστοποιήσουμε σε μεγαλύτερο βαθμό το σφάλμα  $e = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$  (την γραφική παράσταση) σε αυτήν την περίπτωση απ' ότι στην προηγούμενη.

### Περίπτωση Φίλτρου Δεύτερης Τάξης

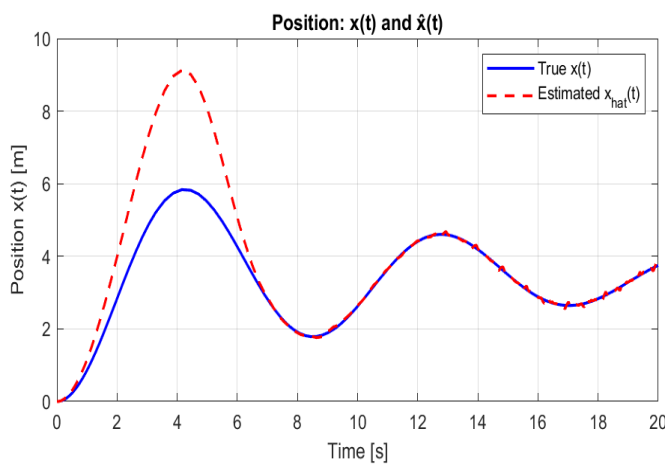
Για να μελετήσουμε αυτήν την περίπτωση φίλτρου θα θέσουμε:

- `filter_version = 2`
- `lambda1 = 0.3`
- `lambda1 = 0.02`

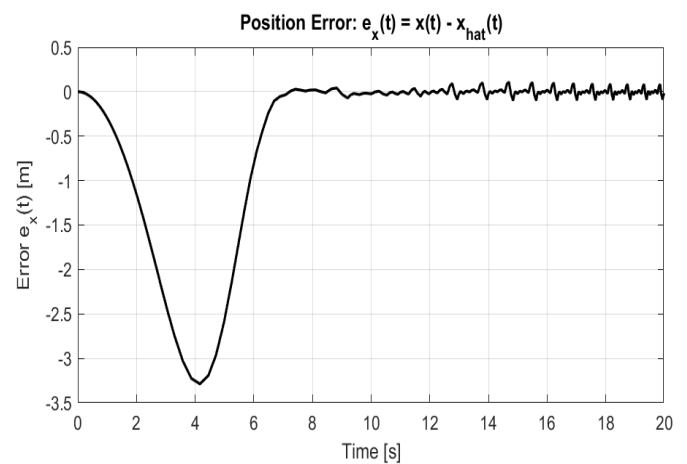
Εδώ η τιμή του  $\gamma$  θα τεθεί διαφορετική σε κάθε ερώτημα ώστε να μπορέσουμε σε κάθε περίπτωση να δείξουμε όσο το δυνατόν πιο ακριβείς εκτιμήσεις. Πριν προχωρήσουμε, τονίζουμε ότι η επιλογή των  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  έγινε ώστε να έχουμε τους πόλους στο αριστερό ανοικτό ημιεπίπεδο (όπως είχαμε αναφέρει και στην θεωρητική ανάλυση ότι απαιτείται να ισχύει).

(i)  $u(t) = 2.5$

Για την υποπερίπτωση της σταθερής εισόδου θέτουμε `gamma = 0.001` και παίρνουμε τα παρακάτω (αυτήν την φορά δεν παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις που αναφέρονται σε παραγώγους μιας και σε αυτήν την ανάλυση ελαχιστοποιούμε το  $e_x = x - \hat{x}$ ):



(α')

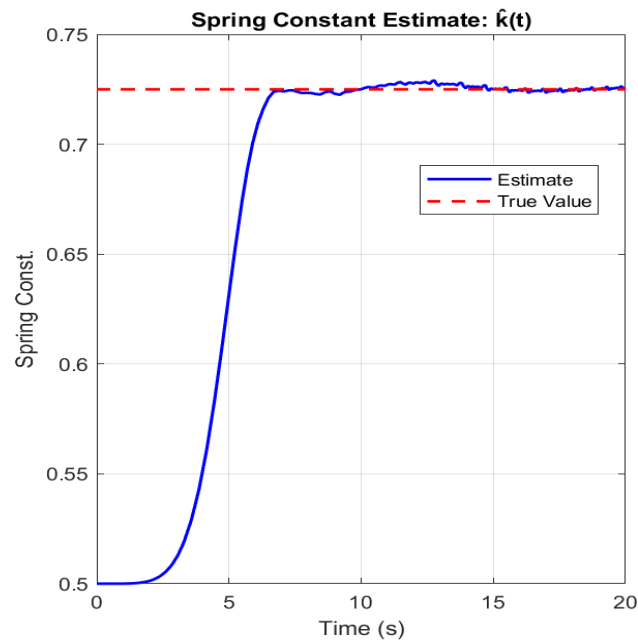
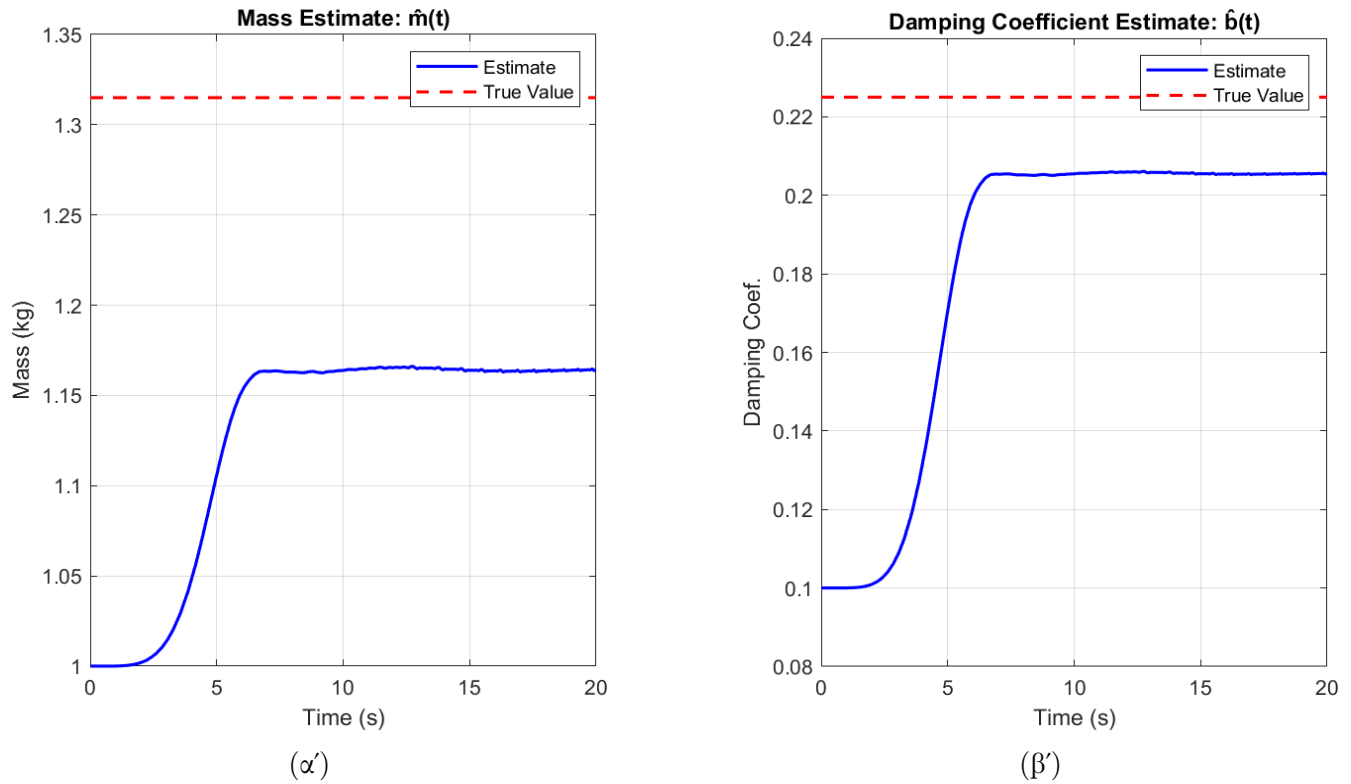


(β')

Εδώ, η προσομοίωση που κάνουμε δεν δίνει στην αρχή αρκετά καλά αποτελέσματα, μιας και το μικρό  $\gamma$  αποτρέπει την γρήγορη αλλαγή των παραμέτρων  $\hat{\theta}$  και συνεπώς και των προς εκτίμηση

παραμέτρων. Ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση όμως, εν τέλει φαίνεται το μοντέλο να μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα ελαχιστοποιώντας όσο το δυνατόν περισσότερο το σφάλμα  $e_x = x - \hat{x}$ .

Για να μπορέσουμε να δούμε πόσο καλά και γρήγορα εκτιμούνται οι παράμετροι που ψάχνουμε, παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις των εκτιμήσεων αυτών για να μπορέσουμε να εξάγουμε σχετικά συμπεράσματα.



Σχήμα 13

Ένα πρώτο συμπέρασμα που εξάγουμε είναι πως και στις δύο περιπτώσεις φίλτρων, όταν βάζουμε ως είσοδο ένα DC σήμα μπορούμε να κάνουμε πολύ καλή εκτίμηση του  $k$ . Αυτό οφείλεται τόσο στην ίδια την ΔΕ, αλλά σημαντικό ρόλο παίζει και η επιλογή των  $\lambda$  για το φίλτρο, όπως και η τιμή του  $\gamma$  που επιλέξαμε. Και πάλι όμως, λόγω της Συνθήκης Επιμένουσας Διέγερσης, ΣΕΔ, δεν μπορούμε να κάνουμε αρκετά καλές προσεγγίσεις για όλες τις παραμέτρους που θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Τέλος για την υποπερίπτωση αυτή, παραθέτουμε τις τελικές εκτιμήσεις των παραμέτρων, με τα σχετικά σφάλματα από τις πραγματικές τιμές τους.

Constant Input  $u(t) = 2.5$  |  $\gamma = 0.001$  |  $\lambda_{bd1} = 0.30$ ,  $\lambda_{bd2} = 0.02$ :

True parameters:  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$

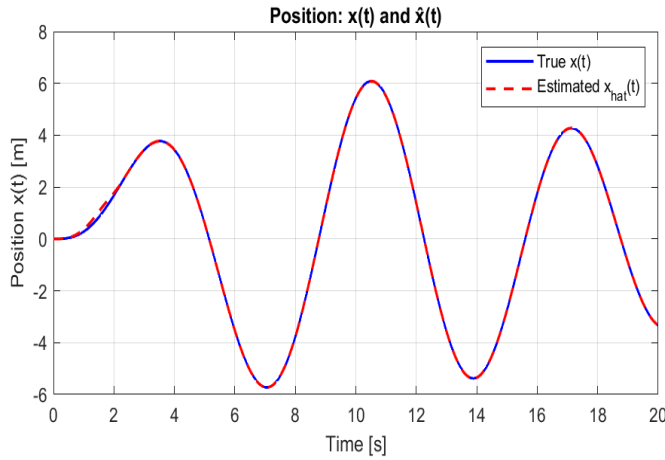
Final estimates:  $m = 1.164$ ,  $b = 0.206$ ,  $k = 0.725$

Relative errors:  $m = 11.48\%$ ,  $b = 8.66\%$ ,  $k = 0.04\%$

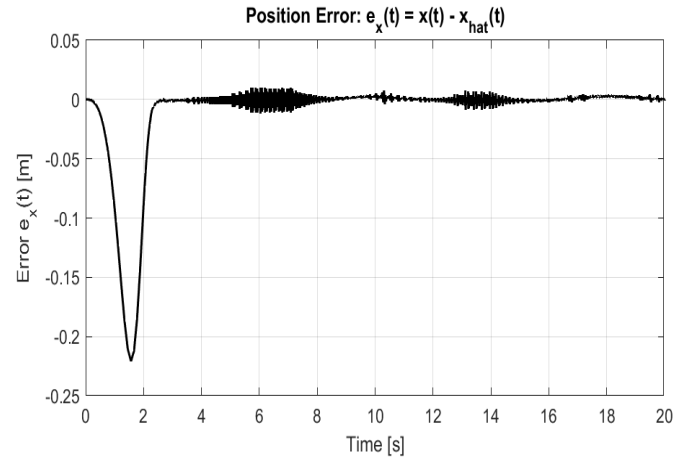
Σχήμα 14

(i)  $u(t) = 2.5 \sin(t)$

Για την υποπερίπτωση της ημιτονοειδούς εισόδου θέτουμε  $\gamma = 1$  και παίρνουμε τα παρακάτω:



(α')

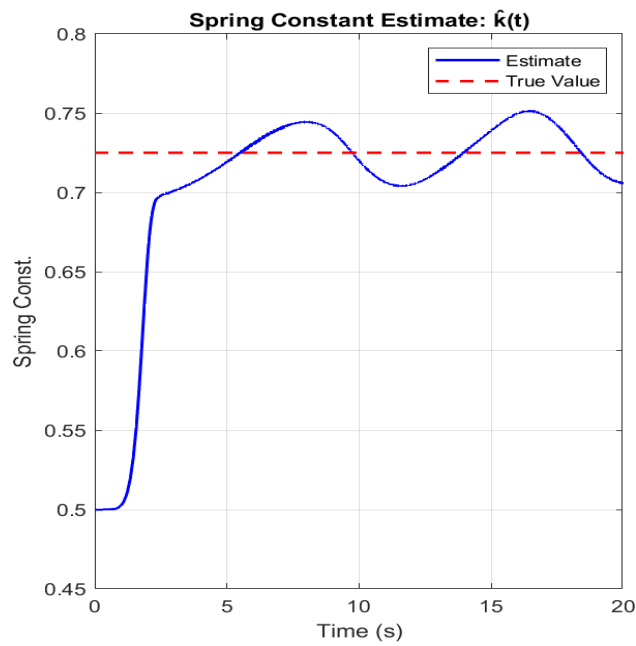
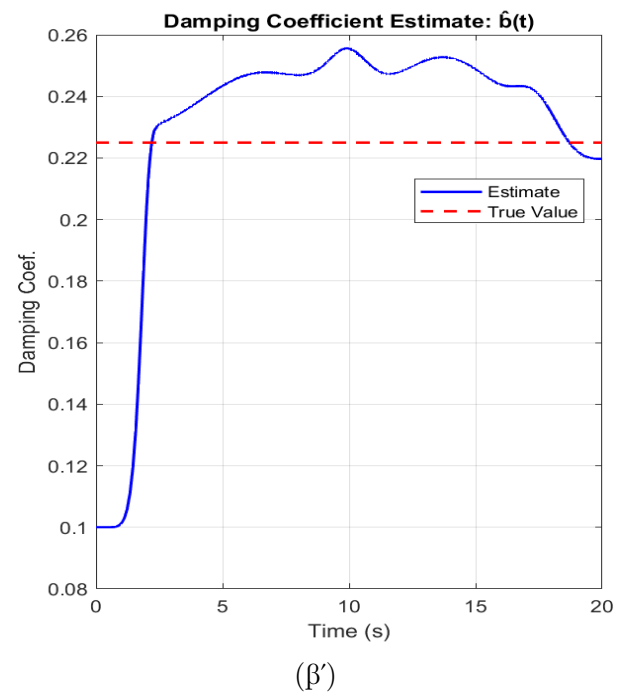
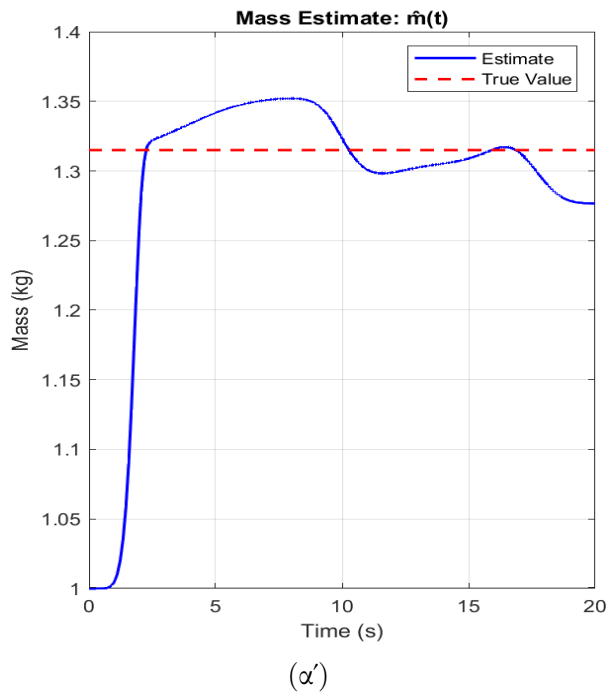


(β')

Όπως και στις προηγούμενες προσομοιώσεις, το σφάλμα που προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε, εδώ το  $e_x = x - \hat{x}$ , φαίνεται από την γραφική του παράσταση ότι όντως αποσβένει όσο περνάει ο χρόνος προς το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η on-line αναδρομική μέθοδος που εφαρμόζουμε για την εκτίμηση των παραμέτρων (αν και στην θεωρία δεν είναι το ίδιο αποτελεσματική από τις off-line) μπορεί με το πέρασμα του χρόνου να κάνει όλο και καλύτερες εκτιμήσεις του συστήματος.

Για να μπορέσουμε να δούμε πόσο καλά και γρήγορα εκτιμούνται οι παράμετροι που ψάχνουμε και σε αυτήν την υποπερίπτωση, παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις των εκτιμήσεων αυτών για να εξάγουμε τα σχετικά συμπεράσματα.

Πλέον, παρατηρούμε ότι με το φίλτρο δεύτερης τάξης για την περίπτωση του ημιτονοειδούς σήματος μπορούμε να κάνουμε όλες τις παραμέτρους να συγκλίνουν αρκετά κοντά στις πραγματικές τους τιμές, μέσα στα 20 sec της προσομοίωσης. Όλα τα σχετικά σφάλματα των εκτιμήσεων, όπως φαίνονται στα printed logs, είναι περίπου ίδια και μικρότερα από όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις (κατά μέσο όρο). Συμπεραίνουμε ότι ο συγκεκριμένος συνδυασμός εισόδου και φίλτρου είναι ο ιδανικότερος για την εκτίμηση των παραμέτρων μας (σε σύγκριση πάντα με τις προηγούμενες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν).



Σχήμα 17

Sinusoidal Input  $u(t) = 2.5 \cdot \sin(t)$  |  $\gamma = 1.000$  |  $\lambda_{d1} = 0.30$ ,  $\lambda_{d2} = 0.02$ :

True parameters:  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$

Final estimates:  $m = 1.277$ ,  $b = 0.220$ ,  $k = 0.706$

Relative errors:  $m = 2.91\%$ ,  $b = 2.35\%$ ,  $k = 2.61\%$

Σχήμα 18

## Ερώτημα Β

### Μαθηματική Ανάλυση

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας συνοπτικά την μαθηματική ανάλυση για την κάθε δομή του συστήματος αναγνώρισης, αρχίζοντας με την **παράλληλη (Π) δομή**. (Η ανάλυση για την Π δομή παρατίθεται για πληρότητα—είναι αυτούσια όπως παρουσιάζεται στις σημειώσεις του μαθήματος).

- Στην γενική περίπτωση έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8)$$

με κατάσταση και είσοδο μετρήσιμα (όπως μας δίνεται και από την εκφώνηση).

Για δομή Π στο σύστημα αναγνώρισης έχουμε:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad (9)$$

όπου  $\hat{x}$ : εκτίμηση της εξόδου  $x$  του πραγματικού συστήματος &  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ : εκτιμήσεις των πινάκων  $A$ ,  $B$ . Το σφάλμα αναγνώρισης είναι και πάλι  $e = x - \hat{x}$ .

- Παραγωγίζοντάς το ως προς τον χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u \quad (10)$$

Προσθαφαιρώντας τον όρο:  $A\hat{x}$ , τότε από την (10):

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) - (\hat{A} - A)\hat{x} - (\hat{B} - B)u \quad (11)$$

Ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{A} = \hat{A} - A$ ,  $\tilde{B} = \hat{B} - B$  και η (11) γίνεται:

$$\dot{e} = Ae - \tilde{A}\hat{x} - \tilde{B}u \quad (12)$$

- Για την ανάλυσή μας ως συνάρτηση Lyapunov παίρνουμε την:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{A}^T \tilde{A}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{B}^T \tilde{B}\} \quad (13)$$

όπου με  $\text{tr}\{\cdot\}$  συμβολίζουμε το ίχνος (trace) ενός πίνακα. Αν παραγωγίσουμε την  $V$  ως προς τον χρόνο κατά μήκος της λύσης της (12) βρίσκουμε:

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\} = e^T Ae - e^T \tilde{A}\hat{x} - e^T \tilde{B}u + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\} \quad (14)$$

Επίσης γνωρίζουμε από τις ιδιότητες του trace ότι:

$$\begin{aligned} e^T \tilde{A}\hat{x} &= \text{tr}\{\tilde{A}\hat{x}e^T\} \\ e^T \tilde{B}u &= \text{tr}\{\tilde{B}ue^T\} \end{aligned}$$

και η (14) γράφεται:

$$\dot{V} = e^T Ae + \text{tr}\{\tilde{A}\dot{\tilde{A}} + \tilde{B}\dot{\tilde{B}} - \tilde{A}\hat{x}e^T - \tilde{B}ue^T\} \quad (15)$$

- Επιλέγοντας,

$$\dot{\hat{A}}^T = \hat{x}e^T \quad (16)$$

$$\dot{\hat{B}}^T = ue^T \quad (17)$$

η (15) γίνεται:

$$\dot{V} = e^T A e \leq 0 \quad (18)$$

*Σχόλιο:* Και πάλι, όπως και στο Ερώτημα Α, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε την σύγκλιση των παραμετρικών σφαλμάτων στο μηδέν. Αυτό επιτυγχάνεται εφόσον η είσοδος ικανοποιεί μια ΣΕΔ.

- Για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην δική μας περίπτωση, υπενθυμίζουμε πως το σύστημά μας είναι το:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t).$$

Την πάνω εξίσωση την έχουμε μετασχηματίσει ως εξής (το αναγράφουμε εδώ για πληρότητα):

$$\ddot{x}(t) = -\frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t).$$

Τώρα, ορίζουμε:

$$\theta_1^* = \frac{b}{m}, \quad \theta_2^* = \frac{k}{m}, \quad \theta_3^* = \frac{1}{m}.$$

Από τις (16) και (17), λαμβάνοντας υπόψιν την δομή των πινάκων  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ , εξάγουμε συνολικά το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{x}} &= -\hat{\theta}_1\dot{\hat{x}} - \hat{\theta}_2\hat{x} + \hat{\theta}_3u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\gamma_1\dot{e}\hat{x} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\gamma_2\dot{e}\hat{x} \\ \dot{\hat{\theta}}_3 &= +\gamma_3\dot{e}u \\ e &= x - \hat{x} \end{cases},$$

όπου οι πολλαπλασιαστές  $\gamma_i$  προστέθηκαν για καλύτερο έλεγχο του δοθέντος προς επίλυση συστήματος.

Περνάμε τώρα στην ανάλυση που αφορά την **Μικτή (M) Δομή**. Σε αυτή τη δομή, χρησιμοποιούμε τις πραγματικές τιμές των  $x(t), \dot{x}(t)$  στο μοντέλο (υπενθυμίζουμε ότι στην παρακάτω ανάλυση το  $x$  αναφέρεται στο διάνυσμα κατάστασης—για απλότητα και συνοχή με την ανάλυση του βιβλίου αποφεύγουμε την χρήση bold για τα διανύσματα κατάστασης):

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u + C(x - \hat{x}), \quad (19)$$

όπου  $\hat{A}, \hat{B}$ : εκτιμήσεις των πινάκων  $A, B$ . Το σφάλμα αναγνώρισης είναι και πάλι  $e = x - \hat{x}$ .

- Παραγωγίζοντάς το ως προς τον χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}x - \hat{B}u - Ce \quad (20)$$

Ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{A} = \hat{A} - A, \tilde{B} = \hat{B} - B$  και η (20) γίνεται:

$$\dot{e} = -Ce - \tilde{A}x - \tilde{B}u \quad (21)$$



- Για την ανάλυσή μας ως συνάρτηση Lyapunov παίρνουμε την:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{A}^T \tilde{A}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{B}^T \tilde{B}\} \quad (22)$$

όπου με  $\text{tr}\{\cdot\}$  συμβολίζουμε το ίχνος (trace) ενός πίνακα. Αν παραγωγίσουμε την  $V$  ως προς τον χρόνο κατά μήκος της λύσης της (21) βρίσκουμε:

$$\dot{V} = e^T \dot{e} + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\} = -e^T C e - e^T \tilde{A} x - e^T \tilde{B} u + \text{tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}}\} + \text{tr}\{\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}\} \quad (23)$$

Επίσης γνωρίζουμε από τις ιδιότητες του trace ότι:

$$\begin{aligned} e^T \tilde{A} x &= \text{tr}\{\tilde{A} x e^T\} \\ e^T \tilde{B} u &= \text{tr}\{\tilde{B} u e^T\} \end{aligned}$$

και η (23) γράφεται:

$$\dot{V} = e^T A e + \text{tr}\{\tilde{A} \dot{\tilde{A}} + \tilde{B} \dot{\tilde{B}} - \tilde{A} x e^T - \tilde{B} u e^T\} \quad (24)$$

- Για να απαλειφθούν οι όροι των οποίων το πρόσημο δεν γνωρίζουμε στην παράγωγο της Lyapunov, επιλέγουμε:

$$\dot{\tilde{A}}^T = x e^T \quad (25)$$

$$\dot{\tilde{B}}^T = u e^T \quad (26)$$

και τότε η (24) γίνεται:

$$\dot{V} = -e^T C e \leq 0 \quad \text{ο πίνακας } C \text{ πρέπει να είναι θετικά (ημι)ορισμένος.} \quad (27)$$

- Άρα, προέκυψε σε αυτήν την περίπτωση το παρακάτω πρόβλημα/σύστημα εξισώσεων (επιλέγουμε για απλότητα  $C = \theta_m \cdot I_{2 \times 2}$ , με  $\theta_m > 0$ ):

$$\begin{cases} \ddot{\hat{x}} &= -\hat{\theta}_1 \dot{x} - \hat{\theta}_2 x + \hat{\theta}_3 u + \theta_m \dot{e} \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\gamma_1 \dot{e} \dot{x} \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\gamma_2 \dot{e} x \\ \dot{\hat{\theta}}_3 &= +\gamma_3 \dot{e} u \\ e &= x - \hat{x} \end{cases} .$$

*Σχόλιο:* Στις παραπάνω εξισώσεις τα  $x, \dot{x}$ , κλπ. δεν αναφέρονται σε διανύσματα, αλλά στα ίδια τα σήματα.

*Έχοντας πλέον βρει όλες τις προς επίλυση εξισώσεις μπορούμε να συνεχίσουμε με την προσομοίωση στο MATLAB.*

## Αποτελέσματα Προσομοίωσης

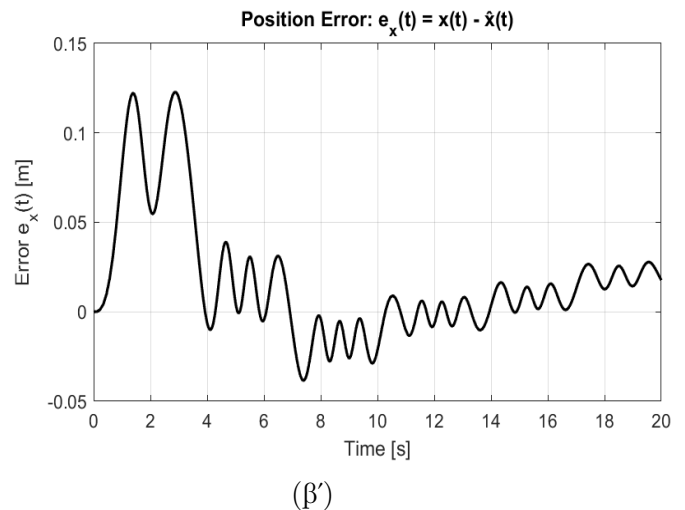
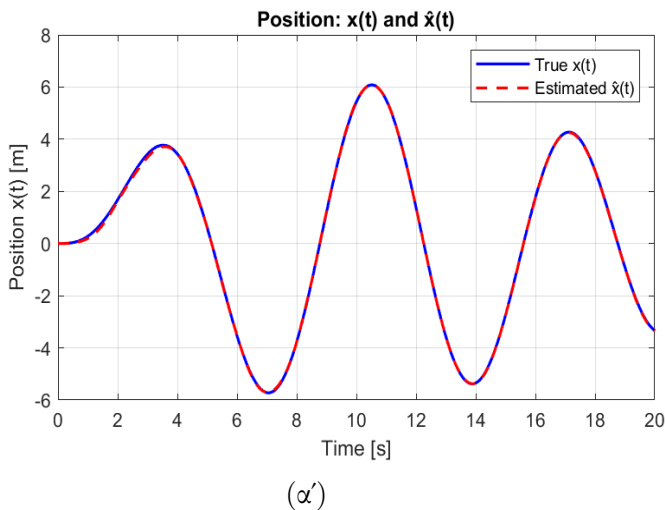
Ο εκτελέσιμος κώδικας για το Ερώτημα Β είναι στο αρχείο *mainTopic1\_b.m*. Σε αυτό τρέχουμε τόσο την προσομοίωση για την παράλληλη όσο και για την μικτή δομή.

Από trial and error είδαμε πως κατάλληλες τιμές, ώστε δίνουν αρκούντως καλές προσεγγίσεις και για τις δύο δομές, είναι οι εξής:

- $\gamma_1 = 2.8$
- $\gamma_2 = 0.06$
- $\gamma_3 = 2.0$
- $\theta_m = 60$

Στην μαθηματική ανάλυση ήδη εξηγήσαμε σε τι χρησιμεύει καθεμιά από τις παραπάνω σταθερές. Επίσης αποφασίσαμε να κρατήσουμε και για τις δύο δομές τις ίδιες τιμές των παραπάνω για συνοχή και καλύτερη δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δομών (προσπαθήσαμε να μην κάνουμε κάποια εκ των δύο δομών να έχει πολύ χειρότερα αποτελέσματα από την άλλη, αλλά να υπάρχει μια ισορροπία στην ακρίβεια των εκτιμήσεων).

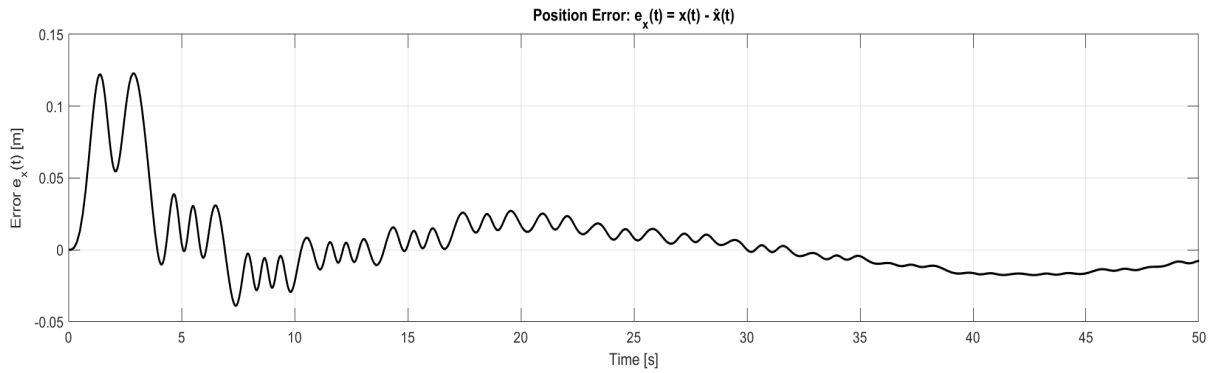
### Αποτελέσματα για την Παράλληλη Δομή



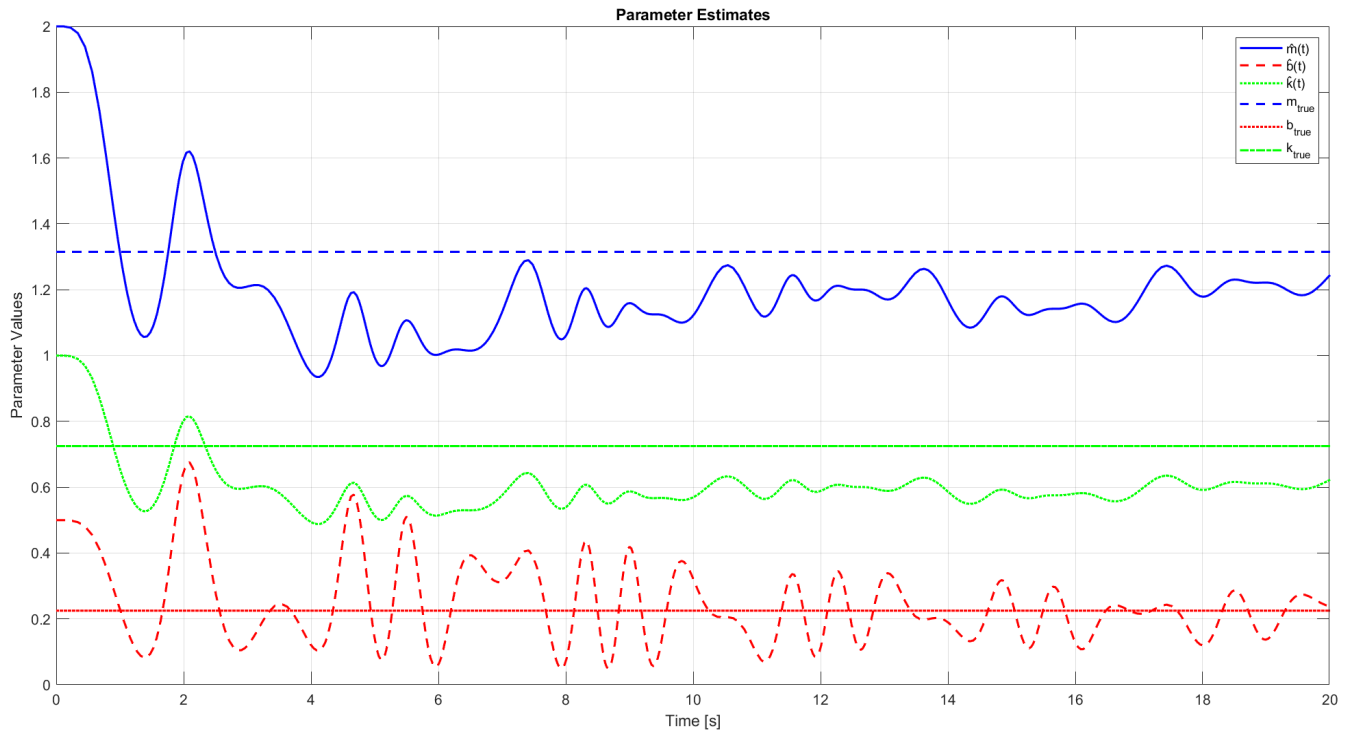
Από τις πάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι το σφάλμα του μοντέλου (για την  $x(t)$ ) σε σχέση με το πραγματικό σύστημα είναι μικρό, αλλά όχι μικρότερο από αυτά που μελετήσαμε στο Ερώτημα Α (όσον αφορά τουλάχιστον για το φίλτρο δεύτερης τάξης και την ημιτονοειδή είσοδο).

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα τείνει να αυξάνεται κοντά στα 20 sec. Παρόλα αυτά αν ξανατρέξουμε την προσομοίωση για 50 sec συνολικά, θα δούμε ότι η γραφική παράσταση του σφάλματος φράσσεται (σε τιμή μικρότερη του 0.05 κατ' απόλυτο) και αποσβένει περιοδικά. Το παραπάνω είναι εμφανές από το Σχήμα 20.

Παρακάτω παραθέτουμε επίσης τις γραφικές παραστάσεις των  $\hat{m}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$ , &  $\hat{k}(t)$ , στο Σχήμα 21, ώστε να μπορέσουμε να δούμε πόσο καλές εκτιμήσεις των πραγματικών παραμέτρων κάνουμε. Από αυτό φαίνεται πως η παράλληλη δομή δεν δίνει αρκετά καλές εκτιμήσεις παραμέτρων μιας και τα αποτελέσματα έχουν μεγάλη διακύμανση, ακόμη και κοντά στα 20 sec (παρόλο δηλαδή που τα σχετικά σφάλματα με τον τρόπο που υπολογίζονται, όπως εμφανίζονται στα logs (24), δεν φαίνεται να είναι υπερβολικά μεγάλα, η μεγάλη διακύμανση επηρεάζει τις εκτιμήσεις στο μοντέλο).



Σχήμα 20

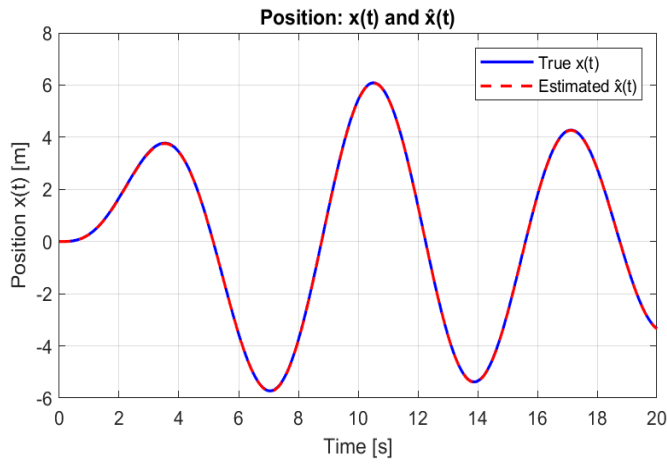


Σχήμα 21

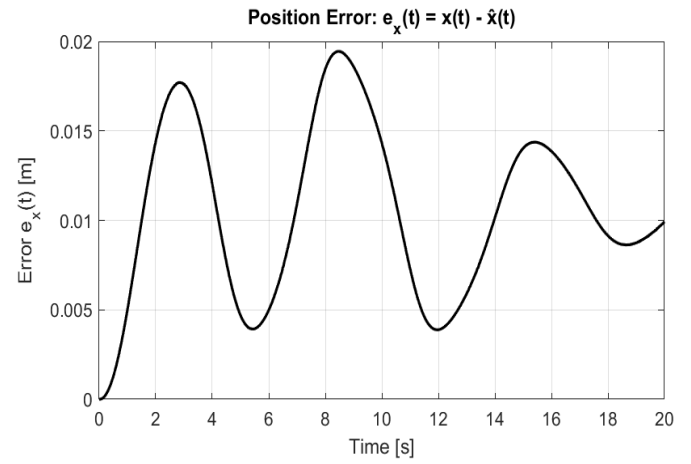
### Αποτελέσματα για την Μικτή Δομή

Από τις κάτω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι το σφάλμα του μοντέλου (για την  $x(t)$ ) σε σχέση με το πραγματικό σύστημα είναι αρκετά μικρό, με το διάγραμμα στο Σχήμα 22β' να δείχνει ότι το σφάλμα πάει να σταθεροποιηθεί κοντά στην τιμή 0.01 (αυτό το μικρό offset μπορεί να αντιμετωπιστεί με κατάλληλη προσαρμογή των  $\gamma$  και του  $\theta_m$  ή με απευθείας αφαίρεση από την έξοδο  $\hat{x}(t)$ , δεδομένου ότι είναι DC offset). Η μεγάλη ακρίβεια (και υψηλότερη ταχύτητα σύγκλισης) που αυτήν η δομή προσφέρει έναντι της προηγούμενης είναι επειδή στην μεθοδολογία της, όπως αναφέρθηκε και στην μαθηματική ανάλυση, λαμβάνουμε υπόψιν τα  $\dot{x}(t)$  και  $x(t)$  (και δεν βάζουμε τα  $\hat{\dot{x}}(t)$  και  $\hat{x}(t)$  όπως κάνουμε στην ανάλυση της II δομής).

Παρακάτω παραθέτουμε επίσης τις γραφικές παραστάσεις των  $\hat{m}(t)$ ,  $\hat{b}(t)$ , &  $\hat{k}(t)$ , στο Σχήμα 23, ώστε να μπορέσουμε να δούμε πόσο καλές εκτιμήσεις των πραγματικών παραμέτρων κάνουμε κάθε χρονική στιγμή. Από αυτό φαίνεται πως η M δομή δίνει αρκετά καλές εκτιμήσεις παραμέτρων, με μικρή διακύμανση, με τα  $\hat{m}(t)$  και  $\hat{b}(t)$  κοντά στα 20 sec να συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές (όπως

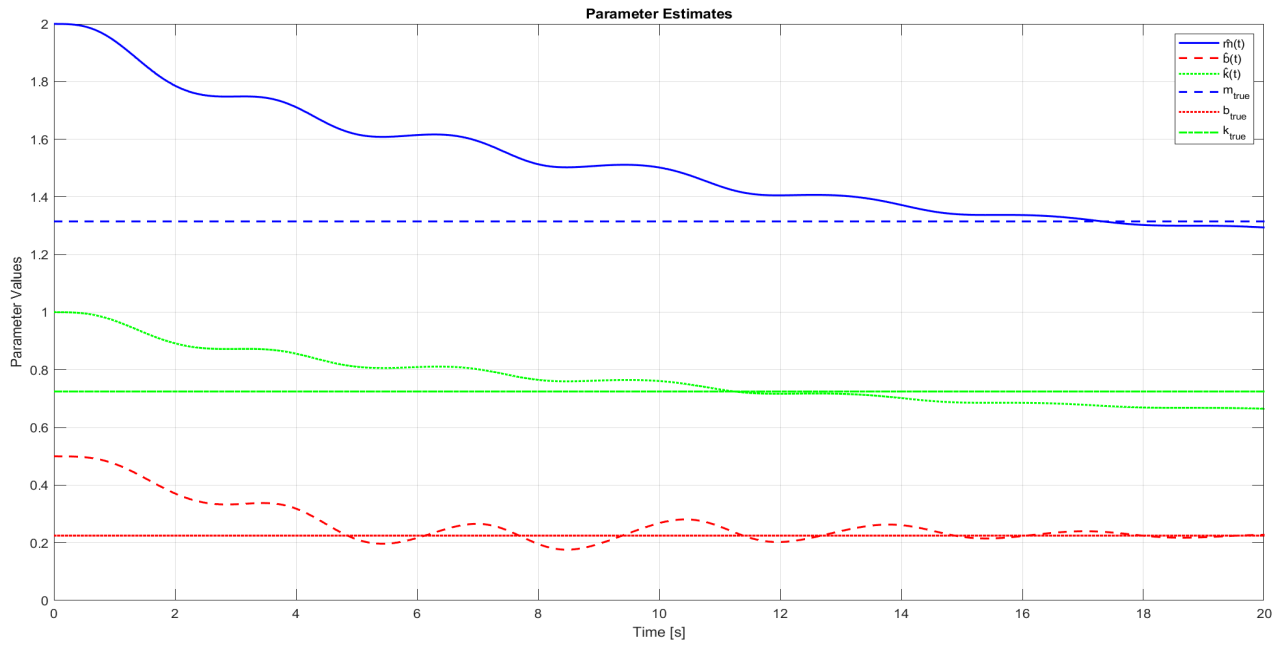


( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )

φαίνεται και στα logs (24)).



Σχήμα 23

#### Parallel Structure Results:

True parameters:  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$

Final estimates:  $m = 1.212$ ,  $b = 0.253$ ,  $k = 0.608$

Relative errors:  $m = 7.81\%$ ,  $b = 12.30\%$ ,  $k = 16.20\%$

#### Mixed Structure Results:

True parameters:  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$

Final estimates:  $m = 1.294$ ,  $b = 0.228$ ,  $k = 0.665$

Relative errors:  $m = 1.58\%$ ,  $b = 1.20\%$ ,  $k = 8.22\%$

Σχήμα 24

## Ερώτημα Γ

Σε αυτό το ερώτημα θεωρούμε ότι προστίθεται θόρυβος *μόνο* στην μέτρηση της εξόδου  $x(t)$ , ο οποίος δίνεται από την σχέση  $n(t) = n_0 \sin(2\pi f_0 \cdot t)$ ,  $\forall t \geq 0$ , με  $n_0 = 0.25$  και  $f_0 = 20$ . Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, το σφάλμα αναγνώρισης  $e$  γίνεται:

$$e = x + n - \hat{x}.$$

Όμως, συνταγματικό είναι να υπενθυμίσουμε πως για όλα τα ερωτήματα θεωρούμε πως μετρήσιμα είναι τα:  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  και  $u(t)$ . Άρα, επειδή προστίθεται θόρυβος μόνο στις μετρήσεις του  $x(t)$ , μπορούμε να πάρουμε το σήμα  $\dot{e}(t)$  απευθείας από την διαφορά του μετρήσιμου  $\dot{x}(t)$  από το  $\dot{\hat{x}}$ —δηλαδή δεν χρειάζεται να παραγωγίσουμε τον θόρυβο στην ανάλυσή μας και, αντιθέτως, μπορούμε να πάρουμε απευθείας:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}},$$

χωρίς υπάρχει καμία προσθήκη θορύβου εδώ.

Από το Ερώτημα Β, για τις εκτιμήσεις  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  είχαμε τις παρακάτω σχέσεις:

- Για την παράλληλη δομή:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \dot{e} \hat{x}, \quad \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 \dot{e} \hat{x}, \quad \dot{\hat{\theta}}_3 = +\gamma_3 \dot{e} u \xrightarrow{\text{Προσθήκη Θορύβου}}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) \hat{x}, \quad \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) \hat{x}, \quad \dot{\hat{\theta}}_3 = +\gamma_3 (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) u.$$

- Για την μικτή δομή:

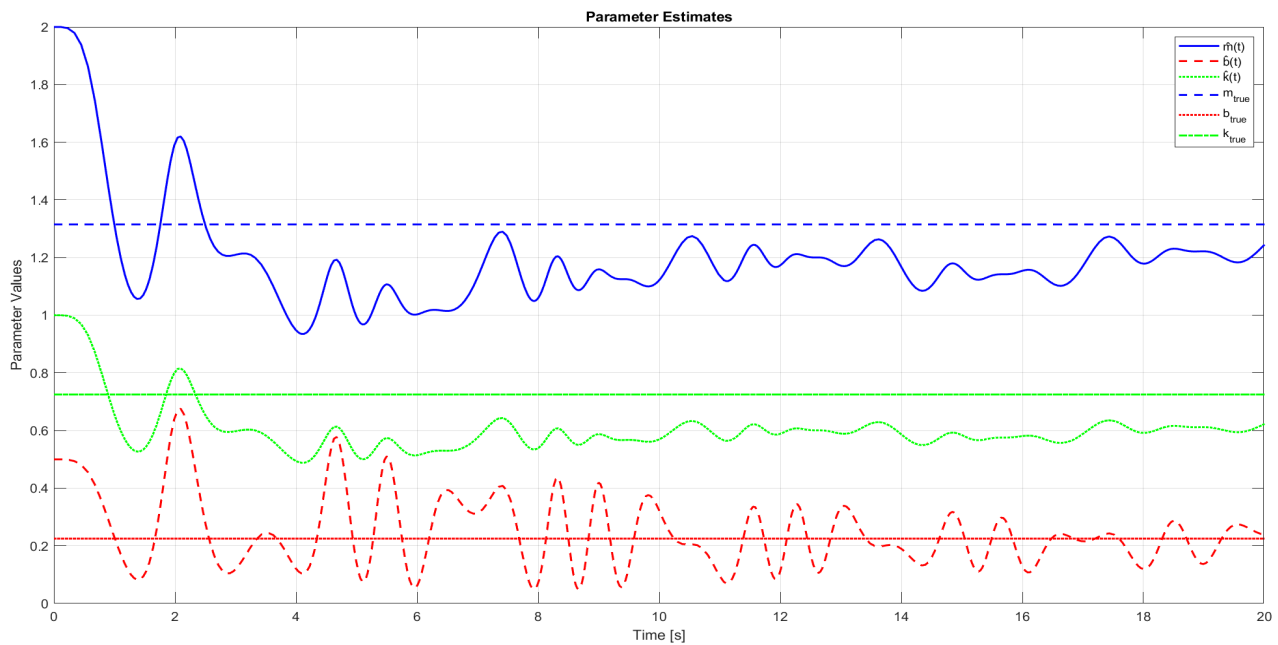
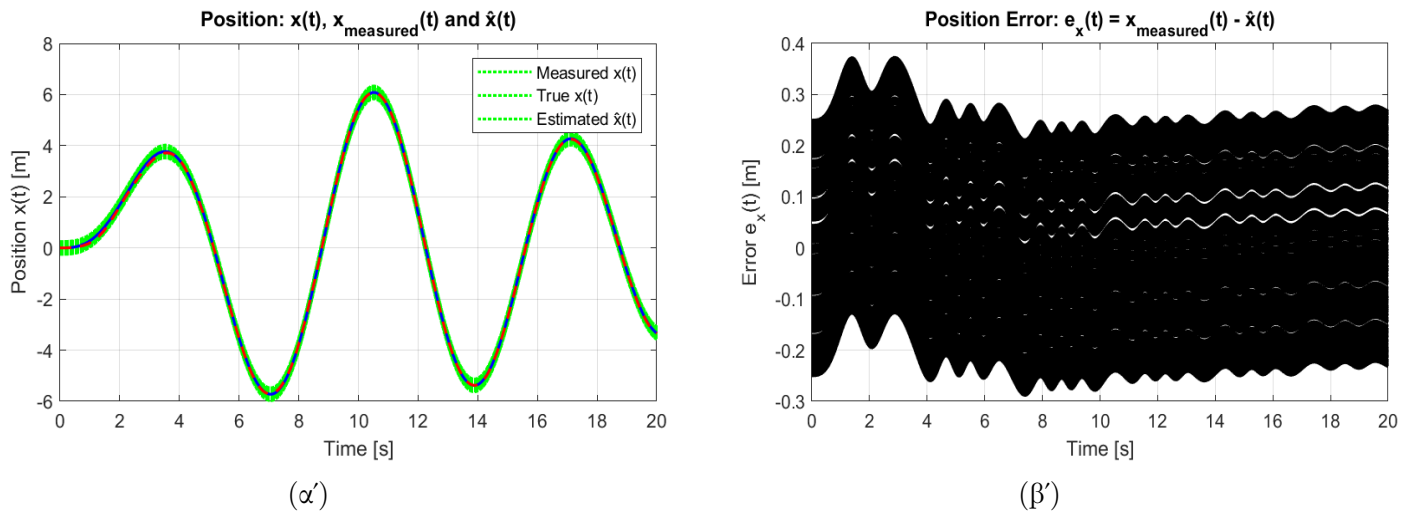
$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \dot{e} \dot{x}, \quad \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 \dot{e} x, \quad \dot{\hat{\theta}}_3 = +\gamma_3 \dot{e} u \xrightarrow{\text{Προσθήκη Θορύβου}}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) \dot{x}, \quad \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) (x + n), \quad \dot{\hat{\theta}}_3 = +\gamma_3 (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) u.$$

Επομένως φαίνεται ότι μόνο η δεύτερη συνιστώσα του διανύσματος  $\theta$  επηρεάζεται από τον θόρυβο και αυτό ισχύει μόνο για την περίπτωση της Μ δομής. Αυτό συμβαίνει διότι—ενώ και στις δύο περιπτώσεις το σφάλμα μπαίνει σε παράγωγο, άρα δεν επηρεάζεται ο υπολογισμός του από τον θόρυβο (ο θόρυβος αφορά μόνο το  $x(t)$ )—η Μ δομή στις εξισώσεις της, όπως τις παρουσιάσαμε στην θεωρητική ανάλυση, αξιοποιεί τις μετρήσεις  $x(t)$  (και  $\dot{x}(t)$ ). Άρα τα αποτελέσματα που δίνει για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων θα επηρεαστούν από τον θόρυβο.

Για να δούμε και στην πράξη τι συμβαίνει τρέχουμε τον εκτελέσιμο κώδικα που βρίσκεται στο αρχείο `mainTopic1_c.m` και εξάγουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.

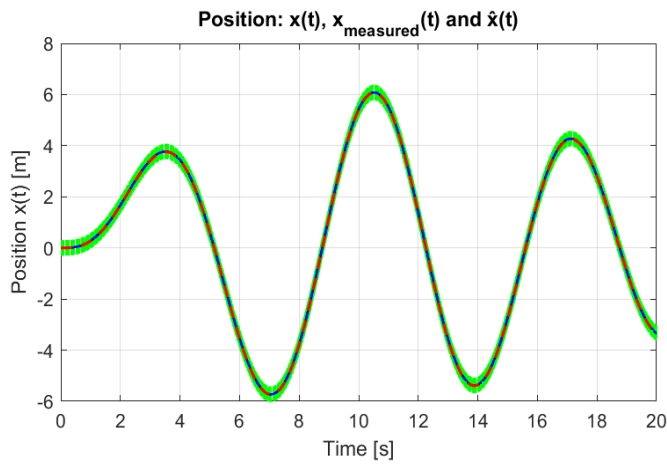
Αρχικά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της Π δομής, αν και όπως είναι φανερό είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση χωρίς θόρυβο. Η μόνη γραφική παράσταση που αλλάζει είναι αυτή του σφάλματος (Σχήμα 25β'), μιας και η διαφορά τώρα παίρνεται από την  $x_n(t)$  (που περιλαμβάνει τον θόρυβο). Όπως φαίνεται από το διάγραμμα αυτό, κοντά στα 20 sec το σφάλμα  $e$  είναι περιοδικό με πλάτος περίπου ίσο με 0.25 (όσο δηλαδή είναι το πλάτος του θορύβου). Αυτό είναι αναμενόμενο μιας και το μόνο που αλλάζει είναι ότι στον υπολογισμό του  $e$  πήραμε  $x + n - \hat{x}$ .



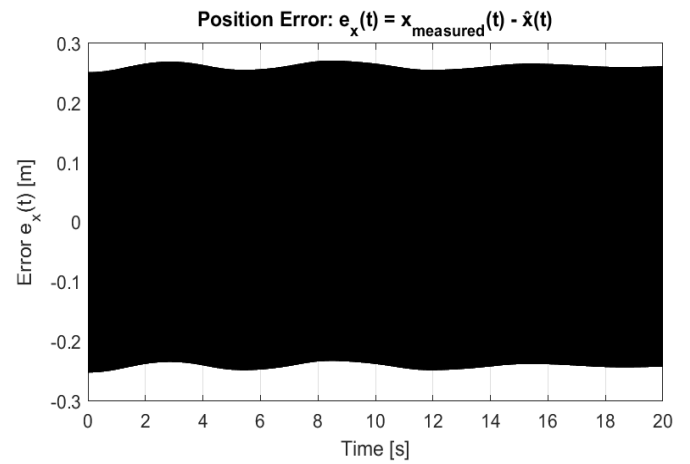
Σχήμα 26

Όσον αφορά την επίδραση του θορύβου στην Μ δομή, παρουσιάζουμε τα παρακάτω διαγράμματα. Σε αυτά δεν φαίνεται να υπάρχει μεγάλη απόκλιση από ότι στην περίπτωση χωρίς θόρυβο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στους τύπους για την εκτίμηση των παραμέτρων το μόνο που άλλαξε ήταν η προσθήκη ενός μικρού ημιτονοειδούς σήματος μαζί με το  $x(t)$ . Το μοντέλο φαίνεται ότι μπορεί να συνεχίσει να είναι ευσταθές και να δίνει ακριβή αποτελέσματα, ακόμα και με την επίδραση αυτού του θορύβου.

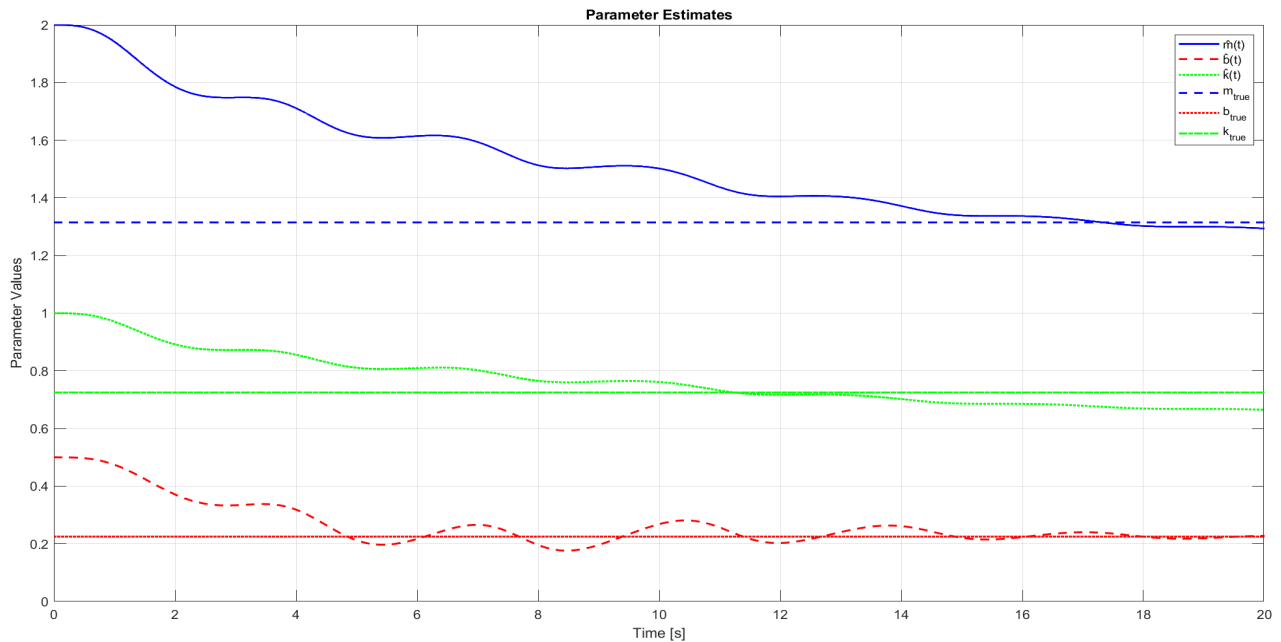
Από τα printed logs (29) βλέπουμε πως άλλαξαν ελαφρώς μόνο τα σφάλματα για την Μ δομή. Το γεγονός ότι για τον υπολογισμό της τελικής εκτίμησης παίρνουμε—αντί για την τελική τιμή της κάθε παραμέτρου—τον μέσο όσο των τελευταίων 5 (και σε συνδυασμό με την μικρή διακύμανση που οι μετρήσεις έχουν παρά την προσθήκη θορύβου) μας βοηθάει να βγάζουμε καλύτερες εκτιμήσεις (και άρα μικτότερα σχετικά σφάλματα).



( $\alpha'$ )



( $\beta'$ )



Σχήμα 28

Results with noise amplitude  $n_0 = 0.250$ :

Parallel Structure Results:

True parameters:  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$

Final estimates:  $m = 1.212$ ,  $b = 0.253$ ,  $k = 0.608$

Relative errors:  $m = 7.81\%$ ,  $b = 12.30\%$ ,  $k = 16.20\%$

Mixed Structure Results:

True parameters:  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$

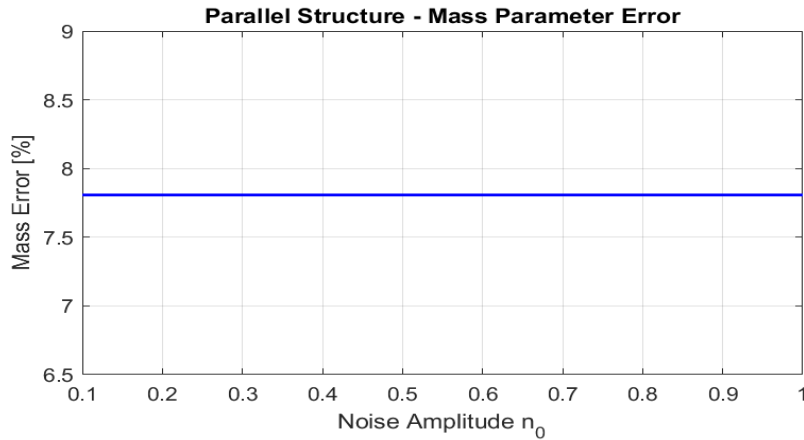
Final estimates:  $m = 1.294$ ,  $b = 0.228$ ,  $k = 0.665$

Relative errors:  $m = 1.60\%$ ,  $b = 1.23\%$ ,  $k = 8.25\%$

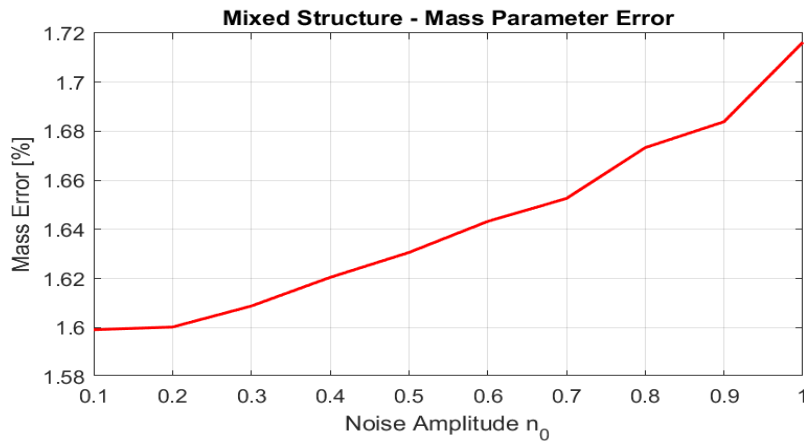
Σχήμα 29

Για να μπορέσουμε όμως να έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα του πως το πλάτος του θορύβου που προσθέτουμε στην μέτρηση επηρεάζει το (σχετικό) σφάλμα εκτίμησης, παραθέτουμε για την Μ δομή (αλλά και για την Π, αν και όπως αναλύσαμε ήδη δεν περιμένουμε να αλλάζει κάτι εκεί) διαγράμματα που δείχνουν τα σφάλματα εκτίμησης της κάθε παραμέτρου συναρτήσει του πλάτους του θορύβου.

- Για την  $\hat{m}(t)$



Σχήμα 30

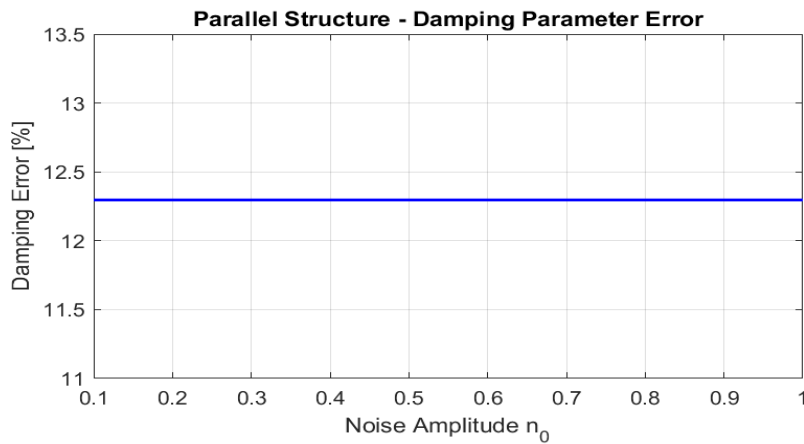


Σχήμα 31

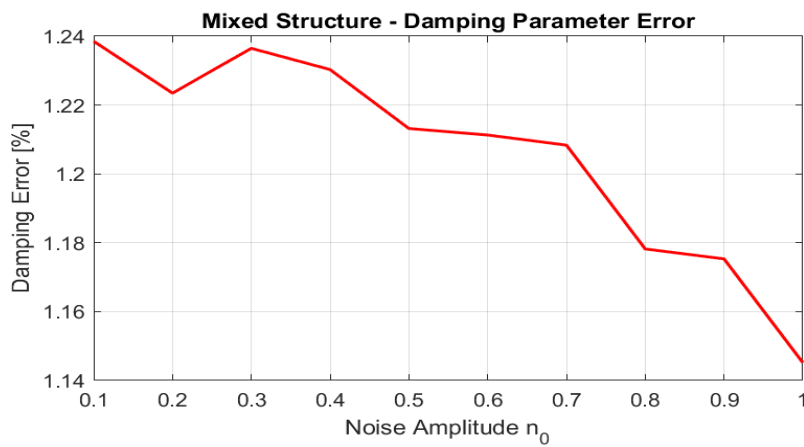
Στο πάνω διάγραμμα που αναφέρεται στην δομή Μ (όπως και στο διάγραμμα 35) παρατηρούμε μικρή αύξηση του σφάλματος εκτίμησης με την αύξηση του πλάτους. Το γεγονός ότι η αύξηση που παρατηρείται είναι μικρή οφείλεται τόσο στο ίδιο το μοντέλο (και στην επιλογή των  $\gamma$  και  $\theta_m$ ) όσο και στο γεγονός ότι για τον υπολογισμό της τελικής εκτίμησης παίρνουμε (όπως ήδη αναφέραμε) τον μέσο όσο των τελευταίων 5 εκτιμήσεων. Προφανώς σε αυτό και η ίδια η συχνότητα του θορύβου παίζει σημαντικό ρόλο, μιας και για διαφορετικές συχνότητες η απόκριση δεν είναι πάντα η ίδια.



- Για την  $\hat{b}(t)$



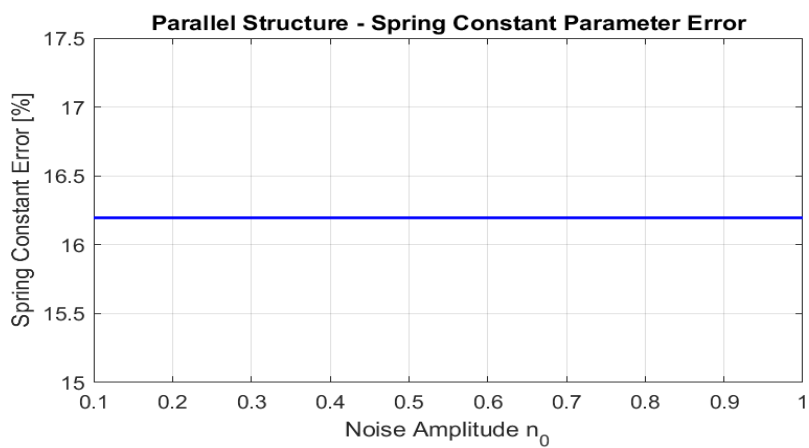
Σχήμα 32



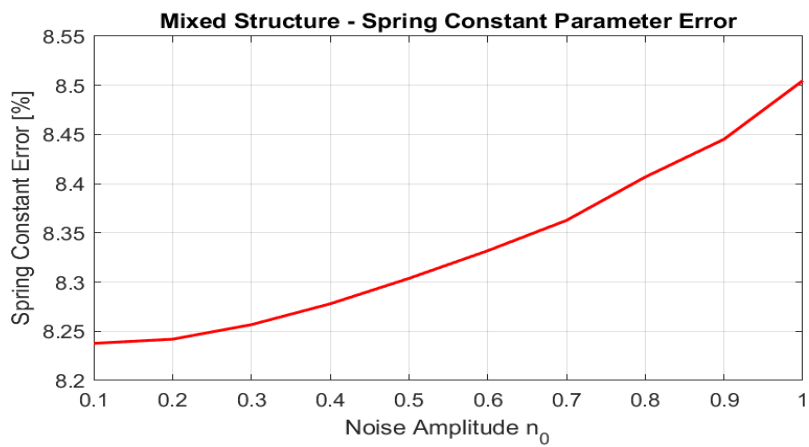
Σχήμα 33

Εδώ βλέπουμε ότι με την αύξηση του πλάτους υπάρχει μια πολύ μικρή καθοδική τάση του σφάλματος. Αυτό όμως προέκυψε λόγω του μοντέλου που έχουμε για την συγκεκριμένη μορφή ημιτονοειδούς θορύβου. Αυξάνοντας εκ νέου για παράδειγμα το πλάτος (ή αλλάζοντας κάποιες από τις τιμές των  $\gamma$  και  $\theta_m$ ) θα δούμε ότι και πάλι μπορεί να έχουμε αύξηση του σφάλματος με το πλάτος.

- Για την  $\hat{k}(t)$



Σχήμα 34



Σχήμα 35