Τεχνικές Βελτιστοποίησης - 3η Εργαστηριακή Άσκηση

Αριστείδης Δασκαλόπουλος (AEM: 10640)

5 Δεκεμβρίου 2024

Γενική Περιγραφή Προβλήματος

Στόχος: *Εύρεση ελαχίστου δοσμένης συνάρτησης $f(x_1, x_2)$ με την Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή.*

Πιο συγκεκριμένα, θα υλοποιήσουμε τις μεθόδους:
- Μέγιστης Καθόδου Χωρίς Περιορισμούς (προηγούμενη εργασία)
- Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

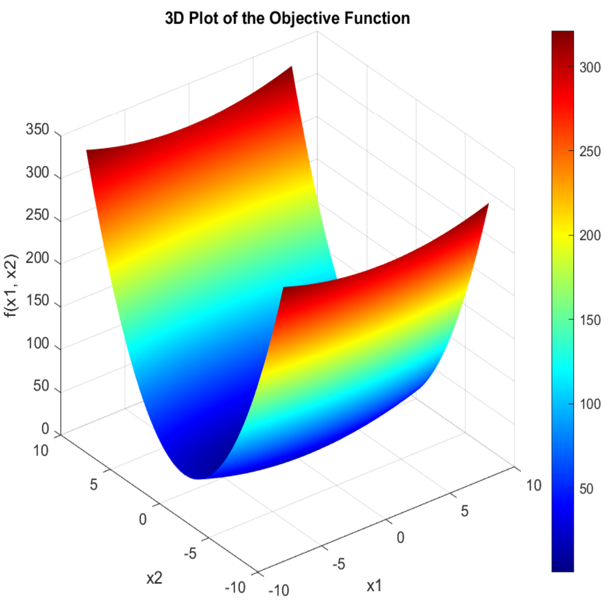
με στόχο να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτών.

Συνοπτική θεωρητική παρουσίαση της συνάρτησης

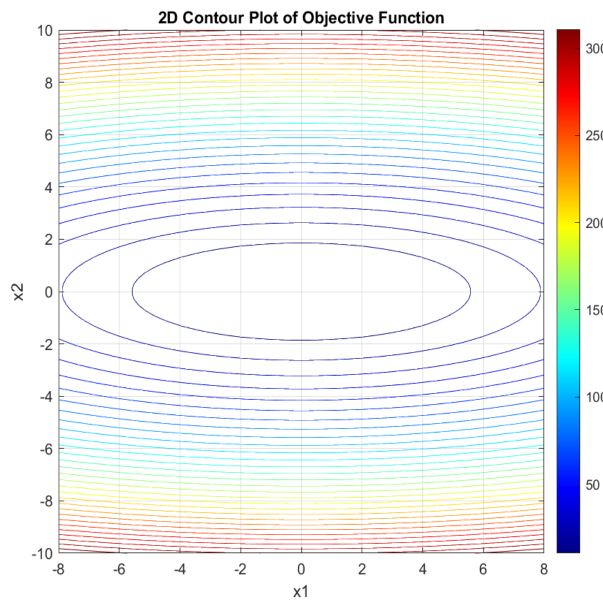
Η συνάρτηση που στην συνέχεια της αναφοράς θα μελετήσουμε είναι:

$$f : \Re^2 \to \Re, \quad f(x) = \frac{1}{3}{x_1}^2 + 3{x_2}^2, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$$

με σύνολο περιορισμών $X = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \Re^2 : \quad -10 \leq x_1 \leq 5, \quad -8 \leq x_2 \leq 12\} \subset \Re^2$.



(α') 3D$-f(x_1, x_2)$



(β') 2D$-f(x_1, x_2)$

Ο κώδικας για την σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων υπάρχει στο αρχείο `matlabCode/mainPlotF.m`

Για την συνάρτηση αυτή έχουμε πως είναι κυρτή στο (κυρτό) σύνολο X, με το ελάχιστο που ψάχνουμε να είναι στο σημείο $(0, 0)$, στο οποίο η f παίρνει τιμή: 0 - μιας και παίρνοντας το gradient για την συνάρτησή μας έχουμε:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot x_1 \\ 6 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

και λύνοντας το $\nabla f = 0$ έχουμε αποτέλεσμα μονο το σημεία $(0, 0)$.

Ο Εσσιανός πίνακας $H(x) = \nabla^2 f$ προκύπτει:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.\bar{3}3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

άρα είναι φανερό πως οι ιδιοτιμές ισούνται με: $\lambda_{\min} = 0.\bar{3}3, \quad \lambda_{\max} = 6$. Βλέπουμε πως ο εσσιανός είναι θετικά ορισμένος, επομένως το κρίσιμο σημείο που βγάλαμε αποτελεί το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Η παραπάνω ανάλυση θα μας χρησιμεύσει στην εξήγηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν στα θέματα. Στην συνέχεια της αναφοράς για κάθε θέμα θα παρουσιάσουμε/εξηγήσουμε τα αποτελέσματα που ζητούνται, απαντώντας ταυτόχρονα στα ερωτήματα των θεμάτων.

Θέμα 1

Μαθηματική Ανάλυση (Steepest Descent Χωρίς Περιορισμούς)

Αρχικά θα εξηγήσουμε/αποδείξουμε θεωρητικά για ποιες τιμές του **σταθερού** γ_k περιμένουμε σύγκλιση της μεθόδου στο ελάχιστο. Αρχικά έχουμε ότι κάθε επόμενο σημείο x_{k+1} υπολογίζεται ως εξής: $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)$.

Για να συγκλίνει η μέθοδος πρέπει να ισχύει σε **κάθε** επανάληψη:

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)}{x_k}\right| < 1$$

όπου - αντικαθιστώντας τον τύπο της ∇f που βγάλαμε στην προηγούμενη ανάλυση - *για κάθε συνιστώσα* παίρνουμε:

$$\begin{matrix} \left|1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k\right| < 1 \\ |1 - 6\gamma_k| < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 < \gamma_k < 3 \\ 0 < \gamma_k < \frac{1}{3} = 0.3\bar{3} \end{bmatrix}$$

Έπεται πως για σύγκληση και στις δύο συνιστώσες με σταθερό βήμα γ_k πρέπει να ισχύει $\gamma_k \in (0, 0.3\bar{3})$.

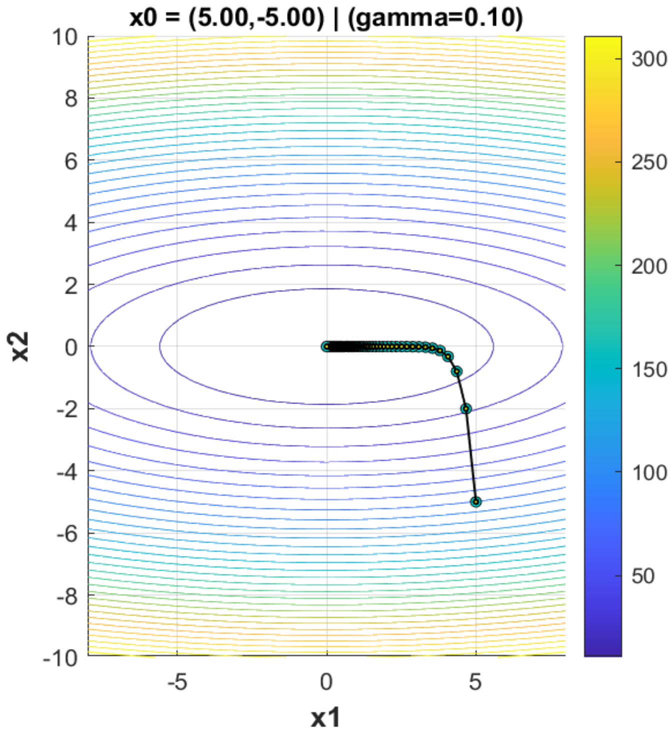
Επίσης, λύνοντας την αναδρομή για να βρούμε τα $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$ έχουμε ότι:

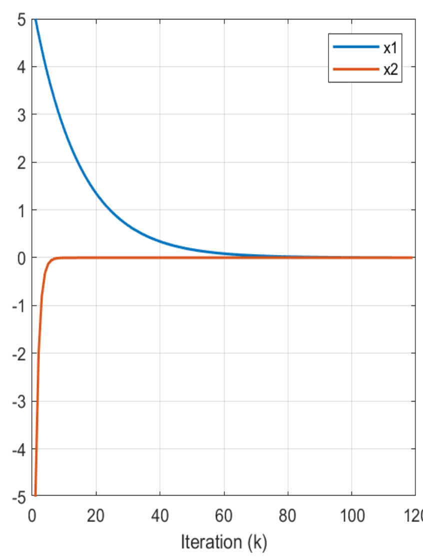
$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot (1 - 2/3 \cdot \gamma)^k \\ x_{2,0} \cdot (1 - 6 \cdot \gamma)^k \end{bmatrix}$$

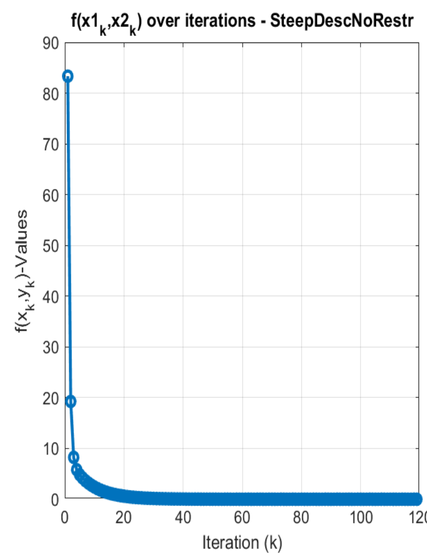
Φανερό είναι και από αυτούς τους τύπους πως για να συγκλίνουν και οι δύο συνιστώσες πρέπει $\gamma_k \in (0, 0.3\bar{3})$. Τέλος, με τις σχέσεις αυτές μπορούμε να εξηγήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο θα συγκλίνει η κάθε συνιστώσα στο μηδέν (ανάλογα με το πόσο κοντά στο μηδέν είναι η κάθε ποσότητα/συντελεστής που υψώνουμε στην k-οστη δύναμη).

Από την παραπάνω ανάλυση για την κάθε συνιστώσα βλέπουμε ότι η μέθοδος - αν συγκλίνει - συγκλίνει για οποιοδήποτε αρχικό σημείο x_0. Επιλέγουμε για αρχικό σημείο το $(5, -5)$ και τρέχουμε τον αλγόριθμο για τις διάφορες τιμές του γ_k:

i) $\gamma_k = 0.1$





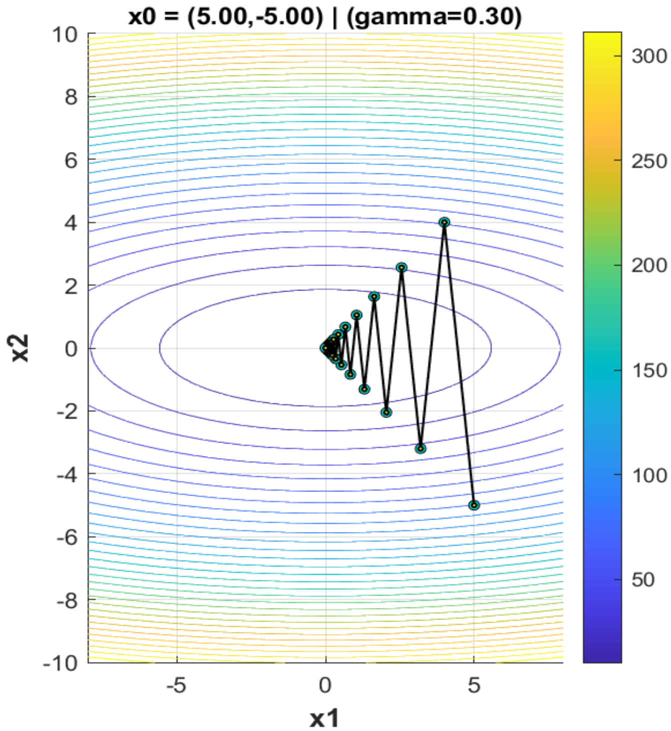


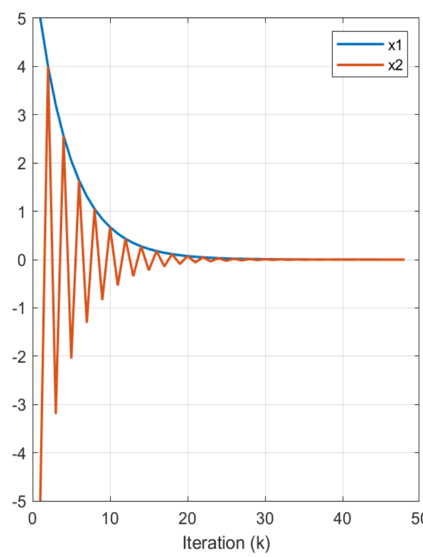
Όπως περιμέναμε ήδη από την θεωρητική ανάλυση ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο καθώς $\gamma_k \in (0, 0.3\bar{3})$. Επίσης βλέπουμε την συνιστώσα $x_{2,k}$ να συγκλίνει ταχύτερα στο μηδέν μιας και οι συντελεστές είναι:

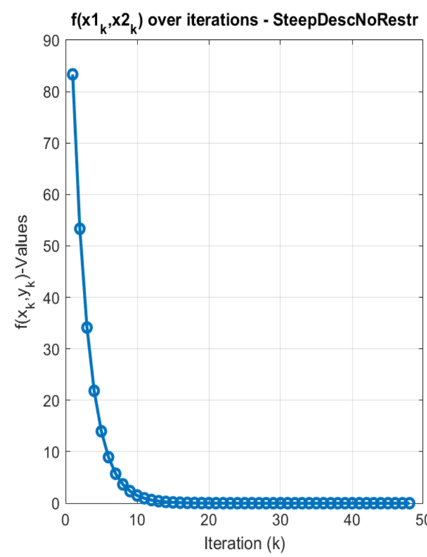
$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot (0.9\bar{3})^k \\ x_{2,0} \cdot (0.4)^k \end{bmatrix}$$

Μικρότερος *κατά μέτρο* συντελεστής προκαλεί ταχύτερη σύγκλιση (όταν είναι και μικρότερος της μονάδας προφανώς), μιας και παρέχει ταχύτερη μείωση της τιμής στο μηδέν ανά επανάληψη.

ii) $\gamma_k = 0.3$





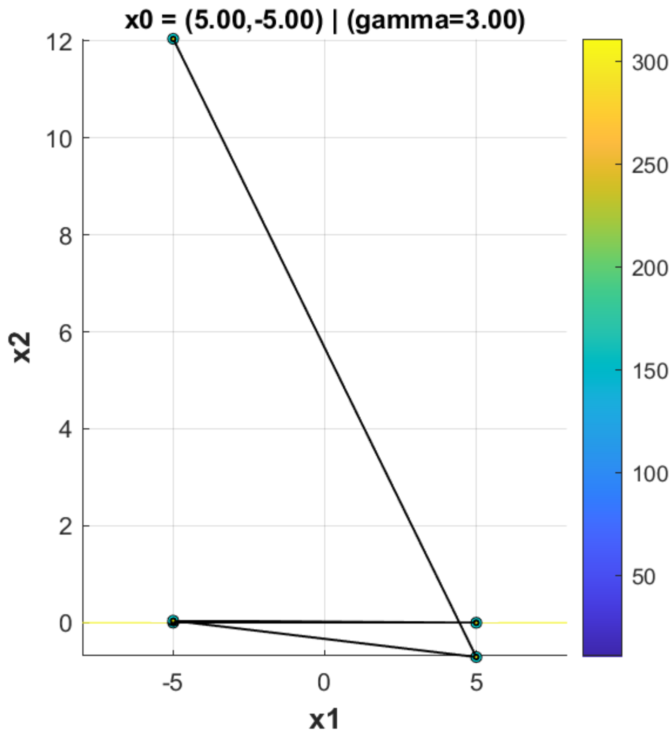


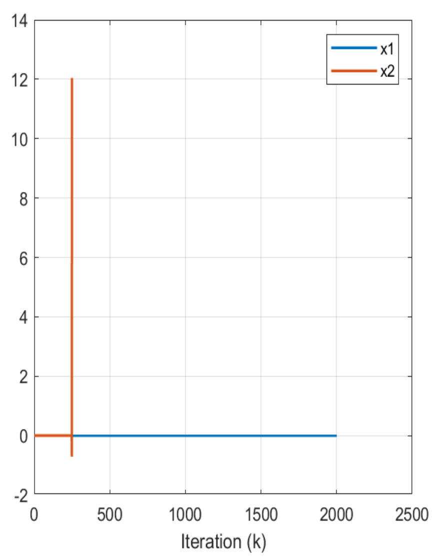
Ομοίως, ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο καθώς $\gamma_k \in (0, 0.3\bar{3})$, με τις δύο συνιστώσες να συγκλίνουν με την ίδια ταχύτητα (ίδιος κατά μέτρο ρυθμός/συντελεστής για την σύγκλιση) - όμως ο $x_{2,k}$, επειδή έχει αρνητική τιμή συντελεστή, ταλαντώνεται (αλλάζει πρόσημο σε κάθε επανάληψη) έως ότου να "φτάσει"/αποσβέσει στην τελική τιμή του.

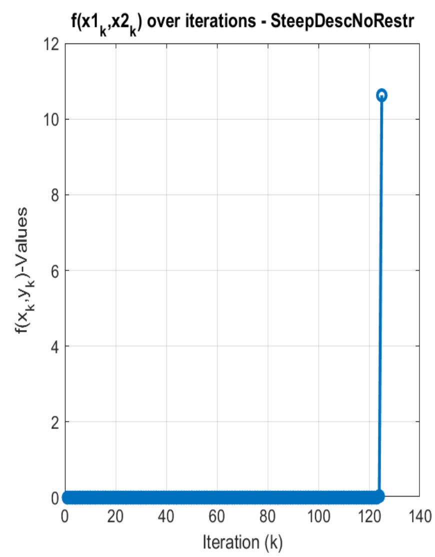
$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot (0.8)^k \\ x_{2,0} \cdot (-0.8)^k \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως με αυτό το βήμα απαιτούνται κάτω από τις μισές επαναλήψεις σε σχέση με το προηγούμενο (δεν αλλάξαμε το αρχικό σημείο), καθώς εδώ ο ρυθμός σύγκλισης είναι μεγαλύτερος (στην προηγούμενη περίπτωση ο πιο αργός ρυθμός καθόριζε την ταχύτητα σύγκλισης).

iii) $\gamma_k = 3$





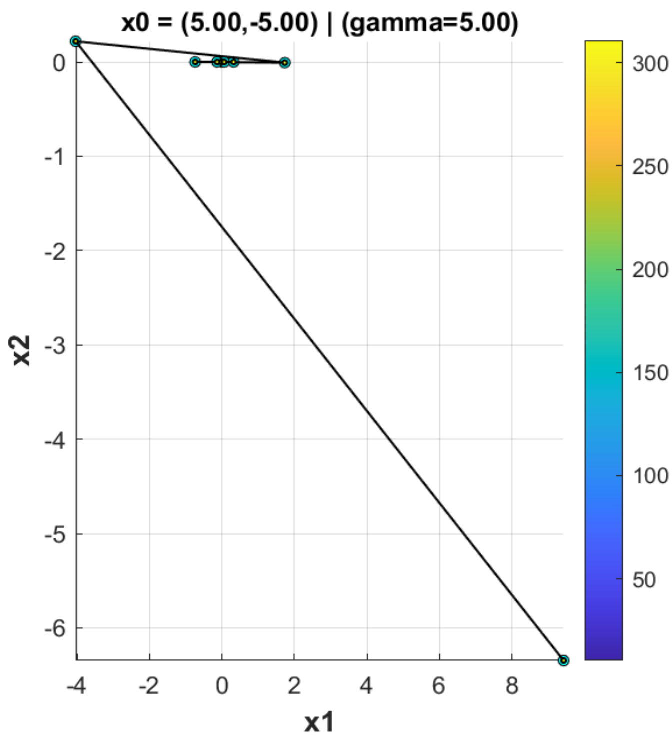


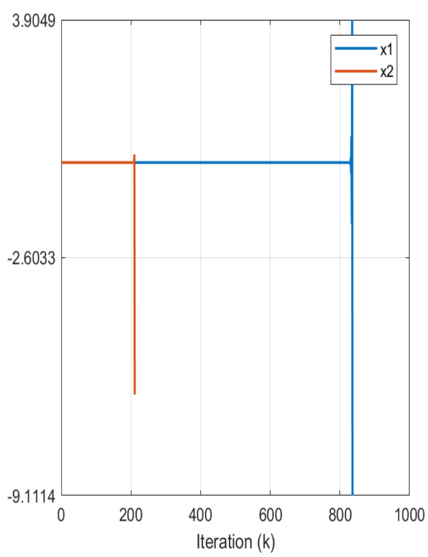
Όπως περιμέναμε ήδη από την θεωρητική ανάλυση ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει καθώς $\gamma_k > 0.3\bar{3}$. Επίσης βλέπουμε την συνιστώσα $x_{1,k}$, έχοντας συντελεστή -1, να πάλλεται μεταξύ $x_{1,0}$ και $-x_{1,0}$, ενώ η $x_{2,k}$ αποκλίνει μιας και έχει συντελεστή $-17 < -1$.

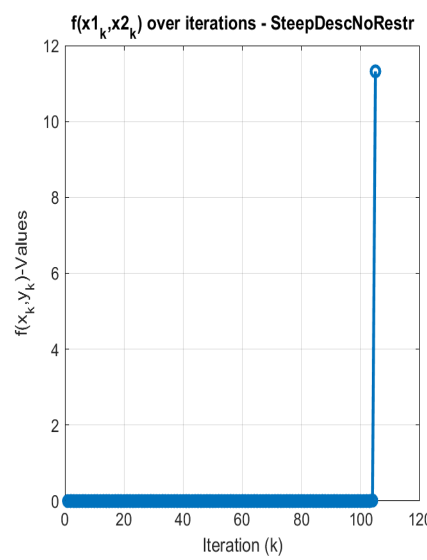
$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot (-1)^k \\ x_{2,0} \cdot (-17)^k \end{bmatrix}$$

Θα μπορούσαμε στις γραφικές παραστάσεις να κάνουμε "handle" τους πολύ μεγάλους αριθμούς που προκύπτουν, όμως ήδη από τα διαγράμματα αυτά είναι φανερή η μη σύγκλιση του αλγορίθμου.

iv) $\gamma_k = 5$







Ομοίως ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει καθώς $\gamma_k > 0.3\bar{3}$. Εδώ βλέπουμε πως και οι δύο συνιστώσες αποκλίνουν από το ζητούμενο σημείο μιας και έχουν συντελεστές κατά μέτρο μεγαλύτερους της μονάδας.

$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot (-2.3\bar{3})^k \\ x_{2,0} \cdot (-29)^k \end{bmatrix}$$

Έχουμε δώσει στον αλγόριθμο ένα όριο επαναλήψεων (στις 2000) ώστε να μην έχουμε infinite loop. Στα διαγράμματα όμως δεν εμφανίζονται όλες οι τιμές για κάθε επανάληψη καθώς για πολύ μεγάλο πλήθος επαναλήψεων το MATLAB θεωρεί το αριθμητικά μεγάλο αποτέλεσμα άπειρο (ή NaN).

Θέμα 2

Μαθηματική Ανάλυση (Steepest Descent με Προβολή)

Η θεωρητική ανάλυση της μεθόδου είναι κοινή για όλα τα επόμενα θέματα.

Όπως ήδη αναφέραμε και στην αρχή το σύνολο περιορισμών X είναι το:

$$\{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \Re^2 : \quad -10 \leq x_1 \leq 5, \quad -8 \leq x_2 \leq 12\} \subset \Re^2,$$

και είναι κυρτό (καθώς τα σημεία του σχηματίζουν ένα ορθογώνιο), με το ελάχιστο $(0,0)$ να ανήκει εντός του συνόλου. Άρα μπορούμε να ακολουθήσουμε τα βήματα του αλγορίθμου 6.1.1 (Αλγόριθμοι με Προβολή - σελ.200), χρησιμοποιώντας για το Βήμα 2 την μέθοδο Steepest Descent χωρίς περιορισμούς.

Αναλυτικότερα, στην υλοποίησή μας υπολογίζουμε το $\bar{x}_k = Pr_X\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\}$, ενώ για το επόμενο σημείο, x_{k+1}, παίρνουμε:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k \cdot (\bar{x}_k - x_k)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις για σημεία $(x_k - s_k \nabla f(x_k)) \in X \Rightarrow \bar{x}_k = x_k - s_k \nabla f(x_k)$. Έπεται:

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k \left(Pr_X\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\} - x_k\right) = x_k + \gamma_k \left(x_k - s_k \nabla f(x_k) - x_k\right) = x_k - \gamma_k s_k \cdot \nabla f(x_k)$$

Άρα για σημεία **εντός** του X, η μέθοδος που εφαρμόζουμε υπολογίζει το επόμενο σημείο x_{k+1}, με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως δείξαμε και για την Steepest Descent χωρίς περιορισμούς, με μόνη διαφορά ότι αυτήν την φορά έχουμε $\gamma_{k,new} = \gamma_k \cdot s_k$.

Ο τρόπος με τον οποίο προβάλουμε το $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ στο X φαίνεται παρακάτω για καθεμία από τις συνιστώσες (έχοντας αντικαταστήσει και το $\nabla f(x_k)$ σε κάθε συνιστώσα):

$$\bar{x}_{1,k} = \begin{cases} -10 & \text{if } x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\right) < -10, \\ x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\right) & \text{if } -10 \leq x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\right) \leq 5, \\ 5 & \text{if } x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\right) > 5. \end{cases}$$

$$\bar{x}_{2,k} = \begin{cases} -8 & \text{if } x_{2,k}\left(1 - 6s_k\right) < -8, \\ x_{2,k}\left(1 - 6s_k\right) & \text{if } -8 \leq x_{2,k}\left(1 - 6s_k\right) \leq 12, \\ 12 & \text{if } x_{2,k}\left(1 - 6s_k\right) > 12. \end{cases}$$

Βλέπουμε λοιπόν πως στις περιπτώσεις όπου τα σημεία δεν βρίσκονται εντός του X, τα προβάλουμε σε αυτό, μη επιτρέποντας να αποκλίνουν από το κυρτό σύνολο. Με τη μέθοδο προβολής πρακτικά πετυχαίνουμε σύγκλιση του αλγορίθμου με μεγαλύτερο βήμα γ. Βέβαια, αυτό δεν συνεπάγεται ότι ο αλγόριθμος πάντα μπορεί να συγκλίνει, όμως μας εξασφαλίζει ότι θα παραμένουμε πάντα εντός του κυρτού συνόλου.

Όταν η προβολή βρίσκεται εντός του κυρτού συνόλου για τα $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$, τα updates για την $(k+1)$ επανάληψη δίνονται από (αντικαθιστούμε στην πάνω σχέση του x_{k+1} την τιμή του $\nabla f(x_k)$ σε κάθε συνιστώσα):

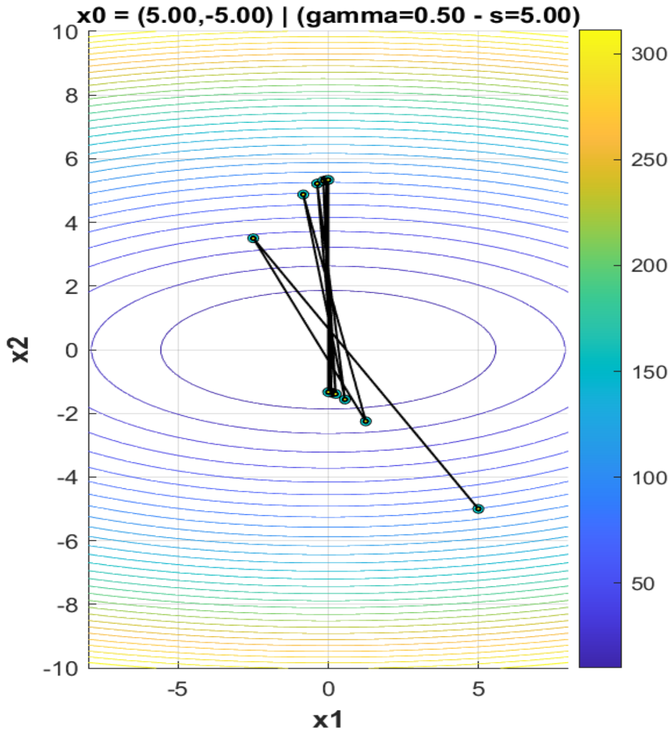
$$x_{1,k+1} = x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\gamma_k\right), \quad x_{2,k+1} = x_{2,k}\left(1 - 6s_k\gamma_k\right).$$

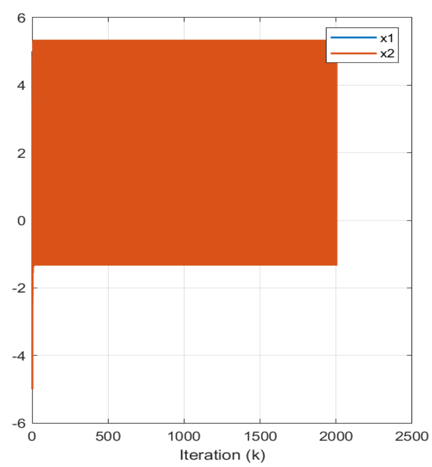
Συνεπώς, όταν η προβολή παραμένει εντός του κυρτού συνόλου, ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

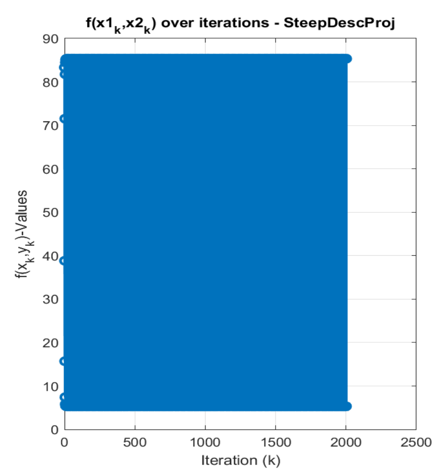
$$\left|\frac{x_{1,k+1}}{x_{1,k}}\right| < 1 \implies 0 < s_k\gamma_k < 3, \quad \left|\frac{x_{2,k+1}}{x_{2,k}}\right| < 1 \implies 0 < s_k\gamma_k < \frac{1}{3}.$$

Από εδώ είναι φανερή η ομοιότητα των συνθηκών με την προηγούμενη περίπτωση κατά την οποία δεν είχαμε περιορισμούς.

Θέμα2: $x_0 = (5, -5), s_k = 5, \gamma_k = 0.5$





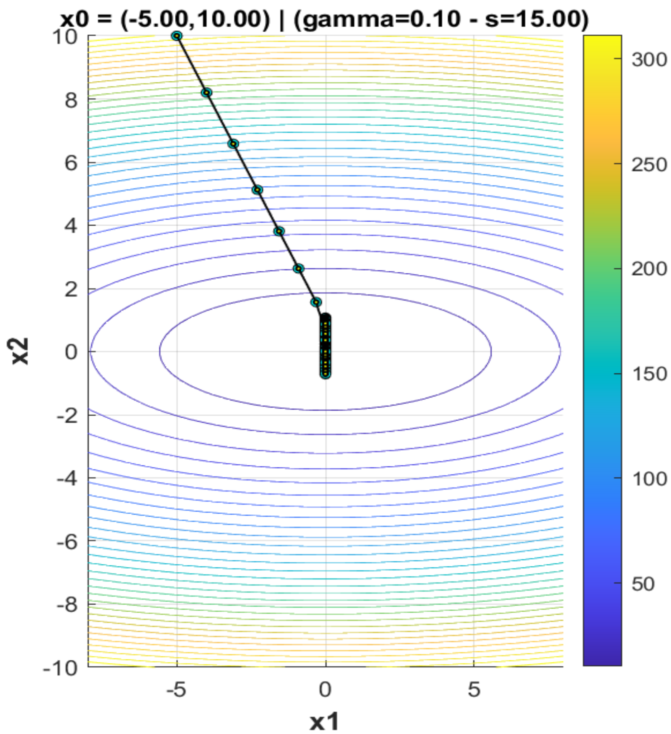


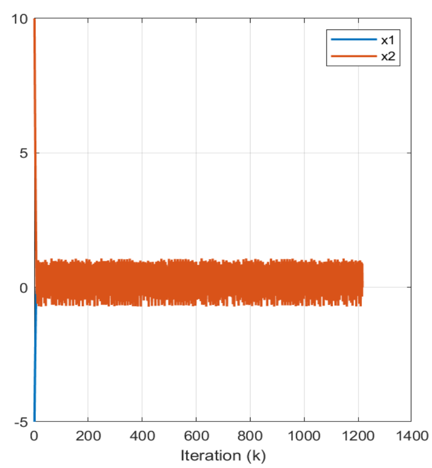
Όπως περιμέναμε ήδη από την θεωρητική ανάλυση ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, καθώς $\gamma_k \cdot s_k = 2.5 > 0.\bar{33}$. Επίσης, για την συνιστώσα $x_{1,k}$, έχοντας συντελεστή $-0.\bar{66}$, έχουμε ταλάντωση (λόγω αρνητικού συντελεστή) που εν τέλη συγκλίσει στο 0, ενώ η $x_{2,k}$ αποκλίνει (μιας και έχει συντελεστή $-14 < -1$).

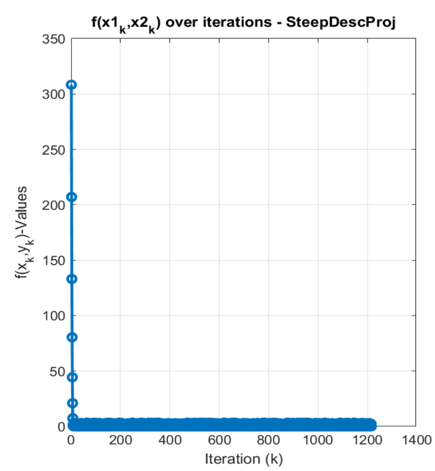
Σε αντίθεση όμως με το Θέμα 1 (στο οποίο όταν είχαμε συντελεστή μέτρου μεγαλύτερου της μονάδας σε κάποια συνιστώσα, βλέπαμε αυτήν να αποκλίνει διαρκώς προς το άπειρο) εδώ είναι εμφανές από τα διαγράμματα πως δεν επιτρέπουμε την $x_{2,k}$ να παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες τιμές - με αποτέλεσμα η $x_{2,k}$ συνιστώσα να ταλαντώνεται εν τέλη μεταξύ των $\{-1.\bar{33}, 5.\bar{33}\} \in [-8, 12]$.

Τα σημεία x_k βρίσκονται επομένως πάντα μέσα στο χωρίο X. Για $x_{2,k} = -1.\bar{33}$, έχουμε $\bar{x}_{2,k} = 12$ καθώς $-1.\bar{33} \cdot (1 - 6 \cdot 5) > 12$, επομένως $x_{2,k+1} = -1.33 + 0.5 \cdot (12 + 1.33) = 5.33$ (ομοίως αποδεικνύουμε και ότι από $5.\bar{33}$ πάμε στο $-1.\bar{33}$).

Θέμα3: $x_0 = (-5, 10), s_k = 15, \gamma_k = 0.1$







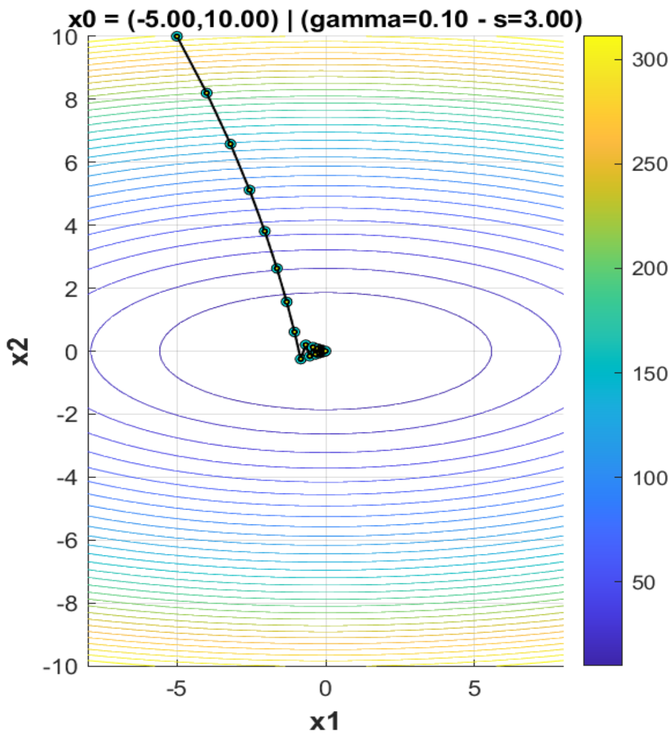
Ο αλγόριθμος, για το tolerance που ζητάμε συγκλίνει στο ελάχιστο (τυχαίνει σε αυτήν την περίπτωση - δεν είναι βέβαιο από την θεωρία ότι θα έχουμε σύγκλιση), αλλά και πάλι απαιτεί σημαντικό αριθμό επαναλήψεων. Αντίθετα, η συνιστώσα $x_{1,k}$ φτάνει στο μηδέν πολύ γρήγορα, όπως φαινεται και από το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών. Αυτή η γρήγορη σύγκλιση για αυτήν μόνο την συνιστώσα οφείλεται στην επιλογή των s_k και γ_k που μόνο για αυτήν την συνιστώσα ικανοποιούν την συνθήκη σύγκλισης που δώσαμε στην μαθηματική ανάλυση. Όταν η προβολή $\bar{x}_{1,k}$ βρίσκεται εντός του κυρτού συνόλου, ισχύει η εξίσωση:

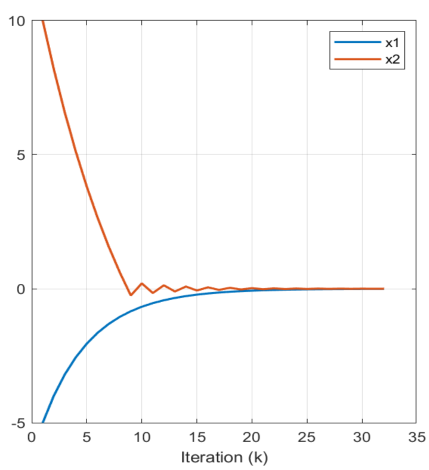
$$x_{1,k+1} = x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\gamma_k\right),$$

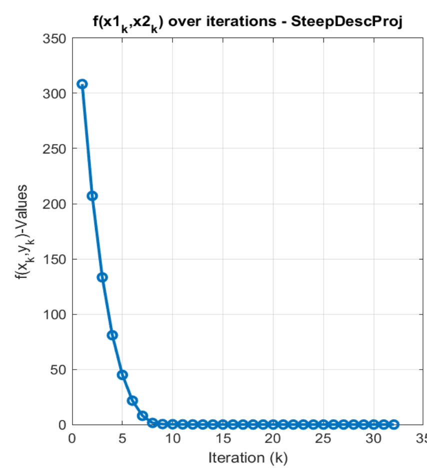
και με $s_k\gamma_k = 1.5$, η τιμή του $x_{1,k+1}$ γίνεται απευθείας 0. Ωστόσο, η συνιστώσα $x_{2,k}$ απαιτεί πολύ περισσότερες επαναλήψεις για να φτάσει στο 0 (τερματίζοντας τον αλγόριθμο νωρίτερα δεν θα βλέπαμε ότι μετά από αρκετές επαναλήψεις και προβολές φτάνει στο ελάχιστο). Στην θεωρία δεν φτάνουμε ποτέ στο ελάχιστο για αυτήν την συνιστώσα. Ο λόγος για τον οποίο ο αλγόριθμος σταμάτησε είναι αποκλειστικά επειδή για κάποια επανάληψη έτυχε το σημείο να πέσει *αρκούντως κοντά στο* 0, ώστε για το δεδομένο tolerance (ϵ) να σταματάμε.

Και πάλι, σε αντίθεση με το Θέμα 1, όπου η μη σύγκλιση οδηγούσε σε συνεχή αύξηση των τιμών πέρα από τα όρια του συνόλου, εδώ, η προβολή εμποδίζει την $x_{2,k}$ να υπερβεί το δεδομένο διάστημα.

Ο απλούστερος τρόπος να κάνουμε σε εύλογο αριθμό επαναλήψεων την μέθοδο να συγκλίνει - για το δεδομένο αρχικό σημείο και tolerance - είναι να αλλάξουμε την τιμή του γινομένου $s_k \cdot \gamma_k$ έτσι, ώστε να αποκτήσει τιμή μικρότερη του $0.\overline{33}$. Επιλέγουμε επομένως: $s_k = 3$, ώστε $s_k \cdot \gamma_k = 0.3$. Με αυτήν την αλλαγή γνωρίζουμε από την θεωρητική ανάλυση πως σίγουρα θα έχουμε σύγκλιση:







Προφανώς υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί συνδυασμοί των s_k και γ_k που οδηγούν σε σύγκλιση. Με το να κρατάμε το γινόμενο των δύο κοντά στο $0.\overline{33}$ (και πάντα χαμηλότερα από αυτό) κρατάμε μικρό τον αριθμό των επαναλήψεων που θα απαιτηθούν για να φτάσουμε στο ελάχιστο - εδώ βλέπουμε ότι φτάσαμε στο ελάχιστο σε κάτω από 35 επαναλήψεις.

Αν μας επιτρέπονταν να αλλάξουμε το αρχικό σημείο, θα μπορούσαμε επίσης να το τοποθετήσουμε πάνω στην ευθεία $x_2 = 0$, πχ $(-5, 0)$, ώστε να μην μας επηρεάζει η μη σύγκλιση της $x_{2,k}$ (αν ξεκινάει από μηδέν μια συνιστώσα εύκολα βλέπουμε, από τους τύπους που βγάλαμε για τις αναδρομές σε κάθε συνιστώσα, ότι παραμένει πάντα μηδέν). Τότε δεν θα χρειάζονταν να αλλάξουμε τις τιμές των s_k ή γ_k.

Θέμα4: $x_0 = (8, -10), s_k = 0.1, \gamma_k = 0.2$

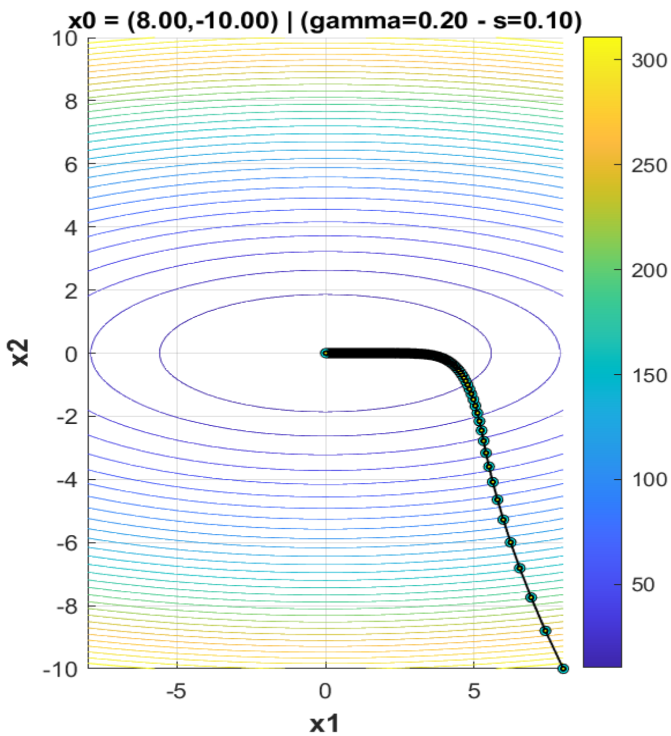
Αυτήν την φορά βλέπουμε πως το σημείο είναι αρχικά εκτός του χωρίου X, όμως με την πρώτη επανάληψη θα πάρουμε τις προβολές των συνιστωσών για τα $\bar{x}_{1,k}$ και $\bar{x}_{2,k}$ (όπως δείξαμε στην θεωρητική ανάλυση), συνεπώς θα αρχίσουμε να κινούμαστε σε κάθε επανάληψη προς το χωρίο. Όταν τα $\bar{x}_{1,k}$ και $\bar{x}_{2,k}$ βρεθούν εντός του κυρτού συνόλου, θα ισχύουν οι σχέσεις για τις επόμενες επαναλήψεις που βγάλαμε:

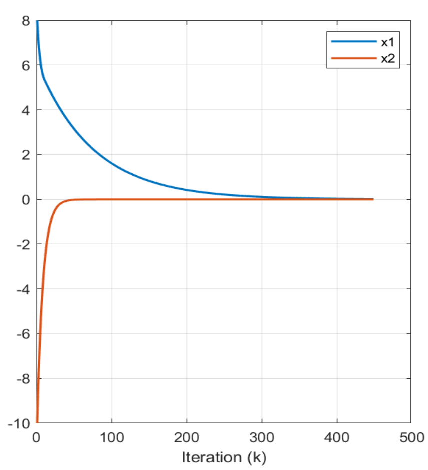
$$x_{1,k+1} = x_{1,k}\left(1 - \frac{2}{3}s_k\gamma_k\right), \quad x_{2,k+1} = x_{2,k}\left(1 - 6s_k\gamma_k\right).$$

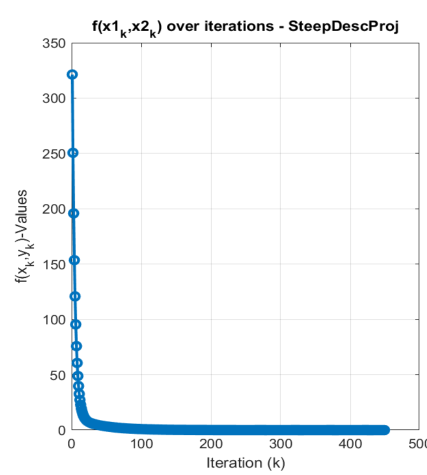
Επομένως, εξασφαλίζεται σύγκλιση στο $(0, 0)$, δεδομένου ότι $\gamma_k s_k = 0.02 < 0.33$. Αντικαθιστώντας προκύπτουν:

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} \cdot 0.9866, \quad x_{2,k+1} = x_{2,k} \cdot 0.88.$$

Αυτές οι σχέσεις δείχνουν τη σταδιακή/αργή μείωση των $x_{1,k}$ και $x_{2,k}$ μέχρι να συγκλίνουν στο μηδέν. Επίσης, δεδομένου ότι το $x_{2,k}$ έχει μικρότερο συντελεστή, όπως βλέπουμε και στο αντίστοιχο διάγραμμα, συγκλίνει ταχύτερα στο 0.







Όπως περιμέναμε ο αλγόριθμος συγκλίνει σχετικά αργά - σε 448 επαναλήψεις, καθώς $\gamma_k \cdot s_k = 0.02$ αρκετά μικρότερο $0.\overline{33}$ (πολύ μικρά βήματα προς την λύση - πολύ μεγάλος συντελεστής για την σύγκλιση στην πάνω σχέση του $x_{1,k+1}$).