

# DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

2023-11-11

## ÍNDICE

DISTRIBUCIONES DISCRETAS . . . . .	2
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL . . . . .	2
DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA . . . . .	4
DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA . . . . .	5
DISTRIBUCIÓN DE POISON . . . . .	6
DISTRIBUCIONES CONTINUAS . . . . .	7
DISTRIBUCIÓN UNIFORME . . . . .	7
DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL . . . . .	7

# DISTRIBUCIONES DISCRETAS

## DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Mide el número de éxitos en una secuencia de  $n$  ensayos de Bernoulli independientes entre sí con una probabilidad  $p$  de éxito entre los ensayos.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Es la probabilidad de tener  $x$  éxitos en  $n$  ensayos.

### EJEMPLO

La probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste un triple es del 30 %, es decir,  $p = 0.3$ . Suponemos que lanza 5 veces,  $n = 5$ .

- a) Si queremos calcular la probabilidad de que enceste tres tiros ( $P(X = 3)$ ):

```
dbinom(3, size = 5, prob = 0.3)
```

```
## [1] 0.1323
```

- b) Si queremos calcular todas las probabilidades de golpe en forma de tabla:

```
RBinom <- data.frame(Pr = dbinom(0:5, size = 5, prob = 0.3))
rownames(RBinom) <- 0:5
RBinom
```

```
##      Pr
## 0 0.16807
## 1 0.36015
## 2 0.30870
## 3 0.13230
## 4 0.02835
## 5 0.00243
```

- c) La probabilidad de encestar más de 3 triples ( $P(X \geq 3)$ ):

```
pbinom(3, size = 5, prob = 0.3, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.03078
```

- d) Si queremos saber todas las probabilidades acumuladas (más de 0, más de 1, ...), calculamos la cola derecha ( $P(X > x)$ ):

```
pbinom(0:5, size = 5, prob = 0.3, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.83193 0.47178 0.16308 0.03078 0.00243 0.00000
```

- e) Si queremos calcular las colas izquierdas ( $P(X \leq x)$ ), esto es, la probabilidad de encestar menos de 1, menos de 2, ...:

```
pbinom(0:5, size = 5, prob = 0.3, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.16807 0.52822 0.83692 0.96922 0.99757 1.00000
```

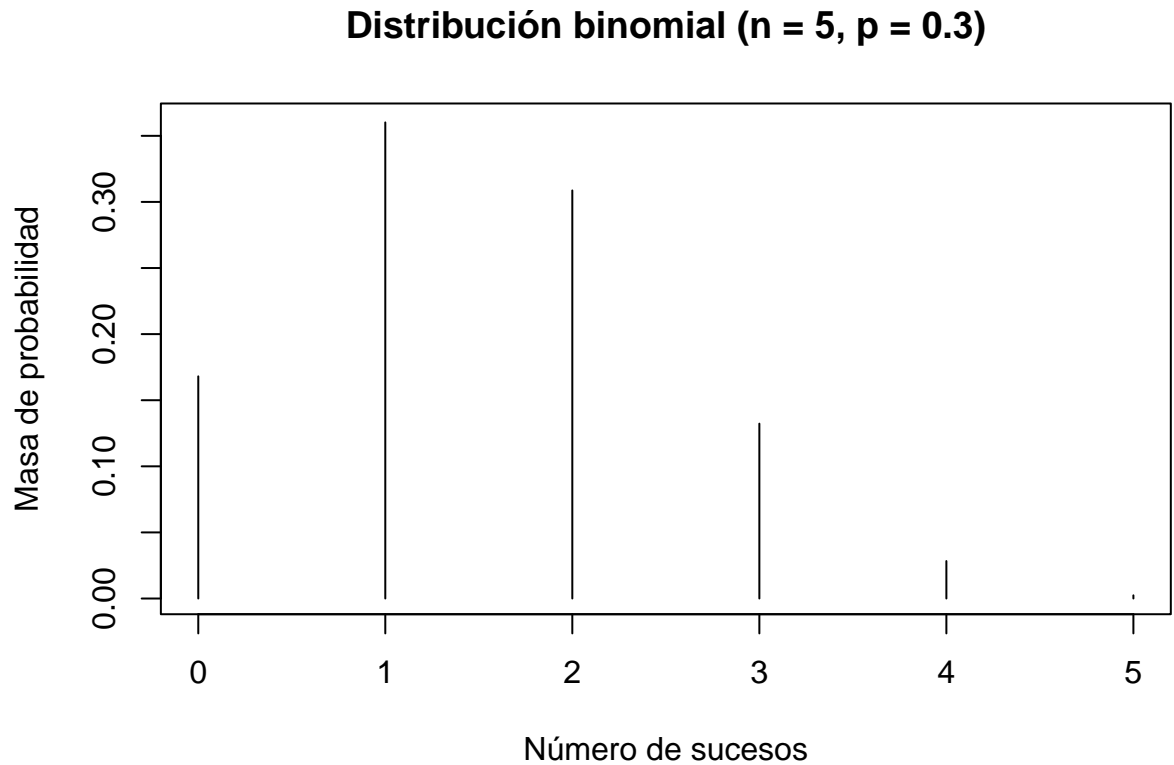
- f) La probabilidad de encestar menos de dos tiros ( $P(X \leq 1)$ ):

```
pbinom(1, size = 5, prob = 0.3, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.52822
```

g) Para representar gráficamente la función de probabilidad:

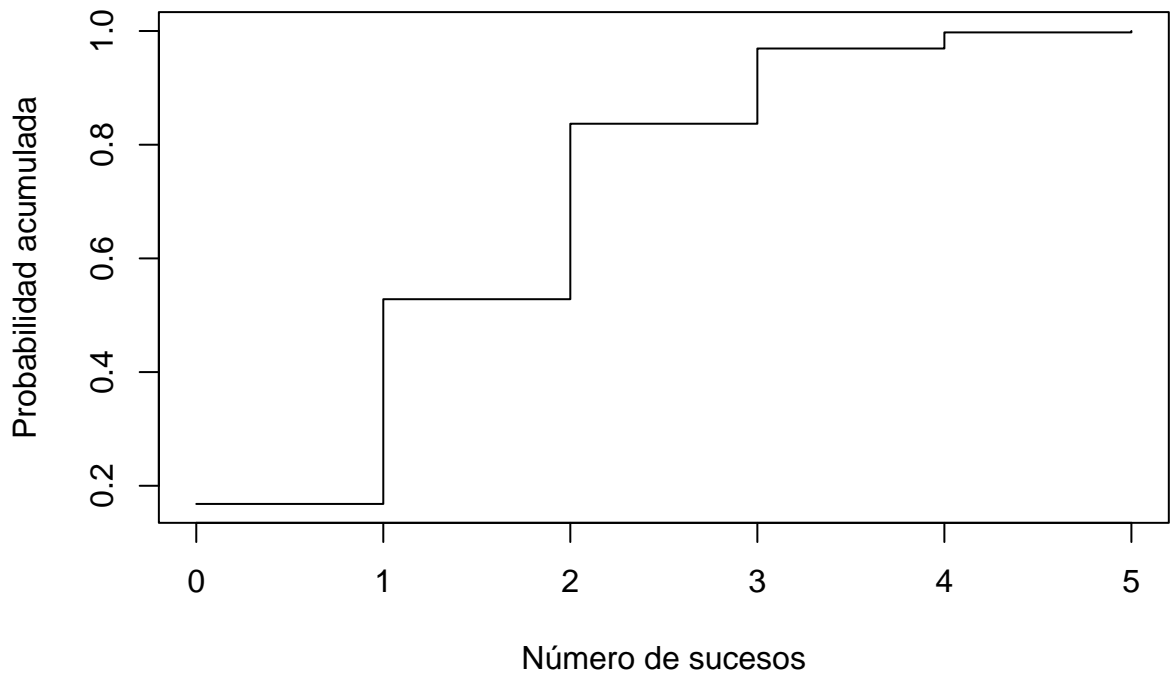
```
x <- 0:5
Binom_plot <- dbinom(x, size = 5, prob = 0.3)
plot(x, Binom_plot, main = "Distribución binomial (n = 5, p = 0.3)",
     xlab = "Número de sucesos", ylab = "Masa de probabilidad",
     type = "h")
```



h) Para representar gráficamente la función de probabilidad acumulada:

```
x <- 0:5
Acum <- pbinom(x, size = 5, prob = 0.3)
plot(x, Acum, main = "Distribución binomial (n = 5, p = 0.3)",
     xlab = "Número de sucesos", ylab = "Probabilidad acumulada",
     type = "s")
```

## Distribución binomial (n = 5, p = 0.3)



## DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Describe la probabilidad del número de ensayos de Bernoulli necesarios para obtener un éxito.

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$$

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - (1 - p)^x$$

En este caso,  $x$  es el número de intento en el que el jugador tendrá éxito (encestará el triple) y  $p$  es la probabilidad de encestar.

### EJEMPLO

Definimos una variable aleatoria  $X$ , que será el número del intento en el que el jugador encesta el primer triple, es decir, el número de ensayos necesarios hasta encestar.

- a) Si queremos saber la probabilidad de que el primer triple que enceste sea en el sexto intento con una probabilidad de encestar de  $p = 0.3$  ( $P(X \leq 6) = F(6)$ ):

```
pgeom(5, prob = 0.3, lower.tail = TRUE)
```

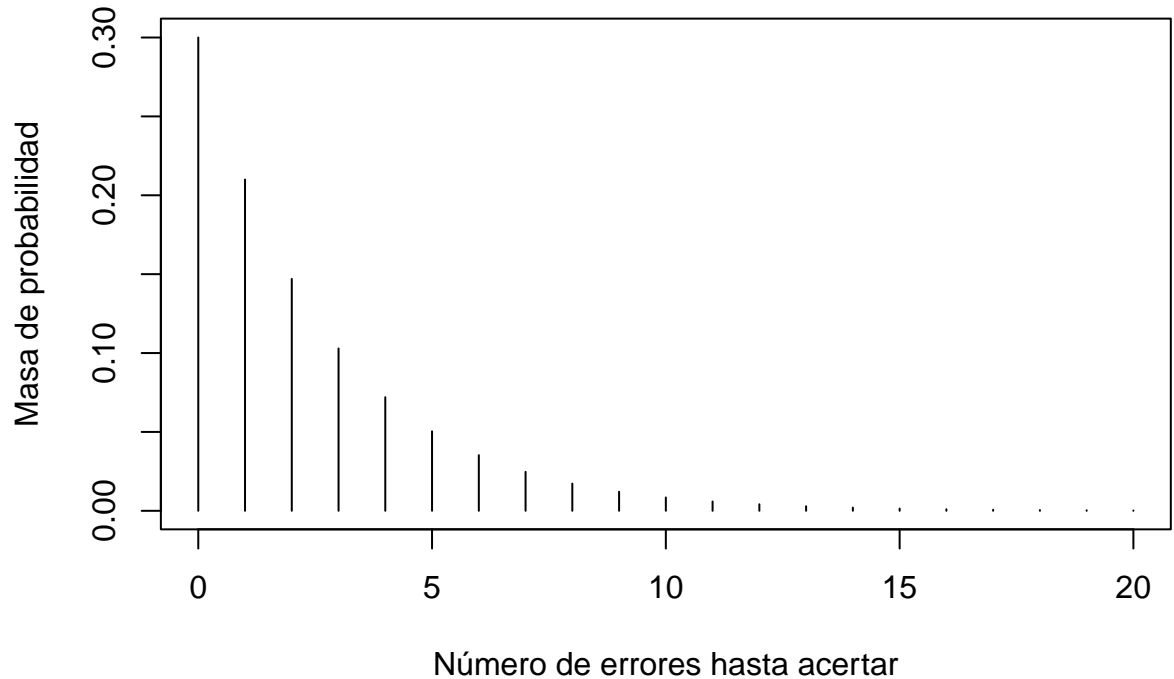
```
## [1] 0.882351
```

Donde el primer número (5) es el **número de fallos** antes del primer acierto, esto es  $x - 1$ . Estamos calculando la **cola izquierda** ( $P(X \leq x)$ ).

- b) Para hacer la representación gráfica tomando 20 como el número máximo de intentos antes de acertar, definimos primero el vector  $x$  que contiene el número de intentos, y el vector  $y$ , que contiene la probabilidad de acertar el primer triple en el  $i$ -ésimo tiro:

```
x <- 0:20
y <- dgeom(x, prob = 0.3)
plot(x, y, main = "Distribución geométrica (p = 0.3)",
     xlab = "Número de errores hasta acertar",
     ylab = "Masa de probabilidad", type = "h")
```

### Distribución geométrica (p = 0.3)



### DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Se da cuando las observaciones no son independientes. Supongamos que tenemos una muestra de  $N$  bolas, de las cuales  $N_1$  son verdes y  $N_2$  son rojas, de modo que  $N_1 + N_2 = N$ . Si extraemos  $n$  bolas (sin retorno), la variable  $X$  será el número de bolas verdes obtenidas.

$$P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

### EJEMPLO

Un estudiante de oposiciones ha preparado doce de los dieciocho temas de los que consta el examen. La prueba consiste en tres temas elegidos de manera aleatoria. ¿Qué probabilidad tiene el estudiante de conocer los tres temas? Sabemos que  $N_1 = 12$ ,  $N_2 = 6$  y  $N = 18$ . Además, la extracción es  $n = 3$ .

```
RHiper <- data.frame(Pr = dhyper(0:3, m = 12, n = 6, k = 3))
rownames(RHiper) <- 0:3
RHiper
```

```
##      Pr
## 0 0.0245098
## 1 0.2205882
## 2 0.4852941
## 3 0.2696078
```

La probabilidad de que los tres temas que ha estudiado entren en el examen es del 26.9 %. La probabilidad más alta es  $P(X = 2) = 0.485$ , es decir, que haya estudiado dos de los tres temas que saldrán.

- a) Si queremos saber la probabilidad de que sepa como mínimo dos temas ( $P(X \geq 2)$ ), necesitamos la probabilidad acumulada de la cola derecha. R calcula  $P(X > x)$ , así que tendremos que calcular la función de distribución con  $x = 1$  porque  $P(X > 1) = P(X \geq 2)$ :

```
phyper(1, m = 12, n = 6, k = 3, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.754902
```

Esto significa que tiene una probabilidad del 75 % de que conozca dos o tres temas en el examen.

## DISTRIBUCIÓN DE POISON

Como las anteriores, también se deriva de la distribución binomial.

### EJEMPLO

Tomamos una variable  $X$ , definida como el tiempo de espera del autobús en minutos, y que tiene como único parámetro  $\lambda$ , que representa tanto la media, como la varianza de la variable aleatoria.

Supongamos que el tiempo de espera es de 3 minutos, o sea,  $\lambda = 3$ .

- a) Para saber la probabilidad de que el autobús tarde 5 minutos:

$$P(X = 5) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{3^5}{5!} e^{-3} = 0.1008$$

- b) Si queremos saber la probabilidad de los once primeros valores (desde  $P(X = 0)$  hasta  $P(X = 10)$ ):

```
RPoiss <- data.frame(Pr = dpois(0:10, lambda = 3))
rownames(RPoiss) <- 0:10
RPoiss
```

```
##           Pr
## 0  0.0497870684
## 1  0.1493612051
## 2  0.2240418077
## 3  0.2240418077
## 4  0.1680313557
## 5  0.1008188134
## 6  0.0504094067
## 7  0.0216040315
## 8  0.0081015118
## 9  0.0027005039
## 10 0.0008101512
```

Al igual que en las distribuciones anteriores, se pueden calcular las probabilidades acumuladas, gráficos y simulaciones muestrales.

## DISTRIBUCIONES CONTINUAS

### DISTRIBUCIÓN UNIFORME

El dominio de esta distribución está definido por los valores máximo y mínimo  $a$  y  $b$ . Su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para } x < a \text{ ó } x > b \end{cases}$$

#### EJEMPLO

Una mujer está dando a luz a un bebé, y la hora exacta del alumbramiento ( $X$ ) sucederá en cualquier momento entre la hora 0 (ahora) y la hora 24 (la misma hora del día siguiente).

- a) Para calcular la probabilidad de que la madre de a luz dentro de las primeras cinco horas ( $P(X < 5)$ ) escribiremos:

```
punif(5, min = 0, max = 24, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.2083333
```

En distribuciones continuas,  $P(X < x)$  equivale a  $P(X \leq x)$ . En una distribución continua el cálculo de una probabilidad del tipo  $P(X = x)$  será siempre nula, es decir,  $P(X = x) = 0$ .

- b) Si queremos calcular la probabilidad de que la madre para en las últimas dos horas (a partir de la hora 22), estaremos calculando ( $P(X > 22)$ ):

```
punif(22, min = 0, max = 24, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.08333333
```

### DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Esta distribución está relacionada con la distribución de Poisson.

Con esta distribución se modeliza el intervalo de tiempo que transcurre entre dos sucesos. Tiene un único parámetro  $\lambda$  y está definida para valores no negativos de la variable aleatoria.

Sus funciones de densidad y de distribución son:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

#### EJEMPLO

En un hospital, el tiempo que transcurre entre dos partos (medido en horas) sigue una distribución exponencial con un parámetro  $\lambda = 4$ . Esto significa que la esperanza viene definida como  $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0.25$ , de media transcurre un cuarto de hora ( $\frac{1}{4} = 0.25$ ) entre un parto y otro.

- a) La probabilidad de que transcurra una hora o más entre dos partos ( $P(X > 1)$ ):

```
pexp(1, rate = 4, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.01831564
```