ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η συνάρτηση $\cos^3 x$ και να μελετηθεί η σύγκλισή της

→ Γνωρίζω ότι: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (A)

~~Άρα~~ $\cancel{\cos^3 x = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]^3}$? όχι. αυτό είναι λάθος

Επομένως, $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$ (1)

και $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$

$\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x - 1$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)}$$

προσπαθώ δηλ. να αποφύγω το $\cos^2 x$...

(1) ⇒ $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$

$\cos^3 x = \frac{1}{2}\cdot(\cos 2x + 1)\cdot \cos x$

$\cos^3 x = \frac{1}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\cos 2x$ (2)

και $\left.\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(+)}$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cdot\cos a\cdot\cos b$

$$\Rightarrow \boxed{\cos a\cdot\cos b = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]}$$

για $\alpha = 2x$, $b = x$: $\cos(2x)\cdot\cos x = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(3x) + \cos(x)\right]$

$$(2) \xrightarrow[b=x]{a=2x} \cos^3 x = \frac{1}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(3x) + \cos x\right]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{4}\cdot\cos(3x) + \frac{1}{4}\cdot\cos x$$

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{3}{4}\cdot\cos x + \frac{1}{4}\cdot\cos(3x)} \quad (3)$$

Για να αθροίσουμε 2 σειρές, θα πρέπει αυτές να συγκλίνουν.
Για την (A) γνωρίζουμε σχετικά με τη σύγκλισή της:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}$$

$$= x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)} = 0<1,\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

Άρα η σειρά $\boxed{\text{συγκλίνει}}$ $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$(3) \Rightarrow \cos^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}$$

Δηλ. αφού συγκλίνει η σειρά $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, τότε:

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{3+3^{2n}}{(2n)!}\right]\cdot x^{2n}}$$

<u>η οποία συγκλίνει $\forall x\in(-\infty,+\infty)$</u>

! Θεωρώ δεδομένο το πως εκφράζεται η $\cos x$, $\sin x$ και e^x

2) Να δείξετε ότι ο αριθμός e δεν είναι ρητός.

Γνωρίζω ότι: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Για τη σύγκλιση της e^x έχω:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{x^n\cdot(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{x^n}\cdot x\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)\cancel{x^n}}\right|$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0 < 1 \quad , \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

Άρα η σειρά της e^x συγκλίνει $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

Δηλ. $\boxed{\text{συγκλίνει}}$ και για $x=1$.

Επομένως, $e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$$

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n!(n+1)} + \frac{1}{n!(n+1)\cdot(n+2)} + \dots$$

πολλ/ζω με $n!$: $$0 < n!\cdot e - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \dots$$

κοινός παράγοντας

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

$\cdot\frac{1}{n+1}$ $\cdot\frac{1}{n+1}$

• Η (ψωβ) σχέση στα παραπάνω μια Γ.Σ. με λόγο $\frac{1}{n+1}$, άρα

κοινός παράγοντας

άθροισμα Γ.Σ $= \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$

Τελικά, θα είναι:

$$0 < n! \cdot e - n! \cdot \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{1}{n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω ότι ο e είναι ρητός. Δηλ. ισχύει:

$e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, με p, q πρώτους μεταξύ τους. και $p < n$

Τότε:

$$0 < \underbrace{n! \cdot \frac{p}{q}}_{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (q-1) \cdot \ldots \cdot n \ \in \mathbb{N}} - \underbrace{n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)}_{\in \mathbb{N}} < \frac{1}{n} < 1$$

δηλ. αυτός ο αριθμός είναι φυσικός αριθμός

Δηλ. $0 <$ φυσικός αριθμός < 1 , άτοπο.

Άρα e δεν είναι ρητός.

3) Ν.δ.ο. το Γ.Ο. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} \cdot dx = 0$

μεικτού τύπου: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} \cdot dx$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \cdot dx}_{\text{Γ.Ο. 2ου είδους} \ = I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} \cdot dx}_{\text{Γ.Ο. 1ου είδους.} \ = I_2}$$

• I_1: θέτω $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\cdot dt$

· για $x=0$ έχω $t=+\infty$

· για $x=1$ έχω $t=1$

$$I_1 = \int_{+\infty}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot dt$$

$$I_1 = \int_{+\infty}^{1} \frac{\overset{0}{\ln 1} - \ln t}{1+\frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot dt$$

$$I_1 = -\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{\frac{t^2+1}{\cancel{t^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{t^2}}$$

$$I_1 = -\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} \cdot dt = -I_2$$

• I_2: $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, με $p>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p \cdot \ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{-p}+x^{2-p}} \quad (1)$$

• $2-p>0 \Rightarrow p<2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-p} = +\infty$

• $2-p<0 \Rightarrow p>2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-p} = 0$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \overset{\frac{\infty}{\infty} \text{ για } 0<p<2}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{-p\cdot x^{-p-1} + (2-p)\cdot x^{1-p}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-p\cdot x^{-p} + (2-p)\cdot x^{2-p}} = 0 \text{ , αφού } 0<p<2$$

* όμως το Γ.Ο. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot dx$ συγκλίνει για $p > 1$

Απ., αφού $0 < p < 2$ για την εφαρμογή του κρ. σύγκρισης του λόγου θα επιλέξω $1 < p < 2$ π.χ. $p = \frac{3}{2}$.

Επομένως, αφού $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$ και το Γ.Ο. της $g(x)$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και το Γ.Ο. της $f(x)$.

Τελικά, $I_1 = -I_2 \Rightarrow$ το αρχικό Γ.Ο. $= 0$.

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα. $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} \cdot dx$

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}$$

$$= \circ \circ \circ$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1/3 \cdot x + 2/3}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

άρα $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx}_{\text{Γ.Ο. 1ου είδους } = I_1} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1} \cdot dx}_{I_2}$

πεπερασμένος αριθμός

• J_1:

$$J_1 = \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \frac{1}{1-x}\cdot dx = \frac{1}{3}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{1-x}\cdot dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\left[\ln(1-x)\right]_0^{1-\epsilon}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}(\ln\epsilon - \ln 1)$$

$$= +\infty$$

Άρα $\boxed{\text{το αρχικό ολοκλήρωμα δεν υπάρχει}}$, αφού το J_1 απειρίζεται θετικά και το J_2 είναι πεπερασμένος αριθμός, και άρα το αρχικό απειρίζεται θετικά.

5) Ν.β. το $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\cdot dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{3}{5}}}\cdot dx$$

$$= \int_0^1 x^{3-\frac{3}{5}}\cdot dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{5}}\cdot dx - 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}\cdot dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{12}{5}}\cdot dx + \int_0^1 x^{-\frac{4}{5}}\cdot dx - 2\cdot\int_0^1 x^{-3/5}\cdot dx$$

$$= \frac{5}{17}\cdot\left[x^{\frac{17}{5}}\right]_0^1 + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 x^{-\frac{4}{5}}\cdot dx - 2\cdot\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 x^{-\frac{3}{5}}\cdot dx$$

$$= \ldots = -\frac{625}{127}$$