ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 1ΟΥ ΕΙΔΟΥΣ

Τι είναι; Ένα ολοκλήρωμα ονομάζεται γενικευμένο αν το ένα ή και τα 2 άκρα της ολοκλήρωσης δεν είναι πεπερασμένοι αριθμοί.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 2ΟΥ ΕΙΔΟΥΣ

Τι είναι; Ένα ολοκλ. ονομάζεται γενικευμένο αν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης

ΜΟΡΦΕΣ Γ.Ο.

1ου είδους:

- $$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\cdot dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$
- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\cdot dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)\cdot dx$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{c} f(x)\cdot dx}_{} + \underbrace{\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\cdot dx}_{}$$, όπου $c\in(-\infty,+\infty)$

Θα πρέπει να υπάρχουν ταυτόχρονα τα 2 αυτά όρια, ώστε να ορίζεται το αρχικό Γ.Ο. 1ου είδους.

2ου είδους:

- $$\int_{\alpha}^{b} f(x)\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\alpha+\epsilon}^{b} f(x)\cdot dx$$

απειρίζεται στο κάτω άκρο του Διαστ. Ολοκλ.

- $$\int_{\alpha}^{b} f(x)\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\alpha}^{b-\epsilon} f(x)\cdot dx$$

• απειρίζεται στο άνω άκρο του Δ.Ο.

- $$\int_{\alpha}^{b} f(x)\cdot dx = \underbrace{\lim_{\epsilon_1\to 0}\int_{\alpha}^{c-\epsilon_1} f(x)\cdot dx}_{} + \underbrace{\lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\cdot dx}_{}$$

απειρίζεται σε εσωτερικό σημείο του Δ.Ο.

Θα πρέπει να υπάρχουν ταυτόχρονα

Μικτού Τύπου

Γ.Ο. 2ου ΕΙΔΟΥΣ ... Γ.Ο. 1ου ΕΙΔΟΥΣ

- $$\int_{a}^{+\infty} f(x)\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to +\infty}\int_{c}^{b} f(x)\cdot dx$$

στο α η f(x) απειρίζεται

Παραδείγματα

- $$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}\cdot dx$$ → 2ου είδους όπου η f(x) απειρίζεται στο $1\in(0,3)$

$$= \lim_{\epsilon_1\to 0}\int_0^{1-\epsilon_1}\frac{1}{(x-1)^3}\cdot dx + \lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{1+\epsilon_2}^{3}\frac{1}{(x-1)^3}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\epsilon_1\to 0}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_0^{1-\epsilon_1} - \frac{1}{2}\lim_{\epsilon_2\to 0}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_{1+\epsilon_2}^{3}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\lim_{\epsilon_1\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon_1^2}-1\right)}_{-\infty \Rightarrow \nexists} \underbrace{-\frac{1}{2}\lim_{\epsilon_2\to 0}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\epsilon_2^2}\right)}_{+\infty\Rightarrow\nexists}$$

Άρα το αρχικό Γ.Ο. $\nexists$

- $$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$$ → 2ου είδους, όπου η f(x) απειρίζεται στο 3 (άνω άκρο)

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon}\frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot dx = \frac{1}{3}\,{}^{*}3\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon} d\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{3-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) - \arcsin 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$*$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$*$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ άρα $\frac{\pi}{2} = \arcsin 1$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} \cdot dx \longrightarrow$ 2ου είδους, όπου η f(x) απειρίζεται στο $\frac{\pi}{2}$ (άνω άκρο)

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}+\epsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} \cdot dx$$

$$\left(\sqrt{1-\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}} \cdot (-\cos x)$$

$$= -2 \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} d\left[\sqrt{1-\sin x}\right]$$

$$= -2 \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left[\sqrt{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}$$

$$= -2 \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left[\sqrt{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} - 1\right]$$

$$= (-2) \cdot (-1) = 2$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ Γ.Ο.

- **Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης**

Αν το Γ.Ο. $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)| \cdot dx$ συγκλίνει (δηλ. υπάρχει), τότε συγκλίνει και το Γ.Ο. $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ και θα λέμε ότι το τελευταίο συγκλίνει απολύτως.

- **Κριτήριο (άμεσης) σύγκρισης**

Έστω ότι είναι $|f(x)| \leq |g(x)|$, τότε:

→ αν το Γ.Ο. $\int_{\alpha}^{+\infty} |g(x)| \cdot dx$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και το Γ.Ο. $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)| \cdot dx$

→ αν το Γ.Ο. $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)| \cdot dx$ αποκλίνει, τότε αποκλίνει και το Γ.Ο. $\int_{\alpha}^{+\infty} |g(x)| \cdot dx$.

- **Κριτήριο σύγκρισης του λόγου**

Έστω το $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)| \cdot dx$ και το $\int_{\alpha}^{+\infty} |g(x)| \cdot dx$

→ αν $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = c$, με $0 < c < +\infty$, τότε τα δύο Γ.Ο. παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά

→ αν $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$, τότε αν συγκλίνει το $\int_{\alpha}^{+\infty} |g(x)| \cdot dx$ θα συγκλίνει και το $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)| \cdot dx$

ενώ αν αποκλίνει το $\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|\cdot dx$ θα αποκλίνει και το $\int_{\alpha}^{+\infty} |g(x)|\cdot dx$

→ αν $\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, τότε προφανώς $\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = 0$

και επομένως αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

Παραδείγματα

- $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot dx$ είναι $\underbrace{\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|}_{|f(x)|} \underbrace{\leq}_{\leq} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{|g(x)|}$

και το $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cdot dx$ (αντιστοιχεί στην Γ.Α.Σ $\frac{1}{x^2}$ με $p=2>1$ ⟹ συγκλίνει)

συγκλίνει (γιατί $p=2>1$)

Άρα και το αρχικό ολοκλήρωμα **συγκλίνει** με βάση το κριτήριο (σύμφωνα) σύγκρισης.

- $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1/2}}\cdot dx$ είναι $x^2 - \frac{1}{2} \leq x^2$

ή $\sqrt{x^2 - 1/2} \leq x$, $\forall x$ εντός του Δ.Ο.

Δηλ. $\underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1/2}}\right|}_{f(x)} \underbrace{\geq}_{\geq} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}$

και το $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ αποκλίνει ($\frac{1}{x}$ Γ.Α.Σ. με $p=1$)

άρα με βάση το κριτήριο σύγκρισης **αποκλίνει** και το αρχικό Γ.Ο.

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ είναι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ και έστω $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \quad , \text{όπου} \quad 0 < 1 < +\infty$$

και αφού $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και τα Γ.Ο. παρουσιάζουν τη ίδια συμπεριφορά $\rightarrow$ το αρχικό Γ.Ο. θα συγκλίνει.

- $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (a>0)$

είναι $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ και το $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει

άρα ? το κριτήριο της (άμεσης) σύγκρισης δεν δίνει απάντηση

παραγοντική ολοκλήρωση $\rightsquigarrow$ $\int \frac{\sin x}{x}\cdot dx = \int (-\cos x)'\cdot \frac{1}{x}\,dx = -\cos x\cdot\frac{1}{x} - \int -\cos x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'dx$

$$= -\frac{\cos x}{x} + \int -\frac{1}{x^2}\cdot \cos x\,dx$$

$$= -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\cos x\,dx$$

Άρα $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

- $-\left[\frac{\cos x}{x}\right]_a^{+\infty} = -\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\cos x}{x}\right]_a^{b} = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\cos b}{b} - \frac{\cos a}{a}\right) = \frac{\cos a}{a}$

αφού $\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b}{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}\cdot\cos b\right) \rightsquigarrow 0 \times$ φραγμένη $\Rightarrow 0$

• $-\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \cdot dx$ είναι $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

και $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει $\left(\frac{1}{x^2} \text{ ΓΑΣ με } p=2>1 \right)$

άρα από κρ. (άμεσης) σύγκρισης συγκλίνει.

Τελικά, το αρχικό Γ.Ο. συγκλίνει.

• $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1} \cdot dx$

είναι $e^x+1 \geq e^x$

$\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x}$ ⟶ αρκεί να μελετήσω το:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x} \cdot dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b (-e^{-x})' dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [-e^{-x}]_0^b = -\lim_{b \to \infty} [e^{-b} - e^0] = -\lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{b} - 1 \right)$$

$$= -(-1) = \boxed{1}$$

άρα με βάση το κρ. σύγκρισης συγκλίνει και το αρχικό Γ.Ο.

• $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4} \cdot dx$

ισχύει $e<3<x$, δηλ. $\ln e < \ln x$ ή $1 < \ln x$

δηλ. $\dfrac{1}{(x-3)^4} < \dfrac{\ln x}{(x-3)^4}$

$$\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4} \cdot dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{3+\epsilon}^6 (x-3)^{-4} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{3+\epsilon}^6 \left[-\frac{1}{3} \cdot (x-3)^{-3}\right]' dx$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[(x-3)^{-3} \right]_{3+\epsilon}^{6} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left[(6-3)^{-3} - (3+\epsilon-3)^{-3} \right]$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\epsilon \to 0} \left[3^{-3} - \frac{1}{\epsilon^3} \right]$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{\epsilon^3} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot (-\infty) = +\infty$$

δηλ. το $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4} dx$ αποκλίνει.

άρα βάσει του κρ. (άμεσης) σύγκρισης το αρχικό Γ.Ο. αποκλίνει

ΘΕΩΡΙΑ

Μπορώ να το χρησιμοποιώ έτοιμο!!!

• $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \quad (p>0)$

* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 x^{-p} \cdot dx \overset{p \neq 1}{=} \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[x^{1-p} \right]_\epsilon^1$

$= \dfrac{1}{1-p} \cdot \lim_{\epsilon \to 0^+} (1-\epsilon^{1-p}) \longrightarrow \dfrac{1}{1-p}$ για $1-p>0$ δηλ. $p<1$

συγκλίνει

→ $+\infty$ για $1-p<0$, δηλ. $p>1$

αποκλίνει

→ για $p=1$ έχω:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\cdot dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}[\ln x]_\epsilon^1$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}(0-\ln\epsilon) = +\infty$$

αποκλίνει

Δηλ: • $p\leq 1 \Rightarrow$ αποκλίνει
• $p>1 \Rightarrow$ συγκλίνει

❗ Μπορώ να το χρησιμοποιώ, όπως και την Γ.Α.Σ στις σειρές