ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Έχω μια συνάρτηση $f(t): [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

χρόνος > 0

μπορεί να έχουμε και $t<0$ όμως αυτό δεν θα μας απασχολήσει.

$$LT \longrightarrow \underbrace{L\{f(t)\}(s)}_{\text{"}F(s)\text{"}} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

τελεστής που ξεκινά από ένα σύνολο συναρτήσεων και πάει σε αριθμούς έχοντας παράμετρο s

- Ο μετασχηματισμός L. υπάρχει $\forall$ συνάρτηση υπό κάποιες προϋποθέσεις (για μας θα ισχύουν πάντα)

Παραδείγματα

1. Ν.β. ο μ.L. της $L\{t\}$ (δηλ. $f(t)=t$)

Ν.δ.ο.:

$L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, $s>0$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-s \cdot t} \cdot t \cdot dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} e^{-s \cdot t} \cdot t \cdot dt$

⤳ εφαρμόζω παραγοντική ολοκλήρωση στο e^{-st}

$$\int_0^{b} e^{-st} \cdot t \cdot dt = \circ\circ\circ = \begin{cases} -\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s \cdot b + 1}{e^{sb}} - 1\right), & s \neq 0 \\ \dfrac{b^2}{2}, & s = 0 \end{cases}$$

$s \neq 0$: $\lim\limits_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{sb+1}{e^{sb}} - 1 \right) \right]$

$+\infty$, $s < 0$

$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$

$s = 0$: $\lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{b^2}{2} \right) = +\infty$

Άρα ο μετασχηματισμός L. της $f(t) = t$ υπάρχει για $s > 0$ και είναι: $\boxed{L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} \ , \ s > 0}$

2. Δ.Ο. $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $s > 0$

• $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} \, dt = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b e^{(a-s) \cdot t} \cdot dt$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

$= \lim\limits_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{a-s} \cdot e^{(a-s) \cdot t} \right]_0^b$, $s \neq a$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{a-s} \left[e^{(a-s) \cdot b} - 1 \right]$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b e^{0 \cdot t} \cdot dt$, $s = a$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} (b)$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(a-s)\cdot t}\cdot dt = \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1}{a-s}\cdot\left(e^{(a-s)\cdot b}-1\right) = \begin{cases} +\infty & , s<a \\ \dfrac{1}{s-a} & , s>a \end{cases} \\ \lim\limits_{b\to+\infty} b = +\infty \quad , s=a \end{cases}$$

Άρα ο μετασχηρ. L υπάρχει για $s>a$ και είναι

$$\boxed{L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad , s>a}$$

3. Π.χ. $L\{\sin(a\cdot t)\} = \begin{cases} \dfrac{a}{s^2+a^2} & , s>0 \text{ αν } a\neq 0 \\ 0 & , s\in\mathbb{R} \text{ αν } a=0 \end{cases}$

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot\sin(at)\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-s\cdot t}\cdot\sin(a\cdot t)\cdot dt$

Διακρίνω περιπτώσεις: $s=0$

$s\neq0 \to a=0$, $a\neq0$

$$\underbrace{\int_0^b e^{-s\cdot t}\cdot\sin(a\cdot t)\cdot dt}_{A} = \begin{cases} \overbrace{-\dfrac{1}{s^2+a^2}\left(\dfrac{s\cdot\sin(a\cdot b)+a\cdot\cos(a\cdot b)}{e^{s\cdot b}} - a\right)}^{B} & , a\neq 0 \\ 0 & , a=0 \end{cases}$$

$$\lim_{b\to+\infty} A = \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} B = \\ \end{cases}$$

?

• Το αφήνω για λίγο και πάω να μελετήσω το $s\cdot\sin(ab)+a\cdot\cos(ab)$

$|a\cdot\cos(a\cdot x)+b\cdot\sin(\kappa\cdot x)| \le |a|\cdot|\cos(ax)| + |b|\cdot|\sin(\kappa x)| \le |a|+|b|$

Άρα φράσσεται και είναι αριθμός $\Rightarrow$ οπότε $\left(\frac{1}{e^{sb}}\right)$ x φραγμένη

$\Downarrow$

όταν $b \to +\infty$: $\dfrac{s\cdot\sin(a\cdot b)+a\cdot\cos(ab)}{e^{sb}} \to 0$

άρα $\lim\limits_{b\to+\infty} B = \begin{cases} \nexists \text{ το όριο}, & s \le 0 \\ & , a \ne 0 \\ \dfrac{a}{s^2+a^2}, & s > 0 \end{cases}$

Άρα ο μετασχηματισμός L. υπάρχει ως εξής:

$$\boxed{L\{\sin(at)\} = \begin{cases} \dfrac{a}{s^2+a^2}, & s>0, \quad a\ne 0 \\ 0, & s\in\mathbb{R}, \quad a=0 \end{cases}}$$

Ιδιότητες

$f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$F(s) = L\{f(t)\}, \ s>0$

$G(s) = L\{g(t)\}, \ s>0$

1. $L\{\lambda f(t) + \kappa\cdot g(t)\} = \lambda\cdot F(s) + \kappa\cdot G(s)$

2. $L\{e^{ct}\cdot f(t)\} = F(s-c)$, $c\in\mathbb{R}$ και $c>a \Leftrightarrow s > a+c$

$\Downarrow$

$L\{e^{ct}\cdot f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t}\cdot e^{c\cdot t}\cdot f(t)\cdot dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-c)\cdot t}\cdot f(t)\cdot dt = F(s-c)$

3. $L\{f(k\cdot t)\} = \frac{1}{k}\cdot F\left(\frac{s}{k}\right)$, $\frac{s}{k} > 0 \xleftrightarrow{k>0} s > k\cdot \alpha$

Παραδείγματα

- $L\{2b - e^{3t}\} = 2\cdot L\{b\} - L\{e^{3t}\} = \circ\circ\circ$ για το κάνω
  $= \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-3}$

- $L\{2t\cdot e^{3t}\} = 2\cdot L\{t\cdot e^{3t}\}$ $\xRightarrow[F(s)]{L\{t\} = \frac{1}{s^2},\ s>0}$ $2\cdot \underbrace{\frac{1}{(s-3)^2}}_{F(s-3)} = \frac{2}{(s-3)^2}$, $s>3$

- $L\{\sin t\cdot \cos t\}$
  $= L\left\{\frac{\sin(2t)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot L\{\sin(2t)\}$ $\xRightarrow[F(s)]{L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1},\ s>0}$
  $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1}}_{F\left(\frac{s}{2}\right)} = \circ\circ\circ = \frac{1}{s^2+4}$, $s>0$

! $L\{f'(t)\} = s\cdot L\{f(t)\} - f(0)$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

$F = F(s): (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $L\{f(t)\} = F(s)$

↳ αντίστροφος laplace της f

Άρα. $L^{-1}\{F(s)\}$

! 2 συναρτήσεις έχουν τον ίδιο μ.L $F(s)$ αν η g είναι ίδια με την f εκτός κάποιων σημείων ασυνέχειας

Από τις Ιδιότητες:

1. $L^{-1}\{\lambda \cdot F(s) + \kappa \cdot G(s)\} = \lambda \cdot \underbrace{L^{-1}\{F(s)\}}_{f(t)} + \kappa \cdot \underbrace{L^{-1}\{G(s)\}}_{g(t)}$

2. $L^{-1}\{F(s-c)\} = e^{c \cdot t} \cdot \underbrace{f(t)}_{L^{-1}\{F(s)\}}$

3. $\frac{1}{k} \cdot L^{-1}\{F(\frac{s}{k})\} = f(k \cdot t)$

Παραδείγματα

- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+8}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2}\right.$

$= \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2}\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e^{t} \cdot \sin(\sqrt{8} \cdot t)$

- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s^2+s+1}\right\}$, $s>0$

$\frac{1}{s^3+s^2+s+1} = \frac{1}{(s+1)\cdot(s^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{s^2+1}\right)$

Άρα $L^{-1}\left\{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{s^2+1}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+1}\right\}\right]$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-1\cdot t} - \cos t + \sin t \right)$$

ΠΑΤ και μετασχηματισμός laplace

- Έστω η διαφορική: $y'(t) - 2\cdot y(t) = \sin t$ και $y(0)=1$

Να λυθεί.

γραμμική εξίσωση
μη ομογενής
με σταθερούς συντελεστές

- $\frac{\sin x}{x} = f(x)$, $x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Πώς θα τη λύσω;

Θεωρώ: $L\{y'(t) - 2y(t)\} = L\{\sin t\}$

$\Leftrightarrow L\{y'(t)\} - 2\cdot L\{y(t)\} = L\{\sin t\}$

$\Leftrightarrow L\{y'(t)\} - 2L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$

$\Leftrightarrow s\cdot L\{y(t)\} - \underbrace{y(0)}_{1} - 2L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$, $Y(s) = L\{y(t)\}$

$\Leftrightarrow s\cdot Y(s) - 1 - 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$\Leftrightarrow (s-2)\cdot Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + 1$

$\Leftrightarrow (s-2)\cdot Y(s) = \frac{s^2+2}{s^2+1}$ $(s>2)$

$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{(s-2)\cdot(s^2+1)}$ $\Leftrightarrow$ ... ανάλυση σε απλά κλάσματα ...

$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{6}{s-2} - \frac{s+2}{s^2+1} \right) = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{s-2} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \right)$

L^{-1}

$\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{5} \cdot \left[L^{-1}\left\{\frac{6}{s-2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\} \right]$

$\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{5} \cdot \left[6 \cdot e^{2t} - \cos t - 2 \cdot \sin t \right]$