Δυναμοσειρές

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε έκφραση της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-x_0)^n$ που αναπτύσσεται ως εξής:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-x_0)^n = C_0 + C_1 \cdot (x-x_0) + C_2 \cdot (x-x_0)^2 + \dots} \quad (1)$$

ονομάζεται ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑ με κέντρο το x_0 και n-οστό όρο τον $C_n \cdot (x-x_0)^n$.
Αν το κέντρο x_0 είναι το 0 (δηλ. $x_0 = 0$), λαμβάνω τη δυναμοσειρά:

ακολουθία αριθμών

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots} \quad (2)$$

με n-οστό όρο το $C_n \cdot x^n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν στην (1) θέσω $X = x - x_0$, τότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-x_0)^n \overset{X = x - x_0}{=\!=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot X^n$$

και αναγόμαστε στη μορφή που έχει η (2).

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Θεωρώ τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x-x_0)^n$. Αναφορικά με τη σύγκλισή της έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Η σειρά συγκλίνει για $|x-x_0| < R$, δηλ. $x_0 - R < x < x_0 + R$ και η σειρά αποκλίνει για $|x-x_0| > R$, δηλ. $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$, όπου R είναι η ακτίνα σύγκλισης.
2. Η σειρά συγκλίνει για κάθε πραγματική τιμή του x
3. Η σειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$, δηλ. συγκλίνει στο κέντρο της.

ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ

Το σύνολο όλων των x για τα οποία η σειρά συγκλίνει είναι το διάστημα σύγκλισης.

ΠΩΣ ΘΑ ΒΡΩ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ

SOS: Όταν μια δυναμοσειρά συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως.

Χρησιμοποιούμε, λοιπόν, το κριτήριο της n-οστής ρίζας ή του λόγου, ώστε να βρούμε το διάστημα του x στο οποίο συγκλίνει (απολύτως). Αν αυτό είναι της μορφής:

1. $|x-x_0|<R$, δηλ: $x_0-R<x<x_0+R$, τότε εξετάζω τη σύγκλιση της σειράς στα άκρα της ξεχωριστά.
2. Αν προκύψουν οι περιπτώσεις (2) ή (3) της σελίδας (29), τότε τελειώνουμε τη μελέτη με τη σύγκλιση της δυναμοσειράς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 (εφαρμογή του κρ. της n-οστής ρίζας)

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και έστω ότι: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \geq 0}$ (A)

Τότε:

α. Αν $\ell=0$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall$ πραγματική τιμή του x

β. Αν $\ell=+\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x=0$

γ. Αν $\ell\neq 0,+\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x\in\left(-\frac{1}{\ell},\frac{1}{\ell}\right)$

και αποκλίνει στο $\left(-\infty,-\frac{1}{\ell}\right)\cup\left(\frac{1}{\ell},+\infty\right)$

δ. Για τα άκρα $x=\frac{1}{\ell}$ και $x=-\frac{1}{\ell}$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

→ Εξετάζω την τιμή της απόλυτης σύγκλισης, δηλ.:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|} = |x|\cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(A)}{=\!=} |x|\cdot \ell \quad (2)$$

1. αν $\ell=0$, τότε η (2) δίνει: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|} = |x|\cdot \ell = 0 < 1$

///
(α)

και ισχύει $\forall$ πραγματική τιμή του x. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall$ πραγματική τιμή του x.

2. αν $\ell=+\infty$ και $x\neq 0$, τότε η (2) δίνει:

(β) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = |x|\cdot \ell = +\infty > 1$

και ισχύει $\forall$ πραγματική τιμή του x. Άρα η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει.

όμως αν $x=0$, τότε η δυναμοσειρά λαμβάνει μια ιδιαίτερη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots \overset{x=0}{=\!=} a_0$$

3. αν $\ell \neq 0, +\infty$, τότε η (2) δίνει:

(γ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = |x|\cdot \ell < 1$

- Δηλ. $|x| < \frac{1}{\ell}$ ή $-\frac{1}{\ell} < x < \frac{1}{\ell}$, όπου η ακτίνα σύγκλισης R είναι: $R = \frac{1}{\ell} \overset{(A)}{=} \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

- όμως αν $|x|\cdot \ell > 1$
Δηλ. $|x| > \frac{1}{\ell}$ ή $\left(-\infty, -\frac{1}{\ell}\right) \cup \left(\frac{1}{\ell}, +\infty\right)$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει.

- όμως αν $|x| = \frac{1}{\ell}$, τότε από (2) έχω:

(δ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = |x|\cdot \ell = \frac{1}{\cancel{\ell}}\cdot \cancel{\ell} = 1$

Άρα δεν μπορώ να αποφανθώ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (εφαρμογή του κρ. του λόγου)

όμοια διαδικασία με τα παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η σειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$, η οποία συγκλίνει για:

$a - R < x < a + R$ $(R > 0)$. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων, εντός του Δ.Σ., οι οποίες λαμβάνονται αν παραγωγίσουμε την αρχική σειρά όρο προς όρο. Δηλ.:

$$f'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n \right]'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot [(x-a)^n]'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$$

⇝ αντίστοιχα ορίζεται και η 2η παράγωγος της f. Δηλ.:

$$f''(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1} \right]'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-2}$$

∘

∘

∘

⇝ αντίστοιχα ορίζεται και η n-οστή παράγωγος της f ...

∘

∘

∘

Θεώρημα

Έστω η σειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n$, η οποία συγκλίνει για:

$a-R<x<a+R \ (R>0)$. Στην περίπτωση αυτή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n\cdot(x-a)^{n+1}}{n+1}$

θα συγκλίνει στο ίδιο διάστημα και θα είναι:

$$\int f(x)\,dx = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n\right]dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int\left[c_n\cdot(x-a)^n\right]dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot\int(x-a)^n\cdot dx$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]+c$$

Θεώρημα

Αν οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = A(x)$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot x^n = B(x)$ που συγκλίνουν

στο $|x|<R$ $(R>0)$ και αν:

$C_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n\cdot b_{n-k} = a_0\cdot b_s + a_1\cdot b_{n-1} + a_2\cdot b_{n-2} + \dots + a_{n-1}\cdot b_1 + a_n\cdot b_0$

Τότε θα είναι: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot x^n\right) = A(x)\cdot B(x)$

Π.χ. Ποιά η δυναμοσειρά της $\frac{1}{(1-x)^2}$;

Θεωρώ τα εξής: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$, $a_n=1$

$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot x^n$, $b_n=1$

Θεωρώ, επίσης, • $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = A(x)$

• $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = B(x)$

$$A(x) \cdot B(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n\right)$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

όπου $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + a_2 \cdot b_{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0$

$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$

$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1$

Δηλ. $\boxed{c_n = n+1}$

Επομένως: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$, $|x|<1$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει για $x = x_0$, το οποίο μπορεί να είναι είτε εσωτερικό σημείο ή άκρο του διαστήματος σύγκλισης (Δ.Σ.), τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot \lim_{x \to x_0} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$$

π.χ. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, $|x| \leq 1$

$$\lim_{x\to 1}(\arctan x) = \frac{\pi}{4} \qquad \left(\text{αφού } \tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}$$

Άρα: $\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}}$

ή $\boxed{\pi = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right)}$

Ακολουθίες Συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\{U_n(x)\}$ ακολουθία συναρτήσεων που ορίζεται στο διάστημα $[a,b]$. Θα λέμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα ή απλά στην συνάρτηση $U(x)$ στο $[a,b]$, αν $\forall \epsilon > 0$ και $\forall x \in [a,b]$ $\exists$ κάποιος αριθμός $N(\epsilon) > 0$ τ.ω. $\forall n > N$ να είναι: $|U_n(x) - U(x)| < \epsilon$

ή $U(x) - \epsilon < U_n(x) < U(x) + \epsilon$

Εξήγηση: θα πρέπει, δηλαδή, ν.β. έναν όρο N, που από αυτόν και έπειτα όλοι οι όροι θα συγκεντρώνονται μεταξύ των $U(x) - \epsilon$, $U(x) + \epsilon$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Αν ο N εξαρτάται και από το x, τότε έχω απλά σύγκλιση. Όχι ομοιόμορφη σύγκλιση.
- όσο το $\epsilon \downarrow$, η ζώνη μεταξύ $(U(x) - \epsilon)$ και $(U(x) + \epsilon)$ $\downarrow$
- Κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα σύγκλισής της.

Σειρές συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x) + \dots$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $S(x)$, στο διάστημα $[a,b]$, αν η ακολουθία $S_n(x) = S_1(x) + S_2(x) + \dots + S_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $S(x)$, στο διάστημα $[a,b]$. Δηλ:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$$

Εξήγηση:
- Ξεκινάω με μια ακολουθία συναρτήσεων $U_n(x)$
- Δημιουργώ την ακολουθία $S_n(x)$ των μερικών αθροισμάτων

$$\left.\begin{cases} S_1(x) = U_1(x) \\ S_2(x) = U_1(x) + U_2(x) \\ \vdots \\ S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x) \end{cases}\right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \\ \vdots \\ S_n(x) \end{Bmatrix} \rightarrow \{S_n(x)\}$$

- Επιδιώκω να βρω το: $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$ με σκοπό να προσδιορίσω το $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Μια σειρά συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνει ομοιόμορφα μόνο εντός του διαστήματος σύγκλισής της.

(βλ. ασκ. / σελ. 129-130-131)

ΚΡΙΤΗΡΙΟ WEIERSTRASS

Αν υπάρχει μια ακολουθία θετικών σταθερών αριθμών $M_1, M_2, M_3, \dots$
τ.ω. σε κάποιο διάστημα D (του x) να είναι:

- $|U_n(x)| \leq M_n$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
- $\sum M_n$ συγκλίνει

Τότε η $\sum U_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D.

π.χ. έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^3}$

- $|U_n(x)| = \left| \frac{\sin(\pi \cdot x)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} = M_n$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ συγκλίνει ως Γ.Α.Σ. με $p = 3 > 1$

Άρα εφαρμόζεται το κριτήριο Weierstrass και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall x$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις $U_n(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και η $\sum U_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $S(x)$ στο $[a,b]$, τότε η $S(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$

Χρησιμότητα Θ. : Το χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια σειρά συναρτήσεων δεν συγκλίνει ομοιόμορφα δείχνοντας ότι η $S(x)$ (το άθροισμα δηλ.) είναι ασυνεχής συνάρτηση σε κάποιο σημείο του $[a,b]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Ισχύει η παραγώγιση και ολοκλήρωση, όρο προς όρο, σειρών συναρτήσεων, αρκεί αυτές να συγκλίνουν ομοιόμορφα.