Σειρές αριθμών:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δοθείσας μιας ακολουθίας αριθμών $\{a_n\}$ κάθε έκφραση της μορφής: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ είναι μια σειρά άπειρων όρων, όπου το a_n είναι ο n-οστός της όρος. Δηλ. $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

↑ n-οστός

ή γενικός όρος

- Τα μερικά αθροίσματα της $\sum a_n$ σχηματίζουν τη ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{S_n\}$ με όρους:

Δηλ:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Η ακολουθία $\{S_n\}$ των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο S αν $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; N(\epsilon) > 0$ τ.ω.: $\forall n > N \rightarrow |S_n - S| < \epsilon$

(ορισμός ακολουθίας)

Αν, λοιπόν, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, τότε η σειρά συγκλίνει στο S

Δηλ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η Σa_n συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Πότε μια σειρά συγκλίνει;

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Ν-ΟΣΤΟΥ ΟΡΟΥ

Η Σa_n αποκλίνει αν:
- $\lim_{n\to\infty} a_n$ δεν υπάρχει
- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Πότε μια σειρά αποκλίνει;

ΠΡΟΣΟΧΗ!

· Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow$ συγκλίνει(;)

όμως το Θ. λέει πως ΟΤΑΝ μια σειρά συγκλίνει, ΤΟΤΕ σίγουρα $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Επομένως, δεν μπορούμε έτσι να απαντήσουμε... Θέλει μελέτη!!!

ΕΥΡΕΣΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΕΙΡΑΣ

A. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και έστω ότι ο γενικός όρος της σειράς μπορεί να γραφεί ως εξής: $a_k = \phi(k) - \phi(k+1)$. Τότε το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων δίνεται από τον τύπο: $S_n = \phi(1) - \phi(n+1)$

- Αφού διατυπώσω το S_n, βρίσκω το όριό του και άρα τελικά να βρω το άθροισμα της σειράς που ισούται με $\lim_{n\to\infty} S_n$

(σελ. 71-72, βλ. π.χ. τηλεσκοπικής σειράς)

B. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και έστω ότι ο γενικός όρος της σειράς μπορεί να γραφτεί ως εξής: $a_k = A\cdot\varphi(k) + B\cdot\varphi(k+1) + \Gamma\cdot\varphi(k+2)$ με $A+B+\Gamma=0$. Τότε, το άθροισμα των n πρώτων όρων δίνεται από τον τύπο: $S_n = A\cdot\varphi(1) - \Gamma\cdot\varphi(1) - A\varphi(n+1) + \Gamma\cdot\varphi(n+2)$

ή $S_n = \left(\Gamma\cdot\varphi(n+2) - \Gamma\cdot\varphi(1)\right) - \left(A\cdot\varphi(n+1) - A\cdot\varphi(1)\right)$ "μνημονικός τύπος"

(σελ. 73-74, βλ. π.χ.)

Γ. Γεωμετρική Σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ (σελ. 74)

~ για $x \neq 1$: ▸ $S_n = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$

$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$ (1)

▸ πολλαπλασιάζω την (1) με τον λόγο $\frac{x}{1}$:

$x\cdot S_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow$ $S_n - x\cdot S_n = 1 - x^n$

ή $S_n\cdot(1-x) = 1 - x^n$

ή $\boxed{S_n = \frac{1-x^n}{1-x}}$

* αν $|x|<1$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$, αφού $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

* αν $|x|>1$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, αφού $\lim_{n\to\infty} x^n = \pm\infty$

* αν $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, άρα $a_n = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ αποκλίνει

* αν $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ με $a_n=(-1)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm 1 \neq 0 \Rightarrow \text{αποκλίνει}$$

Τελικά: Η Γεωμετρική Σειρά (Γ.Σ):

- συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{1-x}$ $\forall |x|<1$
- αποκλίνει $\forall$ άλλο x

Χαρακτηριστική Ιδιότητα Συγκλινουσών Σειρών

Έστω η $\sum a_n$ που συγκλίνει στο A $(\sum a_n = A)$

Έστω η $\sum b_n$ που συγκλίνει στο B $(\sum b_n = B)$

- $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n = A \pm B$
- $\sum(k\cdot a_n) = k\cdot \sum a_n = k\cdot A$ (όμοια και για τη B)

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Το άθροισμα, όρο με όρο, δύο σειρών που αποκλίνουν μπορεί να συγκλίνει (βλ. π.χ. σελ. 77)

Κριτήρια Σύγκλισης

1. Κριτήριο Ολοκληρώματος

Έστω η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και η συνάρτηση $f(x)>0$. Η f είναι: συνεχής και φθίνουσα και ισχύει $f(n)=a_n$, $\forall x\geq 1$. Τότε, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\cdot dx$ παρουσιάζουν ίδια συμπεριφορά (σελ. 80)

→ Δηλ. βρίσκω: $\lim_{n\to\infty}\left[\int_1^n f(x)\,dx\right]$

2. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΜΕΣΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

Η $\sum a_k$ θα συγκλίνει αν υπάρχει συγκλίνουσα σειρά $\sum b_k = B$ τ.ω.:

$$\boxed{a_k \leq b_k} \quad , \forall k$$

Έπεται ότι η $\sum a_k$ θα αποκλίνει αν υπάρχει αποκλίνουσα σειρά $\sum b_k = b$ τ.ω.:

$$\boxed{a_k \geq b_k} \quad , \forall k$$

(σελ. 83)

3. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ (ή ΚΡΙΤΗΡΙΟ D'Alembert) (σελ. 84)

Έστω η σειρά $\sum a_n$ και έστω ότι: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \geq 0$

* αν $\ell > 1$: $\sum a_n$ αποκλίνει
* αν $\ell < 1$: $\sum a_n$ συγκλίνει
* αν $\ell = 1$: ?! δεν μπορώ να αποφανθώ

4. ΚΡΙΤΗΡΙΟ n-ΟΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ (ή ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy) (σελ. 84)

Έστω η $\sum a_n$ και έστω ότι: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \geq 0$

* αν $\ell > 1$: $\sum a_n$ αποκλίνει
* αν $\ell < 1$: $\sum a_n$ συγκλίνει
* αν $\ell = 1$: ?! δεν μπορώ να αποφανθώ

5. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ (ή ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ) (σελ. 84)

Έστω $\sum a_n$ και $\sum b_n$. Αν για τις a_n και b_n έχουμε:

* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, με $0 < \ell < +\infty$, τότε: $\sum a_n$ και $\sum b_n$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Δηλ. παρουσιάζουν ίδια συμπεριφορά.

* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ και $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε: $\sum a_n$ θα συγκλίνει.

Αν $\sum a_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum b_n$ θα αποκλίνει.

* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, τότε θα είναι: $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$. Δηλ. ανάγομαι στον 2ο αστερίσκο *

Δοκιμάστε να λύσετε:

① $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{4k-1}\right)^{2k-1}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ → αποκλίνει (σελ. 86-87)

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^4+1}}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ → συγκλίνει (σελ. 87)

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: Γ.Α.Σ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ → $p=1$: αποκλίνει
$p>1$: συγκλίνει
$p<1$: αποκλίνει

$p \leq 1$: αποκλίνει (σελ. 81-82)

④ Ν.Β. το άθρ. της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ → $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ (σελ. 76-77)

⑤ Ν.β. το άθρ. της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ → 3 (σελ. 73-74)

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ (D' Alembert) (σελ. 94)

Αν κατά την εφαρμογή του κριτηρίου του D' Alembert :

- $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, αλλά είναι : $\frac{a_{k+1}}{a_k} \sim 1 - \frac{\ell'}{k}$. → είναι πραγματικός αριθ.

Τότε η σειρά $\sum a_k$:

* συγκλίνει για $\ell' > 1$
* αποκλίνει για $\ell' < 1$

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Η $\sum a_n$ είναι εναλλάσσουσα σειρά αν οι όροι της είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί. Δηλ.: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$

▶ ΚΡΙΤΗΡΙΟ LEIBNIZ

Αν: • $\sum a_n$ εναλλάσσουσα

• $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

• $|a_n|$ φθίνουσα (δηλ.: $|a_{n+1}| \leq |a_n|$)

από κάποιο δείκτη n και μετά, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει.

▶ ΟΡΙΣΜΟΣ 1ος

Η $\sum a_n$ συγκλίνει απολύτως αν η αντίστοιχη σειρά απολύτων τιμών $\sum |a_n|$ συγκλίνει.

▶ ΟΡΙΣΜΟΣ 2ος

Αν μια σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, αλλά η $\sum |a_n|$ αποκλίνει, τότε θα λέμε ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

▶ ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η $\sum |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ συγκλίνει.

(βλ. απόδειξη σελ. 88-89)

ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ (σελ. 89)

Αν μια σειρά συγκλίνει και τοποθετήσουμε παρενθέσεις, χωρίς να αλλάξουμε τη διάταξη των όρων, τότε προκύπτει συγκλίνουσα σειρά στο ίδιο άθροισμα.

Δηλ.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$= 1+\cancel{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}^{0}+\cancel{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}^{0}+\cancel{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}^{0}+\cdots$$

$$= 1$$

ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗ ΟΡΩΝ (σελ. 90)

Αν μια σειρά $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως, οποιαδήποτε αναδιάταξη όρων της δεν επηρεάζει το άθροισμά της.

! * συγκλίνουν απολύτως ΟΛΕΣ ΟΙ ΣΕΙΡΕΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

(βλ. π.χ. σελ 90)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ισχύει $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε θα γράφουμε ότι: $f(x) \sim g(x)$

καθώς $x \to a$ και θα λέμε ότι "η f είναι ασυμπτωτική προς την $g(x)$ καθώς $x\to a$"

π.χ. Ν.β. μια $g(x)$ που θα είναι ασυμπτωτική ως προς τη $f(x)$ καθώς $x \to +\infty$.

$$f(x) = \frac{5x^4+x+2}{x^2+1}$$

θεωρώ $g(x) = 5x^2$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^4+x+2}{x^2+1}}{5x^2} = \cdots = 1 \Rightarrow$ ο g ασυμπτωτ. της f για $x\to+\infty$

Δηλ.: $\boxed{g \sim f \text{ καθώς } x\to+\infty}$

! Η χρησιμότητα του ασυμπτωτικού συμβολισμού: $f \sim g$ για $x \to a$ είναι ότι μπορούμε να μελετήσουμε την απλούστερη συνάρτηση $g(x)$ αντί της $f(x)$ για τιμές του x "κοντά" στο a.

! Κάθε πολυώνυμο είναι ασυμπτωτικό στον κύριο όρο του καθώς $x \to +\infty$.

ΝΑ ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ

• Η γεωμετρική σειρά (Γ.Σ.): συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{1-x}$ αν $|x|<1$

αποκλίνει σε κάθε άλλη περίπτωση

• Η γενικευμένη αρμονική σειρά (Γ.Α.Σ.): συγκλίνει για $p>1$

αποκλίνει για $p \leq 1$

• Αν θέλω να εξετάσω τη σύγκλιση της Σa_k θα θεωρώ την ακολουθία a_k που αντιστοιχεί στον γενικό όρο της σειράς και:

▸ προσπαθώ να υπολογίσω το $\lim_{k\to\infty} a_k = \ell$

· αν $\ell \neq 0$, τότε η Σa_k, σύμφωνα με το κριτήριο του n-οστού όρου αποκλίνει.
· αν $\ell = 0$, τότε δεν μπορώ να αποφανθώ

▸ Αν η a_k ρητή συνάρτηση του k, τότε εφαρμόζω το κριτήριο της οριακής σύγκρισης, χρησιμοποιώντας κυρίως την Γ.Α.Σ.

▸ Αν η a_k αποτελείται από γινόμενο δυνάμεων του k, τότε εφαρμόζω το κριτήριο της n-οστής ρίζας (Cauchy)

▸ Αν η a_k αποτελείται από άθροισμα δυνάμεων του k, τότε εφαρμόζω το κριτήριο του λόγου. Αν αυτό μου δώσει αποτέλεσμα 1, τότε εξετάζω αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \sim 1 - \frac{\ell'}{k}$ ώστε να εφαρμόσω τη γενίκευση του κριτηρίου του λόγου.

▸ Αν δεν ισχύει τίποτα από τα παραπάνω ως προς τη μορφή της a_k, τότε εφαρμόζω το κριτήριο του ολοκληρώματος, αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του.

▸ Αν η σειρά είναι εναλλάσσουσα, πρώτα εξετάζω την απόλυτη σύγκλιση με βάση τα παραπάνω και αν η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, τότε εφαρμόζω το κριτήριο του Leibniz.

Απόδειξη Κριτηρίου Ολοκληρώματος

Για να το εφαρμόσω έχω: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και πρέπει να έχω $f(x) > 0$, συνεχή και φθίνουσα, με $f(n) = a_n$, $\forall x \geq 1$

$\forall k \in \mathbb{N}$ και για $t \in [k, k+1]$ έχω: $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

⇝ Θα ολοκληρώσω την f από k έως $k+1$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\cdot dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

- για $k=1$: $\quad f(2) \leq \int_1^{2} f(t)\,dt \leq f(1)$
- για $k=2$: $\quad f(3) \leq \int_2^{3} f(t)\,dt \leq f(2)$

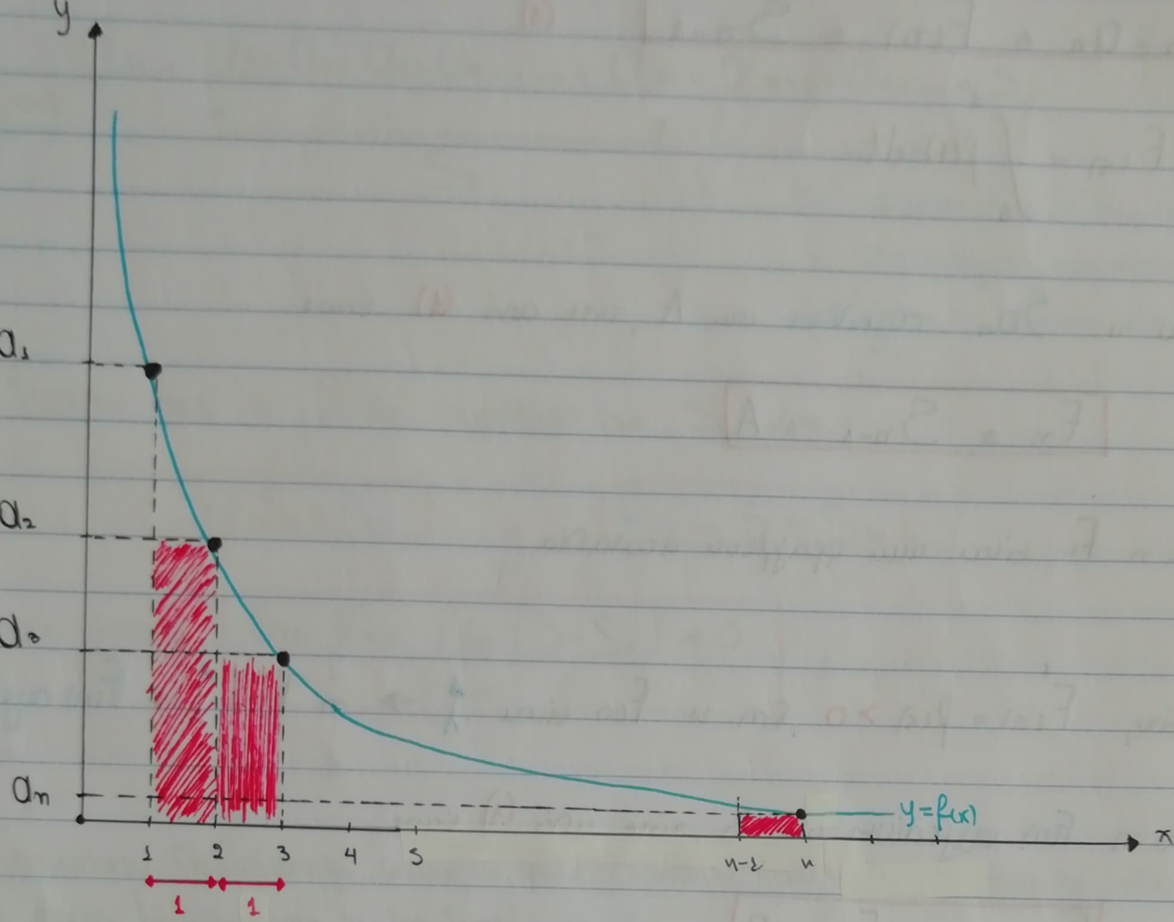
$\vdots$

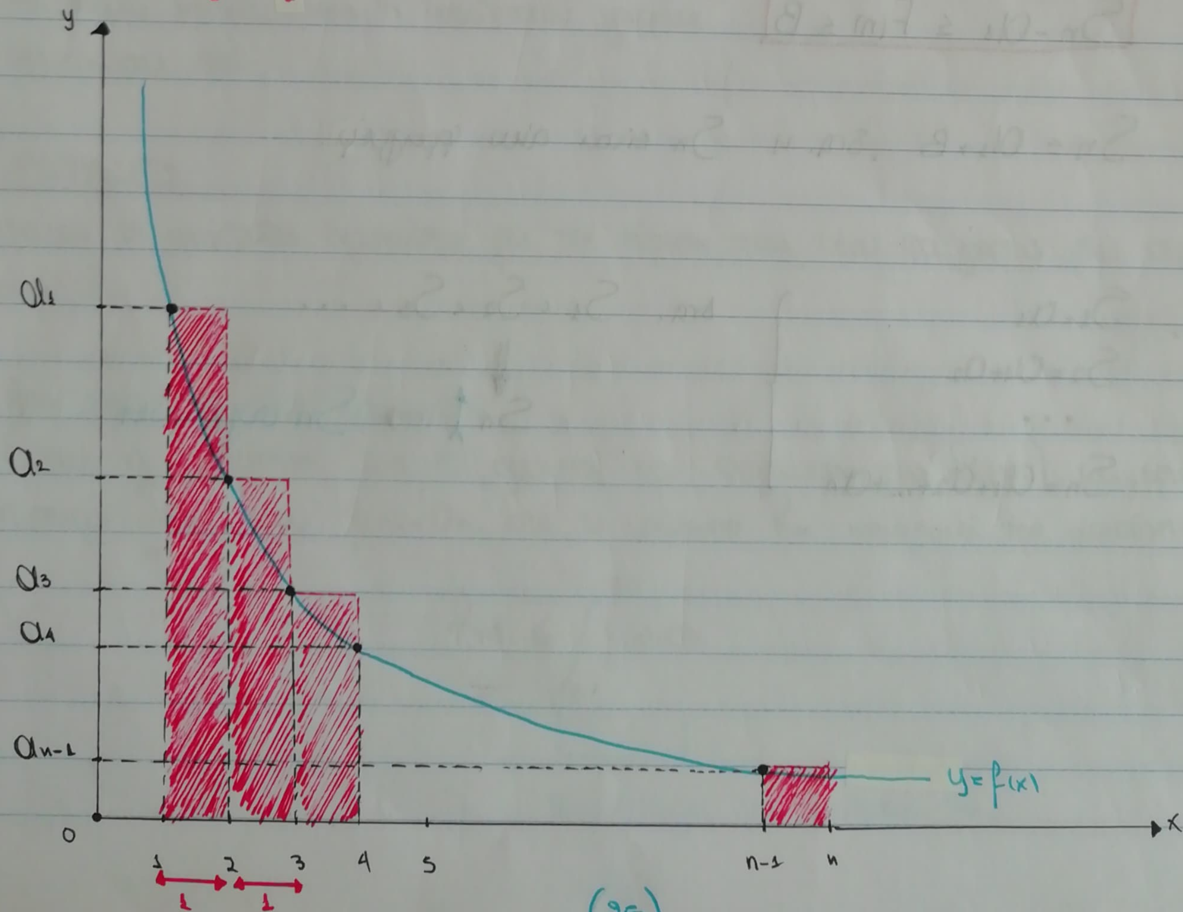
- για $k=n-1$: $\quad f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n-1)$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow} f(2)+f(3)+\dots+f(n) \leq \int_1^n f(t)\,dt \leq f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)$$

$f(n) = a_n$: $\quad a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(t)\,dt \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$

Ας δούμε γεωμετρικά την παραπάνω έκφραση...





$$\boxed{S_n - a_1 \leq F(n) \leq S_{n-1}} \quad (1)$$

με $F(x) = \int_1^x f(t)\cdot dt$

⟶ αν η Σa_n συγκλίνει στο A, τότε από (1) έχω:

$$\boxed{F_n \leq S_{n-1} \leq A}$$

Άρα η F_n είναι άνω φραγμένη ακολουθία

Επιπλέον, $F'(x) = f(x) > 0$, δηλ. η $F(x)$ είναι $\uparrow \Rightarrow$ η $F(n) \uparrow \rightarrow$ F(n) συγκλίνει

⟶ αν η F(n) συγκλίνει στο B, τότε από (1) έχω:

$$\boxed{S_n - a_1 \leq F(n) \leq B}$$

Άρα $S_n \leq a_1 + B$, δηλ. η S_n είναι άνω φραγμένη.

Επίσης, $\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ \dots \\ S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{array}\right\}$ Άρα $S_1 < S_2 < S_3 < \dots$

$\Downarrow$

$S_n \uparrow \Rightarrow$ S_n συγκλίνει

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΕΙΡΑΣ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_n}_{S_n}+a_{n+1}+a_{n+2} = S$$

R_n: σφάλμα, δηλ. οι όροι που δεν συνυπολογίσαμε στο άθροισμα των n πρώτων όρων

Υποθέτω πως η $\sum a_n$ συγκλίνει στο S, άρα:

$$\boxed{S = S_n + R_n} \quad \text{ή} \quad \boxed{R_n = S - S_n}$$

και ισχύει $\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0}$

! Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να φανεί χρήσιμη όταν θέλω να βρω το άθροισμα της σειράς με ακρίβεια κ δεκαδικών ψηφίων.
(βλ. π.χ. σελ. 103)

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις για την εύρεση ενός άνω φράγματος του σφάλματος R_n.

1. Από κριτήριο ολοκληρώματος
Έστω η συνάρτηση $f(x)>0$, συνεχής και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, όπου $f(k)=a_k$. Τότε, το υπόλοιπο R_n ικανοποιεί την ανισότητα:

$$R_n \le \underbrace{\int_n^{+\infty} f(x)\cdot dx}_{\text{άνω φράγμα του υπολοίπου } R_n}$$

2. Από κριτήριο του λόγου (D' Alembert)
Αν η Σa_k συγκλίνει και το κριτήριο του λόγου εφαρμόζεται και δίνει: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell < 1$, τότε το υπόλοιπο R_n ικανοποιεί την
$0 \leq \ell < 1$
ανισότητα: $R_n < \frac{a_{n+1}}{1-\sigma}$, με $\sigma \in (\ell, 1)$

3. Από κριτήριο n-οστής ρίζας
Έστω ότι η Σa_k συγκλίνει και το κριτήριο της n-οστής ρίζας εφαρμόζεται και δίνει: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell < 1$, τότε το υπόλοιπο R_n ικανοποιεί την ανισότητα:
$0 \leq \ell < 1$
$R_n < \frac{\sigma^{n+1}}{1-\sigma}$, με $\sigma \in (\ell, 1)$

4. Από κριτήριο Leibniz
Έστω η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του κριτηρίου του Leibniz, τότε το υπόλοιπο R_n ικανοποιεί την ανισότητα: $|R_n| < a_{n+1}$

Μέθοδος
Πρώτα δείχνω τη σύγκλιση της σειράς εφαρμόζοντας το κατάλληλο κριτήριο και αφού το κάνω, τότε διατυπώνω την αντίστοιχη ανισότητα για το υπόλοιπο R_n.
Ίδες π.χ. σελ. 105-106-107