Projet ANN201

Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Koen Aristote
Medous Charles

1

Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$. On note (P_T) le problème:
Trouver $T \in H^1(\Omega)$, telle que:

$$\begin{cases} \alpha T - div(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$, $S \in L^2(\Omega)$, T_Γ constante et $\sigma : \omega \to \mathbb{R}$ régulière par morceaux et:

$$\exists \sigma_{max}, \sigma min > 0, \quad \sigma_{min} \leq \sigma(x,y) \leq \sigma max \quad \text{presque pour tout } (x,y) \in \Omega$$

1.1

Posons $u(x,y) = T(x,y) - T_\Gamma \quad \forall x,y \in \overline{\Omega}$.
On a alors, si T est solution de (P_T):

$$\begin{cases} \alpha(u - T_\Gamma) - div(\sigma \nabla (u - T_\Gamma)) = S & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Donc $u \in H^1(\Omega)$ est solution de:

$$\begin{cases} \alpha u - div(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

avec $f = S + \alpha T_\Gamma \in L^2(\Omega)$

1.2

On a la formule de Stokes sur $H^1(\Omega)$:

$$\forall \vec{V} \in H^1(\Omega)^N, \quad \int_\Omega div(\vec{V}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{V}.\vec{n} d\Gamma$$

Pour obtenir la formulation variationnelle on pose $v \in H_0^1(\Omega)$, et on a:
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que:

$$\alpha \int_\Omega uv d\Omega - \int_\Omega div(\sigma \nabla u) v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On a de plus:
$\alpha u - f = div(\sigma \nabla u) \in L^2(\Omega)$, donc $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, et on supposera $u \in H^2(\Omega)$.
Donc, avec $\vec{V} = v\sigma \overrightarrow{\nabla u} \in H^1(\Omega)^N$, on a :

$$\int_\Omega -div(v\sigma \nabla u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} v\sigma \nabla u.\vec{n} d\Gamma$$

or $div(v\sigma\nabla u) = v div(\sigma \nabla u) + \sigma \nabla v \nabla u$, donc:

$$\alpha \int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} v\sigma\nabla u.\vec{n} d\Gamma \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Et comme $v \in H_0^1(\Omega)$, le terme sur le bord est nul, donc la formulation variationnelle (F.V) s'écrit:
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que:

$$\alpha \int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

1.3

Tout d'abord, notons que $H_0^1(\Omega) = Ker(\gamma)$ et que l'application trace γ est continue sur $H^1(\Omega)$ donc $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Donc $(H_0^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.
Maintenant, posons:

$$\begin{cases} a(u,v) = \alpha \int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla v d\Omega & \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \\ l(v) = \int_\Omega f v d\Omega & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On vérifie aisément que a est une forme bilinéaire (car linéaire à gauche et symétrique) et que l est un forme linéaire. On a de plus:

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\alpha \int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla v d\Omega| \\
&\le |\alpha \int_\Omega uv d\Omega| + |\int_\Omega \sigma \nabla u \nabla v d\Omega| \quad \text{par inegalité triangulaire} \\
&\le \alpha \left(\int_\Omega u^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega \sigma^2 (\nabla u)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (\nabla v)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{par Cauchy Schwartz} \\
&\le \alpha \left(\int_\Omega u^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} + \sigma_{max} \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (\nabla v)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{par propriété de } \sigma \\
&\le \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_{max} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{par definition des normes } L^2 \\
&\le max(\alpha, \sigma_{max}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{par définition de la norme } H^1 \\
&\le M_a \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{avec } M_a = max(\alpha, \sigma_{max}) > 0
\end{aligned}$$

Donc a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$
De plus:

$$
\begin{aligned}
&\forall u \in H_0^1(\Omega)\\
&\quad a(u,u) = \alpha \int_\Omega u^2 d\Omega + \int_\Omega \sigma (\nabla u)^2 d\Omega\\
&\qquad \geq \alpha \int_\Omega u^2 d\Omega + \sigma_{min} \int_\Omega (\nabla u)^2 d\Omega\\
&\qquad \geq \alpha \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sigma_{min} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad \geq min(\alpha, \sigma_{min})(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})\\
&\qquad \geq min(\alpha, \sigma_{min}) \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\qquad \geq C_\alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \text{avec } C_\alpha = min(\alpha, \sigma_{min}) > 0
\end{aligned}
$$

Donc a est une forme bilinéaire coercive et continue sur $H_0^1(\Omega)$

De plus: De plus:

$$
\begin{aligned}
&\forall v \in H_0^1(\Omega)\\
&\quad |l(v)| = |\int_\Omega f v d\Omega|\\
&\qquad \leq \left(\int_\Omega f^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{Cauchy-Schwartz}\\
&\qquad \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}\\
&\qquad \leq M_l \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{avec } M_l = \|f\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

On a donc l une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et a est une forme bilinéaire coercive et continue sur $H_0^1(\Omega)$ un espace de Hilbert. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne:
existence et unicité d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème $a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.
De plus cette solution dépend continuement des données du problème, en effet on a:

$$
\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_l}{\alpha} = \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{min(\alpha, \sigma_{min})}
$$

Donc la formulation variationnelle est bien posée.

1.4

Soit $v_h \in V_h^0 = Vect(\omega_1, ..., \omega_N)$, on a donc:

$$v_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N_0} v_h(M_I)\omega_I(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$$

Donc l'approximation $(F.V_h)$ s'écrit:
Trouver $u \in V_h^0$ telle que:

$$\alpha \int_\Omega u \sum_{I=1}^{N_0} v_h(M_I)\omega_I d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla (\sum_{I=1}^{N_0} v_h(M_I)\omega_I) d\Omega = \int_\Omega f \sum_{I=1}^{N_0} v_h(M_I)\omega_I) d\Omega \qquad \forall v \in V_h^0$$

C'est-à-dire:

$$\sum_{I=1}^{N_0} v_h(M_I) \left(\alpha \int_\Omega u\omega_I d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla (\omega_I) d\Omega \right) = \sum_{I=1}^{N_0} v_h(M_I) \int_\Omega f\omega_I d\Omega \qquad \forall v \in V_h^0$$

On a l'égalité pour tout les vecteurs de la base, donc:

$$\alpha \int_\Omega u\omega_I d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla (\omega_I) d\Omega = \int_\Omega f\omega_I d\Omega \qquad \forall I, 1 \leq I \leq N$$

De plus on a:

$$T_h(x,y) = u_h(x,y) + T_\Gamma = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I)\omega_I(x,y) + T_\Gamma$$

1.5

Soit u_h la solution de $(F.V_h)$ dans V_h^0, on a donc:

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I)\omega_I(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$$

et

$$\alpha \int_\Omega u\omega_I d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla u \nabla (\omega_I) d\Omega = \int_\Omega f\omega_I d\Omega \qquad \forall I, 1 \leq I \leq N$$

Donc on a:

$$\alpha \int_\Omega \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I)\omega_I(x,y)\omega_J d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I)\omega_I(x,y) \nabla (\omega_J) d\Omega = \int_\Omega f\omega_I d\Omega \qquad \forall J, 1 \leq I \leq$$

i.e:

$$\sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) \left(\alpha \int_\Omega \omega_I\omega_J d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla (\omega_I) \nabla (\omega_J) d\Omega \right) = \int_\Omega f\omega_I d\Omega \qquad \forall J, 1 \leq I \leq N$$

Donc l'égalité matricielle suivante:

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0$$

avec

$$\mathbb{A}^0 = \alpha\mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$$

où

$$(\mathbb{M}^0)_{I,J} = \int_\Omega \omega_I\omega_J d\Omega, \qquad (\mathbb{K}^0)_{I,J} = \int_\Omega \sigma\nabla(\omega_I)\nabla(\omega_J)d\Omega,$$

$$(\vec{U}^0)_I = u_h(M_I), \qquad (\vec{L}^0)_I = \int_\Omega f\omega_I d\Omega$$

La matrice $\mathbb{A}^0$ est symétrique (car a est une forme bilinéaire) et elle est définie positive

1.6

pseudo-élimination:
On pose $\mathbb{A}, \vec{U}$ et $\vec{L}$ tels que:

$$\mathbb{A} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}^0 & 0 \\ \hline 0 & Id \end{array}\right), \quad \vec{U} := \left(\begin{array}{c} \vec{U}^0 \\ \hline \vec{U}^1 \end{array}\right), \quad \vec{L} := \left(\begin{array}{c} \vec{L}^0 \\ \hline 0 \end{array}\right),$$

Dans ce cas on a encore:

$$\mathbb{A}\vec{U} = \vec{L}$$

1.7

Soit $\mathscr{F}_l$ la transformation permettant de passer du triangle de référence au triangle $\mathscr{T}_l$:

$$\mathscr{F}_l : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \hat{M} \mapsto \mathscr{B}_l\hat{M} + S_l, \qquad \mathscr{B}_l \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), S_l \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

On a donc, pour un triangle $\mathscr{T}_l$ quelconque de sommets (S_1, S_2, S_3), tels que
$S_1 = (x_1, y_1), \quad S_2 = (x_2, y_2), \quad S_3 = (x_3, y_3)$:

$$\mathscr{F}_l(0,0) = (x_1, y_1), \quad \mathscr{F}_l(1,0) = (x_2, y_2), \quad \mathscr{F}_l(0,1) = (x_3, y_3),$$

Donc:

$$\mathscr{B}_l\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_l\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_l = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + S_l = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

Donc:

$$S_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_l\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix},$$

Donc

$$\mathscr{B}_l = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad S_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

1.8

On a $\hat{\omega_1}(x,y) = a_1x + b_1y + c_1, \quad \hat{\omega_2}(x,y) = a_2x + b_2y + c_2, \quad \hat{\omega_3}(x,y) = a_3x + b_3y + c_3,$ tels que:

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega_1}(0,0) = 1, \quad \hat{\omega_2}(0,0) = 0, \quad \hat{\omega_3}(0,0) = 0\\
&\hat{\omega_1}(1,0) = 0, \quad \hat{\omega_2}(1,0) = 1, \quad \hat{\omega_3}(1,0) = 0\\
&\hat{\omega_1}(0,1) = 0, \quad \hat{\omega_2}(0,1) = 0, \quad \hat{\omega_3}(0,1) = 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\hat{\omega_1}(x,y) = 1 - x - y, \qquad \hat{\omega_2}(x,y) = x, \qquad \hat{\omega_3}(x,y) = y$$

On peut alors calculer:

$$\int_{\mathcal{T}_l} \omega_I(M)\omega_J(M)d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{\omega}_I(\hat{M})\hat{\omega}_J(\hat{M})|det(\mathcal{B}_l)|d\Omega \qquad \text{pour } I,J \text{ dans [1,3]}$$

Tout d'abord on peut remarquer que la matrice à calculer est symétrique, de plus on peut intervertir $\hat{\omega_2} et \hat{\omega_3}$ sans changer le résultat. Finalement on va calculer 3 intégrales:

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_1}\hat{\omega_1}d\Omega &= \int_0^1\int_0^{1-y} (1-x-y)^2 dxdy\\
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_3}\hat{\omega_2}d\Omega &= \int_0^1\int_0^{1-y} yxdxdy\\
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_2}\hat{\omega_2}d\Omega &= \int_0^1\int_0^{1-y} x^2dxdy
\end{aligned}$$

Donc on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_1}\hat{\omega_1}d\Omega &= \int_0^1\int_0^{1-y} u^2 dudy, \quad \text{en posant u = 1-x-y}\\
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_3}\hat{\omega_2}d\Omega &= \int_0^1 y\frac{(1-y)^2}{2}dy\\
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_2}\hat{\omega_2}d\Omega &= \int_0^1 \frac{(1-y)^3}{3}dy
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_1}\hat{\omega_1}d\Omega &= \int_{\hat{T}} \hat{\omega_2}\hat{\omega_2}d\Omega\\
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_3}\hat{\omega_2}d\Omega &= \int_0^1 (1-u)\frac{u^2}{2}du \quad \text{en posant u = 1-y}\\
\int_{\hat{T}} \hat{\omega_2}\hat{\omega_2}d\Omega &= \int_0^1 \frac{u^3}{3}du \quad \text{en posant u = 1-y}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{T}} \hat{\omega}_1\hat{\omega}_1 d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{\omega}_2\hat{\omega}_2 d\Omega = \frac{1}{12}\\
&\int_{\hat{T}} \hat{\omega}_3\hat{\omega}_2 d\Omega = \int_0^1 \frac{u^2}{2} du - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}\\
&\int_{\hat{T}} \hat{\omega}_2\hat{\omega}_2 d\Omega = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\mathbb{M}^{el} = \frac{|det(\mathscr{B}_l)|}{24}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

1.9

Pour la matrice de rigidité élémentaire on va utiliser une formule de quadrature à 3 points d'ordre 2, car les coefficients (σ) sont variables. En effet:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{T}_l} \sigma(M)\nabla\omega_I(M)\nabla\omega_J(M)d\Omega &= \int_{\hat{T}} \sigma(\mathscr{F}_l(\hat{M})\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_J(\hat{M})\right]\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_I(\hat{M})\right]|det(\mathscr{B}_l)|d\hat{\Omega}\\
&= |det(\mathscr{B}_l)|\sum_{q=1}^{3}\hat{\omega}^q\sigma(\mathscr{F}_l(\hat{S}^q))\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_I(\hat{S}^q)\right]\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_J(\hat{S}^q)\right]
\end{aligned}$$

Or on a:

$$\hat{\nabla}\hat{\omega}_1 = \begin{pmatrix} -1\\ -1\end{pmatrix}, \qquad \hat{\nabla}\hat{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\nabla}\hat{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \hat{\omega}^q = \omega_0$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{T}_l} \sigma(M)\nabla\omega_I(M)\nabla\omega_J(M)d\Omega &= |det(\mathscr{B}_l)|\hat{\omega}_0\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_I\right]\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_J\right]\sum_{q=1}^{3}\sigma(\mathscr{F}_l(\hat{S}^q))\\
&= |det(\mathscr{B}_l)|\hat{\omega}_0\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_I\right]\left[(\mathscr{B}_l^T)^{-1}\hat{\nabla}\hat{\omega}_J\right][(1)+(2)+(3)]
\end{aligned}$$

Calculons $(1),(2),(3)$:

$$
\begin{aligned}
(1) &= \sigma\left(\mathscr{F}_l(\hat{S}^1)\right) = \sigma\left(\mathscr{F}_l(\frac{1}{6},\frac{1}{6})\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_2+x_3-2x_1 \\ y_2+y_3-2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_2+x_3+4x_1 \\ y_2+y_3+4y_1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= \sigma\left(\mathscr{F}_l(\hat{S}^2)\right) = \sigma\left(\mathscr{F}_l(\frac{1}{6},\frac{4}{6})\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_2+4x_3-5x_1 \\ y_2+4y_3-5y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_2+4x_3+x_1 \\ y_2+4y_3+y_1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= \sigma\left(\mathscr{F}_l(\hat{S}^3)\right) = \sigma\left(\mathscr{F}_l(\frac{4}{6},\frac{1}{6})\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4x_2+x_3-5x_1 \\ 4y_2+y_3-5y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4x_2+x_3+x_1 \\ 4y_2+y_3+y_1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

En posant:

$$
norm = \begin{pmatrix} y2-y3 & x3-x2 \\ y3-y1 & x1-x3 \\ y1-y2 & x2-x1 \end{pmatrix},
$$

On a:

$$
|det(\mathscr{B}_l)|\hat{\omega}_0 = \frac{1}{6}\left((norm)_{3,2}(norm)_{2,1} - (norm)_{2,2}(norm)_{3,1}\right)
$$

Et:

$$(1) = \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (norm)_{3,2} - (norm)_{2,2} \\ (norm)_{2,1} - (norm)_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(2) = \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (norm)_{3,2} - 4(norm)_{2,2} \\ (norm)_{2,1} - 4(norm)_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(3) = \sigma\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4(norm)_{3,2} - (norm)_{2,2} \\ (norm)_{2,1} - (norm)_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

De plus on a:

$$(\mathcal{B}_l^T)^{-1} = \frac{1}{|det(\mathcal{B}_l)|}\begin{pmatrix} (norm)_{2,1} & (norm)_{3,1} \\ (norm)_{2,2} & (norm)_{3,2} \end{pmatrix}$$

On a donc les coefficients de la matrice $\mathbb{K}^{el}$:

$$(\mathbb{K}^{el})_{I,J} = [(1)+(2)+(3)]\,|det(\mathcal{B}_l)|^{-1}\hat{\omega}_0\left((norm)_{I,1}(norm)_{J,1} + (norm)_{I,2}(norm)_{J,2}\right) \quad \forall I, J \in [1,3]$$

La routine d'élimination va permettre de changer l'expression de σ dans $[(1)+(2)+(3)]$ en fonction du sous-domaine Ω_1 ou Ω_2 auquel le triangle appartient.

1.10

On se place dans le cas $\sigma = 1$, donc dans le cadre du TP. précédent et on vérifie que pour chaque triangle fixé les calculs des matrices élémentaires sont bien les mêmes. Évidemment ce résultat ne tient plus sur des géométries différentes ou même sur des tringles différents d'une même géométrie.

1.11

Pour l'assemblage, on fait une boucle sur tous les triangles du maillages où l'on calcule pour chacun les matrices élémentaires et l'on somme leurs contributions dans les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$ grâce à la numérotation globale du triangle en cours.
Pour le second membre, on utilise une technique d'interpolation aux sommets:

$$
\begin{aligned}
(\vec{L})_I &= \int_\Omega f\omega_I d\Omega \\
&\approx \sum_{J=1}^{N_{som}} f(S_J)\int_\Omega \omega_J\omega_I d\Omega \\
&\approx (\mathbb{M}\mathbb{F})_I \qquad \text{où } (\mathbb{F})_I = f(S_I)
\end{aligned}
$$

1.12

On procède ensuite à la pseudo-élimination, on fait une boucle sur les sommets et pour chaque sommet S_I dont la référence indique qu'il appartient au bord on fait l'opération $(\mathbb{A})_{I,J} = 0 \quad \forall J \neq I$ et $(\vec{L})_I = 0$. On peut alors faire l'inversion avec ces matrices directement pour obtenir la solution approchée dans V_h^0.

1.13

On pose:

$$\alpha = 1, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad u(x,y) = sin(\pi x)sin(\pi y), \quad \text{pour}(x,y) \in \overline{\Omega}$$

On cherche f telle que u soit solution de:

$$
\begin{cases}
u - div(\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\
u = 0 & \text{sur } \partial\Omega
\end{cases}
$$

Comme on est sur le carré $[0,2]\times[0,2]$ on a bien $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Et on calcule:

$$\nabla u = \pi \begin{pmatrix} sin(\pi y)cos(\pi x) \\ sin(\pi x)cos(\pi y) \end{pmatrix}, \qquad div(\nabla u) = -2\pi^2 sin(\pi x)sin(\pi y)$$

Donc

$$f = u - \Delta u = (1+2\pi^2)sin(\pi x)sin(\pi y)$$

1.14

$$
\begin{aligned}
\|\pi_h u - u\|_{L_2} &= \left\langle \sum_{i=1}^{N_0}(u(M_i)w_i - u_h(M_i)w_i), \sum_{i=1}^{N_0}(u(M_i)w_i - u_h(M_i)w_i)\right\rangle_{L_2} \\
&= \sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}(u(M_i)-u_h(M_i))(u(M_j)-u_h(M_j))\left\langle w_i, w_j\right\rangle_{L_2} \\
&= (U^0 - U_h^0)\mathbb{M}^0(U^0-U_h^0)^T
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi une approximation de l'erreur en norme L2 en fonction de la matrice $\mathbb{M}^0$. De plus pour la méthode des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ la méthode converge à l'ordre 1.

1.15

De même:

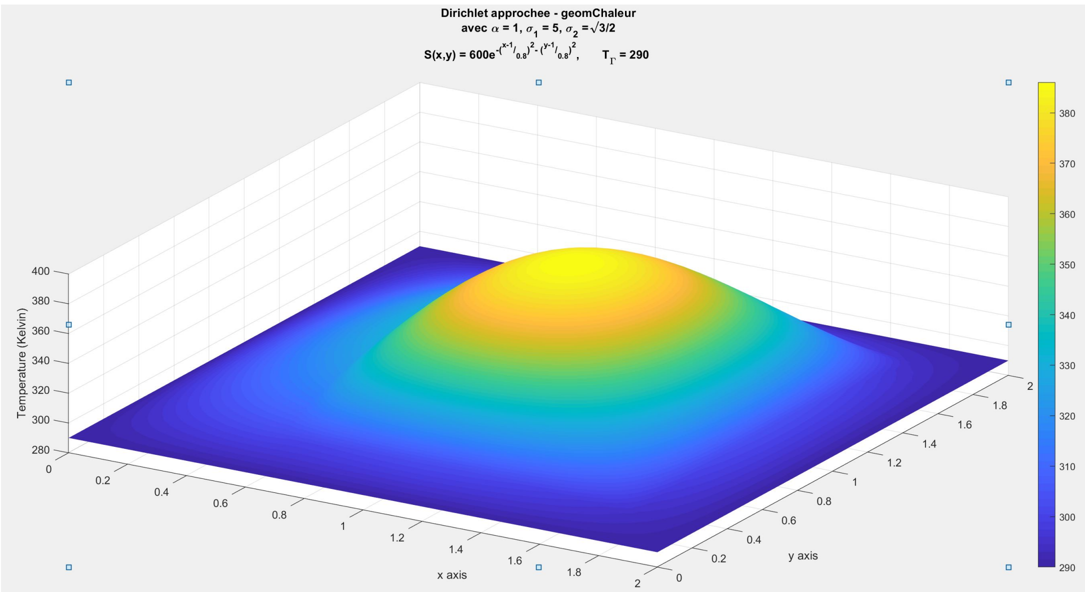
$$
\begin{aligned}
\|\nabla \pi_h u - \nabla u\|_{L_2} &= \left\langle \nabla \sum_{i=1}^{N_0} (u(M_i)w_i - u_h(M_i)w_i), \nabla \sum_{i=1}^{N_0} (u(M_i)w_i - u_h(M_i)w_i) \right\rangle_{L_2} \\
&= \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} (u(M_i) - u_h(M_i))(u(M_j) - u_h(M_j)) \langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle_{L_2} \\
&= (U^0 - U_h^0)\mathbb{K}^0 (U^0 - U_h^0)^T
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi une approximation de l'erreur en norme L2 en fonction de la matrice $\mathbb{K}^0$ car $\sigma = 1$ dans le cadre de cette étude. De plus pour la méthode des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ la méthode converge à l'ordre 1.

1.16

On pose:

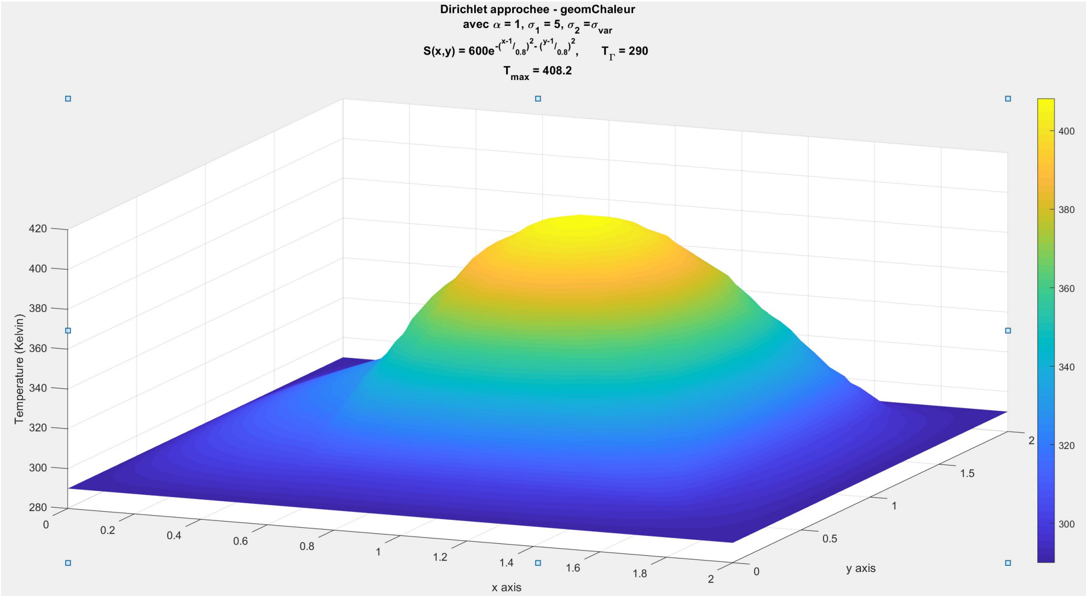
$$
\alpha = 1, \quad \sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad S(x,y) = 600 e^{-\left(\frac{x-1}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8}\right)^2}, \quad T_\Gamma = 290
$$



On observe que plus on s'éloigne du domaine Ω_2 plus la température décroit. En effet ceci est cohérent car la conductance de Ω_1 est plus élevée. Par continuité de la solution par rapport aux données il est normal qu'elle admette un maximum sur Ω_2.

1.17

Dans ce cadre nous modifions la restriction de σ sur $\Omega 2$ et on choisit $\sigma_2 = \sigma_{var}$ où:
$\sigma_{var}(x, y) = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x))(2 + \sin(16\pi y))$



On observe que la température au niveau de Ω_2 est bien plus élevée que dans le cadre précédent et qu'elle décroit plus vite en s'éloignant de Ω_2.

2

Equation de la chaleur stationnaire avec conditions de Fourier

On s'intéresse au calcul de la température $T \equiv T(x, y)$, solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Fourier (qui modélise un climatiseur : le flux de chaleur est positif si $T < T_c$ et négatif si $T > T_c$, où T_c est la température de référence du climatiseur) :
Trouver $T \in H^1(\Omega)$, telle que:

$$\begin{cases} \alpha T - div(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla T.n + \lambda(T - T_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec α, σ et S vérifiant les mêmes hypothèses que précédemment, $\lambda > 0$, et $T_c \in L_2(\delta\Omega)$

2.1

Soit $v \in H^1(\Omega)$. On obtient alors la formulation variationnelle:

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_\Omega T v d\Omega - \int_\Omega div(\sigma \nabla T) v d\Omega = \int_\Omega S v d\Omega \\
&\iff \alpha \int_\Omega T v d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla T \nabla v d\Omega - \int_{\delta\Omega} \sigma \nabla T n_{|\delta\Omega} v_{|\delta\Omega} d\delta\Omega = \int_\Omega S v d\Omega \\
\\
&\iff \alpha \int_\Omega T v d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla T \nabla v d\Omega - \int_{\delta\Omega} \lambda(T_c - T) v_{|\delta\Omega} d\delta\Omega = \int_\Omega S v d\Omega \\
&\iff \alpha \int_\Omega T v d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla T \nabla v d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} T_{|\delta\Omega} v_{|\delta\Omega} = \int_\Omega S v d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} T_c v_{|\delta\Omega} d\delta\Omega
\end{aligned}$$

On a donc:
Trouver $T \in H^1(\Omega)$ tel que:

$$\alpha \int_\Omega T v d\Omega + \int_\Omega \sigma \nabla T \nabla v d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} T_{|\delta\Omega} v_{|\delta\Omega} = \int_\Omega S v d\Omega + \int_{\delta\Omega} T_c v_{|\delta\Omega} d\delta\Omega$$

$\forall v \in H^1(\Omega)$

2.2

On cherche cette fois ci une solution T dans $H^1(\Omega)$. Montrons que le problème est bien posé:
Soit $a(T,v)$ le terme de gauche de la formulation variationnelle ci-dessus et l(v) le terme de droite. Clairement, a est bilinéaire et l est une application linéaire. Montrons la coercivité et la continuité de a:

$$\begin{array}{rcl}
|a(T,v)| & = & \left|\alpha\int_\Omega T v d\Omega + \int_\Omega \sigma\nabla T\nabla v d\Omega + \lambda\int_{\delta\Omega} T_{|\delta\Omega} v_{|\delta\Omega}\right| \\
& \leq & \alpha\left|\int_\Omega T v d\Omega\right| + \left|\int_\Omega \sigma\nabla T\nabla v d\Omega\right| + \lambda\left|\int_{\delta\Omega} T_{|\delta\Omega} v_{|\delta\Omega}\right| \\
\text{Par Cauchy-Schwarz} & & \\
& \leq & \alpha\|T\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\sigma\nabla T\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + \lambda\|T\|_{L_2(\delta\Omega)}\|v\|_{L_2(\delta\Omega)} \\
& \leq & \alpha\|T\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \sigma_{max}\|\nabla T\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + \lambda\|T\|_{L_2(\delta\Omega)}\|v\|_{L_2(\delta\Omega)} \\
\text{Continuité de la trace} & & \\
& \leq & \alpha\|T\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \sigma_{max}\|T\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \lambda C^2\|T\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
& = & (\alpha + \sigma_{max} + \lambda C^2)\|T\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{array}$$

Ainsi a est une application bi-linéaire continue.
soit $v = T$:

$$\begin{array}{rcl}
a(T,T) & = & \alpha\int_\Omega T^2 d\Omega + \int_\Omega \sigma^2|\nabla T|^2 d\Omega + \lambda\int_{\delta\Omega} T^2_{|\delta\Omega} \\
& = & \alpha\|T\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\sigma\nabla T\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\|T\|^2_{L_2(\delta\Omega)} \\
& \geq & \alpha\|T\|^2_{L_2(\Omega)} + \sigma_{min}\|\nabla T\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\|T\|^2_{L_2(\delta\Omega)} \\
& \geq & \min(\alpha,\sigma_{min})(\|T\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla T\|^2_{L_2(\Omega)}) \\
& = & \min(\alpha,\sigma_{min})\|T\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{array}$$

ainsi a est une application bi-linéaire coercive et continue
Montrons que l est une application continue:

$$\begin{array}{rcl}
|l(v)| & = & \left|\int_\Omega S v d\Omega + \lambda\int_{\delta\Omega} T_c v_{|\delta\Omega} d\delta\Omega\right| \\
& \leq & \left|\int_\Omega S v d\Omega\right| + \lambda\left|\int_{\delta\Omega} T_c v_{|\delta\Omega} d\delta\Omega\right| \\
\text{Par Cauchy-Schwarz:} & & \\
& \leq & \|S\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda\|T_c\|_{L^2(\delta\Omega)}\|v\|_{L^2(\delta\Omega)} \\
\text{Continuité de la trace} & & \\
& \leq & \|S\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \lambda C\|T_c\|_{L^2(\delta\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
& = & (\|S\|_{L^2(\Omega)} + \lambda C\|T_c\|_{L^2(\delta\Omega)})\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{array}$$

Ainsi l est une application linéaire continue. De plus, $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et toutes les hypothèses sont donc réunies pour appliquer le théorème de Lax-Milgram et affirmer qu'il existe une unique solution à ce problème qui est donc bien posé.
On introduit maintenant le sous espace V_h (approximation de $H^1(\Omega)$) qui est fermé car c'est un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert. Ainsi V_h muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert et nous pouvons écrire le problème sous sa

formulation variationnelle discrète qui reste bien posé pour les mêmes constantes de coercivité et de continuité:
Trouver $T_h \in V_h$ tel que:

$$a(T_h, v_h) = l(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

Soit T_h la solution dans V_h on a donc:

$$T_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} T_h(M_I)\omega_I(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}$$

et:

$$\alpha \int_{\Omega} T_h \omega_J d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla T_h \nabla \omega_J d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} T_h \omega_{J=} \int_{\Omega} S\omega_J d\Omega + \int_{\delta\Omega} T_c \omega_J d\delta\Omega$$

$\forall J, 1 \leq J \leq N$
Ainsi on obtient:

$$\alpha \int_{\Omega} \sum_{I=1}^{N} T_h(M_I)\omega_I \omega_J d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla \sum_{I=1}^{N} T_h(M_I)\omega_I \nabla \omega_J d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} \sum_{I=1}^{N} T_h(M_I)\omega_I \omega_J$$

$$= \int_{\Omega} S\omega_J d\Omega + \int_{\delta\Omega} T_c \omega_J d\delta\Omega \qquad \forall J, 1 \leq I \leq N$$

$$\iff \sum_{I=1}^{N} T_h(M_I) \left(\alpha \int_{\Omega} \omega_I \omega_J d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_I \nabla \omega_J d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} \omega_I \omega_J d\delta\Omega \right)$$

$$= \int_{\Omega} S\omega_J d\Omega + \int_{\delta\Omega} T_c \omega_J d\delta\Omega \qquad \forall J, 1 \leq I \leq N$$

Ce qui équivaut à un système linéaire de la forme:

$$\mathbb{A}\overrightarrow{U} = \overrightarrow{F}$$

Avec:

$$\mathbb{A} = \alpha\mathbb{M} + \mathbb{K} + \lambda\mathbb{S}$$

où:

$$(\mathbb{M})_{I,J} = \int_{\Omega} \omega_I \omega_J d\Omega, \qquad (\mathbb{K})_{I,J} = \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_I \nabla \omega_J d\Omega$$

et

$$(\mathbb{S})_{I,J} = \int_{\delta\Omega} \omega_I \omega_J d\delta\Omega, \qquad (\overrightarrow{U})_J = T_h(M_J)$$

et

$$(\overrightarrow{F})_J = \int_{\Omega} S\omega_J d\Omega + \lambda \int_{\delta\Omega} T_c \omega_J d\delta\Omega$$

La matrice $\mathbb{A}$ est symétrique par bilinéarité de a(.,.) et la coercivité de la forme bilinéaire associée au problème entraîne l'inversibilité de la matrice.

1 2.3

On va maintenant déterminer $\overrightarrow{F}$ à travers une technique d'interpolation:
Tout d'abord on approche la fonction $S \in L^2(\Omega)$ par son interpolée

$$\Pi_h S = \sum_{I=1}^{N} S(M_I) w_I$$

Ainsi on a:

$$\int_\Omega S\omega_J d\Omega \approx \int_\Omega \Pi_h S\omega_J d\Omega = \int_\Omega \sum_{I=1}^{N} S(M_I)\omega_I\omega_J d\Omega = \sum_{I=1}^{N} S(M_I)\int_\Omega \omega_I\omega_J d\Omega = (\mathbb{M}\overrightarrow{S})_J$$

avec $(\overrightarrow{S})_J = S(M_J)$
Ensuite on approche T_c par son interpolée:

$$\Pi_h T_c = \sum_{I=N_0+1}^{N} T_c(M_I)\omega_I$$

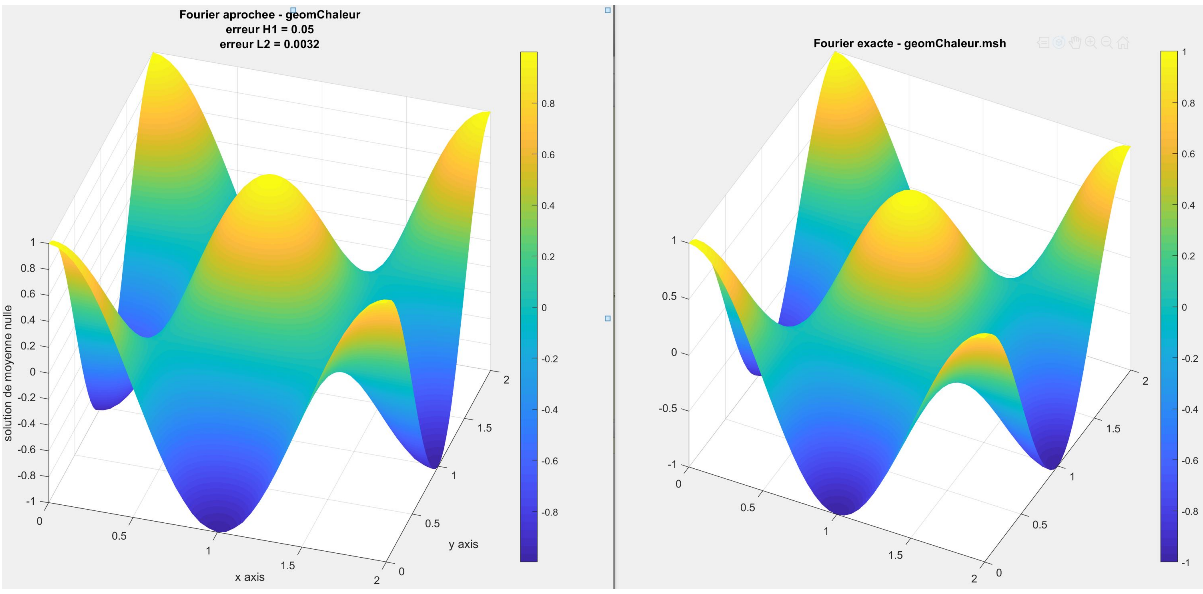
Sachant que $\Pi_h T_c(M_I) = 0 si M_I \not\in \delta\Omega$
Ainsi on obtient l'approximation:

$$\lambda\int_{\delta\Omega} T_c\omega_J d\delta\Omega \approx \lambda\int_{\delta\Omega} \Pi_h T_c\omega_J d\delta\Omega = \lambda\sum_{I=1}^{N} \Pi_h T_c(M_I)\int_{\delta\Omega} \omega_I\omega_J d\delta\Omega = \lambda(\mathbb{S}\overrightarrow{T_c})_J$$

Avec $(\overrightarrow{T_c})_J = \Pi_h T_c(M_I)$. Et donc on a déterminé F en fonction de l'intégrale de masse surfacique $\mathbb{S}$ et de la matrice de masse $\mathbb{M}$:

$$\overrightarrow{F} = \mathbb{M}\overrightarrow{S} + \lambda\mathbb{S}\overrightarrow{T_c}$$

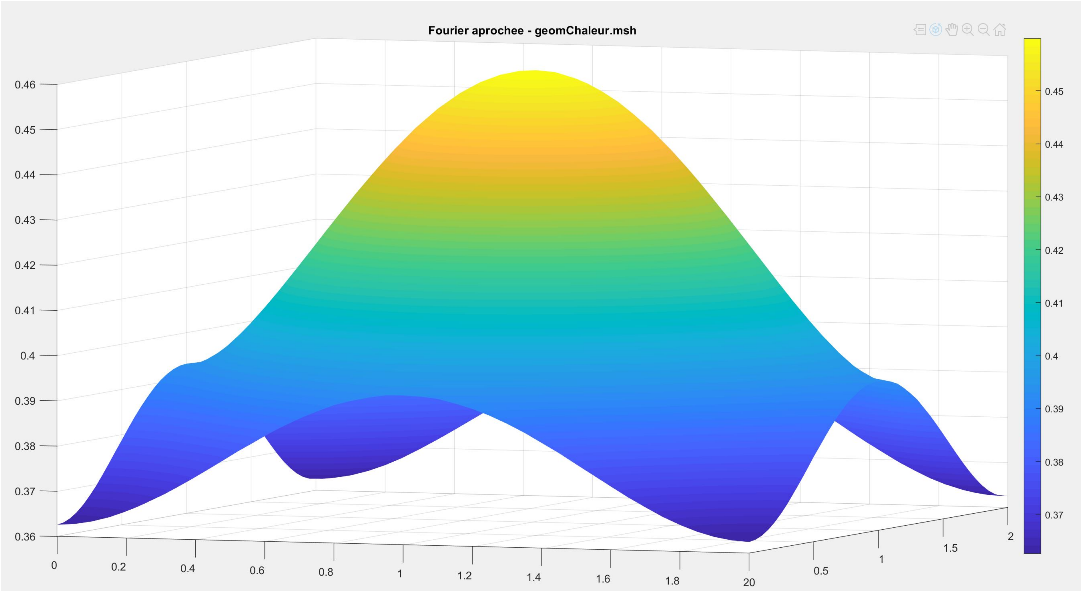
2.5



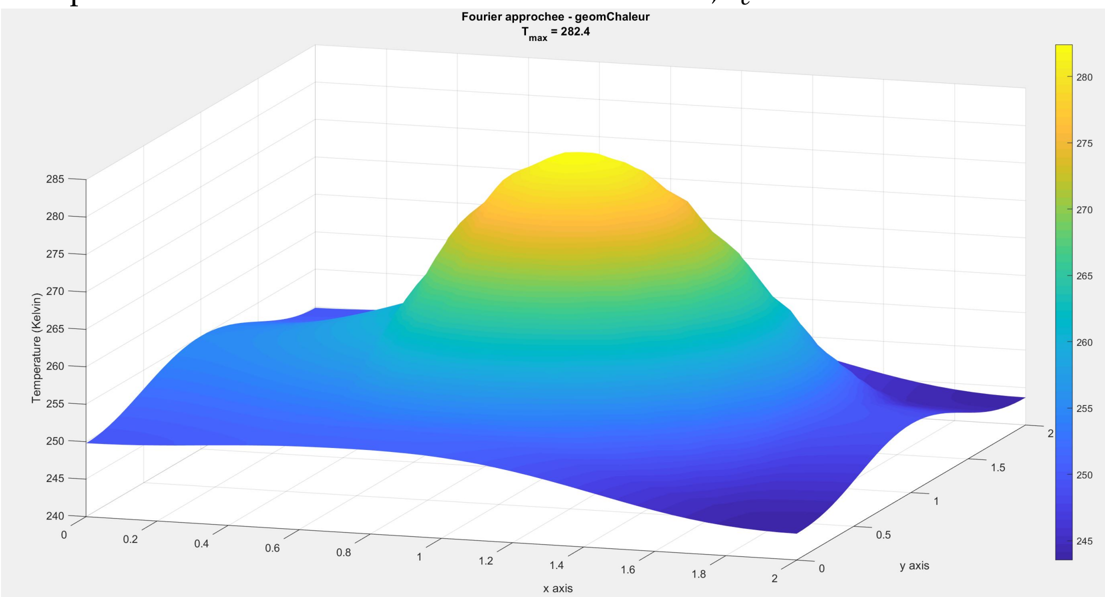
En comparant avec la solution exacte donnée on peut en effet valider notre code en remarquant que la solution approchée coincide et que l'erreur en norme H1 est de l'ordre de 10^{-2} et que la norme L2 de l'erreur est de l'ordre de 10^{-3}

2.6

$S(x,y) = sin(\frac{\pi x}{2})sin(\frac{\pi y}{2})$et $\quad \alpha = 1, \sigma = 1, \lambda = 0$



En reprenant les données de la section 1.17 avec $\lambda = 1, T_c = 290$ on obtient:



On observe que la variabilité de σ_{var} sur le domaine Ω_2 entraine une asymétrie de la solution. Et que pour $\lambda = 0$ le gradient de la solution est toujours perpendiculaire à la normale sortante comme attendu par l'équation dans le cadre des conditions au bord de type Fourier.

3

Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes

On veut maintenant modéliser l'équation de la chaleur, avec une température T T(x, y, t) dépendant du temps t. On résout dans ce cas:

Trouver T(t) $\in H^1(\Omega)$ telle que:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - div(\sigma\nabla T) = S & \text{dans } \Omega\times]0, t_{max}[\\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega\times]0, t_{max}[\\ T_{|t=0} = T_0 & \end{cases}$$

S S(x, y, t) étant la source de chaleur et $T_0 = T_0(x, y)$ la valeur initiale de la température

3.1

Soit $T(t) = u(t) + T_\Gamma$ alors:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - div(\sigma\nabla T) = \frac{\partial u}{\partial t} - div(\sigma\nabla u) = S \qquad \text{dans } \Omega\times]0, t_{max}[$$

et:

$$T = T_\Gamma \implies u = 0 \qquad \text{dans } \delta\Omega\times]0, t_{max}[\qquad \text{et} \qquad T_{|t=0} = T_0 \implies u_{|t=0} = T_0(x, y) - T_\Gamma$$

On peut donc reformuler le problème comme suit:
Trouver u(t) $\in H^1(\Omega)$ telle que:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - div(\sigma\nabla u) = S & \text{dans } \Omega\times]0, t_{max}[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0, t_{max}[\\ u_{|t=0} = T_0 - T_\Gamma & \end{cases}$$

On se rammène donc bien à un problème où l'on cherche la solution u(t) $\in H_0^1(\Omega)$

3.2

On peut reformuler le problème en faisant intervenir la matrice $\mathbb{A}^0$, en effet:

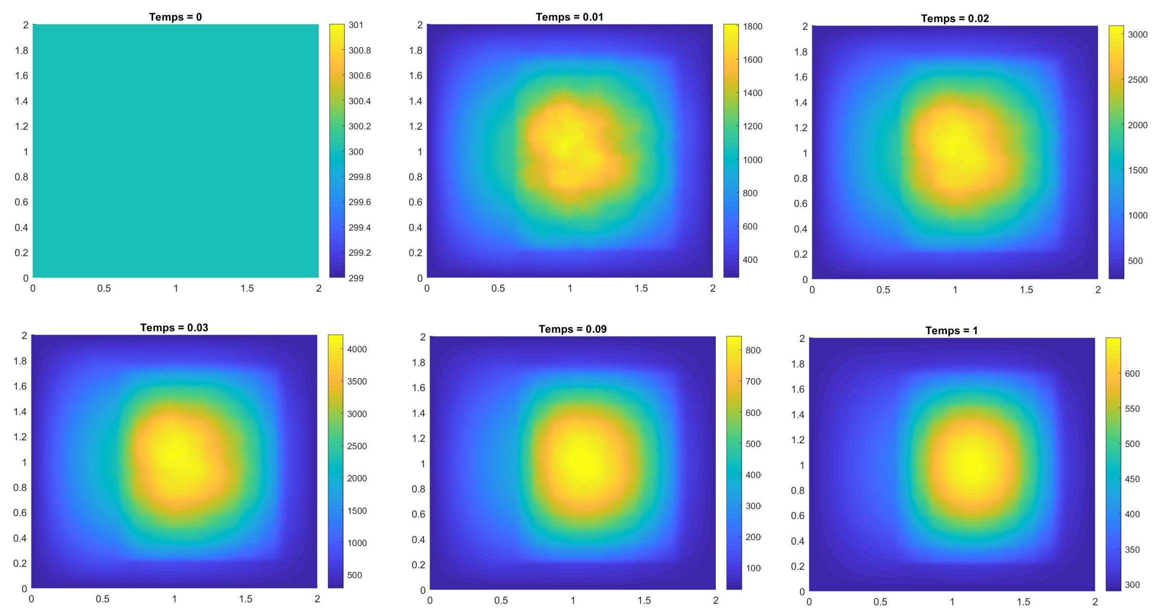
$$\mathbb{M}^0\left(\frac{V^{k+1}-V^k}{\Delta t}\right)+\mathbb{K}^0V^{k+1} \quad = \quad \left(\frac{1}{\Delta t}\mathbb{M}^0+\mathbb{K}^0\right)V^{k+1}-\frac{1}{\Delta t}\mathbb{M}^0V^k$$

Ainsi pour $\alpha=\frac{1}{\Delta t}$ on retrouve bien le problème exprimé en fonction de la matrice $\mathbb{A}^0$:

Trouver $V^k \in \mathbb{R}^{N_0}$ avec k variant de 0 à K-1 tels que:

$$\begin{cases} \mathbb{A}^0V^{k+1}-\alpha\mathbb{M}^0V^k=\overrightarrow{L}^{k+1} \\ \overrightarrow{V}^0=\overrightarrow{V}_0 \end{cases}$$

3.3



3.4