

SEMINAR

AFFINE ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Julian Quast

Wintersemester 2019/20, Dienstag 14-16 Uhr, SR 7

Motivation und Ziele des Seminars

Die Kreisgruppe S^1 kann als die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 zusammen mit der Multiplikation komplexer Zahlen definiert werden. Wir können S^1 auch als Teilmenge von \mathbb{R}^2 auffassen und die Multiplikation zweier Elemente in $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ wie folgt beschreiben:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Inversion ist durch $(a_1, a_2)^{-1} := (a_1, -a_2)$ gegeben. Wir sehen, dass Multiplikation und Inversion polynomiale Abbildungen sind, insbesondere besitzt also S^1 auch die Struktur einer *reellen algebraischen Gruppe*. Allgemein ist eine *affine algebraische Gruppe* G über K ein affines K -Schema von endlichem Typ, zusammen mit Multiplikation $G \times_K G \rightarrow G$, Inversion $G \rightarrow G$ und neutralem Element $\text{Spec}(K) \rightarrow G$, sodass gewisse Gruppenaxiome erfüllt sind.

Ziel des Seminars ist, solide Grundlagen der modernen Theorie algebraischer Gruppen in der Sprache der Schemata zu erarbeiten. Wir werden sehen, dass affine algebraische Gruppen äquivalent durch *Hopf-Algebren* beschrieben werden können. Danach betrachten wir *lineare algebraische Gruppen*; das sind algebraische Gruppen, die sich als Matrizengruppen in GL_n wiederfinden. Weiterhin beschäftigen wir uns mit auflösbarer Gruppen, Tori und unipotenten Gruppen. Je nach Teilnehmerzahl beenden wir das Seminar mit einer Analyse der Struktur *halbeinfacher Gruppen*.

Die Anwendungsbereiche algebraischer Gruppen sind vielfältig:

- Lie-Gruppen treten als Symmetriegruppen in der Geometrie und der Physik auf. Viele Lie-Gruppen lassen sich als algebraische Gruppen über \mathbb{R} oder \mathbb{C} auffassen.
- In der Klassifikation endlicher einfacher Gruppen werden lineare algebraische Gruppen über endlichen Körpern betrachtet.
- Im Langlands-Programm werden Darstellungen gewisser algebraischer Gruppen mit Zahlentheorie in Verbindung gebracht.
- ...

Organisatorisches

- **Vorbesprechung: Dienstag, den 01.10.2019 um 10.00 Uhr c.t. in Seminarraum 10**
- **Vorkenntnisse:** Algebraische Geometrie 1
- **Homepage:** <https://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/home/members/julian-quast/affinealgebraischegruppen/>
- Auf der Homepage des Seminars wird demnächst ein Programm mit detaillierten Anleitungen zu den Vorträgen hochgeladen.
- Wir bitten Interessenten darum, sich möglichst bald unverbindlich per Mail anzumelden:
julian.quast@iwr.uni-heidelberg.de.