Seminar zu Derivierten Kategorien und Algebraischer Geometrie

DOZENTEN: PROF. DR. BÖCKLE UND DR. LUDWIG
SOMMERSEMESTER 2021

Formalitäten

Bitte erstellen Sie begleitend zu Ihrem Vortrag ein Handout für die Seminarteilnehmer. Dieses Dokument sollte die wichtigsten Definitionen und Resultate aus ihrem Vortrag beinhalten. Gerne können Sie dort auch Details von Beweisen und Beispielen erklären, für die im Vortrag keine Zeit bleibt. Denken Sie sich außerdem ein Quiz mit drei Fragen zu Ihrem Vortrag für die anderen Teilnehmer aus.

Beginnen Sie rechtzeitig (ca. 4 Wochen vorher) mit der Vorbereitung Ihres Vortrages. Kommen Sie zwei Wochen vor Ihrem Vortrag zur einer Vorbesprechung. Es wird empfohlen, sich an den Übungsaufgaben aus den entsprechenden Kapiteln aus [Huy] zu versuchen. Dies hilft dabei, Verständnislücken zu entdecken. Der Termin zur Vorbesprechung ist dann am entsprechenden Dienstag um 9:30 Uhr. Bringen Sie einen Entwurf des Handouts zur Vorbesprechung mit.

Bitte schicken Sie das fertige Handout sowie die Quizfragen spätestens am Montag Vormittag vor Ihrem Vortrag per Email an Frau Ludwig, damit die Materialien den anderen Seminarteilnehmern vorab zu Verfügung gestellt werden können.

Vorträge

0) Überblicksvortrag (13.04.) Sprecher: Judith Ludwig

1. Derivierte Kategorien

1) Triangulierte Kategorien 1 (20.04.)
Referenz: [Huy] Abschnitt 1.1 und 1.2.
Ziel des Vortrags ist es den Begriff der triangulierten Kategorien zu erklären. Wiederholen Sie zunächst einige Grundlagen, d.h. definieren und erklären Sie die Begriffe additive und abelsche Kategorien, exakte Funktoren, adjungierte Funktoren. Geben

Sie Beispiele. Erklären Sie den Begriff eines Serre Funktors. Definieren Sie nun triangulierte Kategorien.

2) Triangulierte Kategorien 2 (27.04.)
Referenz: [Huy] Abschnitt 1.3 und 1.4.
Definieren Sie den Begriff einer aufspannenden Klasse (Def. 1.47) und beweisen Sie Proposition 1.49. Erklären Sie das Konzept von Zerlegungen von triangulierten Kategorien (Def. 1.52). Erklären Sie Korollar 1.56. Dies gibt ein Kriterium wie man entscheiden kann, ob ein gegebener Funktor zwischen triangulierten Kategorien eine Äquivalenz ist. Erklären Sie ferner die Begriffe der außergewöhnlichen Objekte und Sequenzen (Def. 1.57) sowie einer semi-orthogonalen Zerlegung (Def. 1.59).

3) Die Homotopie Kategorie (04.05.)
Referenz: [Mor] Abschnitte IV.1.3+4 und V.1.2, [Huy] Abschnitt 2.1., [GM] III.1.
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Definieren Sie die Kategorie $Kom(\mathcal{A})$ der Komplexe (Def. 2.2), sowie die Shift Funktoren (Def. 2.4). Definieren Sie die Begriffe der Homotopie-Äquivalenz, sowie der Quasi-Isomorphie. Konstruieren Sie die Homotopie-Kategorie $K(\mathcal{A})$ ([Huy] 2.12, 2.13, [Mor] IV.1.3+4) (sowie die Kategorien $K^*(\mathcal{A})$, $* \in \{+, -, b\}$). Erklären Sie die Idee hinter dem Konzept der derivierten Kategorie $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ und dass $K(\mathcal{A})$ ein wichtiger Zwischenschritt in der Konstruktion ist. Erklären Sie was ein ausgezeichnetes Dreieck ist und führen Sie den Abbildungskegel ein. Beweisen Sie, dass $K(\mathcal{A})$ eine triangulierte Kategorie ist ([Mor] V.1.2).

4) Lokalisierung von Kategorien und derivierte Kategorien (11.05.)
Referenz: [Mor] Abschnitt V.2., [GM] III.2-5.
Erklären Sie wie man Kategorien an einer Klasse von Morphismen lokalisiert ([Mor] V.2, [GM] III.2). Konstruieren Sie die derivierte Kategorie $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ sowie die Kategorien $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ und $\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$, als Lokalisierungen der entsprechenden Kategorien $K^*(\mathcal{A})$, wobei $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$. Erklären Sie [GM] III.5 Proposition 2, d.h. wie $\mathcal{A}$ als Unterkategorie von $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ zu finden ist.

5) Derivierte Kategorien (18.05.)
Referenz: [Huy] Abschnitt 2, [Mor] V.4.1-3, [GM] IV.2.
Beweisen Sie, dass derivierte Kategorien $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$, wobei $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$, auf natürliche Weise trianguliert sind. Beweisen Sie [Huy] Proposition 2.30, also wie man die Kategorien $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$, wobei $* \in \{+, -, b\}$ als Unterkategorien von $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ finden kann. Diskutieren Sie Auflösungen und beweisen Sie [Huy], Proposition 2.40. Erklären Sie [Huy] Proposition 2.42 als Vorbereitung auf die geometrischen Situationen.

6) Derivierte Funktoren (01.06.)
Referenz: [Huy] 2.2, [GM] III.6, [Mor] V.4.4.
Erklären Sie die Konstruktion eines zu einem links exakten Funktor assoziierten rechts abgeleiteten Funktors. Diskutieren Sie Eigenschaften der rechts abgeleiteten Funktoren. Erklären Sie die entsprechenden Konstruktionen für links abgeleitete Funktoren. Stellen Sie kurz die wichtigsten Beispiele aus der Geometrie vor ([Huy] Beispiel 2.45). Erklären Sie Ext-Gruppen im Kontext der derivierten Kategorien ([Huy] Proposition 2.56). Diskutieren Sie Kompositionen von abgeleiteten Funktoren ([Huy] Proposition 2.58).

7) Spektralsequenzen (08.06.)
Referenz: [Huy] 2.3, [GM] III.7.
Stellen Sie das Konzept der Spektralsequenzen vor, und erklären Sie, wie man sie aus einem Doppelkomplex bekommt ([Huy] Proposition 2.64). Zeigen Sie dann wie Spektralsequenzen in natürlicher Weise aus der Verknüpfung von abgeleiteten Funktoren entstehen [Huy] Proposition 2.66. Beweisen Sie Korollar 2.68. Diskutieren Sie schließlich das Konzept der amplen Sequenzen als Vorbereitungen auf spätere geometrische Situationen.

2. Derivierte Kategorien in der algebraischen Geometrie

8) Derivierte Kategorien von kohärenten Garben (15.06.)
Referenz: [Huy] Abschnitt 3.1 und 3.2.
Definieren Sie die beschränkte derivierte Kategorie eines Schemas und diskutieren Sie ihre Eigenschaften. Wiederholen Sie Serre Dualität und zeigen Sie dass diese einen Serre Funktor induziert ([Huy] Theorem 3.12). Zeigen Sie, dass die beschränkte derivierte Kategorie $\mathbf{D}^b(X)$ von den $\kappa(x)$ ([Huy] Proposition 3.17) sowie von den Potenzen eines amplen Linienbündels aufgespannt wird. Beschreiben Sie die derivierte Kategorie $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^n)$ durch Erzeuger wie in [Ca], Theorem 3.1.

9) Derivierte Funktoren der Algebraischen Geometrie Teil 1 (22.06.)
Referenz: [Huy] Abschnitt 3.3.
Stellen Sie die derivierten Funktoren $R\Gamma$, Rf_*, $R\mathrm{Hom}$ aus [Huy] Abschnitt 3.3 vor und diskutieren Sie ihre Eigenschaften. Stellen Sie duale Komplexe vor. Diskutieren Sie das Tensor Produkt $\mathcal{F} \otimes^L (-)$.

10) Derivierte Funktoren Teil 2 und Grothendieck–Verdier Dualität (29.06.)
Referenz: [Huy] Abschnitt 3.3 und 3.4.
Diskutieren Sie inverse Bilder, die Projektions-Formel und andere Kompatibilitätsaussagen für die abgeleiteten Funktoren. Erklären Sie die Grothendieck–Verdier Dualität.

11) Das Theorem von Bondal–Orlov (06.07.)
Referenz: [Huy] Kapitel 4, [BO].
Beweisen Sie zunächst [Huy] Proposition 4.1, also dass eine exakte Äquivalenz der beschränkten Kategorien zweier glatter projektiver Varietäten die Gleichheit ihrer Dimension impliziert. Beweisen Sie dann das Theorem von Bondal–Orlov, Proposition 4.11. Zeigen Sie Korollar 4.13. Diskutieren Sie Auto-Äquivalenzen und Proposition 4.17. Geben Sie einen kurzen Überblick über die Resultate über ample Sequenzen aus 4.3. Die Quelle [BO] kann bei der Vorbereitung dieses Vortrags auch hilfreich sein.

12) Fourier–Mukai Transformationen und derivierte Kategorien abelscher Varietäten) (13.07.)
Referenz: [Huy] Kapitel 5 und Teile von Kapitel 9.
Erklären Sie das Konzept der Fourier–Mukai Transformationen, und geben Sie Beispiele. Beweisen Sie Proposition 5.9 und wie man Fourier–Mukai Transformationen verknüpft (Proposition 5.10). Erklären Sie (ohne Beweis) Orlovs Theorem (Theorem 5.14), sowie Korollar 5.17 und erklären Sie zwei Anwendungen, Korollar 5.23 und 5.24. Geben Sie eine kurze Erklärung wie man mit dem Übergang von der derivierten Kategorie zur Kohomologie zeigen kann, dass zwei deriviert äquivalente elliptische Kurven schon isomorph sind ([Huy] Propositionen 5.33 und 5.39, Korollar 5.46). Stellen Sie anschließend die wichtigsten Resultate zu derivierten Kategorien abelscher Varietäten vor (insbesondere [Huy], 9.19, 9.39, 9.42, 9.49).

Literatur

[BO] Bondal, Alexei und Orlov, Dmitri, *Derived Categories of Coherent Sheaves*, Proceedings of the ICM, Vol. II (Beijing, 2002), 47–56, arXiv:0206295, 2002.

[Ca] Căldăraru, Andrei, *Derived categories of sheaves: A skimming*, Lecture notes, arXiv:0501094, 2005.

[GM] Gelfand, Sergei, und Manin, Yuri, *Methods of homological algebra*, Springer, 1988.

[Huy] Huybrechts, Daniel, *Fourier–Mukai transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2006.

[Mor] Morel, Sophie, *Homological Algebra*, Lecture notes, 2019.

Zusätzliche Literatur

[T] Thomas, Richard, *Derived Categories for the working mathematician*, arXiv:0001045v2, 2001.

[W] Weibel, Charles, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[Y] Yekutieli, Amnon, *Derived Categories*, arXiv:1610.09640v4, 2019.