

# SEMINAR ZUR $p$ -ADISCHEN GEOMETRIE

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Ann-Kristin Juschka und Yujia Qiu

Sommersemester 2014, dienstags 14:15 – 15:45, Raum 220/INF 368. Beginn: 22.04.2014  
Seminarprogramm (Stand: 23. Mai 2014)

## Motivation und Ziele des Seminars

Als Erfinder der Geometrie über  $p$ -adischen Körpern gilt gemeinhin John Tate. Er hatte Ende der 50er Jahre Rechnungen zu elliptischen Kurven mit  $p$ -adischen Hilfsmitteln durchgeführt. Grothendieck kommentierte diese in einem Brief an Serre mit:

Tate has written to me about his elliptic curves stuff, and has asked me if I had any ideas for a global definition of analytic varieties over complete valuation fields. I must admit that I have absolutely not understood why his results might suggest the existence of such a definition, and I remain skeptical.

Tate ließ sich nicht entmutigen und skizzierte Ende der 60er Jahre weitgehende Ideen zu einer rigid-analytischen Geometrie über ultrametrisch bewerteten Körpern wie beispielsweise  $\mathbb{Q}_p$ . Die Motivation hierzu lag darin,  $p$ -adische Eigenschaften von Gleichungen – etwa der einer elliptischen Kurve – nicht alleine mit Methoden der algebraischen Geometrie zu untersuchen. Ein Vorbild hierbei war die Theorie algebraischer Kurven über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , die äquivalent zu kompakten Riemannschen Flächen sind. Letztere können in der komplexen Analysis mit viel elementareren Methoden untersucht werden. Auf einer Riemannschen Fläche kann man zum Beispiel die Theorie der Integration und den Residuenkalkül benützen. Jede kompakte Riemannsche Fläche lässt sich *uniformisieren*. Am bekanntesten ist sicher der Fall elliptischer Kurven über  $\mathbb{C}$ : Jede solche lässt sich beschreiben als Quotient  $\mathbb{C}/\Lambda$  für ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter in  $\mathbb{C}$ , oder, weniger bekannt in der multiplikativen Form  $\mathbb{C}^*/q^\mathbb{Z}$  für eine komplexe Zahl mit Betrag  $|q| > 1$ .

Zwar lässt die rigid-analytische Geometrie keine einfache Integration zu. Ein Residuenkalkül im projektiven Raum  $\mathbb{P}^1$  über ultrametrisch bewerteten Körpern ist aber leicht zu entwickeln. Dank Tates rigid-analytischen Räumen gibt es auch eine Uniformisierungstheorie für gewisse Kurven über  $\mathbb{Q}_p$ .

Im Seminar behandeln wir anhand der Quellen [Bos08, BGR84, FvdP04, Ber90] folgende Themen:

- I *Affinoide Räume*, die lokalen Bausteine rigid-analytischer Räume
- II *Konstruktion rigid-analytischer Räume* mithilfe von Grothendieck Topologie und Garben
- III *Beispiele rigider Räume* wie Tates elliptische Kurve; Residuenkalkül in Unterräumen von  $\mathbb{P}^1$
- IV *Ausblicke auf eine Theorie von Berkovich*

## Organisatorisches

- *Vorkenntnisse*: Algebra I (Mininum), Algebra II (kommutative Algebra; empfohlen). Optional, aber nützlich: z.B. Algebraische Zahlentheorie/Geometrie oder Funktionentheorie I/II
- *Homepage*: [www.iwr.uni-heidelberg.de/~Ann-Kristin.Juschka/seminar-ss2014/](http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Ann-Kristin.Juschka/seminar-ss2014/)
- Zwei Wochen vor dem eigenen Vortrag (oder allgemein zu Verständnisfragen) in die Sprechstunde kommen (donnerstags 14:15-15:45, INF 368; ungerade Vortragsnummer: Yujia Qiu, Raum 209 / gerade Vortragsnummer: Ann-Kristin Juschka, Raum 231)

# Vorträge

Im ersten und zweiten Teil folgen wir für Tates Theorie rigider Räume Boschs Vorlesungsskript [Bos08], insbesondere dessen Notation und Struktur. Unsere weiteren Hauptquellen sind [BGR84, FvdP04]. Aus den beiden letzteren behandeln wir im dritten Teil Beispiele rigider Räume. Neben der angegebenen Literatur in den jeweiligen Vorträgen bieten auch die folgenden Quellen eine gute Einführung in verschiedene der unten beschriebenen Themen: [BR10, Con08, Tat71].

## Teil I Affinoide Räume, die lokalen Bausteine rigider Räume

Die Vorträge in diesem Teil beschäftigen sich mit den lokalen Bausteinen von Tates rigid-analytischen Geometrie: die Tate-Algebra und ihre Quotienten, die affinoiden Algebren  $A$ . Deren maximales Spektrum  $\text{Sp}(A) := \text{Max}(A)$  sind die affinoiden Räume, die im zweiten Teil zu den allgemeinen rigiden Räumen verklebt werden.

### 1. Die Tatealgebra $\mathbb{T}_n$

Zunächst soll in diesem Vortrag die Topologie eines ultrametrisch bewerteten Körpers  $K$  anhand von [Bos08, § 1.1] erklärt werden, deren totale Unzusammenhängendheit die Definition von analytischen Funktionen erschwert. Anschließend soll wie in [Bos08, § 1.2] die Tate-Algebra der strikt konvergienden Potenzreihen eingeführt werden. Zuletzt soll gezeigt werden, dass die Weierstraß-Theorie der Tatealgebra ähnlich der eines Polynomrings entwickelt werden kann. Im Detail:

- *Ultrametrisch bewertete Körper  $K$ :* Definition einer Ultrametrik, Beispiele eines ultrametrischen Körpers, Vollständigkeit und Cauchy-Folgen auf  $K$ , die totale Unzusammenhängendheit und die Problematik des Begriffs einer analytischen Funktion (möglichst viele Beweise aus [Bos08, § 1.1]).
- *Definition der Tatealgebra:* Eindeutige Fortsetzbarkeit der Bewertung nach  $K^{\text{alg}}$  [Bos08, Appendix]; Konvergenzradius einer formalen Potenzreihe auf  $\mathbb{B}_n(K^{\text{alg}})$  und Definition der Tatealgebra  $\mathbb{T}_n$  [Bos08, Lem. 1.2/1 – Def. 1.2/2]. Mündlich: Im nächsten Vortrag werden die Elemente von  $\mathbb{T}_n$  als Funktionen  $\mathbb{B}_n(K^{\text{alg}}) \rightarrow K^{\text{alg}}$  interpretiert [Bos08, Cor. 1.2/12].
- *Erste Eigenschaften der Tatealgebra:* Definition einer Banachalgebra über  $K$ , Definition und Multiplikativität der Gauß-Norm, Vollständigkeit von  $\mathbb{T}_n$  bezgl. der Gauß-Norm. Charakterisierung von Einheiten von  $\mathbb{T}_n$  und das Maximum-Prinzip für  $\mathbb{T}_n$  [Bos08, p.8 – Prop. 1.2/5].
- *Weierstraßsche Theorie:* Definition  $\zeta_n$ -allgemeiner Elemente, die Weierstraßdivision mit Rest und der Weierstraßsche Vorbereitungssatz mit Beweisideen [Bos08, Def. 1.2/6 – Cor. 1.2/9].

**Literatur:** [Bos08, Appendix, § 1.1 – Cor. 1.1/9], [FvdP04, § 1.1 & 3.1]

Vortragender: Gebhard Böckle

22.04.2014

### 2. Die Ringtheorie der Tatealgebra

Wie im letzten Vortrag angekündigt, werden zunächst die Elemente der Tatealgebra  $\mathbb{T}_n$  als Funktionen  $\mathbb{B}_n(K^{\text{alg}}) \rightarrow K^{\text{alg}}$  interpretiert [BGR84, § 7.1.1]. Anschließend werden ihre ringtheoretische Eigenschaften und Abgeschlossenheit von Idealen  $\mathfrak{a} \subset \mathbb{T}_n$  behandelt und affinoide Algebren  $\mathbb{T}_n/\mathfrak{a}$  eingeführt:

- *Interpretation von  $\mathbb{T}_n$  als Funktionenalgebra:* Noether Normalisierung; maximale Ideale und Endlichkeit der Restklassenkörper; das maximale Spektrum  $\text{Max}(\mathbb{T}_n)$  und Interpretation der Elemente von  $\mathbb{T}_n$  als Funktionen  $\mathbb{B}_n(K^{\text{alg}}) \rightarrow K^{\text{alg}}$  [Bos08, Cor. 1.2/10 – 1.2/12].
- *Ringtheorie der Tatealgebra:* Die Tatealgebra  $\mathbb{T}_n$  ist noethersch, faktoriell, normal und Jacobson [Bos08, Prop. 1.2/13 – Prop. 1.2/15].
- *Ideale in der Tatealgebra:* Beweise, dass jedes Ideal in  $\mathbb{T}_n$  abgeschlossen ist ([Bos08, Cor. 1.3/8 und 1.3/9] oder [FvdP04, Thm. 3.2.1] entlang [Bos08, § 1.3] oder [FvdP04, § 3.2]).

- *Affinoide Algebren*: Definition einer affinoiden Algebra  $A = \mathbb{T}_n/\mathfrak{a}$ , Interpretation ihrer Elemente als Funktionen  $V(\mathfrak{a}) \rightarrow K^{\text{alg}}$ , Beweis ringtheoretischer Eigenschaften von  $A$  und Vollständigkeit unter der Restklassennorm [Bos08, Def 1.4/1 – Prop. 1.4/4].

**Literatur:** [Bos08, Cor. 1.2/10 – Prop. 1.4/4], [BGR84, § 7.1.1], [FvdP04, Thm. 3.2.1].

**Vortragender:** Philipp Schneider

29.04.2014

### 3. Affinoide Algebren und die Spektralnorm

Ziel dieses Vortrages ist es affinoide Algebren mit ihren Spektralnormen einzuführen und zu zeigen, dass alle Restklassennormen auf einer affinoiden Algebra äquivalent (zur Spektralnorm) sind.

- *Wiederholung affinoide Algebren*: Definition einer affinoiden Algebra  $A = \mathbb{T}_n/\mathfrak{a}$ , Interpretation ihrer Elemente als Funktionen  $V(\mathfrak{a}) \rightarrow K^{\text{alg}}$ , Beweis ringtheoretischer Eigenschaften von  $A$  und Vollständigkeit unter der Restklassennorm [Bos08, Def 1.4/1 – Prop. 1.4/4].
- *Die Spektralnorm (=Supremumsnorm)*: Definiere Seminormen, die Spektral(semi-)norm und zeige erste Eigenschaften, aus denen insbesondere das Maximumsprinzip für die Spektralnorm folgt [Bos08, S. 23 – Prop. 1.4/15]. Erwähne die Folgerung in [BGR84, Prop. 6.2.1/4(iii)].
- *Stetigkeit aller Morphismen und Äquivalenz aller Restklassennormen von affinoiden Algebren*: Definiere Restklassennormen [Con08, Exc. 1.2.4], zeige verschiedene Unabhängigkeiten von einer Restklassennorm und folgere die gewünschte Äquivalenz [Bos08, Thm. 1.4/16 – Prop. 4.1/19].
- *Verallgemeinerte Polzyylinder  $\mathbb{B}_n(\rho)$  mit Radius  $\rho$* : Erkläre, für welche  $\rho \in \mathbb{R}^n$  es eine affinoide Algebra  $A$  mit  $\text{Max}(A) \cong \mathbb{B}_n(\rho)$  gibt ([FvdP04, Exc. 3.4.8], [BGR84, Thm. 6.1.5/4]). Erwähne mündlich, dass Berkovichs Theorie in Teil IV keine solche Einschränkung hat [Con08, Def. 4.2.7].

**Literatur:** [Bos08, § 1.4], [BGR84, § 6.1.5 – Thm. 6.2.4/1], [Con08, Def. 4.2.7].

**Vortragender:** Philipp Schneider

06.05.2014

### 4. Affinoide Räume

Nachdem wir die algebraische Seite von Tates Theorie kennengelernt haben, werden nun wie in der algebraischen Geometrie affinoide Räume  $\text{Sp}(A)$  zu einer affinoiden Algebra  $A$  assoziiert und mit der mit der Zariskitopologie versehen.

- *Affinoide Räume*: Definition des Spektrums von  $A$  und affinoide Räume  $\text{Sp}(A)$  mit der Zariskitopologie [Bos08, Lem. 1.5/1 – Prop. 1.5/2] und ihren Morphismen [Bos08, Ende § 1.5].
- *Hilbertscher Nullstellensatz*: Beweise das Analogon des Hilbertschen Nullstellensatzes aus der algebraischen Geometrie und beschreibe Erzeuger des Einseideals [Bos08, Prop. 1.5/3 – Cor. 1.5./6].
- *Die kanonische Topologie eines affinoiden Raums*: Definiere die kanonische Topologie und zeige die Stetigkeit von Morphismen bezüglich der kanonischen Topologie [Bos08, § 1.6 bis Prop. 6].
- *Beispiele affinoide Teilmengen*: Definiere  $\mathbb{P}^1(K)$  und seine affinoiden Teilmengen [FvdP04, § 2.1]. Erkläre [FvdP04, Exmp. 2.2.2 – Exc. 2.2.7] und ihre Affinoidität [FvdP04, Exmp. 3.3.5]. Erwähne [FvdP04, Rem. 2.2.10, Prop. 3.3.6 – Rem. 3.3.7], deren Beweis erfolgt im 10. Vortrag.

**Literatur:** [Bos08, § 1.5, 1.6], [FvdP04, § 2.1, 2.2, 3.3], [BGR84, Def. 7.1.4], [Ked04, The projective line].

**Vortragender:** Tim Adler

13.05.2014

## Teil II Konstruktion rigider Räume

In der Differentialgeometrie oder der Theorie der Riemannschen Flächen definiert man globale geometrische Räume oft durch einen Atlas zusammen mit Verklebedaten. In der algebraischen Geometrie ging man dazu über, die Verklebedaten in Termen einer Garbe auf einem topologischen Raum zu

definieren. Im Beispiel einer Riemannschen Fläche  $X$  hieße das: Man gibt den topologischen Raum  $X$  zusammen mit einer Zuordnung  $\mathcal{O}_X$  vor, die jeder offenen Teilmenge  $U$  von  $X$  die Menge der auf  $U$  holomorphen Funktionen nach  $\mathbb{C}$  zuordnet. Bei dieser Struktur handelt es sich um eine Riemannsche Fläche, wenn man weiter Folgendes fordert:  $X$  besitzt eine Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von offenen Mengen, so dass jedes  $U_i$  isomorph zu einer offenen Kreisscheibe  $\mathring{D}$  ist und unter diesem Isomorphismus die Zuordnung  $\mathcal{O}_X$  eingeschränkt auf Teilmengen von  $U_i$  mit der üblichen Zuordnung  $\mathcal{O}_{\mathring{D}}$  auf  $\mathring{D}$  identifiziert wird. In der rigiden Geometrie ist dies etwas subtiler zu handhaben: man muss die Klasse der offenen Mengen einschränken, die als  $U_i$  *zulässig* sind. Mit anderen Worten, man muss die Atlanten in einer geeigneten Weise beschränken. Hierzu definiert man eine Grothendieck Topologie. Anschließend ist die Definition eines globalen rigiden Raumes sehr natürlich.

## 5. Affinoide Unterbereiche

In diesem Vortrag werden die affinoiden Unterbereiche eingeführt, die später die zulässigen offenen Mengen der Grothendiecktopologie bilden werden. Die teilweise umfangreichen Beweise zu folgenden Punkten sollen nur gut skizziert werden.

- *Definition affinoider Unterbereiche:* Definition Weierstrass-, Laurent und rationaler Bereiche und affinoider Unterbereiche. Beweise grundlegende Eigenschaften und skizziere, warum Weierstraß-, Laurent und rationale Bereiche affinoide Unterbereiche sind [Bos08, Def. 1.6/7 – Prop. 1.6/11].
- *Weitere Eigenschaften von affinoiden Unterbereichen:* Zeige Transitivität von affinoiden Unterbereichen und das Verhalten unter Morphismen und von Schnittmengen. Folgere weiter, dass alle speziellen Unterbereiche rational sind und die Transitivität für spezielle affinoide Unterbereiche [Bos08, Prop. 1.6/12 – Prop. 1.6/17].
- *Induzierte kanonische Topologie und Satz von Gerritzen-Grauert* (ohne Beweise) [Bos08, S.45ff.].
- *Die Prägarbe affinoider Funktionen  $\mathcal{O}_X$ :* Erkläre diesen Begriff und definiere die Halme  $\mathcal{O}_{X,x}$  und Keime. Zeige, die Lokalität von  $\mathcal{O}_{X,x}$  und die Injektivität von  $A_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ . Erwähne mündlich, dass im nächsten Vortrag gezeigt wird, wann  $\mathcal{O}_X$  eine Garbe ist [Bos08, § 1.7 bis Prop. 2].

**Literatur:** [Bos08, § 1.6 – Prop. 1.7/2], [FvdP04, § 4.1]

**Vortragender:** Tim Adler

20.05.2014

## 6. Der Tatesche Azyklizitätssatz

Das Ziel dieses Vortrages ist der Tatesche Azyklizitätssatz. Daraus folgt, dass die Prägarbe  $\mathcal{O}_X$  die Garbeneigenschaft für endliche Überdeckungen mit affinoiden Unterbereichen erfüllt. Dies motiviert im nachfolgenden Vortrag die Definition einer Grothendiecktopologie.

- *Der schwache Tatesche Azyklizitätssatz:* Definition einer Garbe auf der Kategorie der affinoiden Unterbereiche eines affinoiden Raums  $X$ . Erkläre den Zusammenhang der Garbeneigenschaft und des Begriffs  $\mathfrak{U}$ -Garbe und den schwachen Tateschen Azyklizitätssatzes für  $\mathcal{O}_X$  [Bos08, S.63f.].
- *Beweis der schwachen Version:* Zeige (soweit zeitlich möglich) die Reduktion des Beweises auf Laurent Überdeckungen und beweise diesen Spezialfall vollständig [Bos08, Lem. 1.9/2 – S.68f.].
- *Tates Azyklizitätssatz:* Definition der Čech Kohomologie einer Prägarbe  $\mathcal{F}$  und von  $\mathcal{F}$ -Azyklizität. Erkläre die allgemeine Version von Tates Azyklizitätssatz und behandle (falls die Zeit ausreicht)  $(U \mapsto M \otimes_A \mathcal{O}_X(U))$ -Azyklizität [Bos08, S.69 – Cor. 1.9/11].

**Literatur:** [Bos08, § 1.9], [FvdP04, § 4.2]

**Vortragender:** Andreas Maurischat

27.05.2014

## 7. Grothendiecktopologien

Um in der étalen Topologie eine Garbentheorie mit Kohomologie zu entwickeln, axiomatisierte Grothendieck den Begriff von offenen Überdeckungen. In diesem Vortrag werden zuerst affinoide Räume

$X$  so mit Grothendiecktopologien versehen, dass  $\mathcal{O}_X$  bezüglich diesen die Garbeneigenschaft hat. Im zweiten Teil werden Eigenschaften von Garben auf  $G$ -topologisierten Räumen untersucht.

- *Grothendiecktopologien* (= Grothendiecks „Situs“ [Sta14, §00VG]): Deren Definition und die einer Garbe mit topologische Hausdorffräumen (siehe auch [Sta14, Exmp. 00VJ]) und der schwachen Grothendiecktopologie als Beispiele [Bos08, Def. 1.10/1 – 1.10/3].
- *Die starke Grothendiecktopologie*: Ihre Definition und Vollständigkeitseigenschaften, Stetigkeit von Morphismen und Vergleich mit der Zariski-Topologie [Bos08, Def. 1.10/4 – Cor. 1.10/9]. Definition und Charakterisierung von Zusammenhängendheit [BGR84, Prop. 9.1/8]. Globale Konstruktion einer starken Grothendiecktopologie von lokalen [Bos08, Prop. 1.10/10 – 1.10/11].
- *Garbentheorie*: Halme und Garbifizierung von Prägarben und Čech-Kohomologie; Existenz, Eindeutigkeit und Konstruktion der Fortsetzung einer Garbe auf die starke Grothendiecktopologie (Formulierung als Äquivalenz von Kategorien) [Bos08, § 1.11].

**Literatur:** [Bos08, § 1.10, 1.11], [BGR84, § 9.1, 9.2], [FvdP04, § 4.2 – 4.4], [Sta14, Ch. 00UZ]

**Vortragender:** Yujia Qiu

03.06.2014

## 8. Tates rigide Räume

In diesem Vortrag werden nun die Resultate aus den letzten Vorträgen benutzt um die Kategorie globaler rigider Räume zu definieren. Außerdem wird die Existenz des GAGA-Funktors erklärt, der ein Schema auf seine Analytifizierung abbildet.

- *G-geringte Räume*: Definition der Kategorie von (lokalen)  $G$ -geringen Räumen  $(X, \mathcal{O}_X)$  und Volltreueit des Funktors von der Kategorie der  $K$ -affinoiden Räumen zu der von lokal  $G$ -geringen Räumen [Bos08, Def. 1.12/1 – Lem. 1.12/3].
- *Rigide  $K$ -Räume*: Definition der Kategorie von rigid(-analytischen) Räumen  $(X, \mathcal{O}_X)$  über  $K$ , Verklebedaten für rigide Räume und Morphismen zwischen diesen, die volle Unterkategorie der  $K$ -affinoiden Räume und Existenz des Faserproduktes [Bos08, Def. 1.12/4 – Cor. 1.12/8].
- *Der GAGA-Funktator*: Rigide Analytifizierung  $\mathbb{A}_K^{n,\text{rig}}$  des affinen Raums  $\mathbb{A}_K^n$  und Definition eines Schemas von (lokal) endlichem Typ [Sta14, Def. 01T1]. Analytifizierung für affine  $K$ -Schema von (lokal) endlichem Typ und deren universelle Eigenschaft. Folgere aus letzterem die Existenz des GAGA-Funktors  $Z \mapsto Z^{\text{rig}}$  und konstruiere  $\mathbb{A}_K^{1,\text{rig}}$  und  $\mathbb{P}_K^{n,\text{rig}}$  als Beispiele [Bos08, §1.13].
- *Kohärente Moduln* (falls nicht im nächsten Vortrag behandelt, ohne Beweise): Konstruktion von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln, Definition kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Moduln und Kiehls Theorem [Bos08, § 1.14 bis Thm. 4]. Rigides Analogon von Serres GAGA (ohne Def. von eigentlich) [Bos08, Thm. 1.16/12 – S. 116].

**Literatur:** [Bos08, § 1.12 – § 1.13], [FvdP04, § 4.3]

**Vortragender:** Mirko Rösner

10.06.2014

## 9. Quasi-kohärente Garben, deren Kohomologie und Kiehls Theorem A und B

Die Idee ist es, einen Übersichtsvortrag über die Theorie der kohärenten Garben auf rigiden Räumen zu halten inklusive der zentralen Theoreme von Kiehl, die analog zu Serres Theorem A und B in der algebraischen Geometrie sind. In seinem Artikel „Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique“ benutzt Serre diese um das GAGA-Prinzip zu beweisen, das Kategorien algebraisch-geometrischer Objekte mit Unterkategorien analytisch-geometrischer Objekte identifiziert. So folgt auch aus Kiehls Resultaten ein rigides GAGA-Prinzip.

**Literatur:** [Bos08, § 1.14 – 17], [FvdP04, § 4.5 – 4.7, 4.10]

**Vortragende:** Ann-Kristin Juschka

17.06.2014

### Teil III Beispiele rigider Räume

In Teil III sollten Notationen und Begriffe möglichst an die der vorherigen Vorträge angepasst werden.

#### 10. Der Residuenkalkül für Teilmengen des $\mathbb{P}_K^{1,\text{rig}}$

Im 4. Vortrag haben wir die affinoiden Teilmengen von  $\mathbb{P}_K^{1,\text{rig}}$  kennengelernt und gezeigt, dass sie affinoide Räume sind. Nun sollen weitere Resultate aus [FvdP04] dargestellt werden. Dies sollte insbesondere den Residuenkalkül aus [FvdP04, Ch. 2] und die analytische Reduktion umfassen. Genauer:

- *Wiederholung affinoide Teilmengen:* Wiederhole die relevanten Begriffe aus dem 4. Vortrag [FvdP04, § 2.1 – 2.2] und erkläre [FvdP04, Prop. 3.3.6 – Rem. 3.3.7] oder [GvdP80, Exm. II/1.8.3].
- *Residuenkalkül:* Beweis des Residuensatzes anhand von [FvdP04, § 2.3] oder [GvdP80, S. 93ff.].
- *Beispiele von G-Topologien im  $\mathbb{P}_K^{1,\text{rig}}$ :* Erkläre [GvdP80, S. 93f.] oder [FvdP04, Def. 2.4.3, § 2.6].
- *Meromorphe Funktionen und Garben auf  $\mathbb{P}_K^{1,\text{rig}}$ :* Behandle die Garbe meromorpher Funktionen und eventuell die analytische Fortsetzbarkeit meromorpher Funktionen [FvdP04, § 2.5, 2.7].
- *Die analytische Reduktion:* Erkläre insbesondere [GvdP80, S. 86f., S. 113 – 119].
- Optional: *Das rigide GAGA-Theorem im  $\mathbb{P}_K^{1,\text{rig}}$ :* Leite insbesondere das Kriterium zur Erkennung projektiver Varietäten her [FvdP04, § 4.10], das in den nächsten Vorträgen benötigt wird.

**Literatur:** [FvdP04, Ch. 2, 3.3, 4.6, 4.7], [Ked04, The projective line], [VS97], [GvdP80, Ch. I – III]

**Vortragende:** Peter Gräf

24.06.2014

#### 11. Die Tate elliptische Kurve

Darstellung der Resultate von [FvdP04, Ch. 5.1]. Falls das Kriterium zur Erkennung projektiver Varietäten noch nicht gezeigt wurde [FvdP04, § 4.10], erkläre dieses und die Algebraizität der Tate Kurve.

**Literatur:** [FvdP04, § 4.10, 5.1], [BGR84, § 9.7.3]

**Vortragender:** Patrik Hubschmid

01.07.2014

#### 12. Die Drinfeldsche obere Halbebene und ihre Quotienten

Für die komplexe obere Halbebene  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  und eine Kongruenzuntergruppe  $\Gamma_N \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist die Kompaktifizierung der Riemannschen Fläche  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}/\Gamma_N$  eine Modulkurve, die bestimmte komplexe elliptische Kurven parametrisiert. Drinfeld verallgemeinerte Tates Uniformisierung elliptischer Kurven über einem nichtarchimedischen Körper  $K$ , indem er die  $p$ -adische obere Halbebene  $\mathbb{H}_K$  und höherdimensionale  $p$ -adische symmetrische Räume  $X$  konstruierte und zeigte, dass die Quotienten von  $X$  nach diskreten Gruppen  $\Gamma$  rigide Unterräume von  $\mathbb{P}_K^{n,\text{rig}}$  sind. Weiter bewies er, dass sie bestimmte Objekte wie zum Beispiel Shimuravarietäten parametrisieren und mit dem rigiden GAGA-Prinzips folgt oft, dass  $X/\Gamma$  die Analytifizierung einer algebraischen Varietät ist.

- *Schottkygruppen und Mumfordkurven:* Erkläre Mumfords Verallgemeinerung von Tates elliptischen Kurven zu Kurven mit beliebigem Geschlecht anhand von [FvdP04, Ch. 5.4], [GvdP80] und [vdP92]. Dafür wird das aus dem GAGA-Prinzip abgeleitete Kriterium zur Erkennung projektiver Varietäten [FvdP04, § 4.10] und die analytische Reduktion [FvdP04, § 4.9] benötigt.
- *Beispiel:* Erkläre das Analogon  $PGL(2, k_q[t]) \backslash \Omega$  zur Operation von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  [vdP97].
- *Drinfelds n-dimensionale symmetrische Räume:* Konstruiere Drinfelds symmetrischen Raum anhand von [SS91, § 1] und zeige, dass er ein Steinscher Raum ist (siehe auch [DT08, § 1.21]).

**Literatur:** [FvdP04, § 4.9, 5.4], [SS91, § 1], [VS97, vdP97], [GvdP80, Ch. I – IV, X], [DT08], [vdP92]

**Vortragender:** Peter Gräf

08.07.2014

## Teil IV Ausblicke auf eine Theorie von Berkovich

Neben Tates rigid analytischen Räumen gibt es neuere Zugänge zur  $p$ -adischen Geometrie: Raynauds Theorie formaler Modelle, Berkovichs analytische Geometrie und Hubers adische Räume. Alle definieren fast die gleiche Kategorie  $k$ -analytischer Räume, die im Vergleich zu Tates rigid analytischen Räumen zusätzliche Strukturen aufweisen. Wir behandeln Berkovichs Theorie, die Tates rigiden Räume mit weiteren Punkten ausstattet, analog zu den nicht-abgeschlossenen Punkten in algebraischer Geometrie. So erhält man kompakte topologische Räume mit guten Eigenschaften wie z.B. wegzusammenhängend.

### 13. $k$ -Affinoide Algebren

Wie in Tates Theorie definiert Berkovich zunächst die lokalen Bausteine  $k$ -analytischer Räume, wobei  $k$  ein vollständiger ultrametrisch bewerteter Körper ist (dessen Bewertung nun sogar trivial sein kann). Die ausführlichste Referenz ist [Ber90, § 1–2], in der die Beweise meist eine Reduktion auf die entsprechende Sätze über Tates affinoide Algebren beinhalten. Der Vortrag könnte ähnlich strukturiert werden wie [Con08, § 4.2–4.5] und Folgendes behandeln:

- *Das Spektrum  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  eines Banachrings  $\mathcal{A}$ :* Definition der Begriffe und gebe den Berkovich Einheitskreis und den affinen und projektiven Raum mit den verschiedenen Punkttypen als Beispiel ([Tem11, § 2.1–2.3], [BR10, S. xv–xx, 1–30] oder [Bak08, § 1]). Erkläre [Ber90, Thm. 1.21].
- *$k$ -affinoide Algebren:* Definiere verallgemeinerte Tate-Algebren  $k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  und (strikte)  $k$ -affinoide Algebren  $\mathcal{A}$ . Erkläre ringtheoretische Eigenschaften und Dichtheit von  $\text{Max}(\mathcal{A})$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  [Ber90, § 2.1].
- *$k$ -affinoide Unterbereiche:* Erläutere neben den Definitionen, dass Tates Azyklizitätssatz (und Kiehls Sätze) in Berkovichs Theorie gelten [Ber90, § 2.2]. Folgere insbesondere [Ber90, Cor. 2.2.8], woraus später Wegzusammenhängendheit analytischer Räume abgeleitet wird [Ber90, Thm. 3.2.1].
- *Reduktion, Rand und Inneres:* Im Gegesatz zu Tates Theorie können relativer Rand und Inneres von  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  definiert werden und so das Maximumsprinzip formuliert werden [Ber90, § 2.4–2.5].

**Literatur:** [Tem11, § 2, 3], [Ber09, § 1, 2], [Con08, § 4], [Ber90, Ch. 1–4], [BR10, Ch. 1,2], [Sil07, § 5.10], [Ber93, § 1].

**Vortragender:** Konrad Fischer

15.07.2014

### 14. $k$ -Analytische Räume

In diesem Vortrag werden Berkovichs globale  $k$ -analytische Räume eingeführt. Dabei folgen wir seiner späteren Definition mit Atlanten und Netzen aus [Ber93], welche die sogenannten *guten*  $k$ -analytischen Räume aus [Ber90] verallgemeinert. Diese sind auf natürliche Weise mit einer Grothendiecktopologie ausgestattet, mit der man ebenfalls natürlich eine Theorie kohärenter Garben entwickeln kann. Im Vortrag sollten auch  $k$ -analytischer Räume mit Tates rigiden Räumen verglichen werden (z.B. in Bezug auf die topologischen Eigenschaften und die Theorie von eigentlichen und étalen Morphismen).

- *Analytische Räume:* Definiere die Kategorie  $k$ -analytischer Räume [Ber09, § 3.1].
- *G-Topologie:* Definiere analytische Bereiche,  $G$ -Topologie und Strukturgarben [Ber09, § 3.2].
- *Morphismen analytischer Räume:* Definiere endliche, separierte, (quasi-)étale und glatte Morphismen [Ber09, § 3.3], möglichst mit Motivation durch die algebraisch-geometrischen Begriffe.
- *Topologische Eigenschaften:* Erkläre [Ber09, § 3.4] (siehe dafür [Ber93, Rem. 1.2.4, Prop. 1.2.18]).
- *Analytifizierungen:* Definiere die Analytifizierung algebraischer Varietäten, erkläre die Zusammenhänge aus [Ber90, § 3.4] (insbesondere (mündlich) das GAGA-Theorem) und außerdem den Funktor zu rigiden Räumen [Ber93].

**Literatur:** [Tem11, § 4–6], [Ber09, § 3, 4.1, 5.1, 5.2], [Con08, § 5], [Ber93, § 1–3], [BR10, Ch. 1,2].

**Vortragender:** N.N.

22.07.2014

## Literaturverzeichnis

- [Bak08] Matthew Baker. An introduction to Berkovich analytic spaces and non-Archimedean potential theory on curves. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 123–174. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. Verfügbar auf <http://math.arizona.edu/~swc/aws/2007/>.
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78):5–161 (1994), 1993. URL: [http://www.numdam.org/item?id=PMIHES\\_1993\\_\\_78\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1993__78__5_0).
- [Ber09] Vladimir G. Berkovich. Non-archimedean analytic spaces. Technical report, Advanced School on p-adic Analysis and Applications, ICTP, Trieste, 2009. Verfügbar auf [http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vova/Trieste\\_2009.pdf](http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vova/Trieste_2009.pdf).
- [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Bos08] Siegfried Bosch. Lectures on formal and rigid geometry. 2008. Verfügbar auf <http://wwwmath.uni-muenster.de/sfb/about/publ/heft378.pdf>.
- [BR10] Matthew Baker and Robert Rumely. *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, volume 159 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. URL: <http://www.math.uga.edu/~rr/NewBerkBook.pdf>.
- [Con08] Brian Conrad. Several approaches to non-Archimedean geometry. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 9–63. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. Verfügbar auf <http://math.arizona.edu/~swc/aws/2007/>.
- [DT08] Samit Dasgupta and Jeremy Teitelbaum. The  $p$ -adic upper half plane. In *p-adic geometry*, volume 45 of *Univ. Lecture Ser.*, pages 65–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. Verfügbar auf <http://math.arizona.edu/~swc/aws/2007/>.
- [FvdP04] Jean Fresnel and Marius van der Put. *Rigid analytic geometry and its applications*, volume 218 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.
- [GvdP80] Lothar Gerritzen and Marius van der Put. *Schottky groups and Mumford curves*, volume 817 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [Ked04] Kiran Kedlaya. Lectures on Rigid Analytic Geometry. 2004. Siehe [http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/david\\_loeffler/research/rigideom/](http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/david_loeffler/research/rigideom/).
- [Sil07] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of dynamical systems*, volume 241 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007. URL: [www.math.brown.edu/~jhs/ADSTOC.pdf](http://www.math.brown.edu/~jhs/ADSTOC.pdf).
- [SS91] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of  $p$ -adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1):47–122, 1991. doi:[10.1007/BF01232257](https://doi.org/10.1007/BF01232257).
- [Sta14] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2014.
- [Tat71] John Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12:257–289, 1971. doi:[10.1007/BF01403307](https://doi.org/10.1007/BF01403307).
- [Tem11] Michael Temkin. Introduction to Berkovich analytic spaces. *arXiv preprint*, 2011. arXiv: [1010.2235v2](https://arxiv.org/abs/1010.2235v2).
- [vdP92] Marius van der Put. Discrete groups, Mumford curves and theta functions. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 1(3):399–438, 1992. URL: [http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1992\\_6\\_1\\_3\\_399\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_3_399_0).
- [vdP97] Marius van der Put. The structure of  $\Omega$  and its quotients  $\Gamma \backslash \Omega$ . In *Drinfeld modules, modular schemes and applications (Alden-Biesen, 1996)*, pages 103–112. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [VS97] Guido Van Steen. Some rigid geometry. In *Drinfeld modules, modular schemes and applications (Alden-Biesen, 1996)*, pages 88–102. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.