Seminar zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Prof. Dr. Gebhard Böckle und Yujia Qiu

Sommersemester 15, dienstags 16:15 – 17:45, Raum 248/INF 368. Beginn: 21.04.2015

Motivation und Ziele des Seminars

Die Darstellungstheorie spielt in vielen Bereichen der reinen und angewandeten Mathematik eine wichtige Rolle. Auch in der theoretischen Physik hat sie interessante Anwendungen. Die Grundidee der Darstellungstheorie von Gruppen ist es, die Elemente einer Gruppe durch linearer Transformationen auf einem Vektorraum darzustellen. Die Gruppe operiert durch Symmetrien auf diesem Vektorraum.

Sei also G eine Gruppe. Eine (lineare) Darstellung ρ ist ein Homomorphisms $G \to GL(V)$, wobei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. Hierdurch ist es möglich, Eigenschaften einer abstrakter Gruppe durch Objekte der linearen Algebra zu untersuchen. Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen ist der einfachster Fall der Darstellungstheorie. Viele Ergebnisse können auf Darstellungen kompakter Gruppen übertragen werden.

Im Seminar behandeln wir, hauptsächlich anhand der Quellen [FH04, Ser77], die folgende Themen: *Darstellungen endlicher Gruppen*, *Charaktere*, *Induzierte Darstellungen*, *Beispiele:* $\mathfrak{S}_d$, $\mathfrak{A}_d$, $GL_2(\mathbb{F}_q)$, *die Sätze von Artin und Brauer*. etc.

Organisatorisches

- *Erwartete Vorkenntnisse:* Lineare Algebra I und II, Algebra I
- Zwei Wochen vor dem eigenen Vortrag (oder allgemein zu Verständnisfragen) in die Sprechstunde kommen (donnerstags 14:15-15:45, INF 368, Raum 209)
- Optional: eine Woche vor dem Vortrag einen Probevortrag halten

Liste der Vorträge

Vortrag 1 Grundlagen zu linearen Darstellungen

- *Grundlegende Begriffe*: Definitionen, isomorphe Darstellungen; Beispiele: Darstellungen von Grad 1; reguläre Darstellung; Permutationsdarstellung [Ser77, I.1.1-1.2].
- *Unterdarstellungen*: Definition; stabiler Unterraum und sein Komplement (Thm. 1) mit Beweis; ein anderer Beweis für einen Vektorraum V mit Skalaprodukt; direkte Summe von Darstellungen [Ser77, I.1.3].
- *Irreduzible Darstellungen*: Definition; Jede Darstellung ist vollständig reduzibel (Thm. 2); notiere, dass diese Zerlung NICHT eindeutig ist [Ser77, I.1.4].
- *Tensorprodukt zweier Darstellungen*: erkläre die Definition und Konstruktion [Ser77, I.1.5].
- *Zweite symmetrische und alternatierende Potenzen* [Ser77, I.1.6].

Literatur: [Ser77, I.1]

Menelaos Zikidis **21.04.15**

Vortrag 2 Charaktere und Orthogonalitätsrelationen

- *Der Charakter einer Darstellung*: Definition; erste Eigenschaften (Prop. 1). Erwähne die Definition einer Klassenfunktion (für spätere Vorträge). Charaktere einer direkten Summe oder eines Tensorprodukts (Prop. 2), Charaktere symmetrischer und alternatierender Potenzen (Prop. 3); die duale Darstellung und ihr Charakter (Exe. 2.3) [Ser77, I.2.1].
- *Das schursche Lemma*: Das schursche Lemma (Prop. 4) mit Beweis; Kor. 1 und seine Matrizenform, danach Kor. 2 und 3; unitäres Skalaprodukt (Bemerkung 1) und Motivation zu den Orthogonalitätsrelationen (Bemerkung 2) [Ser77, I.2.2].
- *Die Orthogonalitätsrelationen*: die Orthogonalitätsrelationen (Thm. 3); Zerlegung einer Darstellung (Thm. 4) mit Korollaren 1 und 2; ein Charakterkriterium für Irreduzibilität (Thm. 5) [Ser77, I.2.3].

Literatur: [Ser77, I.2.1-2.3]

Oskar Riedler **28.04.15**

Vortrag 3 Zerlegung von Darstellungen

- *Zerlegung einer regulären Darstellung*: führe die Notation für diesen Vortrag ein; Charakter der regulären Darstellung (Prop. 5), Kor. 1 und 2; die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe (Bemerkungen 1 und 2) [Ser77, I.2.4].
- *Die Anzahl irreduzibler Darstellungen*: Twist einer irreduziblen Darstellung mit einer Klassenfunktion (Prop. 6); die irreduziblen Charaktere bilden eine Orthonomalbasis (Thm. 6); die Anzahl der irreduziblen Darstellungen (Thm. 7); die Anzahl der Elemente in einer Konjugationsklasse (Prop. 7); $\mathfrak{S}_3$ als ein Beispiel [Ser77, I.2.5].
- *Kanonische Zerlegung einer Darstellung*: Definition von „kanonischer Zerlegung “; Eigenschaften der kanonischen Zerlegung (Thm. 8); ein Beispiel [Ser77, I.2.6].
- *Explizite Zerlegung einer Darstellung*: explizite Konstruktion einer Zerlegung (Prop. 8) [Ser77, I.2.7].

Literatur: [Ser77, I.2.4-2.7]

Christian Christner **12.05.15**

Vortrag 4 Untergruppen und Produkt, ganze algebraische Zahlen

- *Abelsche Untergruppen*: abelsche Gruppen und ihre irreduziblen Darstellungen (Thm. 9); eine Schranke für den Grad irreduzibler Darstellungen (Kor.); D_n als ein Beispiel; führe Exe. 3.2 vor [Ser77, I.3.1].
- *Produkt von Gruppen*: das Tensorprodukt von Darstellungen und sein Charakter (erwähne hier den Unterschied zum Tensorprodukt im Vortrag 1); Eigenschaften des Tensorprodukts (Thm. 10) [Ser77, I.3.2].
- *Beispiele*: die zyklischen Gruppen C_n und C_∞. Wenn die Zeit reicht, stelle auch $\mathfrak{A}_4$ vor [Ser77, I.5.1,5.2,5.7].
- *Ganze algebraische Zahlen*: Definition einer ganzen algebraischen Zahl und äquivalente Definitionen (Prop. 14) mit Korollaren 1 und 2 [Ser77, II.6.4].

Literatur: [Ser77, I.3.1-3.2,5.1,5.2,5.7]

Menelaos Zikidis **19.05.15**

Vortrag 5 Induzierte Darstellungen I

- *Linksnebenklassen einer Untergruppe*: Erinnerung an die Definitionen [Ser77, I.3.3].
- *Definition der induzierten Darstellung*: die Definition; die ersten Beispiele (Example 1-5, Exe. 3.5) [Ser77, I.3.3].
- *Existenz und Eindeutigkeit der induzierten Darstellung*: Thm. 11 und der Beweis mithilfe Lemma 1 [Ser77, I.3.3].
- *Charakter der induzierten Darstellung*: die Berechnung des Charakters der induzierten Darstellung basierend auf den alten Charakter (Thm. 12) [Ser77, I.3.3].
- *Beispiele*: die Diedergruppen D_n; die Symmetriegruppe $\mathfrak{S}_4$ [Ser77, I.5.3,5.8].

Literatur: [Ser77, I.3.3,5.3,5.8]

Paul Gontschar **26.05.15**

Vortrag 6 Die Gruppenalgebra

- *Darstellungen und Moduln*: Definition der Gruppenalgebra; lineare Darstellung als $K[G]$-Linksmodulstruktur. Die Gruppenalgebra ist halbeinfach, wenn $\mathrm{char}(K) = 0$ (Prop. 9 zusammen mit Kor. 1) [Ser77, II.6.1].
- *Zerlegung von* $\mathbb{C}[G]$: $\mathbb{C}[G]$ als ein Produkt von Matrixalgebren; definiere die Homomorphismen $\tilde{\rho}_i$ und $\tilde{\rho}$; $\tilde{\rho}$ ist ein Isomorphismus (Prop. 10); Fourier-Umkehrformel (Prop. 11) [Ser77, II.6.2].
- *Das Zentrum von* $\mathbb{C}[G]$: Erinnere an die Definition. und beweise Prop. 12 und Prop. 13 [Ser77, II.6.3].
- *Ganzheitseigenschaften von Charaktere*: $\chi(s)$ ist eine ganze algebraische Zahl (Prop. 15); die ganzen Elementen im Zentrum (Prop. 16) mit Korollaren 1 und 2; stärkere Version vom Kor. 2 (Prop. 17) [Ser77, II.6.5].

Literatur: [Ser77, II.6]

N.N. **02.06.15**

Vortrag 7 Beispiele: $\mathfrak{S}_d$

- *Young-Tableau und der Hauptsatz*: Definitionen von Young-Diagram und Young-Tableau (erkläre mit einfachen Beispielen), und Young-Symmmetrizer; erkläre den Hauptsatz dieses Vortrages (Thm. 4.3) zusammen mit seinem Korollar, dass jede irreduzible Darstellung über $\mathbb{Q}$ definiert werden kann; diskutiere die Beispiele in Example 4.5 (vergleiche mit früheren Abschnitten in [FH04]) [FH04, I.4.1].

- *Beweis zum Hauptsatz* [FH04, I.4.2].
- *Darstellungen von* $\mathfrak{A}_d$: die irreduziblen Darstellungen einer Untergruppe von Index 2 (Prop 5.1); wende die Proposition auf $\mathfrak{A}_d$ an (Prop 5.3, Exe. 5.4) [FH04, I.5.1].

Literatur: [FH04, I.4.1-4.2, 5.1]

Christian Christner **02.06.15**

Vortrag 8 Induzierte Darstellungen II

- *Induzierte Darstellungen*: die alternative Definition einer induzierten Darstellung mit Hilfe der Gruppenalgebra (Prop. 18) und die Eigenschaften (Bemerkungen); erkläre Prop. 19 [Ser77, II.7.1].
- *Frobeniusreziprozität*: induzierte Klassenfunktion und ihre Eigenschaften (Prop. 20); Frobeniusreziprozität (Thm. 13 und Bemerkungen); eine Folgerung (Prop. 21) [Ser77, II.7.2].
- *Einschränkung auf Untergruppen und Zusammenhang mit der induzierten Darstellung* [Ser77, II.7.3].
- *Irreduzibilitätskriterium von Mackey* [Ser77, II.7.4].

Literatur: [Ser77, II.7]

Oskar Riedler **16.06.15**

Vortrag 9 Beispiele induzierter Darstellungen

- *Normale Untergruppen*: Erinnerung an die Definition einer normalen Untergruppe; normale Untergruppen und irreduzible Darstellungen (Prop. 24), und die Anwendung auf abelsche normale Untergruppen (Kor. 1) vgl. Kor. zu Thm. 9 in Vortrag 4 [Ser77, II.8.1].
- *Semidirektes Produkt*: beweise Prop. 25, und erkläre, warum wir in diesem Fall alle irreduziblen Darstellungen erhalten. Wende Prop. 25 auf D_n, $\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{S}_4$ an (vgl. Vorträge 4 und 5) [Ser77, II.8.2].
- *Satz von Sylow*: erinnere an die Definition einer p-Gruppe und Sylow p-Untergruppe; der Satz von Sylow (Thm. 15) [Ser77, II.8.3, 8.4].
- *Lineare Darstellungen superauflösbarer Gruppen*: wiederhole die Definitionen von auflösbar, superauflösbar und nilpotent; die p-Gruppen sind superauflösbar (Thm. 14); die irreduziblen Darstellungen einer superauflösbaren Gruppe (Thm. 16); die irreduziblen Darstelllungen des semidirekten Produkts einer superauflösbaren Gruppe und einer normalen abelschen Untergruppe mithilfe Thm. 16 und Prop. 25 (Exe. 8.10) [Ser77, II.8.3, 8.5].

Literatur: [Ser77, II.8]

N.N. **30.06.15**

Vortrag 10 Satz von Artin

- *Die Aussage des Satzes von Artin* [Ser77, II.9.1,9.2].
- *Erster Beweis* [Ser77, II.9.3].
- *Ein alternativer Beweis von* $(i) \Rightarrow (ii)$ [Ser77, II.9.4].

Literatur: [Ser77, II.9]

Paul Gontschar **07.07.15**

Vortrag 11 Satz von Brauer

- *Induzierte Darstellung von p-elementaren Untergruppen*: Definitionen von p-regulären Untergruppen und p-elementaren Untergruppen; der Hauptsatz (Thm. 18); die Konstruktion spezieller Charaktere; der Beweis vom Hauptsatz [Ser77, II.10.1-10.4].
- *Der Satz von Brauer* [Ser77, II.10.5].
- *Die Anwendungen des Satzes von Brauer* [Ser77, II.11].

Literatur: [Ser77, II.10,11]

N.N. **14.07.15**

Vortrag 12 Rationalitätsfragen

- *Die Ringe $R_K(G)$ und $\bar{R}_K(G)$*: Definitionen der beiden Ringe; Definition einer rationalen (realisierbaren) Darstellung und das Rationalitätskriterium bzgl. $R_K(G)$; Verfeinerung der Ergebnisse mithilfe der halbeinfachen Algebra [Ser77, II.12.1, 12.2].
- *Rationalität über Kreisteilungskörpern* [Ser77, II.12.3].
- *Der Rang von $R_K(G)$* [Ser77, II.12.4].
- *Die Analoga der Sätze von Artin und Brauer* [Ser77, II.12.5-12.7].
- *Beispiele: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$* [Ser77, II.13].

Literatur: [Ser77, II.12.13]

N.N. **21.07.15**

Literatur

[FH04] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory.* Number 129 in Graduate texts in mathematics ; 129 ; Graduate texts in mathematics. Springer Science + Business Media, New York, NY, 9. print. edition, 2004.

[Ser77] Jean Pierre Serre. *Linear representations of finite groups.* Number 42 in Graduate texts in mathematics ; 42 ; Graduate texts in mathematics. Springer, New York ; Heidelberg [u.a.], 1977.