

PROSEMINAR BILINEARFORMEN UND KLASISCHE GRUPPEN

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Julian Quast

Sommersemester 2019, Dienstag 14.00 Uhr–16.00 Uhr

Motivation und Ziele des Proseminars

Euklidische Geometrie kann als das Studium eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über den reellen Zahlen \mathbb{R} zusammen mit einem Skalarprodukt, durch welches die Länge eines Vektors x und der Kosinus des Winkels θ zwischen zwei Vektoren x, y durch einfache Formeln gegeben ist, aufgefasst werden. Für das Standardskalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^n$, welches für Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ durch

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

gegeben ist, ergeben sich $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ beziehungsweise $|x||y|\cos\theta = x \cdot y$. Das Skalarprodukt ist bilinear, d.h., es erfüllt die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (x + x') \cdot y &= x \cdot y + x' \cdot y \\ x \cdot (y + y') &= x \cdot y + x \cdot y' \\ (ax) \cdot y &= x \cdot (ay) = a(x \cdot y) \end{aligned}$$

für $x, x', y, y' \in V$ und $a \in \mathbb{R}$. Außerdem ist es symmetrisch, d.h., es gilt $x \cdot y = y \cdot x$, und es ist positiv definit, d.h. $x \cdot x > 0$ für $x \neq 0$.

Im Proseminar betrachten wir endlich-dimensionale Vektorräume V über einem beliebigen Körper K zusammen mit einer Bilinearform $B: V \times V \rightarrow K$. Diese übernimmt die Funktion des Skalarproduktes. Von besonderer Bedeutung sind einerseits symmetrische und andererseits alternierende Bilinearformen, da in genau diesen Fällen Orthogonalität eine symmetrische Relation ist; dabei heißt B alternierend, wenn $B(x, x) = 0$ für alle $x \in V$. Die ersten Vorträge behandeln Grundlagen hierzu, sowie Zerlegungssätze für metrische Räume, d.h. für Paare (V, B) für B eine Bilinearform auf V .

Fixiert man ein solches Paar (V, B) , so sind diejenigen K -linearen Abbildungen $\eta: V \rightarrow V$ von besonderer Bedeutung, die B erhalten, d.h., für welche $B(\eta(x), \eta(y)) = B(x, y)$ für alle $x, y \in V$ gilt. Die Gesamtheit aller solcher η zu (V, B) bilden eine Gruppe. Die so entstehenden Gruppen, zusammen mit den Gruppen GL_n und SL_n , sind die sogenannten *klassischen* Gruppen in der Sprechweise von Hermann Weyl.

Ein großer Teil des Seminars wird sich mit der Strukturtheorie dieser Gruppen beschäftigen. Wir werden Erzeuger kennenlernen; im orthogonalen Fall, wenn B symmetrisch ist, sind dies Spiegelungen, im

symplektischen Fall, wenn B alternierend ist, sogenannte Transvektionen. Wir werden sehen, dass diese Gruppen modulo ihrem Zentrum (bis auf GL_n) für fast alle K einfach sind. Ist K ein endlicher Körper, so sind die klassischen Gruppen endlich und wir werden ihre Kardinalität bestimmen.

Organisatorisches

- **Vorbesprechung:** Dienstag, den 12.02.2019 um 14.00 Uhr c.t. in Seminarraum A
- **Voraussetzungen:** Erfolgreiche Teilnahme an den Vorlesungen Analysis 1 und Lineare Algebra 1
- **Homepage:** <https://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/home/members/julian-quast/bilinearformen/>
- Spätestens zwei Wochen vor dem eigenen Vortrag oder generell bei Verständnisfragen in die Sprechstunde kommen (Julian Quast: Montag 14.00 Uhr - 16.00 Uhr, Raum 3/222)

Modalitäten

- Für die Teilnahme an diesem Proseminar ist das Bestehen der Prüfungen Lineare Algebra I und Analysis I Voraussetzung.
- Jeder Teilnehmer hält im Rahmen der Seminarsitzungen einen auf 80 min ausgelegten Vortrag.
- Zusätzlich wird am Tag des Vortrages ein ein- bis maximal zweiseitiges Handout an die Zuhörer ausgeteilt, das vom Vortragenden selbstständig angefertigt wurde. Es wird empfohlen, die ausgebene L^AT_EX-Vorlage zu verwenden.
- Eine Vorbesprechung spätestens zwei Wochen vor Vortrag mit dem Seminarleiter ist verpflichtend. Dabei soll bereits das Handout vorgelegt werden. Es wird empfohlen bei Bedarf mehrere Vorbesprechungen zu halten. Bitte beachten Sie die Sprechzeiten.
- Es besteht Anwesenheitspflicht. Bei Abwesenheit wegen Krankheit ist die Vorlage eines ärztlichen Attests nötig. Wir tolerieren einen unentschuldigten Fehltag.

Bitte achten Sie darauf, genügend strukturierende Elemente (aka Definition, Satz, Beweis) zu verwenden, um Ihre Vorträge übersichtlicher zu machen. Sie sollten feiner untergliedert sein, als die Hauptquelle [J].

Vortrag 1 (Bilinearformen).

Ziel: Grundlegende Definitionen

Ziel des ersten Vortrages ist es, die wesentlichen Inhalte von Kapitel 6.1 vorzustellen. Wir arbeiten mit einem endlichdimensionalen Vektorraum V über einem allgemeinen Körper ("field") F und führen zunächst den Begriff der *Bilinearform* $B : V \times V \rightarrow F$ ein. Hierzu soll die Darstellung einer allgemeinen Bilinearform mithilfe ihrer *Fundamentalmatrix* (*Gramsche Matrix*, "the matrix relative to the base") diskutiert und der Begriff der *Diskriminante* eingeführt werden. Im Anschluss führen wir das *Links-* bzw. *Rechtsradikal* einer Bilinearform bzgl. eines Unterraums ein und zeigen grundlegende Eigenschaften (10), (11) und (14) auf (ohne Beweis). Erstes zentrales Resultat dieses Vortrages ist die Charakterisierung *nicht-ausgearteter* ("non-denerate") Bilinearformen [J, Thm. 6.1]. Für diese gilt in (10) sogar Gleichheit (15) (ohne Beweis). Wir führen hier auch den Begriff der *Äquivalenz von Bilinearformen* ein. Um das zweite Hauptresultat [J, Thm. 6.2] zu beweisen, benötigen wir den Begriff der (*binären*) *Relation* und der *Symmetrie* einer solchen [J, §0.3]. Es besagt, dass die Orthogonalitätsrelation, die durch eine Bilinearform B definiert wird, genau dann *symmetrisch* ist, wenn B entweder *symmetrisch* oder *alternierend* ist. Ist B eine symmetrische oder alternierende Bilinearform, so gilt für jeden Untervektorraum $U \subset V$ die Identität $U^{\perp_L} = U^{\perp_R}$. Wir nennen diesen Raum das *orthogonale Komplement* U^\perp von B . Wir sehen weiterhin, dass für einen Untervektorraum $U \subset V$ die eingeschränkte Bilinearform $B|_{U \times U} : U \times U \rightarrow F$ genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn $U \cap U^\perp = \{0\}$ gilt. In dieser Situation nennen wir U einen *nicht-ausgearteten Untervektorraum*. Wir führen nun die *Diskriminante* einer Bilinearform erneut ein, nämlich als Funktion $\text{Bil}(V) \rightarrow F^\times / (F^\times)^2 \cup \{0\}$. Zwei Matrizen $M, N \in M_n(F)$ heißen *kongruent* ("cogredient"), falls es eine invertierbare Matrix $P \in M_n(F)$ gibt, sodass $PMP^\top = N$ gilt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $M_n(F)$. Wir erkennen, dass zwei kogrediente Matrizen zwei äquivalente Bilinearformen darstellen.

Literatur: [J, §6.1].

Datum: 16. April 2019

Vortrag 2 (Normalformen alternierender Bilinearformen).

Ziel: Grundlegende Definitionen, Normalform für alternierende Bilinearformen, Pfaffsche

Ein Ziel des Vortrages ist es, die Beziehung zwischen *alternierend* und *schiefsymmetrisch* zu klären: Eine Bilinearform heißt *alternierend*, falls $B(x, x) = 0$ für alle $x \in V$ und *schiefsymmetrisch*, falls $B(x, y) = -B(y, x)$ für alle $x, y \in V$. Jede alternierende Bilinearform ist auch schiefsymmetrisch, die Umkehrung gilt allerdings nur, falls die Charakteristik von F nicht 2 ist. Im Fall von Charakteristik 2 geben wir ein Beispiel für eine schiefsymmetrische nicht alternierende Bilinearform an. Für eine alternierende Bilinearform B können wir eine Basis von V so wählen, dass die Fundamentalmatrix einer Normalform genügt [J, Thm. 6.3] (mit Beweis). Es werden auch Folgerungen aus dieser Normalform erläutert: Der Rang einer alternierenden Matrix ist stets gerade und die Determinante ist ein Quadrat in F (also in $(F^\times)^2 \cup \{0\}$) [J, §6.2 Cor. 1]. Zwei alternierende Matrizen sind genau dann kongruent, wenn ihr Rang gleich ist [J, §6.2 Cor. 2]. Ist X eine alternierende Matrix, so ist $\det X$ ein Polynom in $\mathbb{Z}[X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$. Tatsächlich existiert sogar ein Polynom $\text{Pf } X$ mit $(\text{Pf } X)^2 = \det X$, genannt *Pfaffsche* von X . Wir beweisen [J, Thm 6.4], allerdings ohne zu zeigen, dass qaq^\top alternierend ist. Als

Beispiel werden wir die allgemeine Pfaffsche für $n = 2$ und $n = 4$ betrachten. Hierzu brauchen wir auch eine knappe Einführung in faktorielle Ringe [J, §2.14, Def. 1] und den Hinweis darauf, dass für einen faktoriellen Ring R der Polynomring $R[X]$ ebenfalls faktoriell ist [J, Thm 2.25].

Literatur: [J, §6.2].

Datum: 23. April 2019

Vortrag 3 (Normalformen symmetrischer Bilinearformen und orthogonale Transformationen).

Ziel: Formen vom Grad d , Normalform für symmetrische Bilinearformen, orthogonale Gruppe, eigentliche und uneigentliche orth. Transformationen

Wir beginnen mit der Definition einer *polynomiellen Abbildung* von einem Vektorraum V in den Körper F . Wir definieren, was eine *Form von Grad d* ist und verwenden die Begriffe *Linearform*, *quadratische Form* und *kubische Form* für $d = 1, 2, 3$. Anschließend beweisen wir, dass [J, §6.3 Def 6.1] eine Charakterisierung quadratischer Formen ist. Wir beleuchten auch den Zusammenhang zwischen symmetrischen Bilinearformen und quadratischen Formen; man beachte hierbei die Charakteristik von F . Beweisen Sie die Normalform für symmetrische Bilinearformen [J, §6.3 Thm 6.5] konstruktiv. Wir beweisen Satz 6.6. Erwähnen Sie auch Sätze 6.7, 6.8 und 6.9 ohne Beweise.

Von nun an nehmen wir $\text{char}(F) \neq 2$ an, können also nach Vorliebe mit symmetrischen Bilinearformen oder quadratischen Formen arbeiten. Dabei nennen wir ein Paar (V, Q) , wobei Q eine quadratische Form auf V ist, einen *quadratischen Raum*. Wir starten Kapitel 6.4 mit der Definition der *Isometrie* zwischen quadratischen Räumen und der *orthogonalen Gruppe*. Gleichung (27) zeigt die Beschreibung dieser Gruppe mittels Matrizen (unsere erste klassische Gruppe!).

Abschließend diskutieren wir den Unterschied zwischen *eigentlichen* und *uneigentlichen* orthogonalen Transformationen und zeigen, dass $O^+(V, Q)$ eine echte normale Untergruppe von $O(V, Q)$ ist.

Literatur: [J], Sect. 6.3 (Normalformen über endlichen Körpern ohne Beweis) [J], Sect. 6.4, erste Hälfte

Datum: 30. April 2019

Vortrag 4 (Isotope Unterräume und hyperbolische Ebenen).

Ziel: Isotope Unterräume, hyperbolische Ebenen, Charakterisierung hyperbolischer Ebenen

Wir starten in Kapitel 6.4 mit der Definition der Symmetrie S_u für einen Vektor mit $Q(u) \neq 0$ und beweisen Gleichung (29). Wir definieren die Begriffe *orthogonale direkte Summe*, *isotrop*, *total isotrop* und *hyperbolische Ebene*. Beweisen Sie die Charakterisierung [J, Satz 6.10] hyperbolischer Ebenen. Besprechen Sie Aufgaben 3 und 6 mit Lösungen.

Literatur: [J], Sect. 6.4, zweite Hälfte und Übungen 3 und 6

Datum: 7. Mai 2019

Vortrag 5 (Kürzungssatz von Witt).

Ziel: Beweis des Wittschen Kürzungssatzes, Satz 6.11 und des Wittschen Erweiterungssatzes.

Dieser Vortrag besteht aus drei Sätzen und ihren Beweisen. Wir betrachten einen nicht-ausgearteten quadratischen Raum (V, Q) . Das Hauptziel ist der Witt'sche Erweiterungssatz. Er besagt, dass für zwei isometrische Teilräume U_1, U_2 von V jede Isometrie $f : U_1 \rightarrow U_2$ zu einer Isometrie $V \rightarrow V$ erweitert werden kann.

Der erste Schritt ist der Witt'sche Kürzungssatz. Er ermöglicht uns, den Witt'schen Erweiterungssatz für nicht-ausgeartete Teilräume zu beweisen. Um den allgemeinen Fall zu zeigen, benötigen wir den Einbettungssatz 6.11, der uns eine Einbettung eines ausgearteten Teilraums in einen nicht-ausgearteten Teilraum liefert. Dadurch kann der Erweiterungssatz schließlich auf den Kürzungssatz zurückgeführt werden.

In diesem Vortrag ist eine übersichtliche Darstellung der Beweise von besonderer Wichtigkeit. Es kann angemessen sein, Details hinzuzufügen oder einen Beweis leicht abzuändern.

Literatur: [J], Sect. 6.5 (bis Extension Theorem)

Datum: 14. Mai 2019

Vortrag 6 (Satz von Cartan-Dieudonné).

Ziel: Witt-Index, Klassifikation quadratischer Formen, Beweis des Satzes von Cartan-Dieudonné

Der Satz von Cartan-Dieudonné besagt, dass jede orthogonale Transformation in einem n -dimensionalen quadratischen Raum ein Produkt von höchstens n Symmetrien ist.

Wir wiederholen den Witt'schen Erweiterungssatz und wenden ihn anschließend auf total isotrope Teilräume an. Anschließend definieren wir den *Witt-Index* einer quadratischen Form und zeigen, dass V eine orthogonale Zerlegung in hyperbolische Ebenen und einen anisotropen Teilraum hat.

Wir sehen auch, wie sich die Klassifikation quadratischer Formen auf die Klassifikation anisotroper quadratischer Formen zurückführen lässt (Ende von Abschnitt 6.5).

Wir skizzieren den Beweis dafür, dass jede orthogonale Transformation ein Produkt von Symmetrien ist. Anschließend betrachten wir den Raum der Fixpunkte orthogonaler Transformationen und unipotente Transformationen, um schließlich den Satz von Cartan-Dieudonné detailliert zu beweisen.

Literatur: [J], Sect. 6.5, nach Extension Theorem und Sect. 6.6 ohne Thm. 6.13

Datum: 21. Mai 2019

Vortrag 7 (Struktur der speziellen linearen Gruppe).

Ziel: Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(F)$ ist meistens perfekt und wird von Elementarmatrizen erzeugt, Wirkung von $\mathrm{PGL}_n(F)$ und $\mathrm{PSL}_n(F)$ auf $\mathbb{P}^{n-1}(F)$

Wir definieren zunächst die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}_n(F)$ über einem beliebigen Körper F und geben ein Erzeugendensystem ([J, §6.7, Lemma 1] unter Zuhilfenahme des Beweises von [J, Thm 3.8]) an. Wir zeigen in Lemma 2, dass $\mathrm{SL}_n(F)$ meistens mit ihrer Kommutatoruntergruppe übereinstimmt, das heißt *perfekt* ist. Wir bestimmen auch die Zentren $Z(\mathrm{GL}_n(F))$ und $Z(\mathrm{SL}_n(F))$ und definieren die Gruppen $\mathrm{PGL}_n(F)$ und $\mathrm{PSL}_n(F)$. Danach führen wir den *projektiven Raum* $\mathbb{P}^n(F)$ ein und definieren die Operation von $\mathrm{PGL}_n(F)$ und $\mathrm{PSL}_n(F)$ auf $\mathbb{P}^{n-1}(F)$.

Literatur: [J, Sect. 6.7] bis zum projektiven Raum.

Datum: 28. Mai 2019

Vortrag 8 (Struktur der allgemeinen linearen Gruppe).

Ziel: $\mathrm{PSL}_n(F)$ ist meistens einfach ([J, Thm. 6.14]), Kompositionssreihe für $\mathrm{GL}_n(F)$

Wir sprechen hier kurz über G -Räume, k -Transitivität, primitive Gruppenaktionen, G -stabile Partitionen sowie das Kriterium [J, Thm 1.12] für Primitivität. Wir erarbeiten mit [J, §6.7, Lemma 3] wichtige

Aussagen über Gruppenaktionen und mit [J, §6.7, Lemma 4] ein Hilfsmittel zum Beweis der Einfachheit von $\mathrm{PSL}_n(F)$. Lemmata 5 und 6 zeigen schließlich, dass $G = \mathrm{SL}_n(F)$ die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt und schließlich [J, Thm. 6.14]. In Übung 3 erhalten wir eine Subnormalreihe für $\mathrm{GL}_n(F)$.

Literatur: [J], Sect. 6.7, Wiederholung der relevanten Gruppentheorie, Lemma 3-6, Thm. 6.14

Datum: 4. Juni 2019

Vortrag 9 (Erzeuger der symplektischen Gruppe).

Ziel: Symplektische Transvektionen, Erzeuger für $\mathrm{Sp}_n(F)$, $Z(\mathrm{Sp}_n(F))$

Dieser Vortrag geht über den Anfang von §6.9 bis zum Ende von Seite 374. Im zweiten Abschnitt von §6.9 werden einige grundlegende Aussagen (wie das Analogon des Wittschen Erweiterungssatzes) zwar genannt, aber nicht bewiesen. Der Beweis ist ähnlich wie im orthogonalen Fall und sollte zumindest skizziert werden. Als nächstes definieren wir *symplektische Transvektionen* und beweisen Formeln (48) und (51). Wir geben in Lemma 1 ein Erzeugendensystem für $\mathrm{Sp}_n(F)$ an und bestimmen in Lemma 2 das Zentrum $Z(\mathrm{Sp}_n(F))$. Zum Abschluss sind noch Übungen 1 und 2 zu behandeln.

Literatur: [J], Sect. 6.9, erster Teil (Lemma 1 und 2) + Übungen 1 + 2

Datum: 11. Juni 2019

Vortrag 10 (Struktur der symplektischen Gruppe).

Ziel: $\mathrm{PSp}_n(F)$ ist meistens einfach ([J, Thm 6.16])

Dieser Vortrag geht über die zweite Hälfte von Abschnitt 6.9. Hauptziel ist es zu zeigen, dass $\mathrm{PSp}_n(F)$ meistens einfach ist. Lemmata 3 und 4 in Abschnitt §6.9 zeigen, dass die Voraussetzungen für das Einfachheitskriterium [J, §6.7 Lemma 4] erfüllt sind. Vor dem Beweis von Lemma 4 soll die Aussage aus Übung 3 diskutiert werden und schließlich im Beweis von Lemma 4 angewandt werden. (Fälle I und II sind Spezialfälle)

Literatur: [J], Sect. 6.9, zweiter Teil (ab Lemma 3) + Übungen 3 (+ 4)

Datum: 18. Juni 2019

Vortrag 11 (Zentrum der orthogonalen Gruppe).

Ziel: $Z(O(V, Q))$

Wir nehmen in diesem Vortrag an, dass Q eine quadratische Form mit positivem Witt-Index ist. Wir können unter dieser Voraussetzung zeigen, dass das Zentrum der orthogonalen Gruppe $O(V, Q)$ aus zwei Elementen besteht ([J, Lemma 1 und Lemma 2]).

Literatur: [J], Sect. 6.8, erster Teil: bis Lemma 2, ohne Def von Ω und PC. Außerdem Beweis von [J], Sect. 6.3, Thm. 6.9

Datum: 25. Juni 2019

Vortrag 12 (Operation auf dem projektiven Kegel).

Ziel: Definition von Ω und PC, Operation von Ω auf PC, Kommutatorgruppe von $O(V, Q)$

Wir definieren die Untergruppe Ω und den projektiven Kegel PC. Die Gruppe $O(V, Q)$ operiert auf dem projektiven Kegel und wir lernen in [J, §6.8 Lemma 3-6] verschiedene Eigenschaften dieser Operation und der Operation von Ω auf PC kennen. Dies dient als Vorbereitung für den letzten Vortrag über die

orthogonale Gruppe. Wir sehen auch, dass für $\dim V \geq 3$ die Kommutatorgruppe von $O(V, Q)$ mit der Kommutatorgruppe von $O^+(V, Q)$ übereinstimmt ([J, Thm 6.13] in §6.6).

Literatur: [J], Sect. 6.8, zweiter Teil: Def von Ω und PC, Lemma 3 – Lemma 6 und Sect. 6.6, Thm. 6.13

Datum: 2. Juli 2019

Vortrag 13 (Struktur der orthogonalen Gruppe).

Ziel: Satz von Dickson-Dieudonné

Im ersten Schritt [J, §6.8 Lemma 7] sehen wir, dass die Kommutatorgruppe von $O(V, Q)$ in Ω enthalten ist. Anschließend beweisen wir den Satz von Dickson-Dieudonné, welcher besagt, dass für eine quadratische Form mit positivem Witt-Index die Faktorgruppe $[O(V, Q), O(V, Q)]/Z([O(V, Q), O(V, Q)])$ meistens einfach ist.

Literatur: [J], Sect. 6.8, letzter Teil: Lemma 7 + Satz 6.15

Datum: 9. Juli 2019

Vortrag 14 (Endliche Körper).

Ziel: Primkörper, Existenz und Eindeutigkeit endlicher Körper

Wir beginnen den Vortrag mit allgemeiner Theorie: Jeder kommutative Ring R hat einen kleinsten Teilring, den wir *Grundring* nennen. Er wird als Gruppe additiv von der Eins erzeugt. Ist der Grundring endlich, so ist er isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, wobei n die Mächtigkeit des Grundrings ist. Andernfalls ist er isomorph zu \mathbb{Z} . Die *Charakteristik* des Rings R sei die Mächtigkeit des Grundrings, falls dieser endlich ist, ansonsten 0. Analog nennen wir den kleinsten Teilkörper eines Körpers F den *Primkörper* von F . Ist die Charakteristik von F endlich, so ist der Primkörper isomorph zum endlichen Körper $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p . Ist die Charakteristik von F gleich 0, so ist der Primkörper isomorph zu \mathbb{Q} .

Anschließend zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit endlicher Körper: Ist \mathbb{F} ein endlicher Körper, so ist er ein endlichdimensionaler Vektorraum über seinem Primkörper \mathbb{F}_p . Insbesondere ist seine Kardinalität p^n , wobei $n := [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] := \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ der *Körpergrad* von \mathbb{F} über \mathbb{F}_p sei. Die Einheitengruppe \mathbb{F}^\times eines endlichen Körpers ist stets zyklisch ([L, Cor IV.1.10], Spezialfall von [J, Thm 2.18]). Mithilfe der *Kronecker-Konstruktion* ([L, §V.1]), benötigt den *Fakterring* und die Aussage, dass der Faktoring zu einem *maximalen Ideal* ein Körper ist, [L, §II.2]) können wir zu einem beliebigen Körper K einen endlichen Erweiterungskörper (d.h. endlicher Körpergrad) $L \supset K$ finden, über dem ein vorgegebenes Polynom $f \in K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt (*Zerfällungskörper* ("splitting field") von f über K , siehe [L, Prop V.2.3, §V.3]). Wir stellen fest, dass der Zerfällungskörper von $X^{p^n} - X$ über \mathbb{F}_p ein Körper mit p^n Elementen ist. Hierzu verwenden wir den *Frobeniusautomorphismus* $\sigma : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, x \mapsto x^p$. Schlussendlich sehen wir, dass zwei endliche Körper der selben Kardinalität bereits isomorph sind.

Man könnte hier noch Beispiele und Rechenbeispiele für endliche Körper der Kardinalität p^n , $n > 1$ vorführen.

Literatur: [J, §4.13], [J, §2.10-11], [L, §V.1-3]

Datum: 16. Juli 2019

Vortrag 15 (Ordnungen der klassischen Gruppen über endlichen Körpern).

Ziel: Die Ordnungen von $\mathrm{PSL}_n(q)$, $O_n(q)$, $O_n(q, d)$, $\mathrm{Sp}_n(q)$

Wir bestimmen die Ordnung von $\mathrm{PSL}_n(F)$ über einem endlichen Körper F mit q Elementen [J, §6.7, nach Thm 6.14]. Weiterhin bestimmen wir die Anzahl der Lösungen bestimmter quadratischer Gleichungen über F und berechnen Kardinalitäten von orthogonalen und symplektischen Gruppen [J, §6.10].

Literatur: [J], Sect. 6.7, Ende und Sect. 6.10

Datum: 23. Juli 2019

Literatur

- [J] N. Jacobson: Basic Algebra I
- [R] E.G. Rees: Notes on Geometry
- [L] S. Lang: Algebra