



به نام خدا



دانشگاه تهران

دانشکده فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

آزمایشگاه سیستمهای کنترل خطی

آزمایش شماره 6

عارف نیک رفتار -- 810199507

کوثر اسدمسجدی -- 810199373

محمد تقی زاده -- 810198373

گروه 1

نیمسال دوم 1402-03

فهرست

| عنوان | شماره صفحه |
|-------|------------|
| چکیده | 3 |
| بخش 1 | 4 |
| بخش 2 | 5 |
| بخش 3 | 8 |
| بخش 4 | 28 |

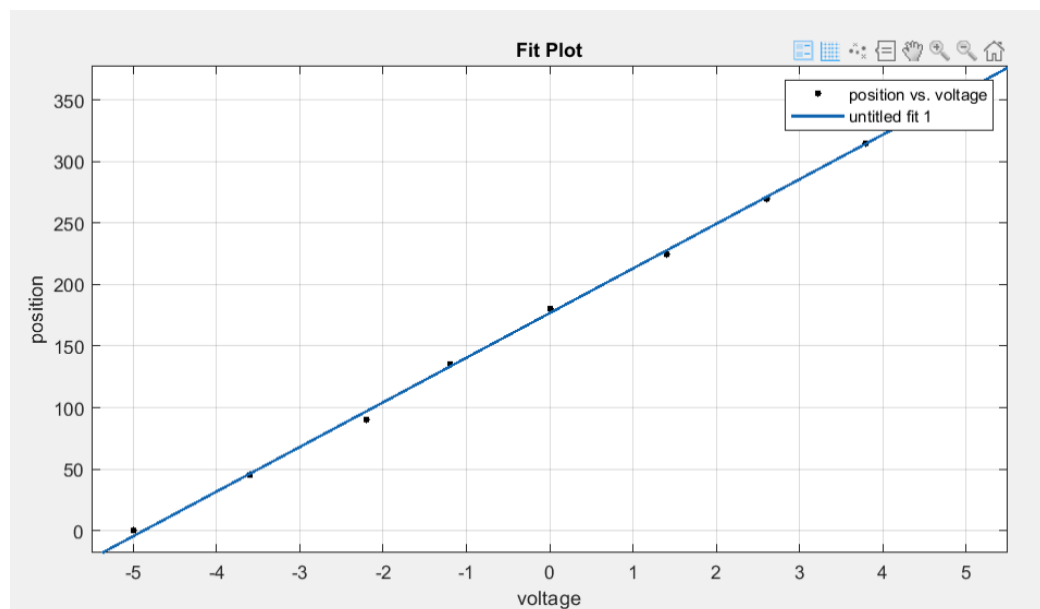
در این آزمایش، هدف ما کنترل موقعیت موتور با استفاده از کنترل‌کننده‌های تناسبی و فیدبک است. ابتدا، در مرحله اول، رابطه بین موقعیت موتور و ولتاژ حسگر موقعیت را تعیین می‌کنیم. سپس در مرحله دوم، به تحلیل تئوری تأثیر تغییر بهره‌های کنترل‌کننده بر موقعیت موتور می‌پردازیم. در مرحله سوم، این تحلیل تئوری را از طریق شبیه‌سازی و آزمایش‌های عملی اجرا می‌کنیم. در نهایت، در مرحله چهارم، تأثیر تأخیر بر پایداری و ناپایداری سیستم را با تغییر در بهره‌های کنترل‌کننده بررسی خواهیم کرد.

بخش 1: شناسایی حسگر موقعیت

در این آزمایش قصد داریم حسگر موتور را شناسایی کنیم تا رابطه تبدیل موقعیت موتور به ولتاژ خروجی حسگر موقعیت آن را به دست آوریم. طبق صورت گزارش تنظیمات خواسته شده را برای موتور انجام می دهیم. حال موقعیت موتور را از 0 تا 360 درجه با فاصله های 45 درجه تغییر می دهیم. نتایج ولتاژ خروجی حسگر موقعیت در جدول پایین گزارش شده است.

| موقعیت موتور | 0 | 45 | 90 | 135 | 180 | 225 | 270 | 315 | 360 |
|--------------|----|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| ولتاژ حسگر | -5 | -3.6 | -2.2 | -1.2 | 0 | 1.4 | 2.6 | 3.8 | 5 |

در ادامه برای یافتن رابطه بین سرعت موتور و ولتاژ حسگر، از ابزار *cftool* استفاده می کنیم. ابتدا داده ها را در *workspace* و سپس در *cftool* وارد کرده و منحنی برازش شده توسط *MATLAB* را بررسی می کنیم.



تصویر 1_1: برازش منحنی سرعت موتور بر حسب حسگر ولتاژ خروجی با ابزار *cftool*

```
Linear model Poly1:
f(x) = p1*x + p2
Coefficients (with 95% confidence bounds):
p1 = 36.26 (35.35, 37.17)
p2 = 176.8 (173.9, 179.7)

Goodness of fit:
SSE: 95.92
R-square: 0.9992
Adjusted R-square: 0.9991
RMSE: 3.702
```

تصویر 2_1: مدل عددی منحنی

همان طور که در تصویر فوق مشاهده می شود، رابطه موقعیت موتور به ولتاژ خروجی حسگر موقعیت آن تقریباً خطی است.

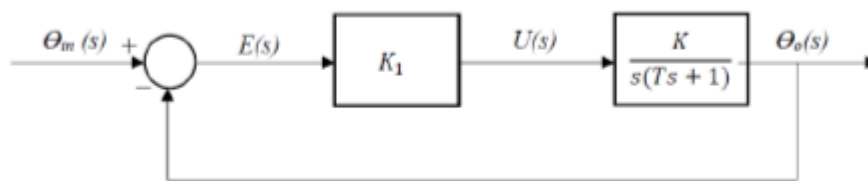
$$\theta(v) = 35.35v + 176.8$$

بخش 2: مفاهیم نظری مربوط به آزمایش

2-2) کنترل کننده تناسبی

در این بخش قصد داریم تا اثر کنترل کننده تناسبی را بر روی تنظیم موقعیت موتور بررسی کنیم. بلوک دیاگرام پایین سیستم حلقه بسته موقعیت موتور را با جبران کننده تناسبی نشان می‌دهد. میدانیم که با حلقه بسته کردن سیستم می‌توان خطای تنظیم موقعیت را صفر کرد اما کنترلی بر روی پاسخ گذرای سیستم نداریم. تابع تبدیل سیستم:

$$\frac{\theta_0}{\theta_{in}} = \frac{KK1}{Ts^2 + s + KK1}$$



تصویر 2_1: سیستم حلقه بسته موقعیت موتور با کنترل کننده تناسبی

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که خطای دائم این سیستم برای ورودی شیب چگونه با تغییرات بهره کنترل کننده تغییر می‌کند:

رابطه خطای حالت ماندگار سیستم را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E(s) = \theta_{in}(s) - \theta_0(s) = \theta_{in}(s) \left(\frac{KK1}{Ts^2 + s + KK1} \right), \quad \theta_{in}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 - \frac{KK1}{Ts^2 + s + KK1} \right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{KK1}{Ts^2 + s + KK1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{Ts+1}{Ts^2 + s + KK1} \right) = \frac{1}{KK1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{KK1}$$

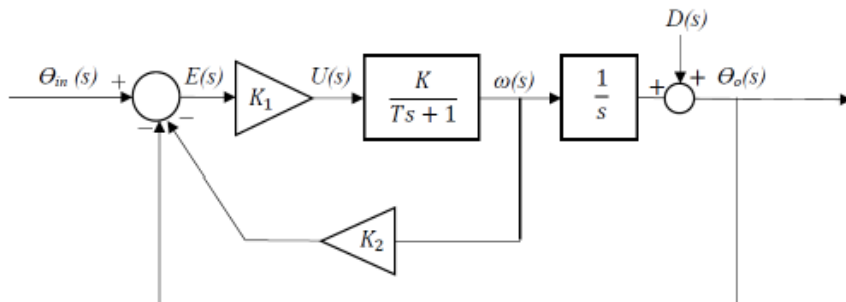
همانگونه که از رابطه بالا مشاهده می‌شود، خطای حالت دائم سیستم به بهره کنترل کننده وابسته است و با افزایش بهره کنترل کننده مقدار خطای حالت ماندگار سیستم کاهش خواهد یافت.

2-2) کنترل کننده فیدبک موقعیت - سرعت:

در این قسمت اثر اعمال فیدبک موقعیت-سرعت در تنظیم موقعیت خروجی سیستم را بررسی میکنیم.

تابع تبدیل سیستم:

$$\frac{\theta_0}{\theta_{in}} = \frac{KK1}{Ts^2 + (1+KK1k2)s + KK1}$$



تصویر 2_2: سیستم حلقه بسته موقعیت موتور با کنترل کننده فیدبک موقعیت-سرعت

حال به این سوال پاسخ میدهم که ساختار این کنترل کننده چه تفاوتی با ساختار کنترل کننده تناسبی تنها دارد: در این ساختار، یک کنترل کننده سرعت به صورت فیدبک به ورودی کنترل کننده K1 اضافه می شود و این یعنی برای کنترل موقعیت موتور از سرعت موتور نیز نمونه میگیریم.

در این قسمت بررسی می کنیم که آیا پاسخ گذرای این سیستم را می توان به نحو مطلوب تنظیم کرد:

$$\frac{\theta_0}{\theta_{in}} = \frac{KK1}{Ts^2 + (1+KK1k2)s + KK1} = \frac{\frac{KK1}{T}}{s^2 + \frac{(1+KK1k2)}{T}s + \frac{KK1}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \eta s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{KK1}{T}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{KK1}{T}}$$

$$2\eta\omega_n = \frac{1+KK1}{T}, \quad \eta = \frac{1+KK1k2}{2\sqrt{TK1K2}}$$

حال به بررسی این می پردازیم که خطای دائم این سیستم برای ورودی شیب با خطای دائم سیستم بخش قبل تفاوتی دارد :

ابتدا خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی شیب واحد را بدست می آوریم :

$$E(s) = \theta in(s) - \theta 0(s) = \theta in(s) \left(1 - \frac{KK1}{Ts^2 + (1+KK1k2)s + KK1}\right), \quad \theta in(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 - \frac{KK1}{Ts^2 + (1+KK1k2)s + KK1}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{Ts^2 + (1+KK1)s}{Ts^2 + (1+KK1k2)s + KK1}\right) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{Ts + (1+KK1K2)}{Ts^2 + (1+KK1k2)s + KK1}\right) = \frac{1}{KK1} + K2$$

$$e_{ss} = \frac{1}{KK1} + K2$$

همانطور که از رابطه بالا مشخص است، خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی شیب واحد با اضافه شدن کنترل کننده فیدبک افزایش یافته است (با افزایش $2K$ این خطا افزایش می یابد).

بخش 3: کنترل موقعیت سرو موتور DC

پیاده سازی به صورت شبیه سازی:

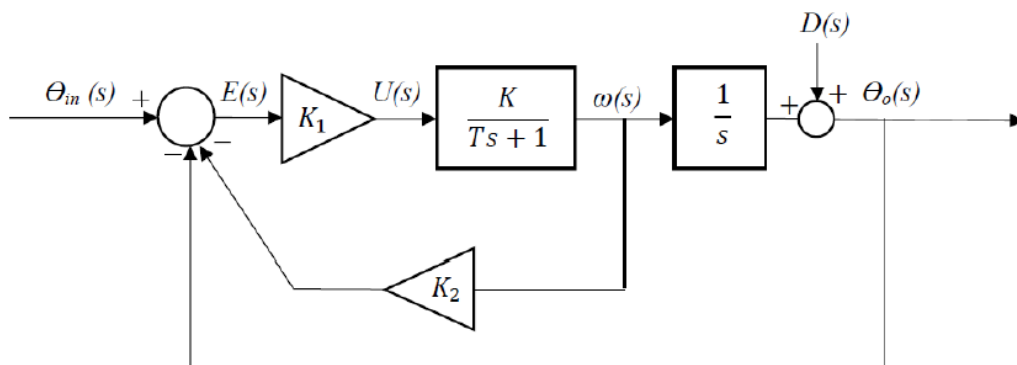
برای تابع تبدیل موتور، از نتایج گزارش کار آزمایش 4 استفاده می کنیم. به این منظور از نتایج تحلیل مربوط به حوزه زمان و فرکانس، میانگین گرفته و تابع تبدیل موتور را به صورت زیر می نویسیم:

$$\text{حوزه زمان: } G(s) = \frac{1.25}{1+0.16s}$$

$$\text{حوزه فرکانس: } G(s) = \frac{1.32}{1+0.17s}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1.285}{1+0.18s}$$

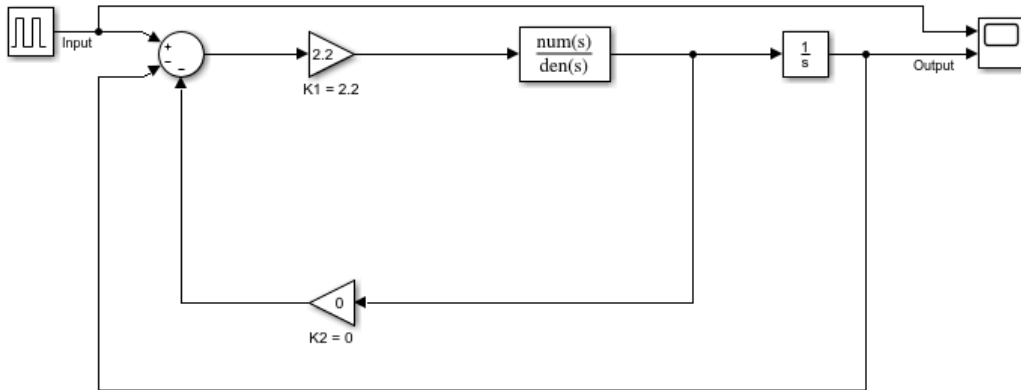
حال در محیط SimuLink، سیستم رسم شده در تصویر زیر را، به ازای حالات مختلف K_1 و K_2 پیاده سازی می کنیم.



شکل 3-1: سیستم حلقه بسته موقعیت موتور با کنترل کننده فیدبک موقعیت-سرعت

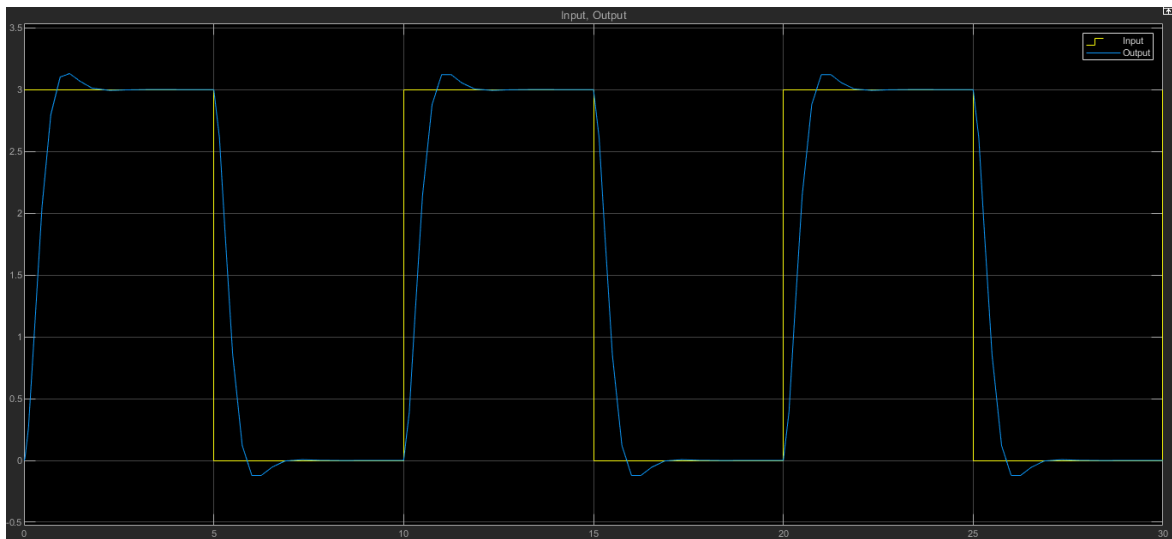
(1) $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$:

تصویر 3-2، سیستم کلی شبیه سازی شده، به ازای $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$ را نشان می دهد:



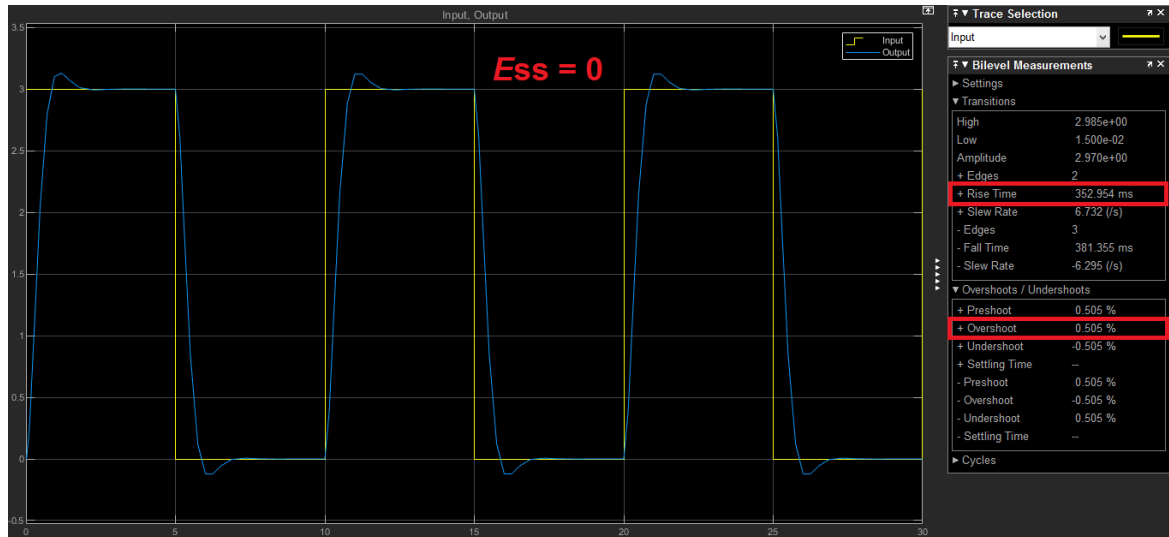
تصویر 3-2: سیستم کلی شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$

تصویر 3-3، شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-3: شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$

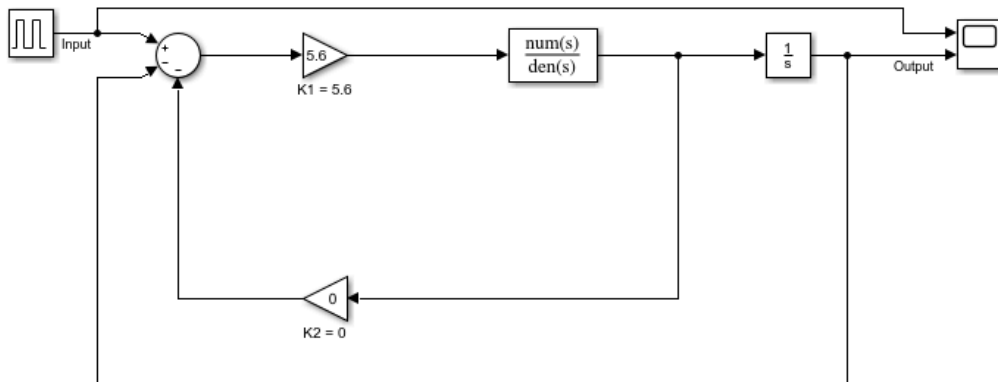
تصویر 3-4: درصد فراجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-4: درصد فراجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$

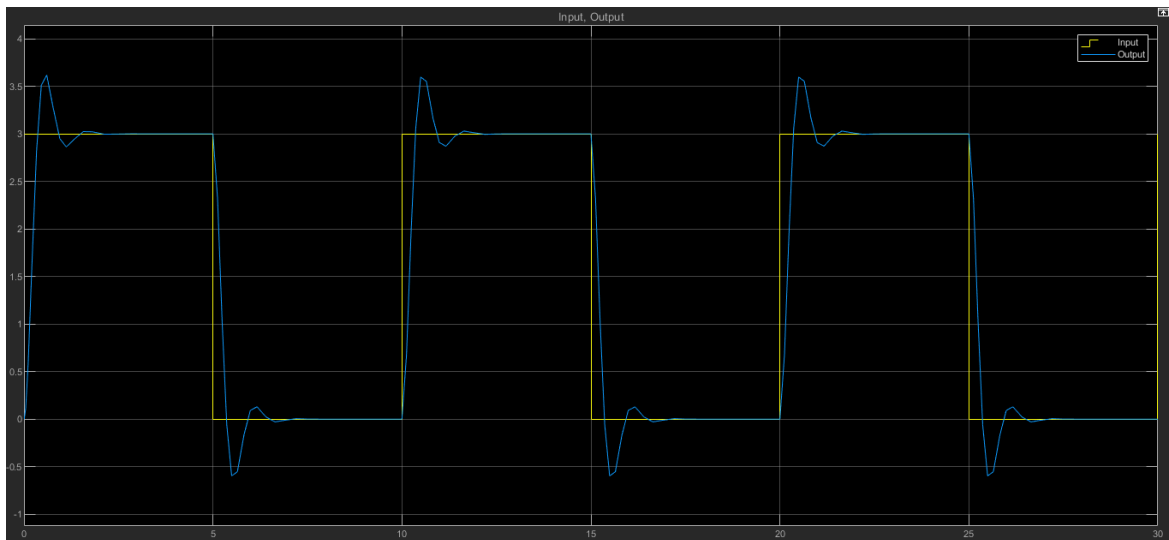
(2) $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$:

تصویر 3-5، سیستم کلی شبیه سازی شده، به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$ را نشان می دهد:



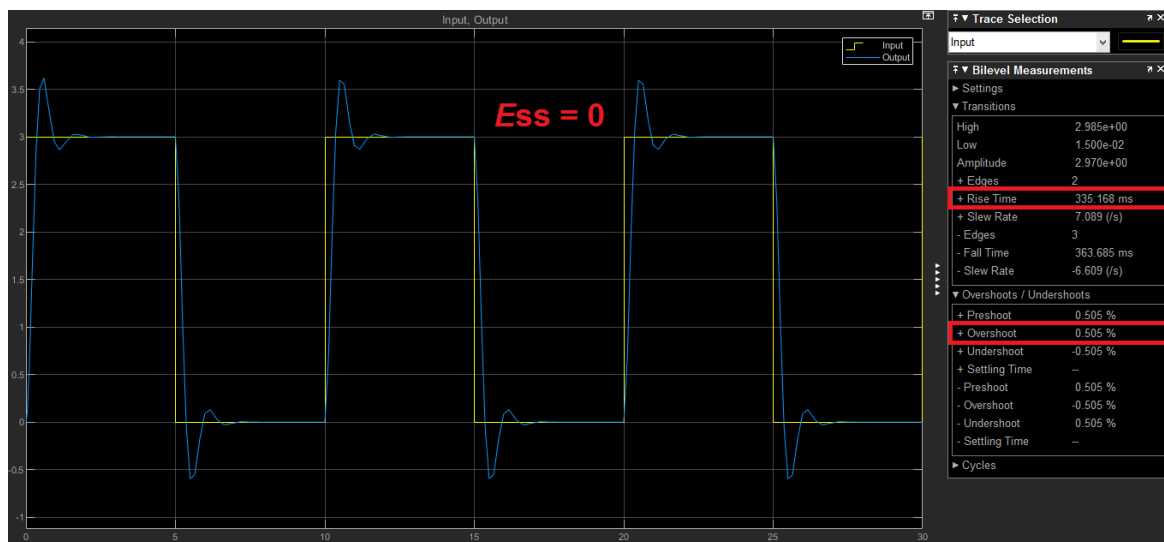
تصویر 3-5: سیستم کلی شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$

تصویر 3-6، شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-6: شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$

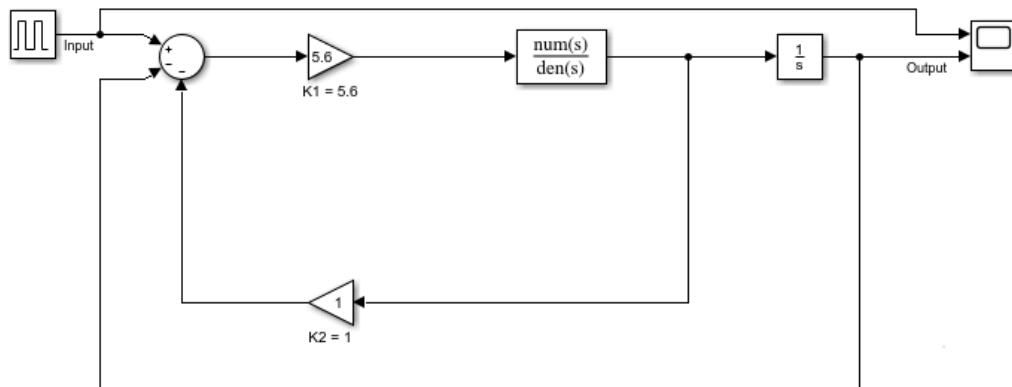
تصویر 3-7، درصد فرابرجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-7: درصد فرابرجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$

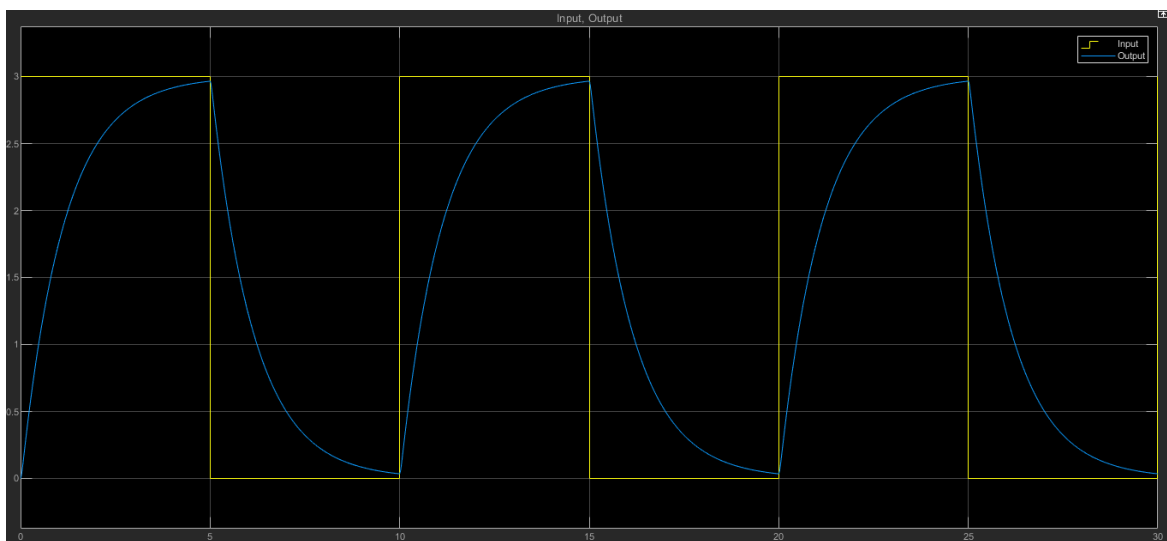
(3) $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$:

تصویر 3-8، سیستم کلی شبیه سازی شده، به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$ را نشان می دهد:



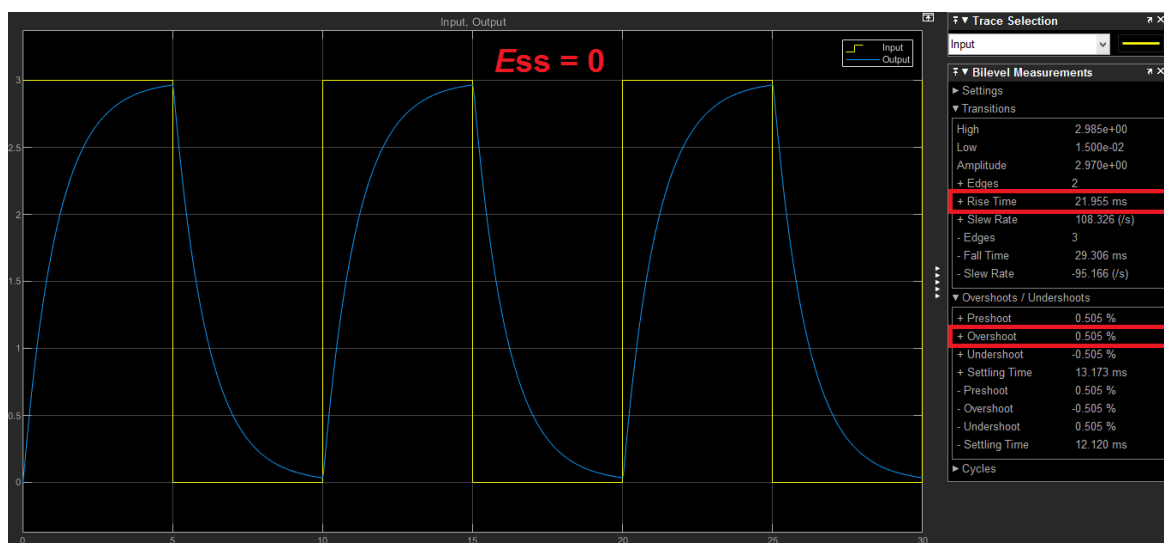
تصویر 3-8: سیستم کلی شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$

تصویر 3-9، شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-9: شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$

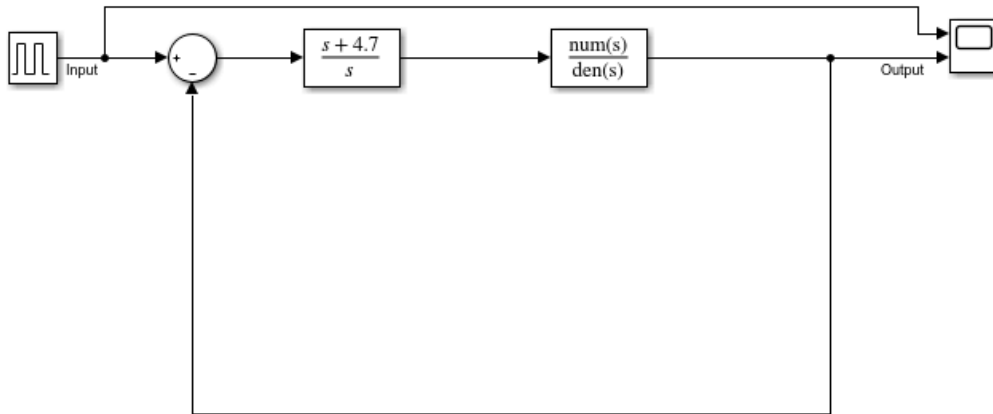
تصویر 3-10: درصد فرابرجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-10: درصد فرابرجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$

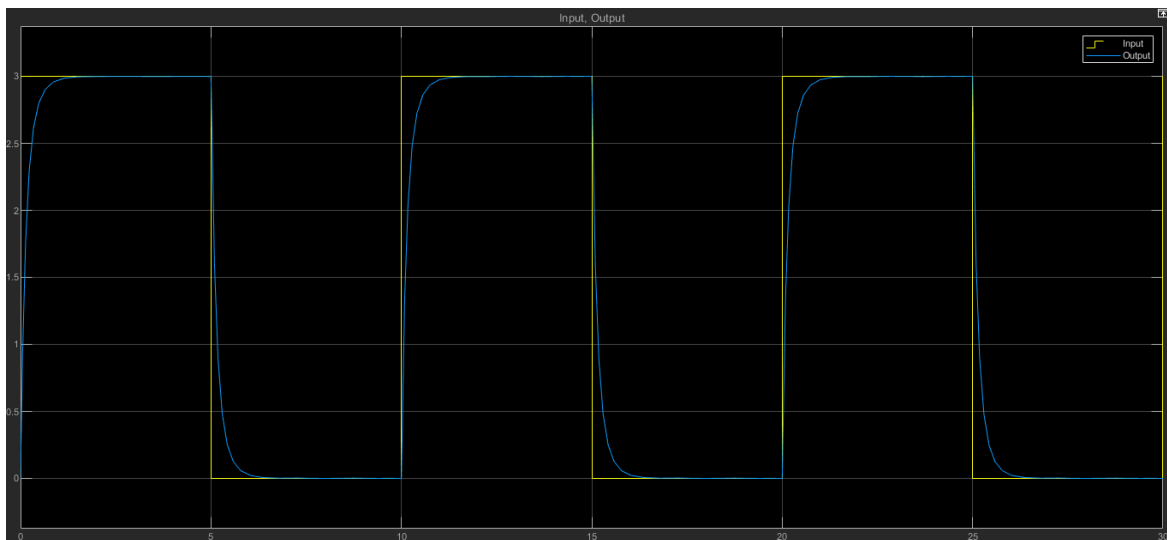
$$(4) \quad K_1 = 1 + \frac{4.7}{s} \text{ و } K_2 = 0$$

تصویر 3-11، سیستم کلی شبیه سازی شده، به ازای $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$ و $K_2 = 0$ را نشان می دهد:



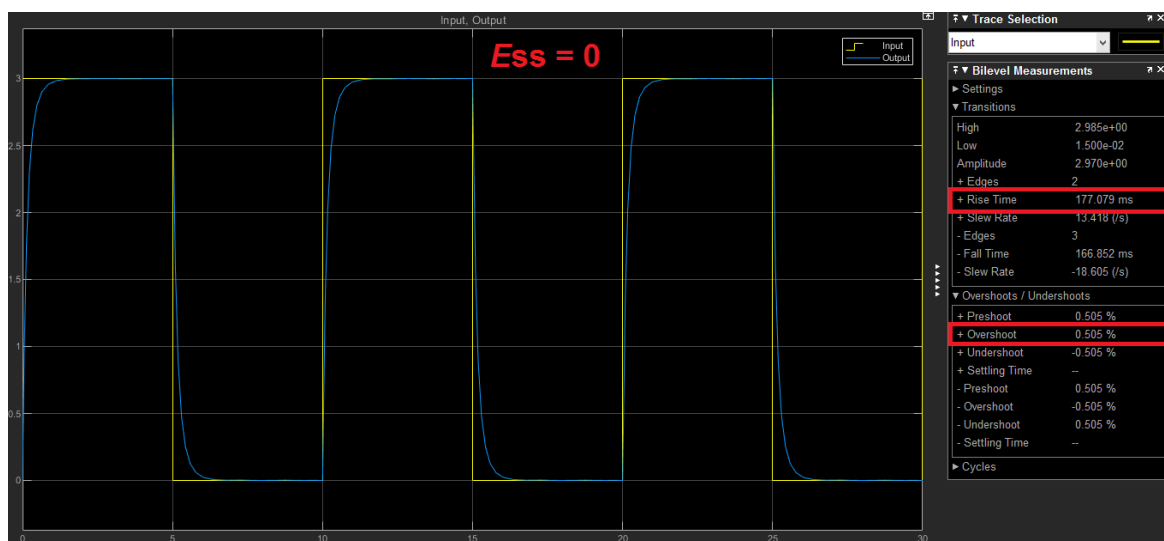
تصویر 3-11: سیستم کلی شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$ و $K_2 = 0$

تصویر 3-12، شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-12: شکل موج ورودی و خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$ و $K_2 = 0$

تصویر 3-13: درصد فرابرجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده را به ازای این حالت، نشان می دهد:

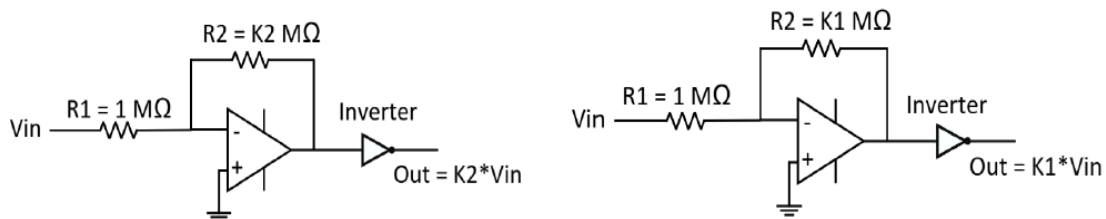


تصویر 3-13: درصد فرابرجش، خطای حالت ماندگار و زمان صعود خروجی سیستم شبیه سازی شده به ازای $K_2 = 0$ و $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$

پیاده سازی به صورت عملی:

در این بخش، قصد داریم با استفاده از کنترل کننده های تناسبی و فیدبک، موقعیت موتور را کنترل کنیم. به این منظور، می بایست سیستم کلی رسم شده در شکل 3-1 را با استفاده از مدار های الکتریکی، پیاده سازی کنیم.

برای طراحی هر دو کنترل کننده تناسبی و فیدبک K_1 و K_2 ، از مدار های زیر استفاده می کنیم:



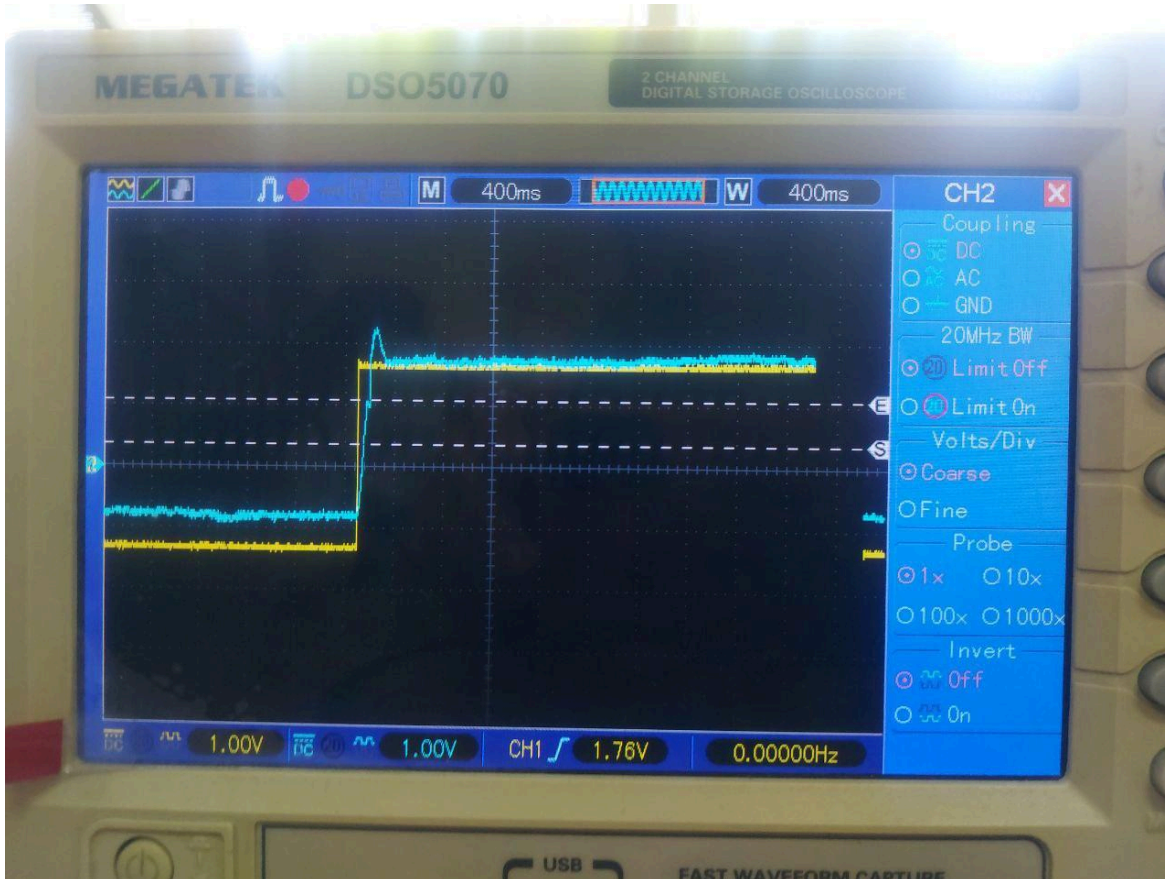
شکل 3-14: مدار کنترل کننده تناسبی و فیدبک K_1 و K_2

برای بررسی تاثیر هر کنترل کننده، مقادیر مختلف K_1 و K_2 را بررسی کرده و مقادیر را در جدول وارد می کنیم.

$$(1) \quad K_1 = 2.2 \text{ و } K_2 = 0:$$

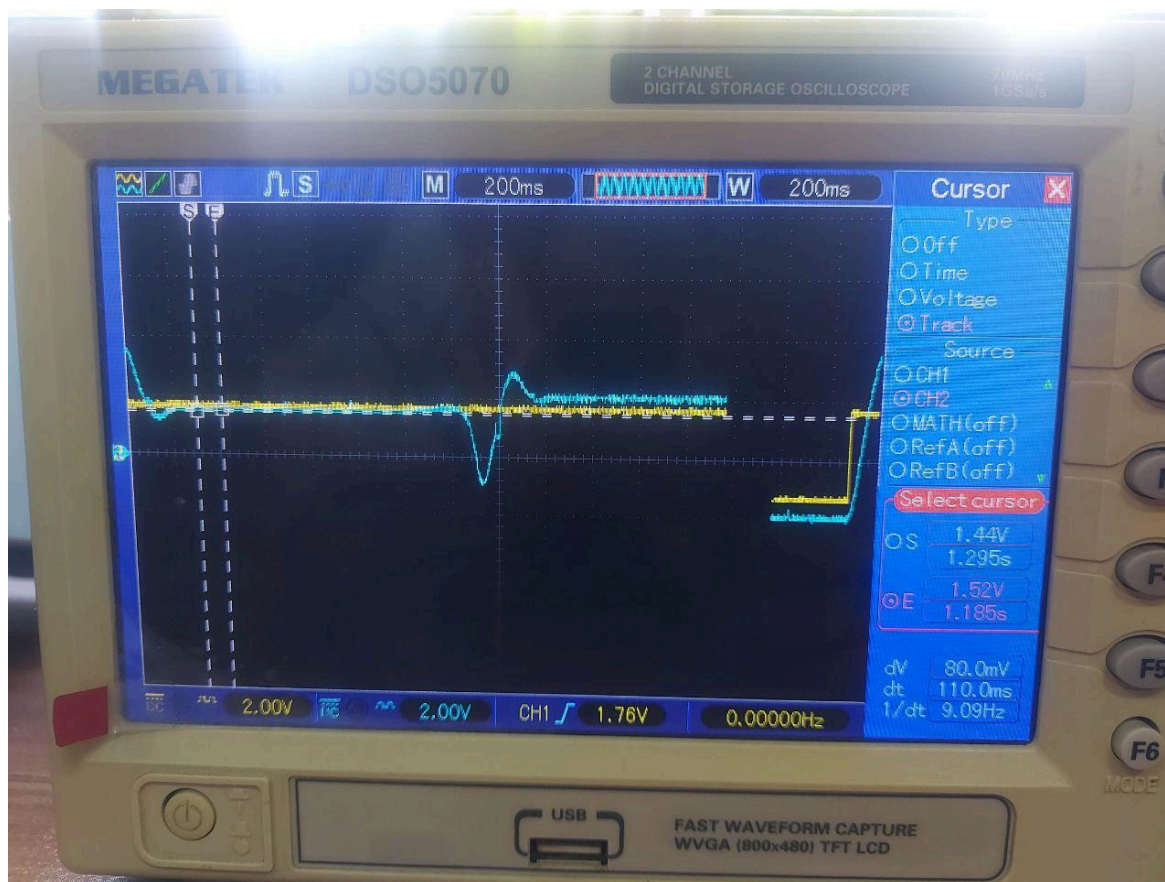
در این حالت، کنترل کننده فیدبک K_2 را نداریم و صرفاً کنترل کننده تناسبی K_1 مورد استفاده قرار می گیرد. در نتیجه مقاومت ها به صورت $R_2 = 2.2M\Omega$ و $R_1 = 1M\Omega$ خواهند بود.

تصویر 3-15، شکل موج ورودی و خروجی سیستم را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-15: شکل موج ورودی و خروجی سیستم به ازای $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$

تصویر 3-16، شکل موج خروجی سیستم، در صورت اعمال اغتشاش، در حالت ماندگار، را به ازای این حالت نشان می دهد:



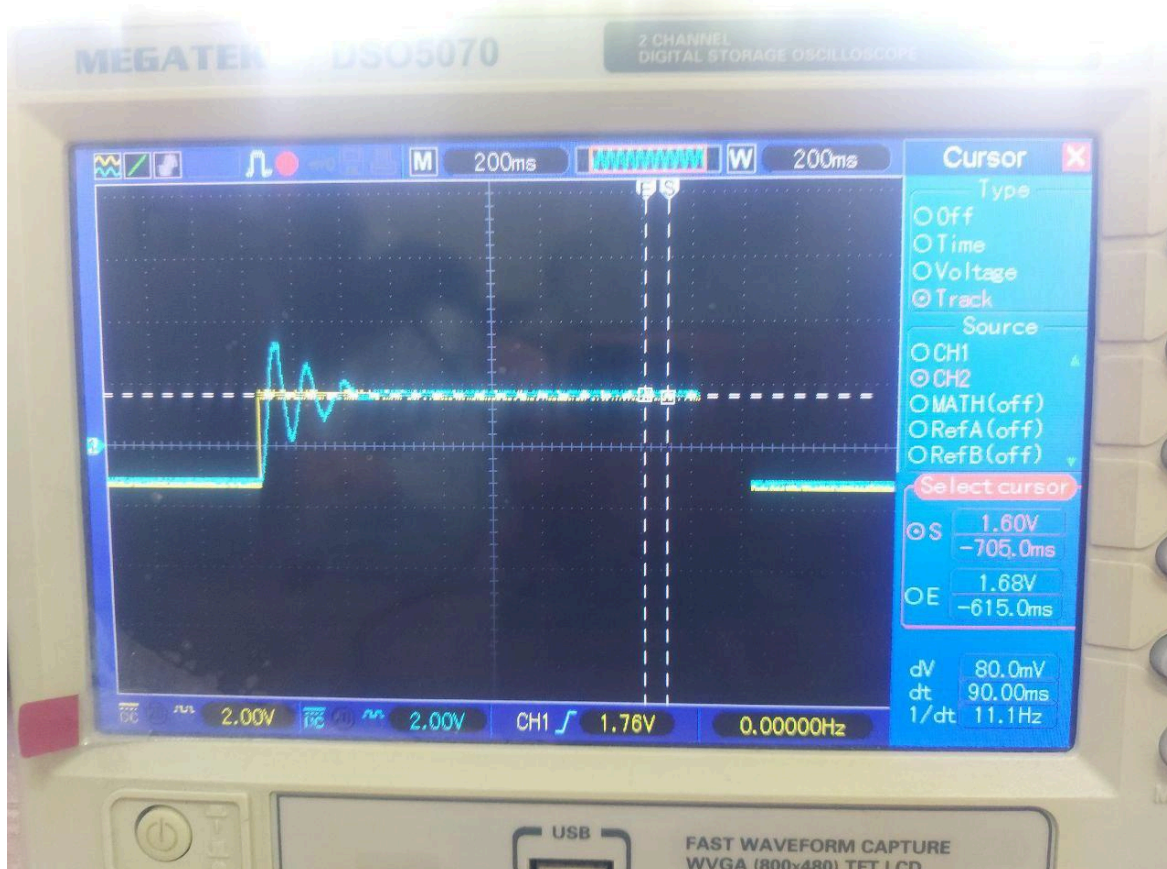
تصویر 3-16: خروجی سیستم در صورت اعمال اغتشاش در حالت ماندگار به ازای $K_1 = 2.2$ و $K_2 = 0$

همان طور که در تصویر فوق دیده می شود، کنترل کننده، اثر اغتشاش اعمال شده را برطرف کرده و سیگنال خروجی بعد از اعمال اغتشاش، با کمک کنترل کننده، تا حد خوبی دوباره به مقدار حالت ماندگار خود بازگشته است.

$$(2) \quad K_1 = 5.6 \text{ و } K_2 = 0:$$

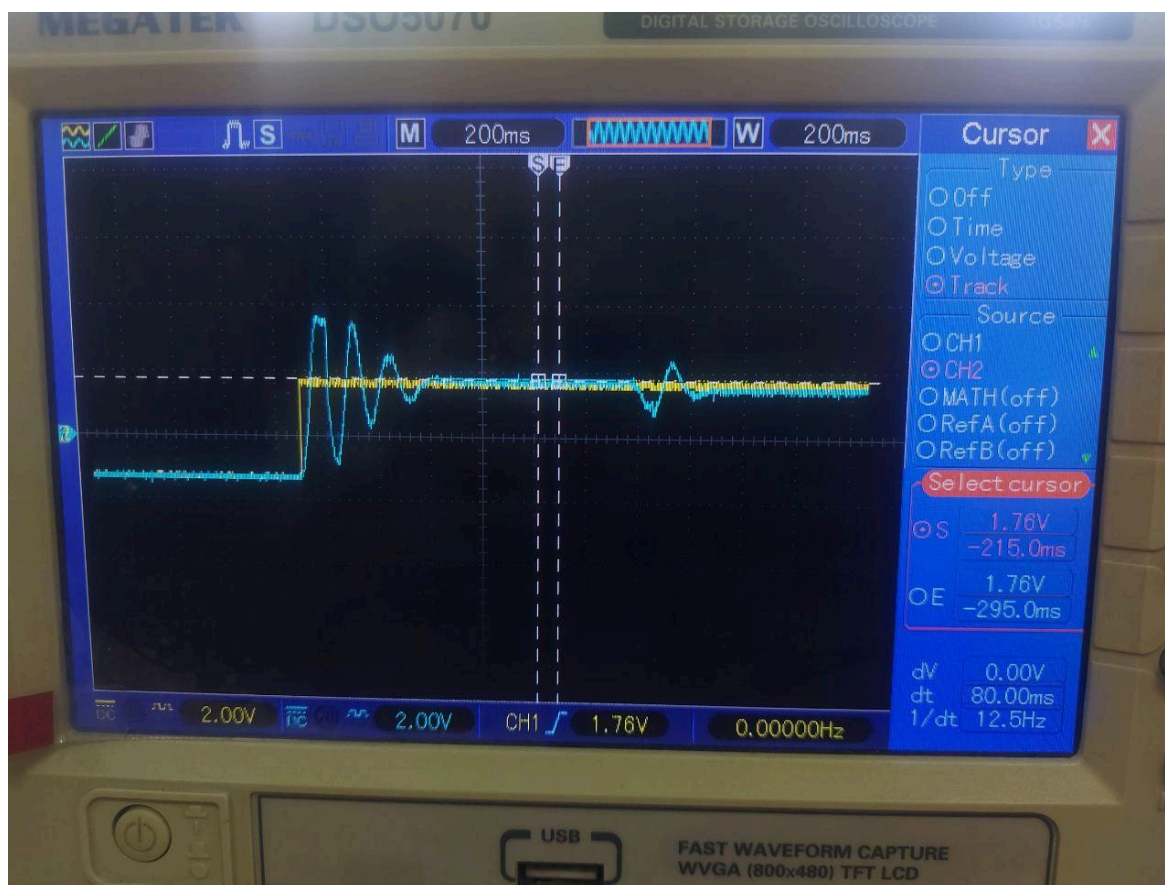
در این حالت، کنترل کننده فیدبک K_2 را نداریم و صرفاً کنترل کننده تناسبی K_1 مورد استفاده قرار می گیرد. در نتیجه مقاومت ها به صورت $R_2 = 5.6M\Omega$ و $R_1 = 1M\Omega$ خواهند بود.

تصویر 3-17، شکل موج ورودی و خروجی سیستم را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-17: شکل موج ورودی و خروجی سیستم به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$

تصویر 3-18، شکل موج خروجی سیستم، در صورت اعمال اغتشاش، در حالت ماندگار، را به ازای این حالت نشان می دهد:



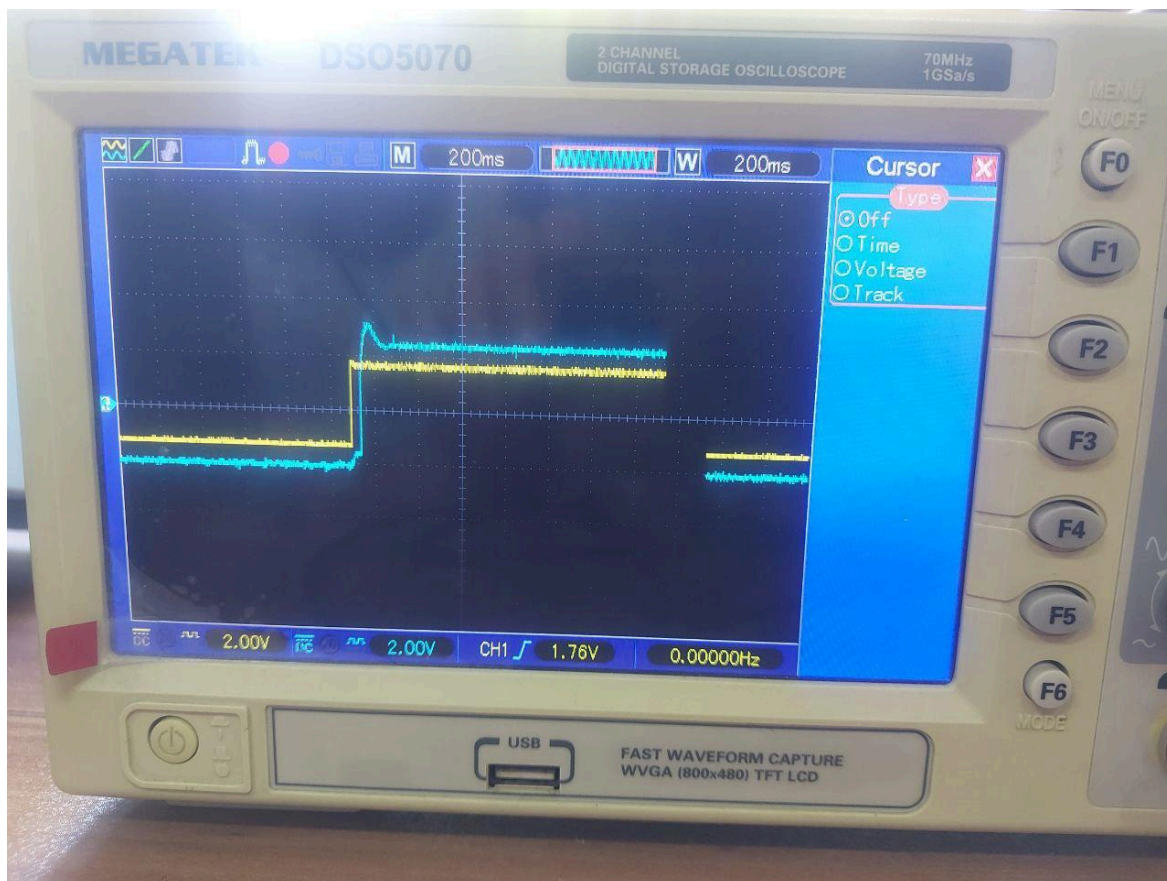
تصویر 3-18: خروجی سیستم در صورت اعمال اغتشاش در حالت ماندگار به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 0$

همان طور که در تصویر فوق دیده می شود، کنترل کننده، اثر اغتشاش اعمال شده را برطرف کرده و سیگنال خروجی بعد از اعمال اغتشاش، با کمک کنترل کننده، تا حد خوبی دوباره به مقدار حالت ماندگار خود بازگشته است.

$$(3) \quad K_1 = 5.6 \text{ و } K_2 = 1:$$

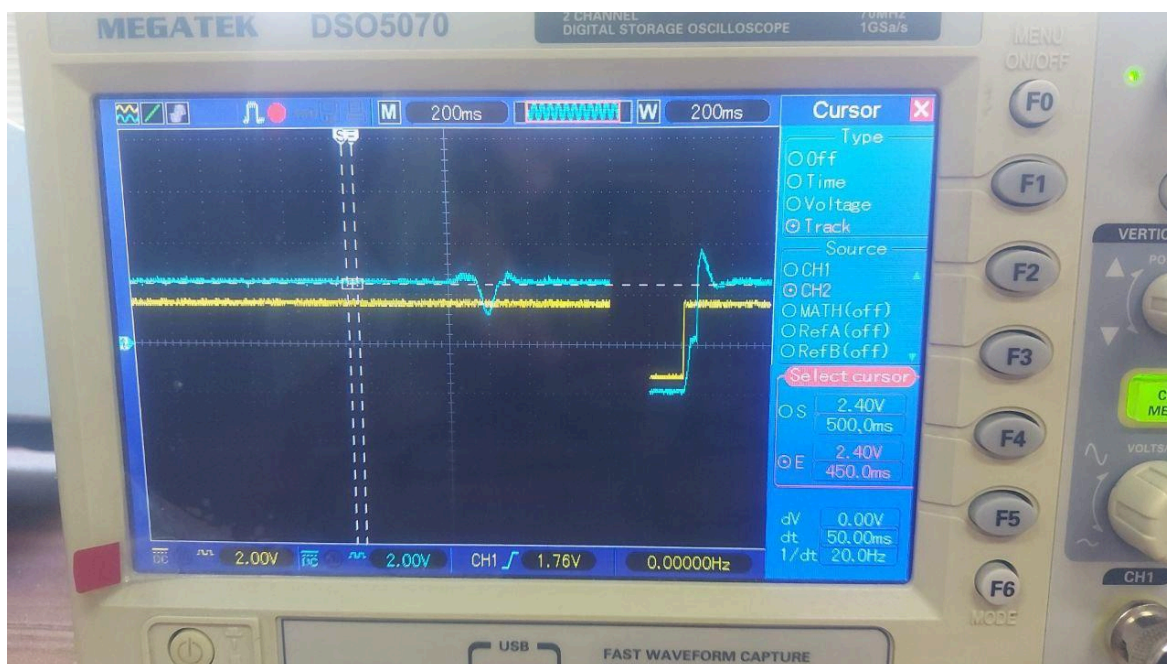
در این حالت، کنترل کننده K_2 حکم یک سیم را دارد (زیرا بهره آن برابر 1 است و ولتاژ را تغییر نمی دهد) و صرفاً کنترل کننده تناسبی K_1 مورد استفاده قرار می گیرد. در نتیجه مقاومت ها به صورت $R_2 = 5.6 M\Omega$ و $R_1 = 1 M\Omega$ خواهند بود.

تصویر 3-19، شکل موج ورودی و خروجی سیستم را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-19: شکل موج ورودی و خروجی سیستم به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$

تصویر 20-3، شکل موج خروجی سیستم، در صورت اعمال اغتشاش، در حالت ماندگار، را به ازای این حالت نشان می دهد:

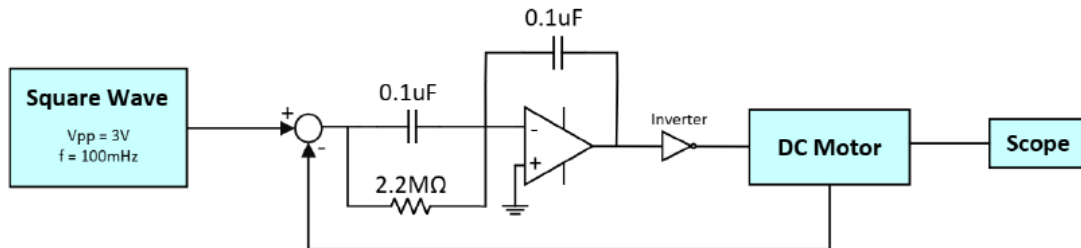


تصویر 20-3: خروجی سیستم در صورت اعمال اغتشاش در حالت ماندگار به ازای $K_1 = 5.6$ و $K_2 = 1$

همان طور که در تصویر فوق دیده می شود، کنترل کننده، اثر اغتشاش اعمال شده را برطرف کرده و سیگنال خروجی بعد از اعمال اغتشاش، با کمک کنترل کننده، تا حد خوبی دوباره به مقدار حالت ماندگار خود بازگشته است.

$$K_2 = 0 \text{ و } K_1 = 1 + \frac{4.7}{s} \quad (4)$$

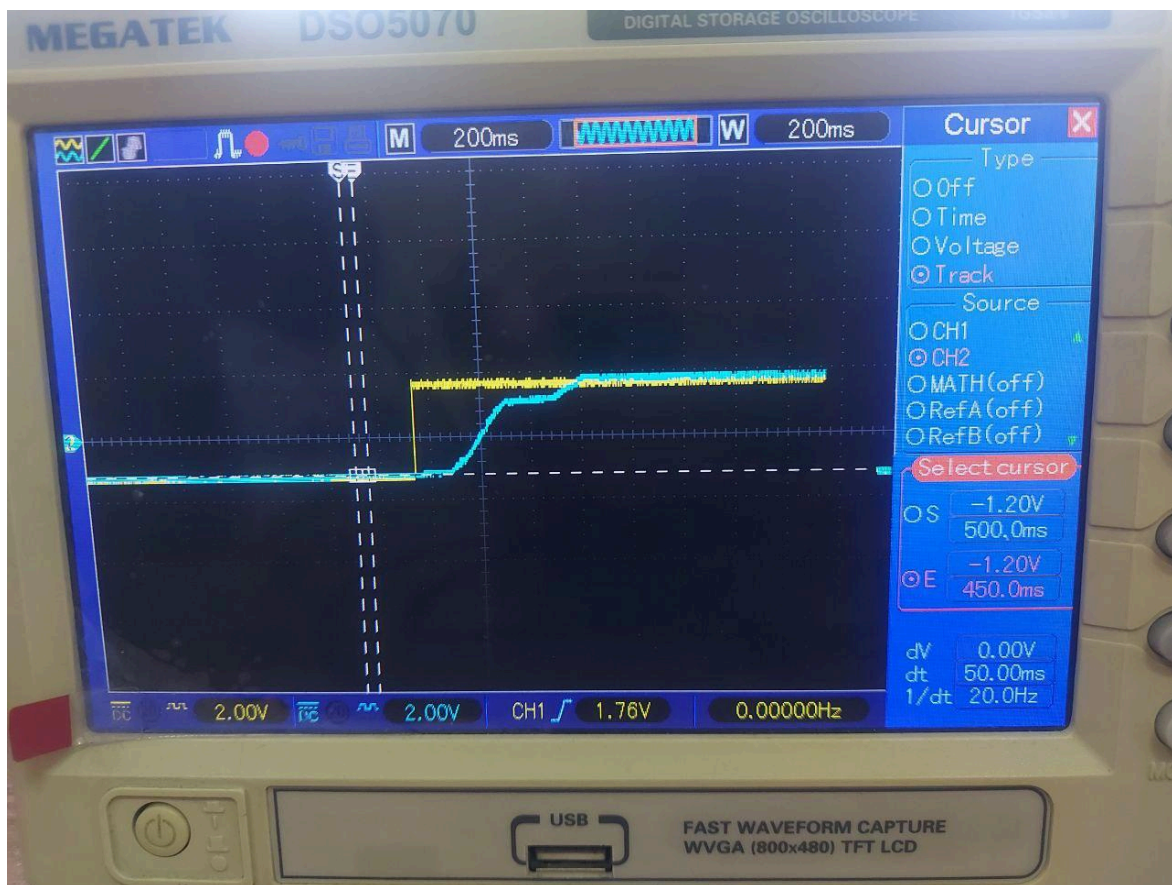
مدار طراحی شده برای پیاده سازی این کنترل کننده:



شکل 3-21: مدار پیاده سازی حالت $K_2 = 0$ و $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$

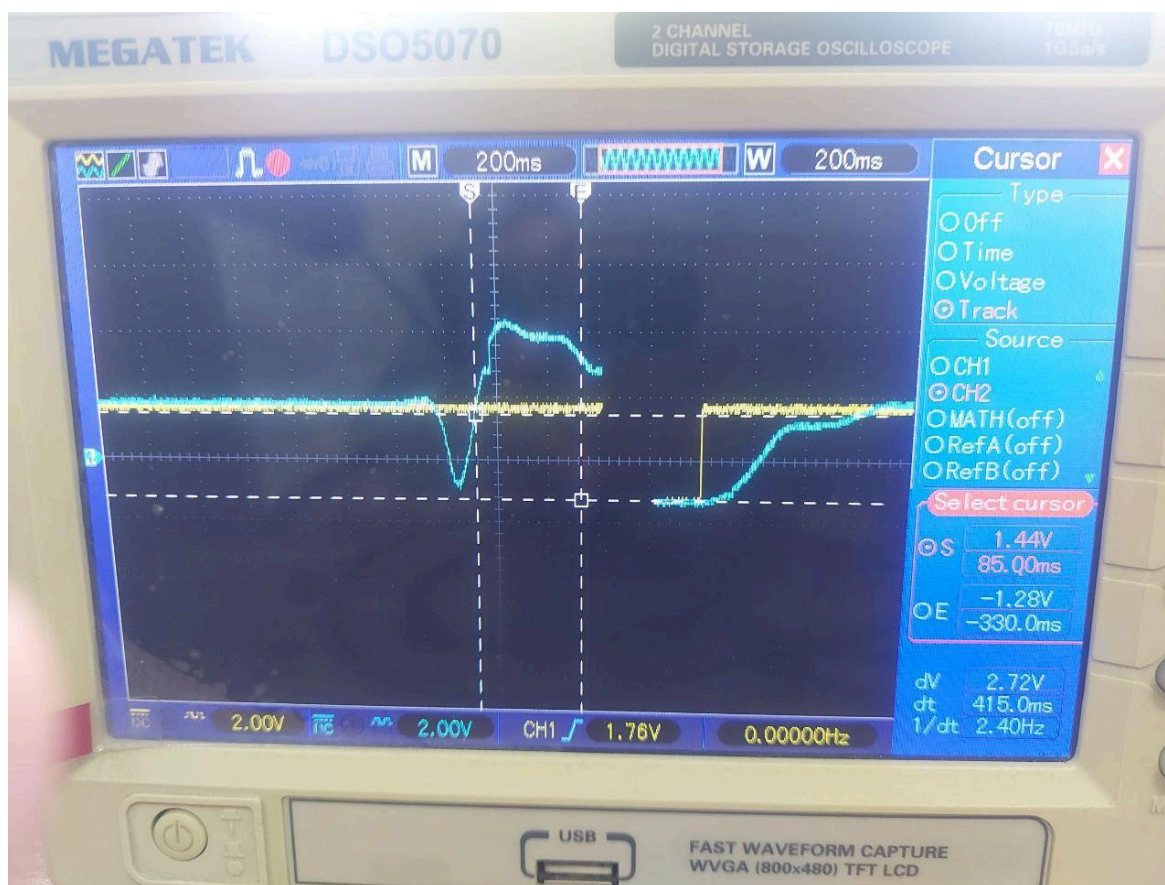
در این حالت، کنترل کننده فیدبک K_2 را نداریم و صرفاً کنترل کننده تناسبی K_1 مورد استفاده قرار می گیرد.

تصویر 3-22، شکل موج ورودی و خروجی سیستم را به ازای این حالت، نشان می دهد:



تصویر 3-22: شکل موج ورودی و خروجی سیستم به ازای $K_2 = 0$ و $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$

تصویر 3-23، شکل موج خروجی سیستم، در صورت اعمال اغتشاش، در حالت ماندگار، را به ازای این حالت نشان می دهد:



تصویر 3-23: خروجی سیستم در صورت اعمال اغتشاش در حالت ماندگار به ازای $K_2 = 0$ و $K_1 = 1 + \frac{4.7}{s}$

همان طور که در تصویر فوق دیده می شود، کنترل کننده، اثر اغتشاش اعمال شده را برطرف کرده و سیگنال خروجی بعد از اعمال اغتشاش، با کمک کنترل کننده، تا حد خوبی دوباره به مقدار حالت ماندگار خود بازگشته است.

| جبران کننده | شکل موج سیگنال ورودی و خروجی | خطای حالت ماندگار | درصد فراجش خروجی | زمان صعود خروجی |
|------------------------------------|---------------------------------|----------------------|---------------------|--------------------|
| $K1 = 2.2$ $k2=0$ | تصویر 3-15 | 0.5 | 50 | 70 msec |
| $K1 = 5.6$ $k2=0$ | تصویر 3-17 | 0.2 | 54 | 32 msec |
| $K1 = 5.6$ $k2=1$ | تصویر 3-19 | 1.5 | 20 | 50 msec |
| $K1 = \frac{4.7}{s} + 1$ $k2=0$ | تصویر 3-22 | 0.04 | 0 | 415 msec |

جدول 3-24: نحوه اثرگذاری جبران کننده تناسبی و فیدبک موقعیت-سرعت بر تنظیم موقعیت سروموتور DC

بررسی عملکرد کنترل کننده در حذف اثر اغتشاش:

(1) آیا اثر اغتشاش در پاسخ حالت گذرا حذف شده است؟

با اعمال اغتشاش به سیستم ها، اثر اغتشاش اعمال شده بر روی سیگنال خروجی قابل مشاهده است. در واقع در حالت گذرا که سیستم هنوز به حالت پایدار و ماندگار خودش نرسیده است، کنترل کننده، اثر اغتشاش را برطرف نکرده است.

(2) در حالت ماندگار شرایط چگونه است؟

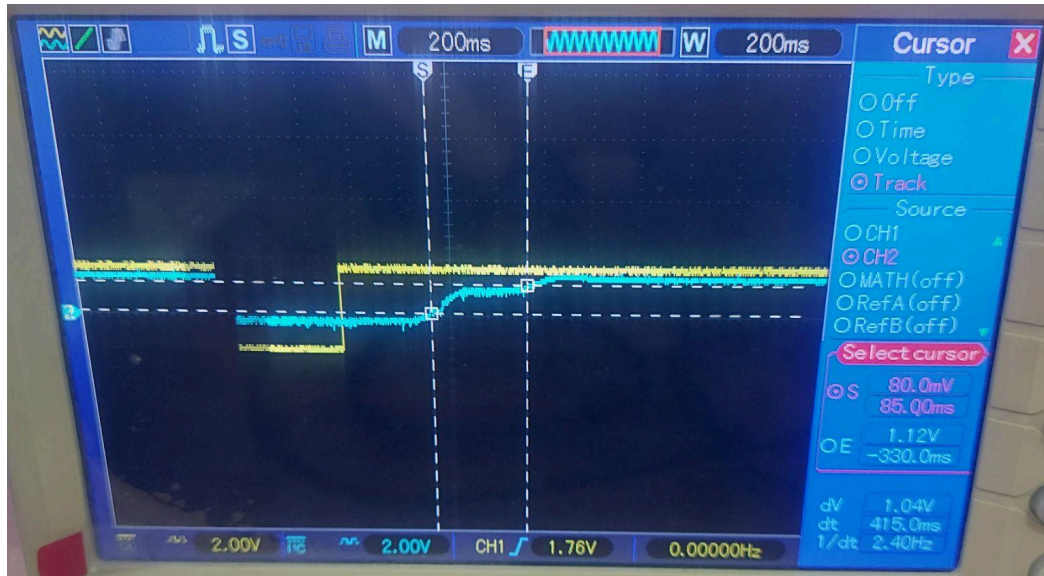
بعد از رسیدن سیستم به حالت ماندگار خود، کنترل کننده، اثر اغتشاش اعمال شده را برطرف می کند و تاثیر آن را بر سیگنال خروجی تا حد خوبی کم می کند.

(3) آیا خطای حالت ماندگار سیستم صفر شده است؟

در حالاتی که $K_2 = 0$ هست، خطا تقریباً نداریم، اما در حالت های دیگر خطا داریم و خطای حالت ماندگار، غیر قابل چشم پوشی است.

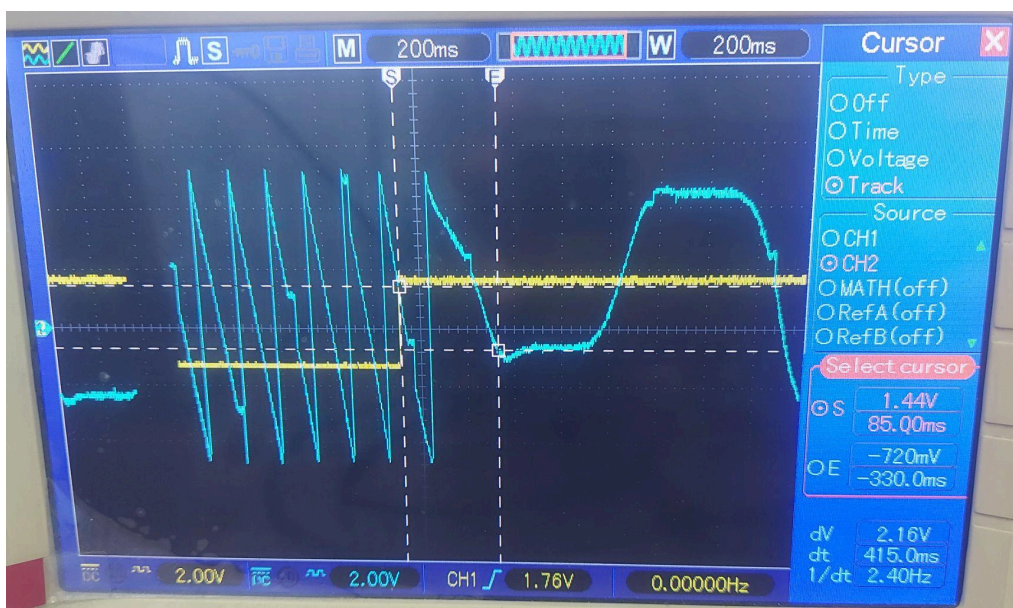
بخش 4: اثر تاخیر بر پایداری و پایداری سازی سیستم توسط فیدبک سرعت

در این بخش ابتدا سیستم گفته شده را با تاخیر بستیم و با $k=0$ شروع کردیم و کم کم k_1 را افزایش دادیم، تا $k_1=5.6$ سیستم پایدار بود و خروجی پایدار میداد. تصویر 4-1: (به دلیل کمبود زمان از تمام k ها عکس گرفته نشده)



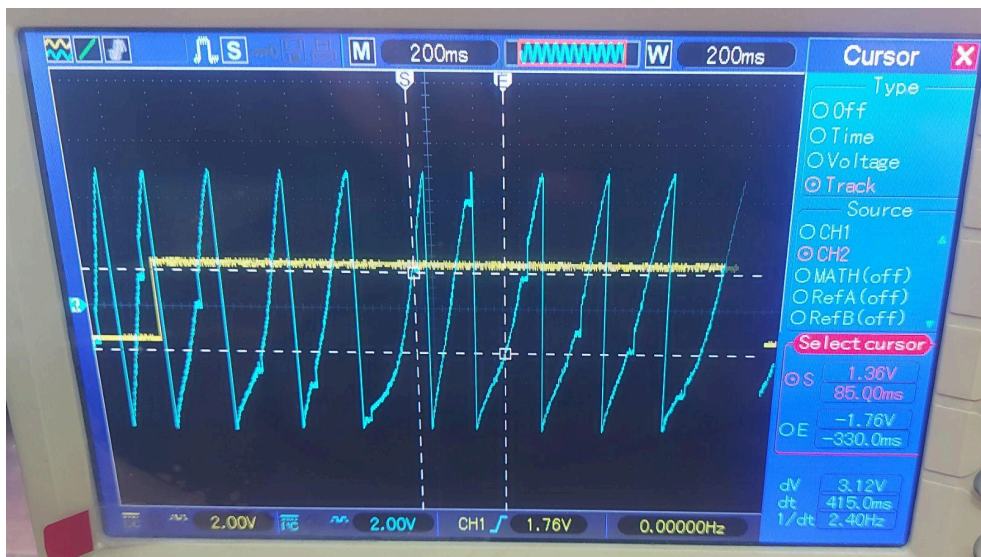
تصویر 4-1 سیستم با $k_1=2.2$ که پایدار است

سپس در $k_1=5.6$ سیستم ناپایدار شد که در تصویر 4-2 قابل مشاهده است:



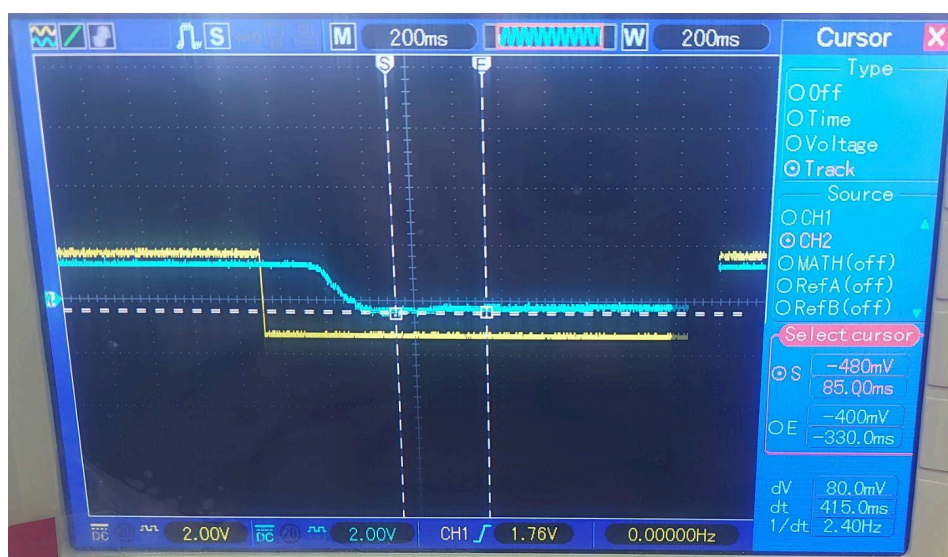
تصویر 2-4 که سیستم با $k_1=5.6$ را نشان میدهد که ناپایدار نیز شده است.

حال k_2 را افزایش میدهم تا سیستم دوباره پایدار شود:



تصویر 3-4 سیستم با $k_1=5.6$ و $k_2=2.2$ را نشان میدهد که هنوز ناپایدار است.

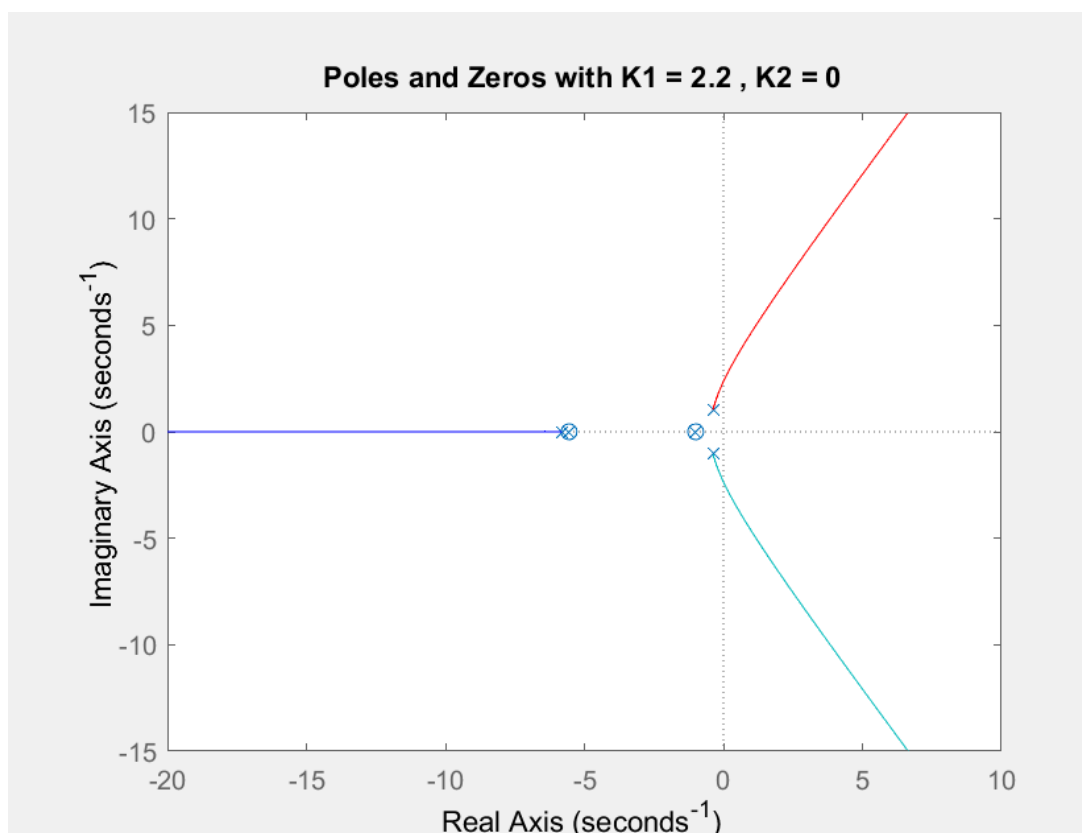
زمانی که k_2 را به مقدار 3.3 رساندیم سیستم پایدار شد و پاسخ زیر را دریافت کردیم (تصویر 4-4)



تصویر 4-4 سیستم با $k_1=5.6$ و $k_2=3.3$ را نشان میدهد که سیستم دوباره به پایداری رسیده.

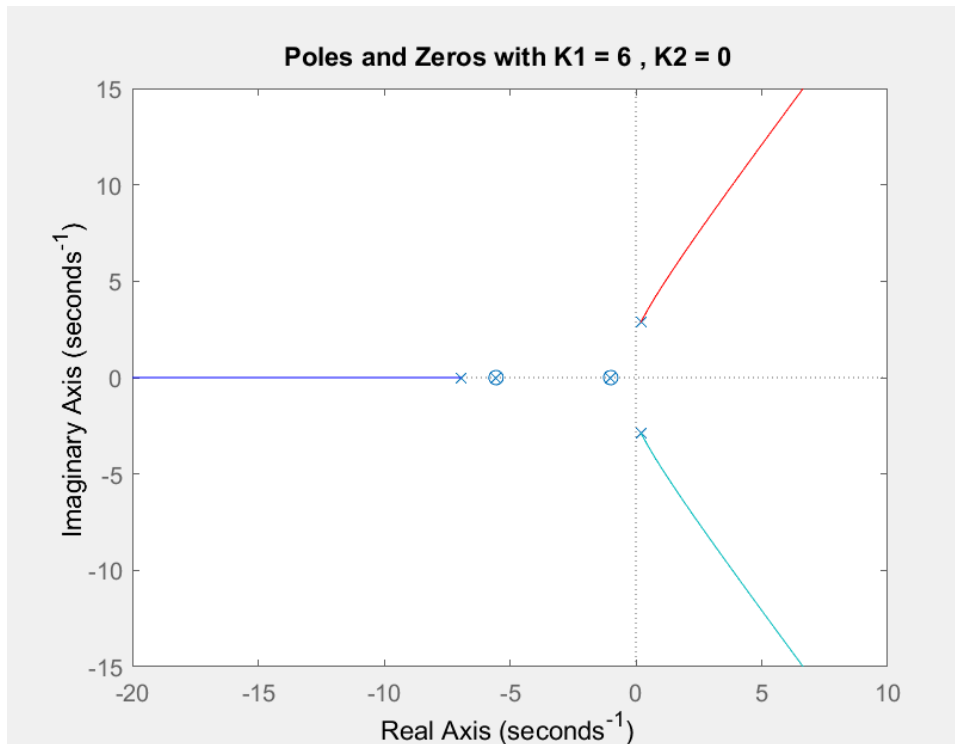
رسم مکان هندسی قطب ها:

در این قسمت با رسم مکان هندسی سیستم با k_1 و k_2 های مختلف متوجه دلیل پایداری و ناپایداری سیستم خواهیم شد:



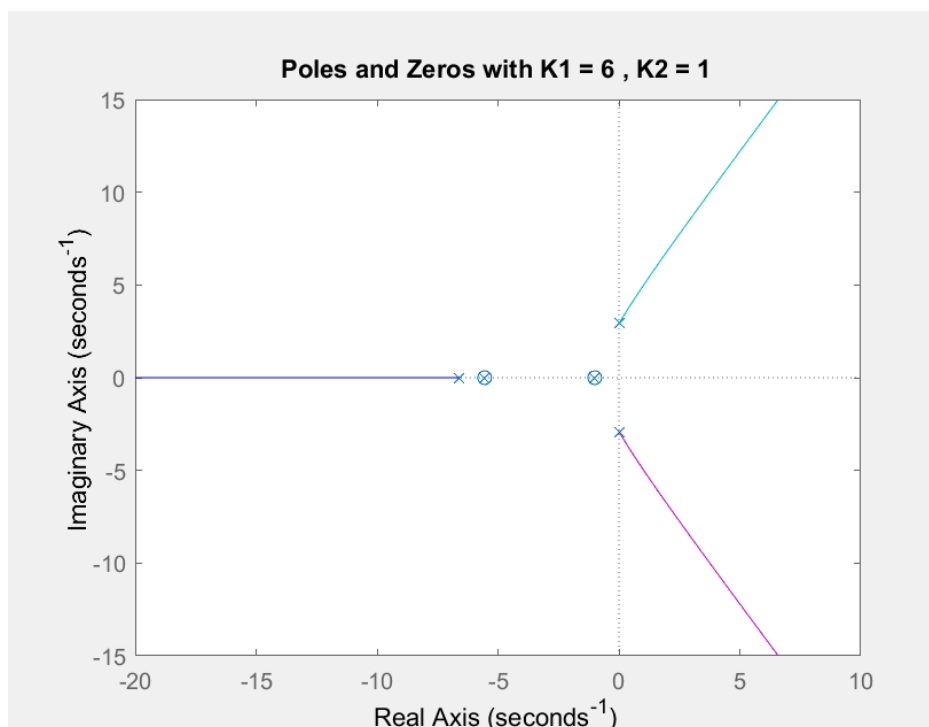
تصویر 4-5 مکان هندسی سیستم با $k_1=2.2$ و $k_2=0$ نشان میدهد که دیده میشود سیستم پایدار با قطب های سمت چپ محور موهومی است.

در تصویر 4-6 به قسمتی میرسیم که سیستم با افزایش k_1 ناپایدار شد و سپس k_2 را افزایش خواهیم داد تا دوباره به پایداری برسیم:



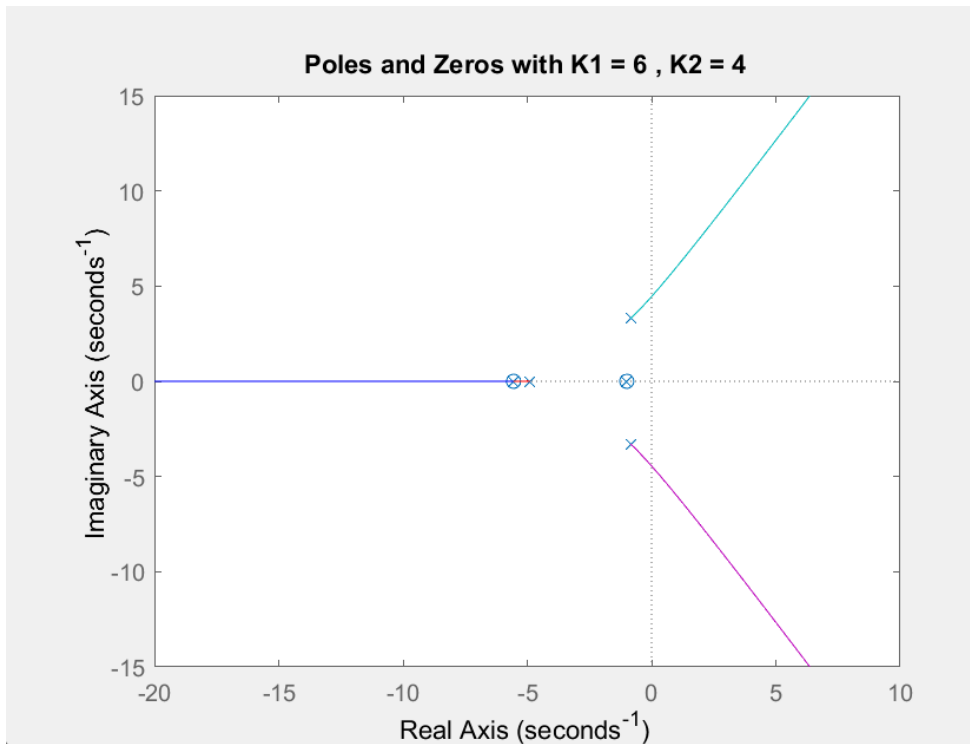
تصویر 6-4 مکان هندسی سیستم با $k_1=6$ و $k_2=0$ نشان میدهد که دیده میشود سیستم ناپایدار با قطب های سمت راست محور موهومی است.

در تصویر 7-4 میبینیم که با $k_2=1$ هنوز سیستم پایدار نشده:



تصویر 7-4 مکان هندسی سیستم با $k_1=6$ و $k_2=1$ نشان میدهد که دیده میشود سیستم ناپایدار با قطب های سمت راست محور موهومی است.

در نهایت در تصویر 8-4 مشاهده میشود که با $k_2=4$ سیستم پایدار داریم و همه قطب ها سمت چپ محور موهومی میباشند.



تصویر 8-4 مکان هندسی سیستم با $k_1=6$ و $k_2=4$ نشان میدهد که دیده میشود سیستم پایدار با قطب های سمت چپ محور موهومی است.