



آزمایشگاه کنترل خطی

شبیه‌سازی سیستم‌های مختلف در محیط Simulink و آشنایی با Simscape

مقدمه

یکی از متداول‌ترین محرک‌های موجود در سیستم‌های کنترل موقعیت و سرعت، موتور الکتریکی می‌باشد. در میان انواع موتورهای الکتریکی، موتورهای الکتریکی DC به علت داشتن قابلیت کنترل بالا و سادگی روش‌های کنترلی مورد نیاز، از کاربرد گسترده‌ای در سیستم‌های کنترل موقعیت و سرعت برخوردار هستند. در سیستم کنترل موقعیت یک موتور DC، هدف طراحی کنترلی است که محور موتور را به اندازه زاویه مشخص شده توسط ورودی مرجع بچرخاند. به همین ترتیب، در سیستم کنترل سرعت یک موتور DC، هدف طراحی کنترلی است که محور موتور با سرعت مشخص شده توسط ورودی مرجع چرخانده شود. با مدل کردن موتور در محیط MATLAB می‌توان پارامترهای کنترل‌کننده را قبل از اعمال آن به سیستم اصلی تنظیم و پس از اطمینان از عملکرد کنترل‌کننده آن را به سیستم اصلی اعمال کرد.

مدل‌سازی و شبیه‌سازی، به مهندسان این امکان را می‌دهد که رفتار و خواص دینامیکی سازه را بهتر درک کنند. در گذشته مهندسان تا حدی از روی حدس و گمان می‌توانستند حدس بزنند که یک مدل چه عکس‌العملی خواهد داشت. امروزه مهندسان می‌توانند مسائل خیلی پیچیده اعم از مدل‌های غیرخطی و وابسته به زمان را به راحتی توسط ابزاری همانند MATLAB پیاده‌سازی و مدل کنند و همچنین با استفاده از این مدل‌سازی می‌توانند طرح خود را بهینه کرده و بهترین ضریب اطمینان را برای طرح خود انتخاب کنند. همچنین این ابزار این امکان را به ما می‌دهد که تحقیقات خود را در گستره وسیعی از بارها و شرایط فیزیکی مختلف بهینه کرده و یک طراحی با Cost-effective بیشتر در مراحل ساخت-اجزاء داشته باشیم.

در این آزمایش ابتدا یک معرفی کلی از موتورهای الکتریکی DC ارائه می‌شود (بخش اول)؛ سپس از روی مدل ریاضی به دست آمده در بخش اول، شبیه‌سازی سیستم موتور الکتریکی DC در محیط Simulink انجام می‌شود (بخش دوم). سپس به منظور اعتبارسنجی پاسخ‌ها، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم یک بار در بخش سوم توسط MATLAB حل می‌شود. سپس برای آشنایی شما با محیط Simscape، یک بار دیگر ماشین الکتریکی DC در این محیط شبیه‌سازی می‌شود (بخش چهارم). در نهایت برای تسلط بیشتر شما با محیط SimMechanics، در بخش پنجم چند سیستم ساده توسط شما پیاده‌سازی و تست می‌شود.

بخش اول) مباحث نظری مربوط به آزمایش و محاسبه مدل ریاضی موتور

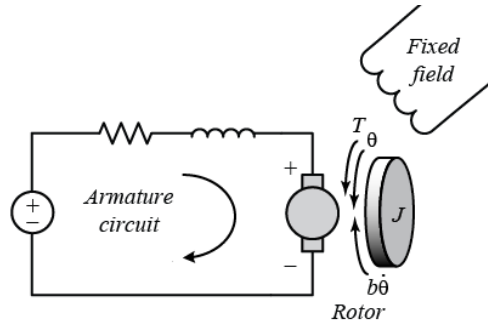
همانطور که می‌دانیم، هرگاه یک هادی حامل جریان الکتریکی در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، نیرویی از طرف میدان مغناطیسی بر آن هادی وارد می‌شود. حال چنانچه این هادی با فاصله‌ای نسبت به یک محور چنان قرار گرفته باشد که بتواند حول آن محور چرخش کند، گشتاور وارد شده بر هادی از طرف میدان مغناطیسی موجب چرخش آن می‌شود. به طور کلی، در موتورهای DC، مقدار گشتاور وارد شده بر هادی از طرف میدان مغناطیسی، با جریان عبوری از هادی و شار میدان مغناطیسی متناسب خواهد بود. به این ترتیب جهت کنترل گشتاور موتور، می‌توان به دو روش کنترل جریان آرمیچر و کنترل شار میدان مغناطیسی عمل کرد. در این آزمایش قصد داریم موتور DC مغناطیس دائم را مدل کنیم. بنابراین، شار مغناطیسی مدار میدان را ثابت در نظر می‌گیریم و گشتاور موتور را با تنظیم جریان آرمیچر تنظیم می‌کنیم.

مدار معادل موتور DC مغناطیس دائم در شکل 1 نشان داده شده است که در آن:

ω : سرعت چرخش محور موتور

e_b : نیروی ضد محرکه القایی در آرمیچر

V_a : ولتاژ اعمالی به آرمیچر	θ : موقعیت (زاویه) محور موتور
i_a : جریان سیم پیچ آرمیچر	J : مجموعه ممان اینرسی روی محور موتور
R_a : مقاومت مدار آرمیچر	b : ضریب اصطکاک چسبندگی موتور
L_a : اندوکتانس سیم پیچ آرمیچر	T : گشتاور تولیدی در محور موتور



شکل 1: مدار معادل موتور DC مغناطیسی دائم

در سیستم کنترل سرعت (یا موقعیت) موتور، فرض می‌کنیم ورودی سیستم، ولتاژ آرمیچر و خروجی سیستم، سرعت (یا موقعیت) روتور DC باشد. گشتاور موتور متناسب با جریان آرمیچر می‌باشد که می‌توان این تناسب را به کمک ضریب گشتاور موتور به صورت زیر بیان کرد.

$$T = K_t i_a$$

نیروی ضد محرکه القایی در آرمیچر نیز از طریق ثابت K_e با سرعت زاویه‌ای شفت متناسب می‌باشد.

$$e_b = K_e \omega$$

چنانچه تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی را در موتور بدون اتلاف فرض کنیم، ثابت‌های گشتاور و ولتاژ القایی آرمیچر با هم برابر می‌باشند یعنی $K = K_t = K_e$.

در این قسمت، جهت استخراج مدل ریاضی موتور از قوانین اویلر بر روی روتور و قانون KVL بر روی مدار آرمیچر استفاده می‌کنیم تا روابط زیر حاصل شود.

$$\begin{cases} \frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} \left(-R_a i_a + V_a - K \frac{d\theta}{dt} \right) \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J} \left(K i_a - b \frac{d\theta}{dt} \right) \end{cases}$$

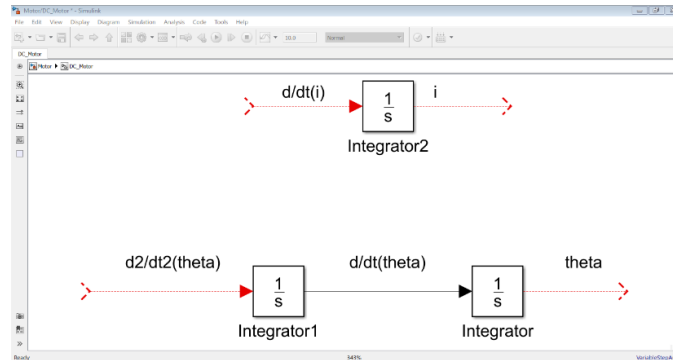
بخش دوم) شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل در محیط MATLAB/Simulink

ابتدا محیط Simulink را با اجرا کردن دستور Simulink در MATLAB باز می‌کنیم. برای ساخت مدل جدید در محیط Simulink، از منو گزینه File → New → Model را انتخاب کنید.

برای ساخت روابط فوق ابتدا انتگرال‌های شتاب زاویه‌ای رونور و نرخ تغییرات جریان آرمیچر را مدل می‌کنیم. برای این کار مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- بلوک انتگرال گیر را از قسمت Simulink/Continuous به مدل اضافه کنید.

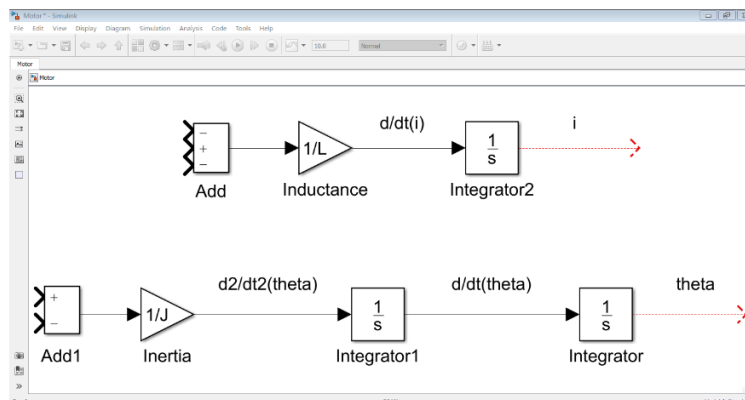
- ترمینال‌های ورودی و خروجی بلوک را امتداد دهید و مطابق شکل 2 ورودی آن را $d^2/dt^2(\theta)$ و خروجی آن را $d/dt(\theta)$ نام‌گذاری کنید. برای نام‌گذاری بر روی فضای خالی بالای خطوط دو بار کلیک کنید و نام‌گذاری را انجام دهید.
- بلوک انتگرال‌گیر دیگری را به مدل اضافه کنید و ورودی آن را به خروجی بلوک قبل وصل کنید و خروجی آن را امتداد دهید و آن را θ نام‌گذاری کنید.
- بلوک انتگرال‌گیر سومی را به مدل اضافه کنید و ورودی آن را $d/dt(i)$ و خروجی آن را i نام‌گذاری کنید.



شکل 2: مدل کردن انتگرال‌های شتاب زاویه‌ای و نرخ تغییرات جریان آرمیچر

با توجه به روابط بالا، شتاب زاویه‌ای برابر با حاصل ضرب $\frac{1}{J}$ در مجموع دو ترم (یکی مثبت و یکی منفی) می‌باشد. به طور مشابه، مشتق جریان برابر با حاصل ضرب $\frac{1}{L}$ در مجموع سه ترم (یکی مثبت و دو تا منفی) می‌باشد. بنابراین در ادامه برای مدل کردن روابط بالا مراحل زیر را ادامه می‌دهیم.

- دو بلوک بهره را از Simulink/Math به مدل اضافه کنید و آن‌ها را مطابق شکل 3 به انتهای سمت چپ انتگرال‌گیرها اضافه کنید.
- دو بار بر روی بلوک بهره متناظر با شتاب زاویه‌ای کلیک کنید و مقدار آن را به $\frac{1}{J}$ تغییر دهید و آن را Inertia نام‌گذاری کنید.
- به طور مشابه مقدار بلوک بهره دوم را $\frac{1}{L}$ گذاشته و نام آن را به Inductance تغییر دهید.
- دو بلوک جمع‌کننده از قسمت Simulink/Math به مدل اضافه کنید و آن‌ها را با خط به بلوک‌های جمع‌کننده متصل کنید.
- علامت بلوک جمع‌کننده متناظر با معادله KVL (جمع‌کننده ولتاژ) را به $++$ تغییر دهید چون در معادله KVL یک ترم مثبت و دو ترم منفی است.
- علامت بلوک جمع‌کننده متناظر با معادلات اولی‌ر (جمع‌کننده گشتاور) را به $+-$ تغییر دهید زیرا در معادله مربوط به قانون نیوتن یک ترم مثبت و یک ترم منفی می‌باشد.



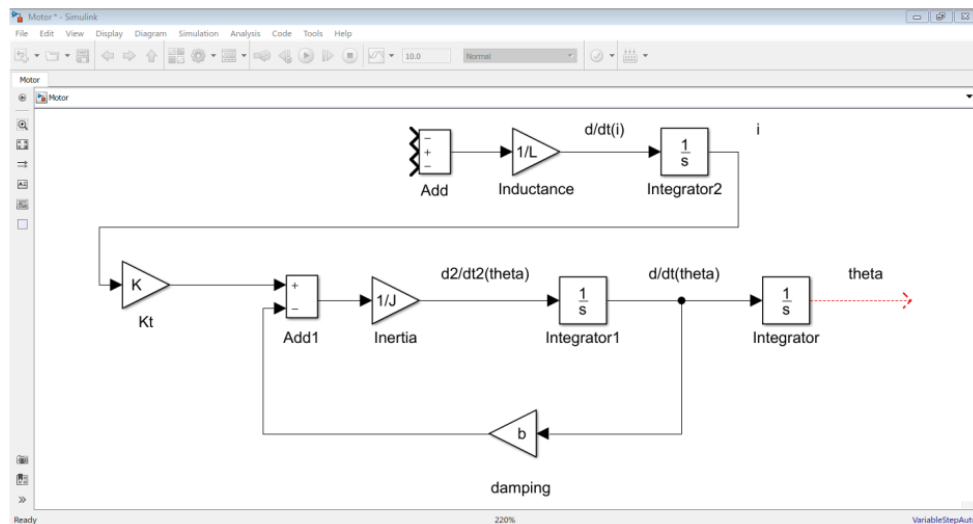
شکل 3: اضافه کردن بهره و جمع‌کننده به مدل

در ادامه گشتاورها (گشتاور میراکننده و گشتاور آرمیچر) را به مدل اضافه می‌کنیم. در ابتدا گشتاور میراکننده را به مدل اضافه می‌کنیم:

- بلوک بهره جدیدی را به مدل اضافه کنید و آن را زیر بلوک بهره Inertia قرار دهید. مقدار بهره را b گذاشته، آن را $damping$ نام‌گذاری کنید. سپس بلوک بهره را با نگه داشتن $Ctrl+R$ چرخانده و مطابق شکل 4 آن را در مدل قرار دهید. از $d/dt(\theta)$ به ورودی بهره میراکننده، خطی را رسم کنید.
- خروجی بهره میراکننده را به قسمت منفی جمع‌کننده گشتاور متصل کنید.

در ادامه گشتاور ناشی از آرمیچر را به مدل اضافه می‌کنیم:

- بلوک بهره جدیدی را به سیستم اضافه کنید. ورودی آن را به خروجی انتگرال‌گیر جریان و خروجی آن را به جمع‌کننده گشتاور متصل کنید.
- مقدار بهره بلوک K را K_t و آن را K_t نام‌گذاری کنید که نشان‌دهنده ثابت گشتاور تولیدی آرمیچر می‌باشد.



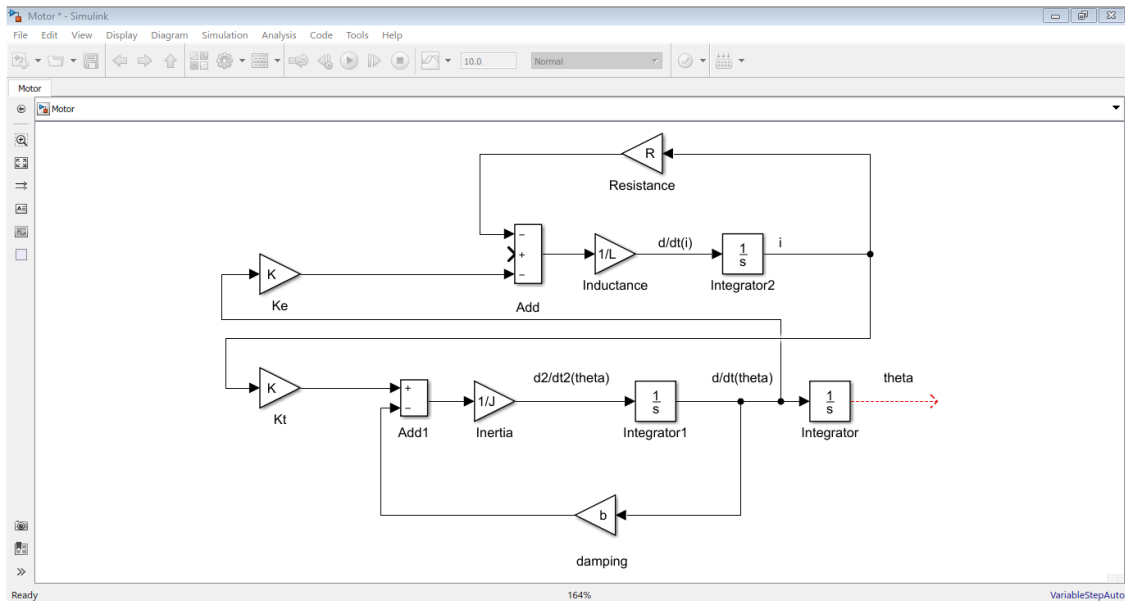
شکل 4: اضافه کردن گشتاور میراکننده و گشتاور آرمیچر

در ادامه ولتاژهای ظاهرشده در معادله KVL را به مدل اضافه می‌کنیم. ابتدا افت ولتاژ ناشی از مقاومت آرمیچر را طی مراحل زیر به مدل اضافه می‌کنیم:

- بلوک بهره جدیدی را به سیستم اضافه کنید و آن را بالای بلوک بهره اندوکتانس قرار داده و جهت آن را عوض کنید.
- مقدار آن را R گذاشته و آن را $Resistance$ نام‌گذاری کنید.
- خروجی انتگرال‌گیر جریان را به ورودی بلوک بهره مقاومت متصل کنید.
- خروجی بلوک بهره مقاومت را به قسمت منفی جمع‌کننده ولتاژ متصل کنید.

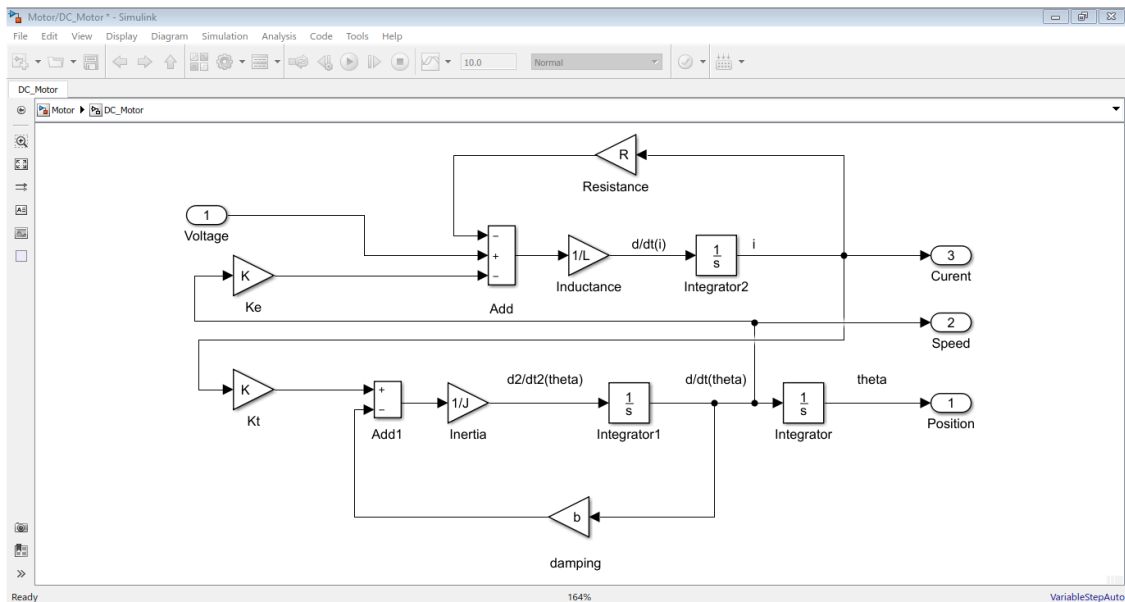
در ادامه نیروی ضد محرکه القایی آرمیچر را به مدل اضافه می‌کنیم:

- بلوک بهره جدیدی را به مدار اضافه کنید. مقدار آن را K (ثابت emf) گذاشته و آن را K_e نام‌گذاری کنید.
- خروجی بلوک بهره emf را به قسمت منفی جمع‌کننده ولتاژ متصل کنید. ورودی آن را با خط به $d/dt(\theta)$ متصل کنید.



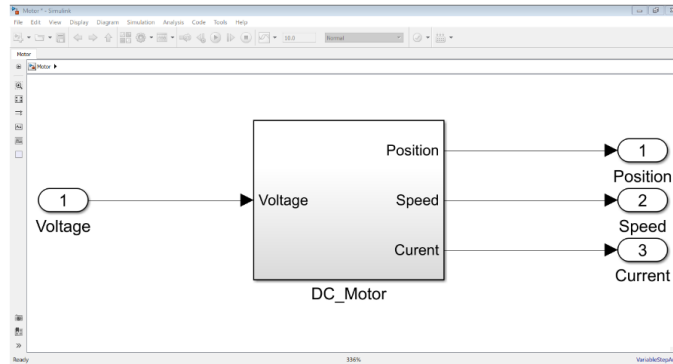
شکل 5: اضافه کردن ولتاژهای حلقه KVL به مدل

اکنون مدل ساخته شده و کافی است ولتاژ آرمیچر را به عنوان ورودی و جریان آرمیچر، موقعیت و سرعت موتور را به عنوان خروجی‌ها به مدل اضافه کنیم. برای این کار پورت In1 و سه پورت Out1 را از قسمت Simulink/Sources و قسمت Simulink/Sinks به مدل اضافه کنید. ورودی In1 را voltage و پورت‌های out1 را به موقعیت، سرعت موتور و جریان آرمیچر متصل و آنها را مطابق شکل 6 نام‌گذاری کنید.



شکل 6: مدل موتور DC در محیط MATLAB/Simulink

در آخر برای نشان دادن مدل کامل شده موتور به عنوان یک زیرسیستم، تمام مدل را انتخاب کرده و با کلیک راست گزینه Create Subsystem From Selection، زیرسیستم مدل را بسازید و آن را DC_Motor نام‌گذاری کنید.



شکل 7: زیرسیستم موتور DC

پارامترهای مدل ساخته شده را با استفاده از جدول 1 در MATLAB/Workspace وارد کنید، سپس ولتاژ ورودی آرمیچر را یک ولت انتخاب کنید و مدل ساخته شده را اجرا کنید. شکل موجهای جریان آرمیچر، سرعت موتور و موقعیت آن را در محیط MATLAB/Workspace ترسیم و ذخیره کنید.

جدول 1: پارامترهای فیزیکی موتور DC

J	مجموعه ممان اینرسی روی محور موتور	3.2284e-5 Kg.m ²
B	ضریب اصطکاک ویسکوزیته موتور	3.5077e-6 N.m/(rad/s)
K _e	ثابت ولتاژ القایی آرمیچر	0.0274 V/(rad/s)
K _t	ثابت گشتاور	0.0274 N.m/A
R _a	مقاومت مدار آرمیچر	4 Ω
L _a	اندوکتانس سیم‌پیچ آرمیچر	2.75e-6 H

بخش سوم) شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل در محیط MATLAB/Editor(mFile)

در ابتدا با استفاده از دستور edit در Command Window نرم‌افزار MATLAB یک mFile خالی ایجاد کنید و سپس سیستم‌های زیر را پیاده‌سازی کنید. برای هر یک از سیستم‌ها مراحل خواسته شده را انجام دهید.

- شبیه‌سازی به کمک تابع تبدیل

با استفاده از روابط به دست آمده برای موتور DC توابع تبدیل سرعت و موقعیت موتور DC را نسبت به ولتاژ اعمالی به دست آورید. سپس پاسخ هر یک از توابع را به ورودی پله واحد محاسبه و ترسیم نمایید. نتایج را با شبیه‌سازی Simulink در نرم‌افزار MATLAB (بخش دوم) مقایسه کنید.

- شبیه‌سازی به کمک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = -x^2 e^{-0.1t} \sin(t) + 10e^{-5t}; \quad x(0) = 0$$

برای حل آن در محیط MATLAB/Editor(mFile) می‌توان از کد زیر استفاده کرد. دقت کنید که در این قسمت solver(Ode45) برای شبیه‌سازی انتخاب شده است.

```
clear all; close all; clc
Func = @(t, x) [-x(1) ^ 2 * exp(-0.1 * t) * sin(t) + 10 * exp(-5 * t)];
ts = 0:0.01:50;
x0 = 0;
[t, x] = ode45(Func, ts, x0);
plot(t, x, 'linewidth', 2);
xlabel('Time [sec]')
ylabel('Amplitude')
title('x(t)')
```

حال معادلات موتور DC را با استفاده از الگوی بالا با در نظر گرفتن ولتاژ یک ولت به عنوان ورودی، موقعیت، سرعت و جریان آرمیچر به عنوان خروجی و شرایط اولیه صفر و مدت زمان پنج ثانیه حل نمایید.

بخش چهارم) مدل کردن موتور DC با استفاده از بخش‌های مختلف Simscape

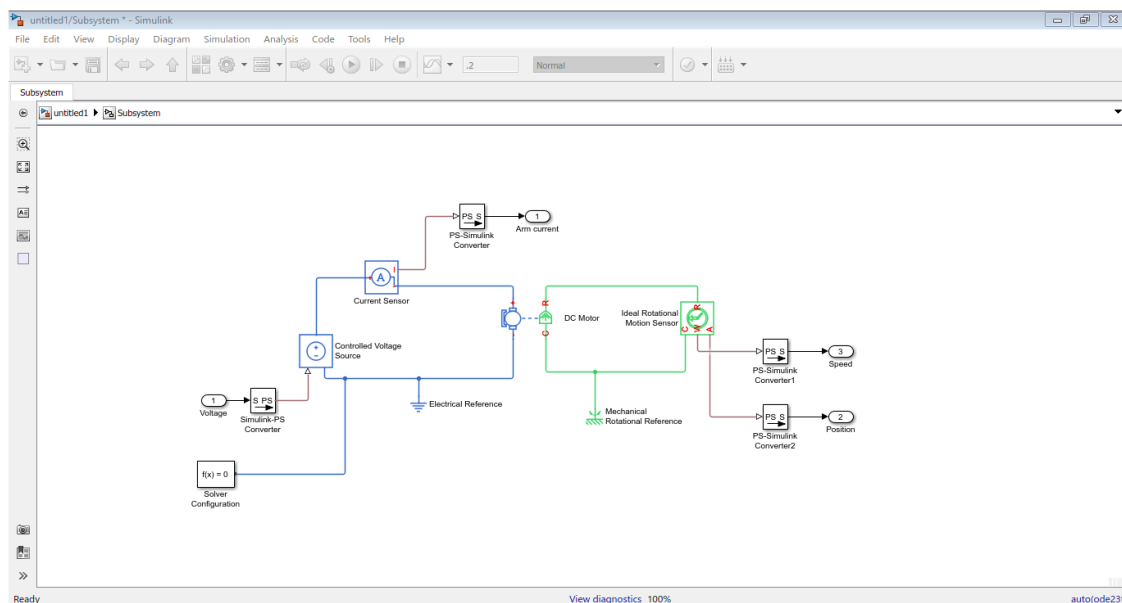
در این بخش، مدل موتور DC را با استفاده از بلوک‌های فیزیکی موجود در کتابخانه Simscape از محیط Simulink خواهیم ساخت. بلوک‌های موجود در کتابخانه Simscape نشان‌دهنده بلوک‌های فیزیکی واقعی سیستم هستند. بنابراین، می‌توان سیستم‌های پیچیده را بدون محاسبه معادلات ریاضی حاکم بر آن ساخت. برای ساخت مدل موتور DC به کمک Simscape، ابتدا مدل جدیدی را انتخاب کنید و سپس بلوک‌های زیر را به آن اضافه کنید:

- بلوک موتور DC از Simscape/SimElectronics/Actuator library
- بلوک حسگر جریان از Simscape/Foundation Library/Electrical/Electrical Sensors library
- بلوک منبع ولتاژ کنترل شده از Simscape/Foundation Library/Electrical/Electrical Sources library
- سه عدد بلوک PS-Simulink Converter، یک عدد بلوک Simulink-PS Converter و یک عدد بلوک Solver Configuration از Simscape/Utilities library
- بلوک مرجع الکتریکی از Simscape/Foundation Library/Electrical/Electrical Elements library
- بلوک حسگر ایده‌آل حرکت دورانی از Simscape/Foundation Library/Mechanical/Mechanical Sensors library
- بلوک مرجع مکانیکی/دورانی از Simscape/Foundation Library/Mechanical/Rotational Elements library
- سه عدد بلوک out1 و یک عدد بلوک In1 از Simulink/Ports & Subsystems library

در توضیح بلوک‌های به کار رفته داریم:

- مدل موتور DC انتخاب شده، هر دو قسمت الکتریکی و مکانیکی موتور را مدل می‌کند. با دو بار کلیک بر روی مدل موتور، می‌توان پارامترهای موتور را وارد کرد.
- سنسور حسگر ایده‌آل دورانی، مدل‌کننده ابزاری جهت اندازه‌گیری اختلاف زاویه و سرعت دورانی بین دو نقطه است. در این آزمایش با استفاده از این بلوک اختلاف فاز و سرعت شفت موتور را نسبت به مرجع مکانیکی اندازه‌گیری می‌کنیم.
- بلوک سنسور جریان، حسگر دیگری است که جهت اندازه‌گیری جریان مدار آرمیچر استفاده می‌شود.
- PS-Simulink Converter مبدل سیگنال فیزیکی به ریاضیاتی می‌باشد. سیگنال‌های تولید شده در محیط Simscape، سیگنال‌های فیزیکی می‌باشند و برای اتصال آنها به بلوک‌های محیط Simulink، نیاز به مبدل سیگنال فیزیکی به ریاضیاتی می‌باشد. به طور مشابه Simulink-PS Converter مبدل سیگنال ریاضیاتی به سیگنال فیزیکی می‌باشد.
- بلوک Solver Configuration جزئیات حل‌کننده عددی شبیه‌سازی Simscape را مشخص می‌کند. در این آزمایش مقادیر آن را تغییر نمی‌دهیم.

در ادامه بلوک‌های معرفی شده را مطابق شکل 8 به هم متصل کنید و پارامترهای سیستم را مطابق جدول 1 تعریف کنید. مشابه قسمت قبل، کل مدل ساخته شده را به یک زیر سیستم تبدیل کرده و سیگنال‌های جریان آرمیچر، سرعت و موقعیت موتور را ترسیم کنید و با نتایج حاصل از مدل سیستم در Simulink مقایسه کنید.



شکل 8: مدل موتور DC ساخته شده با Simscape

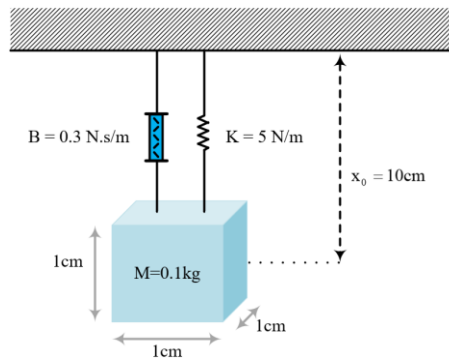
بخش پنجم) کار با SimMechanics

یکی از بخش‌های مدل‌سازی فیزیکی در نرم‌افزار MATLAB بخش SimMechanics آن می‌باشد که یکی از اهداف اصلی آن طراحی مهندسی و شبیه‌سازی سیستم‌های مکانیکی می‌باشد. سیستم‌هایی که توسط قیود مختلف (تحت قوانین دینامیک نیوتنی) و تحت نیروها و گشتاورهای مختلف می‌باشند. همچنین به کمک SimMechanics می‌توان حرکات خطی و چرخش را در فضای سه بعدی شبیه‌سازی کرد. علاوه بر این، SimMechanics امکان تعریف اجسام مختلف، خصوصیات جرم، امکان حرکت، قیود سینماتیکی، سیستم‌های مختصات و سایر خصوصیات لازمه سیستم‌های دینامیک را نیز می‌دهد که این سیستم‌ها به راحتی همانند مدل‌های Simulink توسط بلوک دیاگرام‌ها به یکدیگر متصل و نمایش داده می‌شوند.

نیازمندی‌های آزمایش: به منظور اجرای SimMechanics شما نیاز به داشتن محصولات «نرم‌افزار MATLAB حداقل نسخه 6.5 و Simulink حداقل نسخه 5 و جعبه ابزار Virtual Reality نسخه 3 برای نمایش شبیه‌سازی مدل دینامیکی در SimMechanics» دارید.

• سیستم مکانیکی شکل 9 را در محیط SimMechanics نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی کنید. با کمک مدل شبیه‌سازی شده نقطه تعادل فنر را به عنوان خروجی مدل بخوانید. نتیجه حاصل را با نقطه تعادل به دست آمده از نتایج تئوری مقایسه کنید. پارامترهای سیستم شکل 9 عبارتند از:

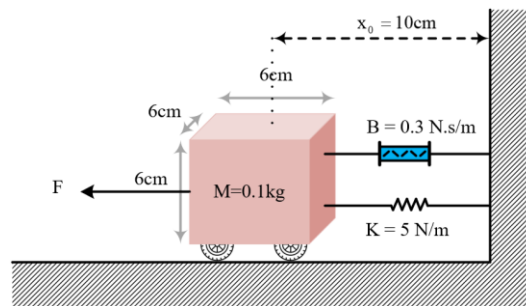
- جرم جسم: 0.1kg
- ضریب سختی فنر: 5N/m
- ضریب میرایی میراکننده: 0.3N/(m/s)
- طول حالت آزاد فنر:
 - 10cm
 - 5cm



شکل 9: سیستم جرم و فنر

- سیستم مکانیکی شکل 10 را در محیط SimMechanics نرم افزار MATLAB شبیه سازی کنید. با کمک مدل شبیه سازی شده نقطه تعادل فنر را به عنوان خروجی مدل بخوانید. نتیجه حاصل را با نقطه تعادل به دست آمده از نتایج تئوری مقایسه کنید. پارامترهای سیستم شکل 10 عبارتند از:

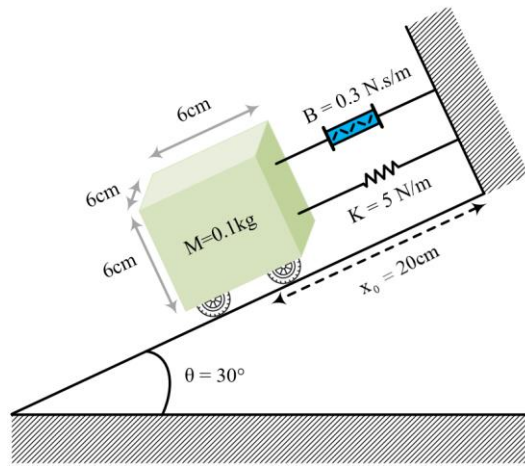
- جرم جسم: 0.1kg
- ضریب سختی فنر: 5N/m
- ضریب میرایی میراکننده: 0.3N/(m/s)
- طول حالت آزاد فنر: 10cm
- نیروی اعمالی به جسم: 1N



شکل 10: سیستم جرم و فنر بر روی سطح صاف

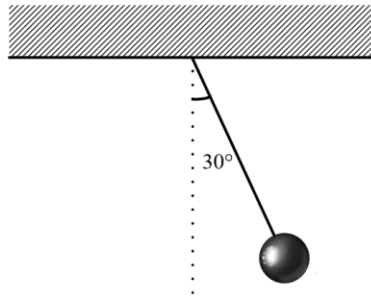
- سیستم مکانیکی شکل 11 را در محیط SimMechanics نرم افزار MATLAB شبیه سازی کنید. با کمک مدل شبیه سازی شده نقطه تعادل فنر را به عنوان خروجی مدل بخوانید. نتیجه حاصل را با نقطه تعادل به دست آمده از نتایج تئوری مقایسه کنید. پارامترهای سیستم شکل 11 عبارتند از:

- جرم جسم: 0.1kg
- ضریب سختی فنر: 5N/m
- ضریب میرایی میراکننده: 0.3N/(m/s)
- زاویه سطح شیب دار: 30° درجه
- طول حالت آزاد فنر: 15cm



شکل 11: سیستم جرم و فنر بر روی سطح شیب‌دار

- در این بخش لازم است با استفاده از مفاصل، اجسام، محرک‌ها و سایر امکانات موجود در SimMechanics یک پاندول را شبیه‌سازی کنید. با توجه به آموخته‌های خود در این آزمایش پاندول را شبیه‌سازی نمایید. سپس زاویه پاندول شبیه‌سازی شده را محاسبه و مدل محاسبه‌شده را در محیط Simulink پیاده‌سازی کنید. پاسخ مدل پیاده‌سازی شده در Simulink را با نتایج حاصل از شبیه‌سازی SimMechanics مقایسه کنید. آیا پاسخ مدل SimMechanics با مدل شبیه‌سازی شده در Simulink یکسان است؟ نتایج به دست آمده را تحلیل کنید. سپس یک گشتاور خارجی در مفصل در نظر بگیرید و آنگاه به کمک این گشتاور پاندول را در زاویه 30 درجه (نسبت به محور عمودی) نگاه دارید. برای این امر کنترل‌کننده‌ای بایست طراحی شود. با روش‌های طراحی کنترل‌کننده آشنا شده‌اید ولی در اینجا ضرایب این کنترل‌کننده را با استفاده از PID Tune در بلوک کنترل‌کننده PID و با در نظر گرفتن شرایط زیر به نحو مطلوبی تنظیم نمایید.
 - گشتاور غیر منطقی و بسیار بزرگ در مفاصل غیر قابل قبول است.
 - ضرایب بسیار بزرگ برای کنترل‌کننده‌های تناسبی، مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر غیر قابل قبول است.
- همین کار را برای پاندول وارونه نیز انجام دهید و گشتاور لازم در دو حالت را با هم مقایسه کنید.



شکل 12: شماتیک پاندول تکی

- طول میله: 24cm
- شعاع میله: 1cm
- چگالی میله: 2700 kg/m^3
- شعاع گوی: 6cm
- چگالی گوی: 7800 kg/m^3
- زاویه اولیه پاندول: 75 درجه