Abitur 2022 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \frac{2x^2}{x^2 - 9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

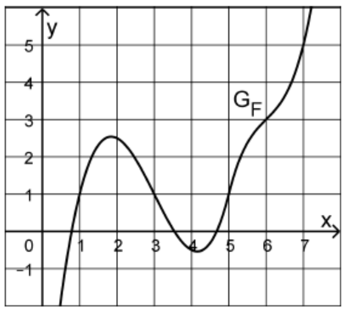


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{dx}$.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto \ln(2x - 3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

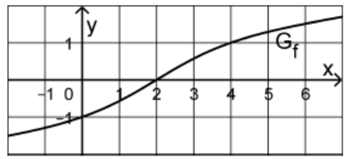


Abb. 2

Betrachtet wird die Funktion $g : x \mapsto \ln\left(f(x)\right)$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

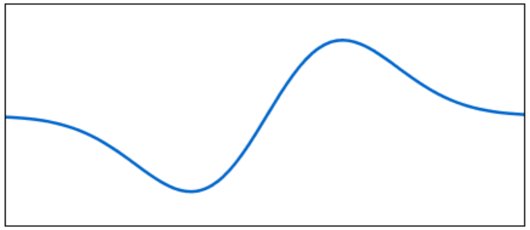


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$.

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$)

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt bekanntlich $\int\limits_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)}\ \mathrm{dx} = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int\limits_0^1 f(x)\ \mathrm{dx}$.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt $F(w) - F(0) \approx \int\limits_0^{2022} f(x)\ dx$.

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2:

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.
II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

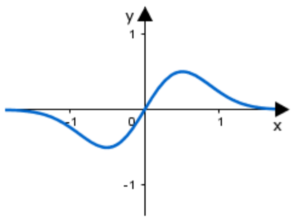


Abb. 2

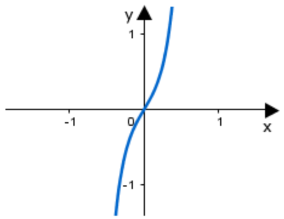


Abb. 3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil B 2f (3 BE)

Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade.
Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.

Teilaufgabe Teil B 2g (6 BE)

Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v|f_a(v))$ des Graphen von f_a, der Punkt $\left(0|\frac{2}{v}\right)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v|0)$ die Eckpunkte eines Vierecks.
Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \frac{2x^2}{x^2 - 9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Definitionsbereich bestimmen

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x^2 - 9$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \qquad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$$

Asymptoten bestimmen

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{2x^2}^{\to \pm\infty}}{\underbrace{x^2 - 9}_{\to \infty}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad y = 2 \qquad \text{waagerechte Asymptote}$$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

Erste Ableitung bilden: $g'(x)$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 2x^2$ und $v(x) = x^2 - 9$.
Dann ist $u'(x) = 4x$ und $v'(x) = 2x$.

$$g'(x) = \frac{4x \cdot (x^2-9) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{4x^3 - 36x - 4x^3}{(x^2-9)^2} = \frac{-36x}{(x^2-9)^2}$$

Waagerechte Tangenten

Erste Ableitung gleich Null setzen: $g'(x) = 0$

Erläuterung: *Waagerechte Tangente*

Die Steigung einer waagerechten Tangente ist gleich Null.

$$\frac{-36x}{(x^2-9)^2} = 0$$

$-36x = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow$ es gibt nur einen Punkt

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

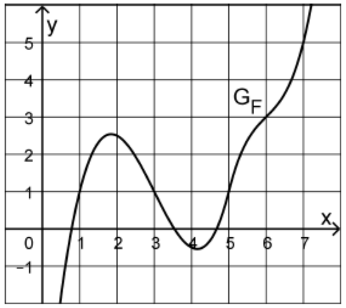


Abb. 1

Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Bestimmtes Integral

$$\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^7 = F(7) - F(1) \approx 5 - 1 = 4$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Funktionswerte $F(1)$ und $F(7)$ können am Graphen von F in Abb. 1 abgelesen werden.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Stammfunktion

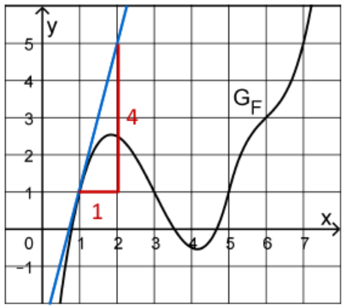


Abb. 1

> Erläuterung: *Stammfunktion*
>
> Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$
>
> Der Wert von $F'(1)$ entspricht der Steigung des Graphen von F an der Stelle $x = 1$. In Abbildung 1 wird ein Steigungsdreieck eingezeichnet und der Wert abgelesen.

$f(1) = F'(1) \approx 4$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto \ln(2x-3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3a

Nullstellen einer Funktion

$h(x) = \ln(2x-3)$

$\ln(2x-3) = 0 \qquad | \; e^x$

$2x - 3 = 1$

$2x = 4$

$\Rightarrow \quad x^N = 2$

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$h'(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2 = \frac{2}{2x-3}$$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel:
>
> $f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
>
> Kettenregel für Logarithmusfunktionen:
>
> $g(x) = \ln(h(x)) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{h(x)} \cdot h'(x)$
>
> Hier ist $h(x) = 2x - 3$.
> Dann ist $h'(x) = 2$.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

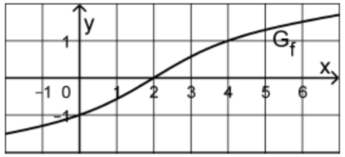


Abb. 2

Betrachtet wird die Funktion $g : x \mapsto \ln\,(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 3b

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = \ln\,(f(x))$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> $g(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(f(x))$.
>
> Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert. Somit gilt für die Argumentfunktion: $f(x) > 0$.

$f(x) > 0$ für $x \in]2; +\infty[$

$\Rightarrow \quad D_g =]2; +\infty[$

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel:
>
> $$h(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$
>
> Kettenregel für Logarithmusfunktionen:
>
> $$g(x) = \ln(f(x)) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$g'(x) = f'(x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = f'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4$$

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4a

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel für Exponentialfunktionen:
>
> $$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$
>
> In diesem Fall ist $g(x) = -x$ und $g'(x) = -1$.

$f_a'(x) = a \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -a \cdot e^{-x}$

$f_a'(0) = -a \cdot \underbrace{e^0}_{1} = -a$

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 4b

Tangentengleichung ermitteln

$f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$

$f_a'(x) = -a \cdot e^{-x}$

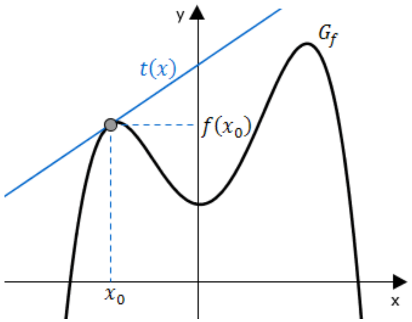
$f_a(0) = a + 3$

$f_a'(0) = -a$

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung:

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Hier ist $x_0 = 0$.

$t: y = (x - 0) \cdot f_a'(0) + f_a(0)$

$t: y = -a\,x + a + 3$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Tangentensteigung soll positiv sein.

$-a > 0 \quad \Rightarrow \quad a < 0$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der x-Achse*

Schnittpunkt mit der x-Achse bedeutet: $y = 0$

$-a\,x + a + 3 = 0$

$-a\,x = -a - 3 \qquad |:(-a) \qquad (a \neq 0)$

$x = \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a}$

Erläuterung:

Die x-Koordinate des Schnittpunkts soll größer sein als $\frac{1}{2}$.

$1 + \frac{3}{a} > \frac{1}{2} \qquad |-1$

$\frac{3}{a} > -\frac{1}{2} \qquad |\cdot a \qquad (a < 0)$

(da die Ungleichung mit einer negative Zahl multipliziert wird, ändert sich das Relationszeichen)

$3 < -\frac{1}{2}a \qquad |\cdot(-2)$

$-6 > a$

$a < -6$

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

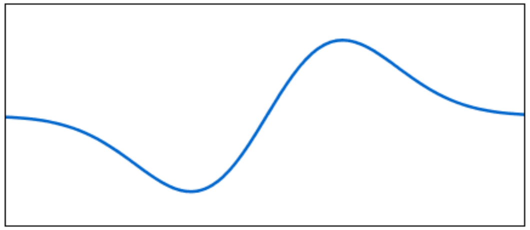


Abb. 1

Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Symmetrieverhalten einer Funktion

$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

> Erläuterung: *Symmetrieverhalten*
>
> G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

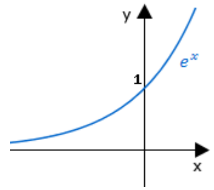
$f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} = -f(x)$

Nullstellen einer Funktion

Ansatz: $f(x) = 0$

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz, um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$0 = x \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0}$

> Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*
>
> 
>
>
> Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

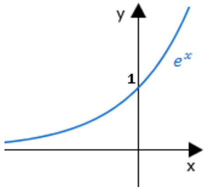
$\Rightarrow \quad x = 0$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}^{\to-\infty}}}_{\to 0} = 0$$

Erläuterung: *Exponentialfunktion*

Graph der Exponentialfunktion e^x:



Für $x \to +\infty$ geht die Funktion $-\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$ (Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel) gegen $-\infty$.
Die Exponentialfunktion wiederum geht gegen 0 für $x \to -\infty$.

Teilaufgabe Teil B 1b (2 BE)

Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$.

$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \cdot (-x)$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} - x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$ wird ausgeklammert.

$f'(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

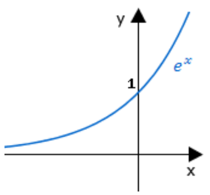
Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Monotonieverhalten einer Funktion

$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$f'(x) = (1-x^2) \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0} > 0$ (s. Teilaufgabe Teil B 1b)

Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ untersuchen:

Erläuterung: *Parabel*

Der Graph der Funktion $1-x^2$ entspricht einer nach unten geöffneten Parabel mit Nullstellen -1 und 1. Zwischen den Nullstellen nimmt die Parabel nur positive Werte ein.

$f'(x) = \underbrace{(1-x^2)}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0} > 0$ für $x \in]-1;1[$

$f'(x) = \underbrace{(1-x^2)}_{<0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0} < 0$ für $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton steigend.

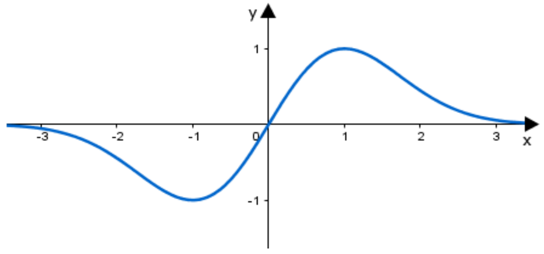
Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x \in [a;b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow$ G_f ist für $x \in [-1;1]$ streng monoton steigend

$\Rightarrow$ G_f ist für $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ streng monoton fallend

Skizze

$f(1) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$



Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt bekanntlich $\int\limits_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)}\, \mathrm{dx} = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int\limits_0^1 f(x)\, \mathrm{dx}$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1d

Bestimmtes Integral

$$\int\limits_0^1 f(x)\, \mathrm{dx} = \int\limits_0^1 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\, \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -x$$

Damit der Integrand $x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$ die Form $g'(x) \cdot e^{g(x)}$ besitzt, muss dieser noch mit der Zahl -1 multipliziert werden. Damit die Funktion dadurch aber nicht verändert wird, multipliziert man zwei Mal mit der Zahl -1, da $(-1) \cdot (-1) = 1$.

$$\int_0^1 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \, \mathrm{dx} = \int_0^1 (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \, \mathrm{dx}$$

Eine -1 wird aus dem Integral herausgezogen, die anderen bleibt im Integranden:

$$\int_0^1 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \, \mathrm{dx} = (-1) \cdot \int_0^1 (-1) \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \, \mathrm{dx}$$

Dadurch hat nun der Integrand die gewünschte Form und die Integral-Regel aus der Angabe kann angewendet werden.

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{dx} = -\int_0^1 (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \, \mathrm{dx}$$

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{dx} = -\left[e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \right]_0^1$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{dx} = -e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} = -e^0 + e^{\frac{1}{2}} = -1 + e^{\frac{1}{2}}$$

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt $F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x)\ dx$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1e

Bestimmtes Integral

$$F(w) - F(0) = \int_0^w f(x) \, \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = [\,F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Für jede reelle Zahl $w > 2022$ schließen der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = w$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt ungefähr mit dem der Fläche übereinstimmt, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2022$.

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und w, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_0^w f(x) \, \mathrm{dx}$$

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt (1|1) enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Parameterwerte ermitteln

$f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\,x^2+\frac{1}{2}}$

> Erläuterung: *Punktkoordinaten*
>
> Verläuft der Graph einer Funktion d durch einen Punkt P, so erfüllen seine Koordinaten die Funktionsgleichung.

Es soll gelten: $f_a(1) = 1$

$1 \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot 1^2+\frac{1}{2}} = 1$

$e^{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}} = 1 \qquad | \ln$

> Erläuterung: *Logarithmieren*
>
> Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}} = 1$ angewendet.
>
> $\ln\left(e^{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}\right) = \ln 1$
>
> Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:
>
> $\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$
>
> Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:
>
> $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 0$

$$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 0$$

$\Rightarrow \quad a = 1$

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Steigung einer linearen Funktion

$f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\,x^2+\frac{1}{2}}$

$f_0(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2+\frac{1}{2}} = x \cdot e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \cdot x$

$m = \sqrt{e}$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0|0)$

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2:

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2c

Eigenschaften einer Funktion

$f_a(0) = 0$: alle Graphen der Schar verlaufen durch den Ursprung

$f_a'(0) = f_0'(0)$: alle Graphen der Schar haben im Ursprung dieselbe Steigung ($\sqrt{e}$, s. Teilaufgabe Teil B 2b)

$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2$ oder $x = 0$: Die Graphen der Funktionen der Schar haben nur den Ursprung als gemeinsamen Punkt.

Erläuterung:

Die mathematische Aussage liest sich folgendermaßen:

$f_{a_1}(x)$ ist gleich $f_{a_2}(x)$ genau dann, wenn entweder a_1 gleich a_2 oder $x = 0$.

a_1 ist nur gleich a_2, wenn die beiden Parameter den gleichen Wert haben. Also haben zwei Funktion f_{a_1} und f_{a_2} nur dann gleiche Funktionswerte, wenn es sich um die eine und dieselbe Funktion handelt oder wenn $x = 0$ ist.

Anders ausgedrückt: Die Graphen der Funktionen der Schar haben nur den Ursprung als gemeinsamen Punkt.

Teilaufgabe Teil B 2d (3 BE)

Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2d

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \frac{x}{k} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{2}} = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{k^2}\cdot x^2+\frac{1}{2}} = f_{\frac{a}{k^2}}(x)$$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Streckung in y-Richtung um den Faktor k:

$$f(x) \quad \rightarrow \quad k \cdot f(x)$$

Streckung in x-Richtung um den Faktor k:

$$f(x) \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$$

Teilaufgabe Teil B 2e (3 BE)

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.
II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

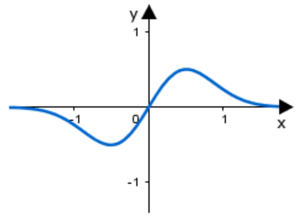


Abb. 2

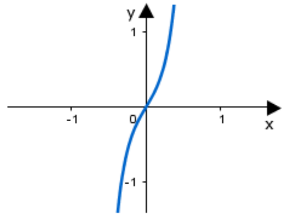


Abb. 3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2e

Quadratische Gleichung

$$a\,x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Für $a > 0$ hat die quadratische Gleichung genau zwei Lösungen, für $a \leq 0$ keine Lösung.

Gruppe I: $a > 0$
Grippe II: $a \leq 0$

Teilaufgabe Teil B 2f (3 BE)

Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade.
Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2f

Anwendungszusammenhang

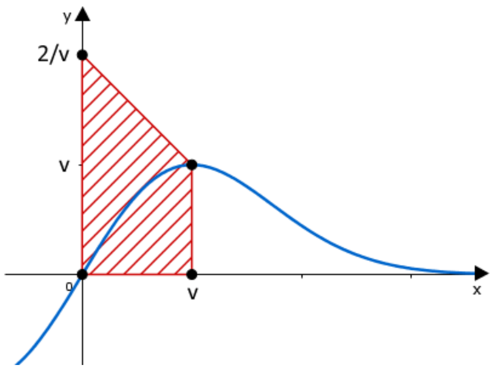
Die Funktion f_1 der Schar ist die Funktion f aus Teilaufgabe Teil B 1a. Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs und hat den Hochpunkt $(1|1)$.

Teilaufgabe Teil B 2g (6 BE)

Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v|f_a(v))$ des Graphen von f_a, der Punkt $\left(0|\frac{2}{v}\right)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v|0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.

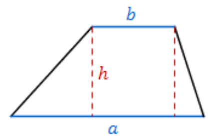
Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2g

Flächenberechnung



Für $v > 0$ gilt:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

$\frac{1}{2} \cdot \left(v + \frac{2}{v}\right) \cdot v = 49$

$\frac{1}{2}v^2 + 1 = 49$

$v^2 = 96$

Erläuterung:

Aus der Angabe zur Teilaufgabe Teil B 2e wissen wir, dass die Extremstellen von f_a mit den Lösungen der Gleichung $a\,x^2 = 1$ übereinstimmen.

Es gilt: $a \cdot v^2 = 1$

$a \cdot 96 = 1$

$a = \frac{1}{96}$