Abitur 2020 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die Punkte $P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$ und $Q(q|1|5)$ mit der reellen Zahl q, wobei Q von P genauso weit entfernt ist wie von R.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Bestimmen Sie q.

(zur Kontrolle: $q = -2$)

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunkts S der Raute PQRS. Zeigen Sie, dass PQRS kein Quadrat ist.

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E : 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0$ und die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

Erläutern Sie, warum die folgende Rechnung ein Nachweis dafür ist, dass g und E genau einen gemeinsamen Punkt haben:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = -72 \neq 0$$

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von g und E und zeigen Sie, dass $S(0,5|6,5|0)$ der Schnittpunkt von g und E ist.

Teilaufgabe Teil B c (6 BE)

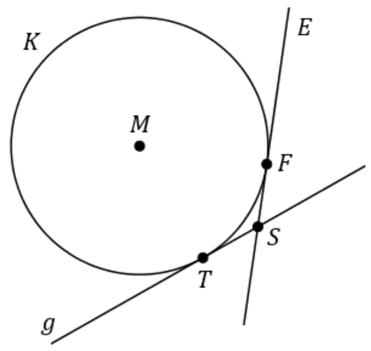
Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(-13|20|0)$ berührt die Ebene E. Bestimmen Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts F sowie den Kugelradius r.

(zur Kontrolle: $F(-5|4|2)$, $r = 18$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt $T(3|12|-2)$ berührt.

Die Punkte M, T, S und F (vgl. die Aufgaben b, c und d) liegen in einer Ebene Z. Die nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt die Gerade g, den Schnitt der Ebene E mit der Ebene Z sowie den Schnitt der Kugel K mit der Ebene Z.



Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Begründen Sie, dass das Viereck MTSF einen Umkreis besitzt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Durch Rotation des Vierecks MTSF um die Gerade MS entsteht ein Körper. Beschreiben Sie diesen Körper.
In einer Formelsammlung ist zur Berechnung des Volumens eines solchen Körpers die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot b$ zu finden. Geben Sie für den beschriebenen Körper die Strecken an, deren Längen für a bzw. b einzusetzen sind.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben sind die Punkte $P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$ und $Q(q|1|5)$ mit der reellen Zahl q, wobei Q von P genauso weit entfernt ist wie von R.

Bestimmen Sie q.

(zur Kontrolle: $q = -2$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Länge eines Vektors

$P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$, $Q(q|1|5)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} q+2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(q+2)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{q^2 + 4q + 33}$$

$$\left|\overrightarrow{RQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} q-2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(q-2)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{q^2 - 4q + 17}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{RQ}\right| \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{q^2 + 4q + 33} = \sqrt{q^2 - 4q + 17} \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 + 4q + 33 = q^2 - 4q + 17$$

$$q^2 + 4q + 33 = q^2 - 4q + 17 \qquad | -q^2 + 4q - 33$$

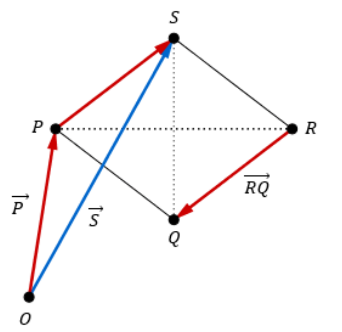
$$8q = -16 \quad \Rightarrow \quad q = -2$$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunkts S der Raute PQRS. Zeigen Sie, dass PQRS kein Quadrat ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Koordinaten von Punkten ermitteln



$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(2|1|-3)$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Komponenten der Vektoren.

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 - 4 + 15 = 11 \neq 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$\Rightarrow$ PQRS ist kein Quadrat

Teilaufgabe Teil B a (1 BE)

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0$ und die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Erläutern Sie, warum die folgende Rechnung ein Nachweis dafür ist, dass g und E genau einen gemeinsamen Punkt haben:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = -72 \neq 0$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Lagebeziehung Gerade und Ebene

Die Rechnung zeit, dass der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor der Geraden g nicht senkrecht aufeinander liegen, d.h. g verläuft nicht parallel zur Ebene, sondern schneidet sie in einem Punkt.

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von g und E und zeigen Sie, dass $S(0,5|6,5|0)$ der Schnittpunkt von g und E ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Winkel zwischen Gerade und Ebene

$$E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

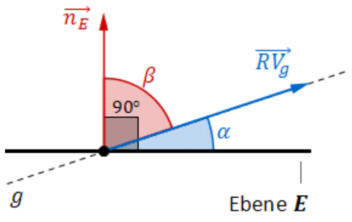
$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{v}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 11^2 + (-4)^2} = \sqrt{162} = \sqrt{2 \cdot 9^2} = 9\sqrt{2}$$

Schnittwinkel α bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*



Der **Sinus** des Winkels α zwischen einer Geraden g und einer Ebenen E ist gegeben durch:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{RV}_g} \circ \overrightarrow{n_E}\right|}{|\overrightarrow{\mathrm{RV}_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

wobei $\overrightarrow{\mathrm{RV}_g}$ der Richtungsvektor der Geraden und $\overrightarrow{n_E}$ der Normalenvektor der Ebene ist.

(Anmerkung: Man verwendet die Formel gerne ohne Betragsstriche im Zähler; also $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{RV}_g} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{\mathrm{RV}_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$.

Aber mit Betragsstrichen wird immer der spitze Winkel bestimmt.)

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|20 - 88 - 4|}{9\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{72}{81\sqrt{2}} = \frac{8}{9\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{8}{9\sqrt{2}}\right) \approx 38{,}94°$$

Lage eines Punktes

S in E und g einsetzen:

$$4 \cdot 0{,}5 - 8 \cdot 6{,}5 + 0 + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad S \in E$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} 0{,}5 = 3 + 5\lambda \\ 6{,}5 = 12 + 11\lambda \\ 0 = -2 - 4\lambda \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad S \in g$$

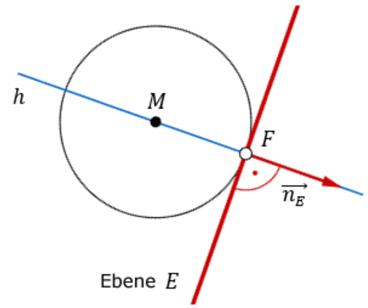
Teilaufgabe Teil B c (6 BE)

Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(-13|20|0)$ berührt die Ebene E. Bestimmen Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts F sowie den Kugelradius r.

(zur Kontrolle: $F(-5|4|2)$, $r = 18$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Lagebeziehung Ebene und Kugel



$E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0$

Lot h auf die Ebene E durch M:

$$h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}}$$

Schnitt Ebene und Gerade

Lot h mit Ebene E schneiden: $h \cap E$

> Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*
>
> Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.
>
> Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.
>
> Hier wird also h in E eingesetzt und nach μ aufgelöst.

$$\begin{aligned} h \cap E: \quad 4 \cdot (-13 + 4\mu) - 8 \cdot (20 - 8\mu) + \mu + 50 &= 0 \\ -52 + 16\,u - 160 + 64\mu + \mu + 50 &= 0 \\ 81\mu &= 162 \\ \mu &= 2 \end{aligned}$$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $\mu = 2$ wird in die Geradengleichung des Lotes h eingesetzt.

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad F(-5|4|2)$

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

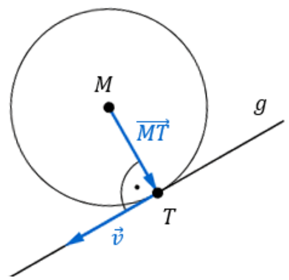
$$r = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2 + (-16)^2 + 2^2} = \sqrt{324} = 18$$

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt $T(3|12|-2)$ berührt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Lage eines Punktes



$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{T}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

$\overrightarrow{v}$ ist Richtungsvektor von g.

$T \in g$ für $\lambda = 0$

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{T} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{MT}\right| = \left|\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{324} = 18 = r$$

Lagebeziehung von Vektoren

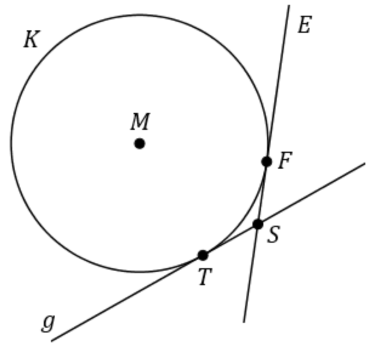
$$\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = 80 - 88 + 8 = 0$$

> Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*
>
> Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MT} \perp g$

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

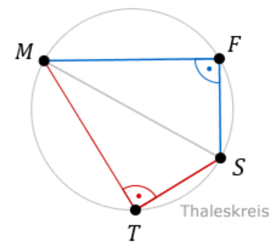
Die Punkte M, T, S und F (vgl. die Aufgaben b, c und d) liegen in einer Ebene Z. Die nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt die Gerade g, den Schnitt der Ebene E mit der Ebene Z sowie den Schnitt der Kugel K mit der Ebene Z.



Begründen Sie, dass das Viereck MTSF einen Umkreis besitzt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Lagebeziehung von Vektoren



$\overline{MF} \perp \overline{FS}$ (s. Teilaufgabe Teil B c)

$\overline{MT} \perp \overline{TS}$ (s. Teilaufgabe Teil B d)

$\Rightarrow \quad F$ und T liegen auf dem Thaleskreis über $[MS]$

Länge eines Vektors

$F(-5|4|2)$

$S(0,5|6,5|0)$

$r = \overline{MF} = \overline{MT} = 18$

$$\overrightarrow{FS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 6,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{FS}\right| = \left| \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2,5 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5,5^2 + 2,5^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

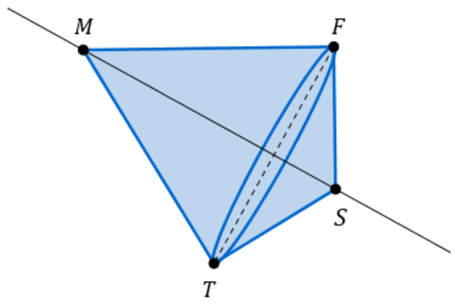
$$A_{\text{Viereck}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{FS}\right| \cdot r = 18 \cdot \frac{9}{2}\sqrt{2} = 81\sqrt{2}$$

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Durch Rotation des Vierecks MTSF um die Gerade MS entsteht ein Körper. Beschreiben Sie diesen Körper.
In einer Formelsammlung ist zur Berechnung des Volumens eines solchen Körpers die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot b$ zu finden. Geben Sie für den beschriebenen Körper die Strecken an, deren Längen für a bzw. b einzusetzen sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



Der Körper besteht aus zwei Kegeln, deren Grundkreise zusammenfallen.

a: Länge der Strecke $[FT]$

b: Länge der Strecke $[MS]$