

Sudaryatno Sudirham

Analisis
Rangkaian Listrik
Jilid 1

**(Analisis di Kawasan Waktu dan
Kawasan Fasor)**

Darpublic – Edisi April 2012

Analisis Rangkaian Listrik

Jilid 1

(Analisis di Kawasan Waktu dan Kawasan Fasor)

oleh

Sudaryatno Sudirham

Hak cipta pada penulis.

SUDIRHAM, SUDARYATNO
Analisis Rangkaian Listrik Jilid 1
(Analisis di Kawasan Waktu dan Kawasan Fasor)
Darpublic, Kanayakan D-30 Bandung, 40135
www.ee-cafe.org

Pengantar

Buku Analisis Rangkaian Listrik pernah diterbitkan pada tahun 2002. Isi buku tersebut penulis tata-ulang dan penulis sajikan dalam beberapa jilid agar lebih leluasa menambahkan materi bahasan baru. Buku jilid pertama ini berisi pokok-pokok bahasan yang diarahkan untuk membangun kemampuan melakukan analisis rangkaian listrik, ditujukan kepada para pembaca yang untuk pertama kali mempelajari rangkaian listrik. Materi bahasan mencakup analisis di kawasan waktu yang penulis sajikan dalam sebelas bab, dan analisis di kawasan fasor dalam lima bab.

Lima bab pertama dari keseluruhan materi bahasan, berisi bahasan mengenai perilaku piranti-piranti listrik maupun besaran fisis yang ada dalam rangkaian. Dengan pengertian tentang kedua model ini, bahasan masuk ke landasan-landasan untuk melakukan analisis rangkaian listrik di empat bab berikutnya, disusul dengan dua bab yang berisi contoh aplikasi analisis rangkaian. Lima bab terakhir berisi analisis rangkaian di kawasan fasor sistem satu-fasa serta pengenalan pada sistem tiga-fasa berbeban seimbang. Dengan memahami materi bahasan pada buku jilid pertama ini, pembaca akan mampu melakukan analisis rangkaian yang biasa disebut rangkaian arus searah dan rangkaian arus bolak-balik.

Mudah-mudahan sajian ini bermanfaat bagi para pembaca. Penulis mengharapkan saran dan usulan para pembaca untuk perbaikan dalam publikasi selanjutnya.

Bandung, April 2012
Wassalam,

Penulis

Darpublic
Kanayakan D-30, Bandung, 40135

**Dalam format .pdf buku ini dapat diunduh bebas di
www.buku-e.lipi.go.id dan www.ee-cafe.org**

**Selain Buku-e, di
www.ee-cafe.org
tersedia juga *open course*
dalam format .ppsx beranimasi dan .pdf**

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	v
Bab 1: Pendahuluan	1
Pengertian Rangkaian Listrik . Pengertian Analisis Rangkaian Listrik. Struktur Dasar Rangkaian, Besaran Listrik, Kondisi Operasi. Landasan Untuk Melakukan Analisis.Cakupan Bahasan	
Bab 2: Besaran Listrik Dan Model Sinyal	9
Besaran Listrik. Sinyal dan Peubah Sinyal. Bentuk Gelombang Sinyal.	
Bab 3: Pernyataan Sinyal Dan Spektrum Sinyal	37
Pernyataan-Pernyataan Gelombang Sinyal. Spektrum Sinyal.	
Bab 4: Model Piranti Pasif	57
Resistor. Kapasitor. Induktor. Induktansi Bersama. Saklar. Elemen Sebagai Model Dari Gejala. Transformator Ideal.	
Bab 5: Model Piranti Aktif, Dioda, dan OPAMP	83
Sumber Bebas. Sumber Praktis. Sumber Tak-Bebas. Dioda Ideal. Penguat Operasional (OP AMP).	
Bab 6: Hukum-Hukum Dasar	109
Hukum Ohm. Hukum Kirchhoff. Basis Analisis Rangkaian.	
Bab 7: Kaidah dan Teorema Rangkaian	121
Kaidah-Kaidah Rangkaian. Teorema Rangkaian.	
Bab 8: Metoda Analisis Dasar	143
Metoda Reduksi Rangkaian. Metoda Keluaran Satu Satuan. Metoda Superposisi. Metoda Rangkaian Ekuivalen Thévenin.	
Bab 9: Metoda Analisis Umum	159
Metoda Tegangan Simpul. Metoda Arus Mesh. Catatan Tentang Metoda Tegangan Simpul dan Arus Mesh.	

Bab 10: Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)	181
Pengukur Tegangan dan Arus Searah. Pengukuran Resistansi. Resistansi Kabel Penyalur Daya. Penyaluran Daya Melalui Saluran Udara. Diagram Satu Garis. Jaringan Distribusi Daya. Baterai. Generator Arus Searah.	
Bab 11: Rangkaian Pemroses Sinyal (Dioda, OP AMP)	201
Rangkaian Dengan Dioda. Rangkaian Dengan OP AMP. Diagram Blok. Rangkaian OP AMP Dinamik .	
Bab 12: Fasor, Impedansi, Dan Kaidah Rangkaian	227
Fasor Dan Impedansi. Resistansi, Reaktansi, Impedansi. Kaidah-Kaidah Rangkaian Impedansi.	
Bab 13: Teorema dan Metoda Analisis di Kawasan Fasor	249
Teorema Rangkaian di Kawasan Fasor. Metoda-Metoda Analisis Dasar. Metoda-Metoda Analisis Umum. Rangkaian Resonansi.	
Bab 14: Analisis Daya	267
Umum. Tinjauan Daya di Kawasan waktu : Daya Rata-Rata dan Daya Reaktif. Tinjauan Daya di Kawasan Fasor: Daya Kompleks, Faktor Daya. Alih Daya. Alih Daya Maksimum.	
Bab 15: Penyediaan Daya	289
Transformator. Penyediaan Daya dan Perbaikan Faktor Daya. Diagram Satu Garis.	
Bab 16: Pengenalan Pada Sistem Tiga-fasa	307
Sumber Tiga-fasa dan Sambungan ke Beban. Analisis Daya Pada Sistem Tiga-fasa. Diagram Satu Garis.	
Lampiran I	327
Lampiran II	331
Daftar Pustaka	341
Biodata Penulis	342
Indeks	343

BAB 1 Pendahuluan

Dua dari sekian banyak kebutuhan manusia adalah kebutuhan akan *energi* dan kebutuhan akan *informasi*. Salah satu cara yang dapat dipilih untuk memenuhi kedua kebutuhan tersebut adalah melalui teknologi elektro. Energi yang tersedia di alam tidak selalu dalam bentuk yang kita perlukan akan tetapi terkandung dalam berbagai bentuk sumber energi misalnya air terjun, batubara, sinar matahari, angin, ombak, dan lainnya. Selain itu sumber energi tersebut tidak selalu berada di tempat di mana energi tersebut dibutuhkan. Teknologi elektro melakukan konversi energi non-listrik menjadi energi listrik dan dalam bentuk listrik inilah energi dapat disalurkan dengan lebih mudah ke tempat ia diperlukan dan kemudian dikonversikan kembali ke dalam bentuk yang sesuai dengan kebutuhan, misalnya energi mekanis, panas, cahaya. Proses penyediaan energi berlangsung melalui berbagai tahapan; salah satu contoh adalah sebagai berikut:

Energi non listrik, misalnya energi kimia yang terkandung dalam bahan bakar diubah menjadi energi panas dalam *boiler* → energi panas diubah menjadi energi mekanis di turbin → energi mekanis diubah menjadi energi listrik di generator → energi listrik diubah menjadi energi listrik namun pada tingkat tegangan yang lebih tinggi di transformator → energi listrik bertegangan tinggi ditransmisikan → energi listrik bertegangan tinggi diubah menjadi energi listrik bertegangan menengah pada transformator → energi listrik didistribusikan ke pengguna, melalui jaringan tegangan menengah tiga-fasa, tegangan rendah tiga-fasa, dan tegangan rendah satu-fasa → energi listrik diubah kembali ke dalam bentuk energi yang sesuai dengan kebutuhan pengguna.

Demikian pula halnya dengan informasi. Teknologi elektro melakukan konversi berbagai bentuk informasi ke dalam bentuk sinyal listrik dan menyalurkan sinyal listrik tersebut ke tempat ia diperlukan kemudian dikonversikan kembali dalam bentuk-bentuk yang dapat ditangkap oleh indera manusia ataupun dimanfaatkan

untuk suatu keperluan tertentu, misalnya pengendalian. Dengan mudah kita dapat mengetahui apa yang sedang terjadi di belahan bumi yang lain dalam waktu yang hampir bersamaan dengan berlangsungnya kejadian, tanpa harus beranjak dari rumah. Tidak hanya sampai di situ, satelit di luar angkasa pun dikendalikan dari bumi, dan jantung yang lemah pun dapat dibantu untuk dipacu.

1.1. Pengertian Rangkaian Listrik

Rangkaian listrik (atau rangkaian elektrik) merupakan interkoneksi berbagai *piranti* (*divais – device*) yang secara bersama melaksanakan suatu tugas tertentu. Tugas itu dapat berupa *pemrosesan energi* ataupun *pemrosesan informasi*. Melalui rangkaian listrik, *energi* maupun *informasi* dikonversikan menjadi energi listrik dan sinyal listrik, dan dalam bentuk sinyal inilah energi maupun informasi dapat disalurkan dengan lebih mudah ke tempat ia diperlukan.

Teknologi elektro telah berkembang jauh. Dalam konversi dan transmisi energi listrik misalnya, walaupun masih tetap memanfaatkan sinyal analog berbentuk sinus, namun kuantitas energi yang dikonversi dan ditransmisikan semakin besar mengikuti pertumbuhan kebutuhan. Teknologi yang dikembangkan pun mengikuti kecenderungan ini. Kemampuan peralatan semakin tinggi, alat perlindungan (proteksi) semakin ketat baik perlindungan dalam mempertahankan kinerja sistem maupun terhadap pengaruh alam. Demikian pula pertimbangan-pertimbangan ekonomi maupun kelestarian lingkungan menjadi sangat menentukan. Bahkan perkembangan teknologi di sisi penggunaan energi, baik dalam upaya mempertinggi efisiensi maupun perluasan penggunaan energi dalam mendukung perkembangan teknologi informasi, cenderung memberikan dampak kurang menguntungkan pada sistem penyaluran energi listrik; dan hal ini menimbulkan persoalan lain yaitu persoalan kualitas daya yang harus diantisipasi dan diatasi.

Kalau dalam pemrosesan energi masih digunakan sinyal analog, tidak demikian halnya dengan pemrosesan informasi. Pemanfaatan sinyal analog telah digantikan oleh sinyal-sinyal digital sehingga kualitas informasi video, audio, maupun data, menjadi sangat meningkat. Pemanfaatan sinyal digital sudah sangat meluas, mulai dari lingkungan rumah tangga sampai luar angkasa.

Walaupun terdapat perbedaan yang nyata pada bentuk sinyal dalam pemrosesan energi dan pemrosesan informasi, yaitu sinyal analog dalam pemrosesan energi dan sinyal digital dalam pemrosesan informasi, namun hakekat pemrosesan tidaklah jauh berbeda; pemrosesan itu adalah konversi ke dalam bentuk sinyal listrik, transmisi hasil konversi tersebut, dan konversi balik menjadi bentuk yang sesuai dengan kebutuhan.

Sistem pemroses energi maupun informasi, dibangun dari rangkaian-rangkaian listrik yang merupakan interkoneksi berbagai piranti. Oleh karena itu langkah pertama dalam mempelajari analisis rangkaian listrik adalah mempelajari *model sinyal* dan *model piranti*. Karena pekerjaan analisis menggunakan model-model, sedangkan model merupakan pendekatan terhadap keadaan yang sebenarnya dengan pembatasan-pembatasan tertentu, maka hasil suatu analisis harus juga difahami sebagai hasil yang berlaku dalam batas-batas tertentu pula.

1.2. Pengertian Analisis Rangkaian Listrik

Untuk mempelajari perilaku suatu rangkaian listrik kita melakukan *analisis rangkaian listrik*. Rangkaian listrik itu mungkin hanya berdimensi beberapa sentimeter, tetapi mungkin juga membentang ratusan bahkan ribuan kilometer. Dalam pekerjaan analisis, langkah pertama yang kita lakukan adalah memindahkan rangkaian listrik itu *ke atas kertas* dalam bentuk gambar; gambar itu kita sebut *diagram rangkaian*.

Suatu diagram rangkaian memperlihatkan interkoneksi berbagai piranti; piranti-piranti tersebut digambarkan dengan menggunakan *simbol piranti*. Jadi dalam suatu diagram rangkaian (yang selanjutnya kita sebut dengan singkat *rangkaiannya*), kita melihat bagaimana berbagai macam piranti saling dihubungkan.

Perilaku setiap piranti kita nyatakan dengan *model piranti*. Untuk membedakan *piranti sebagai benda nyata* dengan *modelnya*, maka model itu kita sebut *elemen rangkaian*. Sinyal listrik yang hadir dalam rangkaian, kita nyatakan sebagai *peubah rangkaian* yang tidak lain adalah *model matematis* dari sinyal-sinyal tersebut. Jadi dalam pekerjaan analisis rangkaian listrik, kita menghadapi diagram rangkaian yang memperlihatkan hubungan dari berbagai elemen, dan setiap elemen memiliki perilaku masing-masing yang kita sebut *karakteristik elemen*; besaran-fisika yang terjadi dalam rangkaian kita nyatakan dengan *peubah rangkaian (variable rangkaian)* yang merupakan *model sinyal*.

Dengan melihat hubungan elemen-elemen dan memperhatikan karakteristik tiap elemen, kita melakukan perhitungan peubah-peubah rangkaian.

Perhitungan-perhitungan tersebut mungkin berupa perhitungan untuk mencari hubungan antara peubah yang keluar dari rangkaian (kita sebut dengan singkat *keluaran*) dan peubah yang masuk ke rangkaian (kita sebut dengan singkat *masukan*); ataupun mencari besaran keluaran dari suatu rangkaian jika masukan dan karakteristik setiap elemen diketahui. Inilah pekerjaan *analisis* yang memberikan hanya *satu hasil perhitungan*, atau *jawaban tunggal*. Pekerjaan lain yang belum tercakup dalam buku ini adalah pekerjaan *perancangan*, yaitu mencari hubungan elemen-elemen jika masukan dan keluaran ditentukan. Hasil pekerjaan perancangan akan memberikan lebih dari satu jawaban dan kita harus memilih jawaban mana yang kita ambil dengan memperhitungkan tidak saja aspek teknis tetapi juga aspek lain misalnya aspek ekonomi, aspek lingkungan, dan bahkan estetika.

Telah dikatakan di atas bahwa hasil suatu analisis harus difahami sebagai hasil yang berlaku dalam batas-batas tertentu. Kita akan melihat bahwa rangkaian yang kita analisis kita anggap memiliki sifat *linier* dan kita sebut *rangkaian linier*; ia merupakan hubungan elemen-elemen rangkaian yang kita anggap memiliki karakteristik yang linier. Sifat ini sesungguhnya merupakan pendekatan terhadap sifat piranti yang dalam kenyataannya *tidak linier* namun dalam batas-batas tertentu ia bersifat *hampir linier* sehingga dalam pekerjaan analisis kita anggap ia bersifat linier.

1.3. Struktur Dasar Rangkaian, Besaran Listrik, dan Kondisi Operasi

Struktur Dasar Rangkaian. Secara umum suatu rangkaian listrik terdiri dari bagian yang aktif yaitu bagian yang memberikan daya yang kita sebut *sumber*, dan bagian yang pasif yaitu bagian yang menerima daya yang kita sebut *beban*; sumber dan beban terhubung oleh penyalur daya yang kita sebut *saluran*.

Besaran Listrik. Ada lima besaran listrik yang kita hadapi, dan dua di antaranya merupakan besaran dasar fisika yaitu *energi* dan *muatan listrik*. Namun dalam analisis rangkaian listrik, besaran listrik yang sering kita olah adalah *tegangan*, *arus*, dan *daya listrik*. Energi dihitung sebagai integral daya dalam suatu selang waktu, dan muatan dihitung sebagai integral arus dalam suatu selang waktu.

Sumber biasanya dinyatakan dengan daya, atau tegangan, atau arus yang mampu ia berikan. Beban biasa dinyatakan dengan daya atau arus yang diserap atau diperlukan, dan sering pula dinyatakan oleh nilai elemen; elemen-elemen rangkaian yang sering kita temui adalah resistor, induktor, dan kapasitor, yang akan kita pelajari lebih lanjut.

Saluran adalah penghubung antara sumber dan beban, dan pada rangkaian penyalur energi (di mana jumlah energi yang disalurkan cukup besar) ia juga menyerap daya. Oleh karena itu saluran ini dilihat oleh sumber juga menjadi beban dan daya yang diserap saluran harus pula disediakan oleh sumber. Daya yang diserap saluran merupakan susut daya dalam produksi energi listrik. Susut daya yang terjadi di saluran ini merupakan peristiwa alamiah: *sebagian energi yang dikirim oleh sumber berubah menjadi panas di saluran*. Namun jika daya yang diserap saluran tersebut cukup kecil, ia dapat diabaikan.

Dalam kenyataan, rangkaian listrik tidaklah sesederhana seperti di atas. Jaringan listrik penyalur energi perlu dilindungi dari berbagai kejadian tidak normal yang dapat menyebabkan terjadinya lonjakan arus atau lonjakan tegangan. Jaringan perlu sistem proteksi yaitu proteksi arus lebih dan proteksi tegangan lebih. Jaringan listrik juga memerlukan sistem pengendali untuk mengatur aliran energi ke beban. Pada jaringan pemroses informasi, gejala-gejala kebocoran sinyal serta gangguan sinyal baik dari dalam maupun dari luar sistem yang disebut interferensi, memerlukan perhatian tersendiri.

Pada jaringan penyalur energi, sumber mengeluarkan daya sesuai dengan permintaan beban. Pada rangkaian penyalur informasi, daya sumber terbatas; oleh karena itu alih daya dari sumber ke beban perlu diusahakan terjadi secara maksimal; alih daya ke beban akan maksimal jika tercapai *keserasian (matching)* antara sumber dan beban.

Peristiwa Transien. Kondisi operasi jaringan listrik tidak selalu mantap. Pada waktu-waktu tertentu bisa terjadi *keadaan peralihan* atau *keadaan transien*. Besar dan bentuk tegangan dan arus pada saat-saat setelah penutupan ataupun setelah pembukaan saklar tidaklah seperti keadaan setelah saklar lama tertutup atau setelah lama terbuka. Di samping itu kejadian sesaat di luar jaringan juga bisa menimbulkan keadaan transien, misalnya petir.

Suatu selang waktu diperlukan antara saat kemunculan peristiwa transien dengan saat keadaan menjadi mantap. Waktu yang diperlukan untuk mencapai keadaan akhir tersebut tergantung dari nilai-nilai elemen rangkaian. Oleh karena itu kita harus hati-hati untuk memegang peralatan listrik walaupun ia sedang tidak beroperasi; yakinkan lebih dulu apakah keadaan sudah cukup aman. Yakinkan lebih dulu bahwa peralatan listrik yang terbuka sudah tidak bertegangan, sebelum memegangnya.

1.4. Landasan Untuk Melakukan Analisis

Agar kita bisa melakukan analisis, kita perlu memahami beberapa hal yang sangat mendasar yaitu *hukum-hukum* yang berlaku dalam suatu rangkaian, *kaidah-kaidah* rangkaian, *teorema-teorema* rangkaian, serta *metoda-metoda analisis*.

Hukum-Hukum Rangkaian. Hukum-hukum rangkaian merupakan dasar untuk melakukan analisis. Ada dua hukum yang akan kita pelajari yaitu Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff. Hukum Ohm memberikan relasi linier antara arus dan tegangan resistor. Hukum Kirchhoff mencakup Hukum Arus Kirchhoff (HAK) dan Hukum Tegangan Kirchhoff (HTK). HAK menegaskan bahwa jumlah arus yang menuju suatu pencabangan rangkaian sama dengan jumlah arus yang meninggalkan pencabangan; hal ini dibuktikan oleh kenyataan bahwa tidak pernah ada penumpukan muatan di suatu pencabangan rangkaian. HTK menyatakan bahwa jumlah tegangan di suatu rangkaian tertutup sama dengan nol, dan hal ini sesuai dengan prinsip konservasi energi.

Kaidah-Kaidah Rangkaian. Kaidah rangkaian merupakan konsekuensi dari hukum-hukum rangkaian. Dengan kaidah-kaidah ini kita dapat menggantikan susunan suatu bagian rangkaian dengan susunan yang berbeda tanpa mengganggu perilaku keseluruhan rangkaian, sehingga rangkaian menjadi lebih sederhana dan lebih mudah dianalisis. Dengan

menggunakan kaidah-kaidah ini pula kita dapat melakukan perhitungan pada bentuk-bentuk bagian rangkaian tertentu secara langsung. Salah satu contoh adalah kaidah pembagi arus: untuk arus masukan tertentu, besar arus cabang-cabang rangkaian yang terhubung paralel sebanding dengan konduktansinya; hal ini adalah konsekuensi dari hukum Ohm dan HAK.

Teorema Rangkaian. Teorema rangkaian merupakan pernyataan dari sifat-sifat dasar rangkaian linier. Teorema rangkaian yang penting akan kita pelajari sesuai keperluan kita, mencakup *prinsip proporsionalitas*, *prinsip superposisi*, *teorema Thévenin*, *teorema Norton*, *teorema substitusi*, dan *teorema Tellegen*.

Prinsip proporsionalitas berlaku untuk rangkaian linier. Jika masukan suatu rangkaian adalah y_{in} dan keluarannya adalah y_o maka $y_o = Ky_{in}$ dengan K adalah nilai tetapan.

Prinsip superposisi menyatakan bahwa pada rangkaian dengan beberapa masukan, akan mempunyai keluaran yang merupakan jumlah keluaran dari masing-masing masukan jika masing-masing masukan bekerja secara sendiri-sendiri pada rangkaian tersebut.

Kita ambil contoh satu lagi yaitu teorema Thévenin. Teorema ini menyatakan bahwa jika seksi sumber suatu rangkaian (yaitu bagian rangkaian yang mungkin saja mengandung lebih dari satu sumber) bersifat linier, maka seksi sumber ini bisa digantikan oleh satu sumber yang terhubung seri dengan satu resistor ataupun impedansi; sementara itu beban boleh linier ataupun tidak linier. Teorema ini sangat memudahkan perhitungan-perhitungan rangkaian.

Metoda-Metoda Analisis. Metoda-metoda analisis dikembangkan berdasarkan teorema rangkaian beserta hukum-hukum dan kaidah rangkaian. Ada dua kelompok metoda analisis yang akan kita pelajari; yang pertama disebut *metoda analisis dasar* dan yang ke-dua disebut *metoda analisis umum*. Metoda analisis dasar terutama digunakan pada rangkaian-rangkaian sederhana, sedangkan untuk rangkaian yang agak lebih rumit kita memerlukan metoda yang lebih sistematis yaitu metoda analisis umum. Kedua metoda ini kita pelajari agar kita dapat melakukan analisis rangkaian sederhana

secara manual. Kemampuan melakukan analisis secara manual sangat diperlukan untuk dapat memahami sifat dan perilaku rangkaian.

Selain perbedaan jangkauan penggunaannya, metoda analisis dasar berbeda dari metoda analisis umum dalam hal *sentuhan* yang kita miliki atas rangkaian yang kita hadapi. Dalam menggunakan metoda analisis dasar, kita masih merasakan bahwa kita sedang mengolah perilaku rangkaian. Dalam menggunakan metoda analisis umum kita agak kehilangan *sentuhan* tersebut; sekali kita sudah mendapatkan persamaan rangkaian, maka selanjutnya kita hanya melakukan langkah-langkah matematis atas persamaan tersebut dan kita akan mendapatkan hasil analisis tanpa merasa telah menghadapi rangkaian listrik. Kehilangan sentuhan ini mendapat kompensasi berupa lebih luasnya jangkauan kerumitan rangkaian yang bisa dipecahkan dengan metoda analisis umum.

Selain dua kelompok metoda tersebut ada *metoda analisis berbantuan komputer*. Untuk rangkaian-rangkaian yang sangat rumit, analisis secara manual tidaklah efektif bahkan tidak mungkin lagi dilakukan. Untuk itu kita memerlukan bantuan komputer. Metoda ini tidak dibahas khusus dalam buku ini namun pembaca perlu mempelajarinya dengan menggunakan buku-buku lain beserta perangkat lunaknya, seperti misalnya program SPICE.

Landasan untuk melakukan analisis tersebut di atas akan kita pelajari dan setelah kita memahami landasan-landasan tersebut kita akan siap untuk melakukan analisis rangkaian. Berbagai contoh pekerjaan analisis akan kita jumpai dalam buku ini.

BAB 2 Besaran Listrik Dan Model Sinyal

Dengan mempelajari besaran listrik dan model sinyal, kita akan

- menyadari bahwa pembahasan analisis rangkaian di sini berkenaan dengan sinyal waktu kontinyu;
- memahami besaran-besaran listrik yang menjadi peubah sinyal dalam analisis rangkaian;
- memahami berbagai bentuk gelombang sinyal;
- mampu menyatakan bentuk gelombang sinyal secara grafis maupun matematis.

2.1. Besaran Listrik

Dalam kelistrikan, ada dua besaran fisika yang menjadi ***besaran dasar*** yaitu ***muatan listrik*** (selanjutnya disebut dengan singkat ***muatan***) dan ***energi listrik*** (selanjutnya disebut dengan singkat ***energi***). Muatan dan energi, merupakan konsep dasar fisika yang menjadi fondasi ilmiah dalam teknologi elektro. Namun dalam praktik, kita tidak mengolah langsung besaran dasar ini, karena kedua besaran ini tidak mudah untuk diukur. Besaran yang sering kita olah adalah yang mudah diukur yaitu arus, tegangan, dan daya.

Arus. Arus listrik dinyatakan dengan simbol i ; ia merupakan ukuran dari aliran muatan. Ia merupakan laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu. Dalam bentuk diferensial ia didefinisikan sebagai:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

Dalam sistem satuan SI, arus mempunyai satuan *ampere*, dengan singkatan A. Karena satuan muatan adalah *coulomb* dengan singkatan C, maka

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb} / \text{detik} = 1 \text{ coulomb} / \text{sekon} = 1 \text{ C/s}$$

Perlu kita ingat bahwa ada dua jenis muatan yaitu muatan *positif* dan *negatif*. Arah arus positif ditetapkan sebagai arah aliran muatan positif *netto*, mengingat bahwa aliran arus di suatu titik mungkin melibatkan kedua macam muatan tersebut.

Tegangan. Tegangan dinyatakan dengan simbol v ; ia terkait dengan perubahan energi yang dialami oleh muatan pada waktu ia berpindah dari satu titik ke titik yang lain di dalam rangkaian. Tegangan antara titik A dan titik B di suatu rangkaian *didefinisikan sebagai perubahan energi per satuan muatan*, yang dalam bentuk diferensial dapat kita tuliskan sebagai:

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (2.2)$$

Satuan tegangan adalah *volt*, dengan singkatan V. Oleh karena satuan energi adalah *joule* dengan singkatan J, maka 1 volt = 1 joule/coulomb = 1 J/C.

Daya. Daya dinyatakan dengan simbol p , didefinisikan sebagai laju perubahan energi, yang dapat kita tuliskan:

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (2.3)$$

Dari definisi ini dan definisi untuk arus (2.1) dan tegangan (2.2) kita dapatkan:

$$p = \left(\frac{dw}{dt} \right) = \left(\frac{dw}{dq} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right) = vi \quad (2.4)$$

Satuan daya adalah *watt*, dengan singkatan W. Sesuai dengan hubungan (2.3) maka 1 W = 1 J/s.

Energi. Energi dinyatakan dengan simbol w . Untuk memperoleh besar energi yang teralihkan dalam selang waktu antara t_1 dan t_2 kita melakukan integrasi daya antara t_1 dan t_2

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad (2.5)$$

Satuan energi adalah *joule*.

Muatan. Muatan dinyatakan dengan simbol q , diperoleh dengan mengintegrasi arus terhadap waktu. Jadi jumlah muatan yang dialihkan oleh arus i dalam selang waktu antara t_1 dan t_2 adalah :

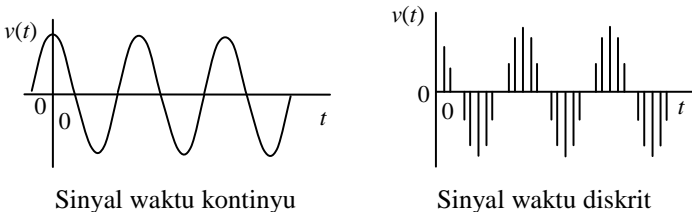
$$q = \int_{t_1}^{t_2} i dt \quad (2.6)$$

Satuan muatan adalah *coulomb*.

2.2. Peubah Sinyal dan Referensi Sinyal

Peubah Sinyal. Sebagaimana telah sebutkan di atas, dalam menangani masalah praktis, kita jarang melibatkan secara langsung kedua besaran dasar yaitu energi dan muatan. Besaran yang lebih sering kita olah adalah *arus*, *tegangan*, dan *daya*. Dalam analisis rangkaian listrik, tiga besaran ini menjadi peubah rangkaian yang kita sebut sebagai **peubah sinyal**. Kehadiran mereka dalam suatu rangkaian listrik merupakan **sinyal listrik**, dan dalam analisis rangkaian listrik kita melakukan perhitungan-perhitungan sinyal listrik ini; mereka menjadi *peubah* atau *variabel*.

Sinyal Waktu Kontinyu dan Sinyal Waktu Diskrit. Sinyal listrik pada umumnya merupakan fungsi waktu, t . Dalam teknologi elektro yang telah berkembang demikian lanjut kita mengenal dua macam bentuk sinyal listrik yaitu *sinyal waktu kontinyu* dan *sinyal waktu diskrit*. Suatu sinyal disebut sebagai sinyal waktu kontinyu (atau disebut juga *sinyal analog*) jika sinyal itu mempunyai nilai untuk setiap t dan t sendiri mengambil nilai dari satu set *bilangan riil*. Sinyal waktu diskrit adalah sinyal yang mempunyai nilai hanya pada t tertentu yaitu t_n dengan t_n mengambil nilai dari satu set *bilangan bulat*. Sebagai contoh sinyal waktu kontinyu adalah tegangan listrik di rumah kita. Sinyal waktu diskrit kita peroleh misalnya melalui *sampling* pada tegangan listrik di rumah kita. Gb.2.1. memperlihatkan kedua macam bentuk sinyal tersebut. Dalam mempelajari analisis rangkaian di buku ini, kita hanya akan menghadapi *sinyal waktu kontinyu* saja.



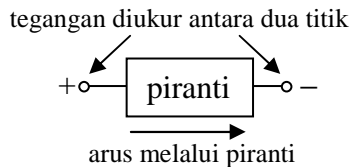
Gb.2.1. Sinyal waktu kontinyu dan sinyal waktu diskrit.

Referensi Sinyal. Arus dan tegangan mempunyai hubungan erat namun mereka juga mempunyai perbedaan yang sangat nyata. Arus merupakan ukuran besaran yang *melewati* suatu titik sedangkan tegangan adalah ukuran besaran *antara* dua titik. Jadi arus diukur di satu titik sedangkan tegangan diukur di antara dua titik.

Dalam pekerjaan analisis, arah arus dinyatakan dengan tanda anak panah yang menjadi *referensi arah positif* arus. Referensi ini tidak berarti bahwa arah arus sesungguhnya (yang mengalir pada piranti) adalah seperti ditunjukkan oleh anak panah. Arah arus sesungguhnya dapat berlawanan dengan arah anak panah dan jika demikian halnya kita katakan *arus negatif*. Dalam hal arah arus sesungguhnya sesuai dengan arah anak panah, kita katakan *arus positif*.

Pada elemen rangkaian, tanda “+” dipakai untuk menunjukkan titik yang dianggap mempunyai tegangan yang lebih tinggi dibandingkan dengan titik yang bertanda “-”, dan ini menjadi referensi tegangan. Di sinipun titik yang bertanda “+” pada keadaan sesungguhnya tidak selalu bertegangan lebih tinggi dibandingkan dengan titik yang bertanda “-“. Tetapi jika benar demikian keadaannya kita katakan bahwa tegangan pada piranti adalah positif, dan jika sebaliknya maka tegangan itu negatif.

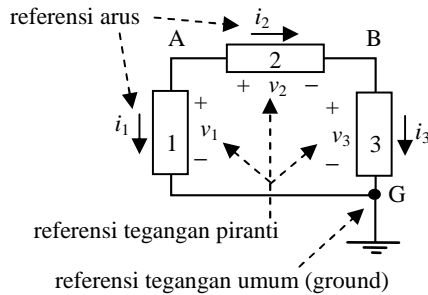
Konvensi Pasif. Dalam menentukan referensi tegangan dan arus kita mengikuti *konvensi pasif* yaitu arah arus digambarkan *masuk ke elemen* pada titik yang bertanda “+”. Konvensi ini disebut konvensi pasif sebab dalam konvensi ini *piranti menyerap daya*. Perhatikan Gb.2.2. Dengan konvensi ini, jika arus dan tegangan memiliki tanda yang sama, daya bernilai positif. Jika arus dan tegangan berlawanan tanda maka daya bernilai negatif.



Gb.2.2. Tegangan dan arus pada satu piranti.

Daya positif berarti elemen menyerap daya; daya negatif berarti elemen mengeluarkan daya

Selain referensi arus dan tegangan pada elemen, untuk menyatakan besar tegangan di berbagai titik pada suatu rangkaian kita menetapkan titik referensi umum yang kita namakan *titik pentanahan* atau *titik nol* atau *ground*. Tegangan di titik-titik lain pada rangkaian dihitung terhadap titik nol ini. Perhatikan penjelasan pada Gb.2.3.



Gb.2.3. Referensi arus dan tegangan

Tegangan di titik A dapat kita sebut sebagai v_A yaitu tegangan titik A terhadap titik referensi umum G. Demikian pula v_B adalah tegangan titik B terhadap G. Beda tegangan antara titik A dan B adalah $v_A - v_B = v_{AB} = v_2$.

Isilah kotak-kotak yang kosong pada tabel berikut ini.

Piranti	v [V]	i [A]	p [W]	menerima/memberi daya
A	12	5		
B	24	-3		
C	12		72	
D		-4	96	
E	24		72	

CONTOH-2.1: Tegangan pada suatu piranti adalah 12 V (konstan) dan arus yang mengalir padanya adalah 100 mA. a). Berapakah daya yang diserap ? b). Berapakah energi yang diserap selama 8 jam? c). Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti tersebut selama 8 jam itu?

Solusi:

a). Daya yang diserap adalah :

$$p = vi = 12 \times 100 \times 10^{-3} = 1,2 \text{ W}$$

b). Energi yang diserap selama 8 jam adalah

$$w = \int_0^8 p dt = \int_0^8 1,2 dt = 1,2t \Big|_0^8 = 9,6 \text{ Wh}$$

c). Jumlah muatan yang dipindahkan selama 8 jam adalah

$$q = \int_0^8 i dt = 100 \times 10^{-3} t \Big|_0^8 = 0,1 \times 8 = 0,8 \text{ Ah}$$

Pemahaman :

Satuan daya adalah Watt. Untuk daya besar digunakan satuan kW (kilo watt) yaitu $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$. Satuan daya yang lain adalah *horse power* (HP).

$$1 \text{ HP} = 746 \text{ W} \quad \text{atau} \quad 1 \text{ kW} = 1,341 \text{ HP}$$

Watt-hour (Wh) adalah satuan energi yang biasa dipakai dalam sistem tenaga listrik.

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J} \quad \text{atau} \quad 1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kJ}$$

Satuan muatan adalah Coulomb. Dalam solusi soal di atas, kita menggunakan satuan Ampere-hour (Ah) untuk muatan. Satuan ini biasa digunakan untuk menyatakan kapasitas suatu accu (*accumulator*). Contoh : accu mobil berkapasitas 40 Ah.

karena $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ maka $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$ dan $1 \text{ Ah} = 3600 \text{ C}$

CONTOH-2.2: Sebuah piranti menyerap daya 100 W pada tegangan 200V (konstan). Berapakah besar arus yang mengalir dan berapakah energi yang diserap selama 8 jam ?

Solusi :

$$i = \frac{p}{v} = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ A}$$

$$w = \int_0^8 100 dt = 100t \Big|_0^8 = 800 \text{ Wh} = 0,8 \text{ kWh}$$

CONTOH-2.3: Arus yang melalui suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $i(t) = 0,05t$ ampere. Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti ini antara $t = 0$ sampai $t = 5$ detik ?

Solusi :

Jumlah muatan yang dipindahkan dalam 5 detik adalah

$$q = \int_0^5 i dt = \int_0^5 0,05t dt = \frac{0,05}{2} t^2 \Big|_0^5 = \frac{1,25}{2} = 0,625 \text{ coulomb}$$

CONTOH-2.4: Tegangan pada suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $v = 220\cos 400t$ dan arus yang mengalir adalah $i = 5\cos 400t$
A. a). Bagaimanakah variasi daya terhadap waktu ? b). Berapakah nilai daya maksimum dan daya minimum ?

Solusi :

$$\begin{aligned} \text{a). } p &= 220 \cos 400t \times 5 \cos 400t = 1100 \cos^2 400t \text{ W} \\ &= 550(1 + \cos 800t) = 550 + 550 \cos 800t \text{ W} \end{aligned}$$

Suku pertama pernyataan daya ini bernilai konstan positif + 550 V.

Suku ke-dua bervariasi antara -550 V dan + 550 V.

Secara keseluruhan daya selalu bernilai positif.

$$\begin{aligned} \text{b). Nilai daya : } p_{\text{maksimum}} &= 550 + 550 = 1100 \text{ W} \\ p_{\text{minimum}} &= 550 - 550 = 0 \text{ W} \end{aligned}$$

CONTOH-2.5: Tegangan pada suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $v = 220\cos 400t$ dan arus yang mengalir adalah $i = 5\sin 400t$
A. a). Bagaimanakah variasi daya terhadap waktu ? b). Tunjukkan bahwa piranti ini menyerap daya pada suatu selang waktu tertentu dan memberikan daya pada selang waktu yang lain. c). Berapakah daya maksimum yang diserap ? d). Berapakah daya maksimum yang diberikan ?

Solusi :

$$\begin{aligned} \text{a). } p &= 220 \cos 400t \times 5 \sin 400t = 1100 \sin 400t \cos 400t \\ &= 550 \sin 800t \text{ W} \end{aligned}$$

b). Dari a) terlihat bahwa daya merupakan fungsi sinus. Selama setengah periode daya bernilai positif dan selama setengah periode berikutnya ia bernilai negatif. Jika pada waktu daya bernilai positif mempunyai arti bahwa piranti menyerap daya, maka pada waktu bernilai negatif berarti piranti memberikan daya

$$\text{c). Daya maksimum yang diserap: } P_{\text{maks diserap}} = 550 \text{ W} .$$

$$\text{d). Daya maksimum yang diberikan: } P_{\text{maks diberikan}} = 550 \text{ W} .$$

2.3. Bentuk Gelombang Sinyal

Pada umumnya sinyal merupakan fungsi waktu, seperti yang kita lihat pada contoh-contoh di atas. Variasi sinyal terhadap waktu disebut *bentuk gelombang*. Secara formal dikatakan:

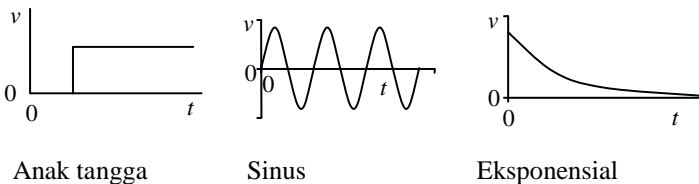
Bentuk gelombang adalah suatu persamaan atau suatu grafik yang menyatakan sinyal sebagai fungsi dari waktu.

Sebagai contoh, bentuk gelombang tegangan dan arus yang konstan di seluruh waktu, secara matematis dinyatakan dengan persamaan:

$$v = V_0 \quad ; \quad i = I_0 \quad , \quad \text{untuk} \quad -\infty < t < \infty \quad (2.7)$$

Walaupun persamaan di atas hanyalah model, tetapi model ini sangat bermanfaat sebab ia merupakan pendekatan untuk sinyal yang secara nyata dibangkitkan oleh sumber sebenarnya, misalnya batere.

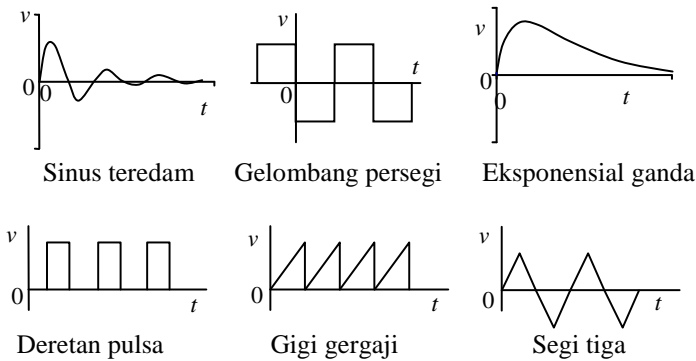
Bentuk gelombang dikelompokkan dalam dua kelompok. Kelompok pertama disebut *bentuk gelombang dasar* yang meliputi bentuk gelombang *anak tangga*, *sinus*, dan *eksponensial*. Mereka disebut bentuk gelombang dasar karena dari tiga bentuk gelombang ini dapat diturunkan bentuk-bentuk gelombang yang lain. Bentuk gelombang dasar ini terlihat pada Gb.2.4.



Gb.2.4. Bentuk Gelombang Dasar.

Kelompok kedua disebut *bentuk gelombang komposit*. Bentuk gelombang ini tersusun dari beberapa bentuk gelombang dasar, seperti terlihat pada Gb.2.5. Bentuk gelombang sinus teredam misalnya, merupakan hasil kali gelombang sinus dengan eksponensial; gelombang persegi merupakan kombinasi dari gelombang-gelombang anak tangga, dan sebagainya. Dalam analisis rangkaian, bentuk-bentuk gelombang ini kita nyatakan secara matematis seperti halnya dengan contoh sinyal konstan (2.7) di atas. Dalam kenyataan, bentuk-bentuk gelombang bisa sangat rumit; walaupun demikian, variasinya terhadap waktu dapat

didekati dengan menggunakan gabungan bentuk-bentuk gelombang dasar.



Gb.2.5. Beberapa gelombang komposit.

2.3.1. Bentuk Gelombang Dasar

Bentuk gelombang dasar (disebut juga gelombang utama) meliputi

fungsi anak-tangga (step function),

fungsi eksponensial (exponential function), dan

fungsi sinus (sinusoidal function).

Fungsi Anak-Tangga (Fungsi Step). Secara umum, fungsi anak-tangga didasarkan pada *fungsi anak-tangga satuan*, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \quad \text{untuk } t < 0 \\ &= 1 \quad \text{untuk } t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Beberapa buku membiarkan fungsi $u(t)$ tak terdefinisikan untuk $t = 0$, dengan persamaan

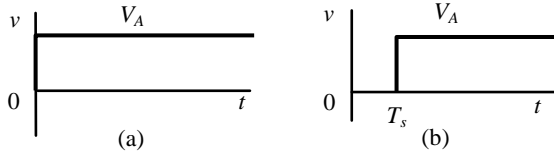
$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \quad \text{untuk } t < 0 \\ &= 1 \quad \text{untuk } t > 0 \end{aligned}$$

Pernyataan fungsi anak tangga satuan yang terakhir ini mempunyai ketidak-kontinyuan pada $t = 0$. Untuk selanjutnya kita akan menggunakan definisi (2.8).

Dalam kenyataan, tidaklah mungkin membangkitkan sinyal yang dapat berubah dari satu nilai ke nilai yang lain tanpa memakan waktu. Yang dapat dilakukan hanyalah membuat waktu transisi itu sependek mungkin.

Bila $u(t)$ kita kalikan dengan sesuatu nilai konstan V_A akan kita peroleh bentuk gelombang anak tangga (Gb.2.6.a.):

$$\begin{aligned} v &= V_A u(t) \Rightarrow v = 0 \quad \text{untuk } t < 0 \\ &= V_A \quad \text{untuk } t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9.a)$$



Gb.2.6. Bentuk gelombang anak-tangga.

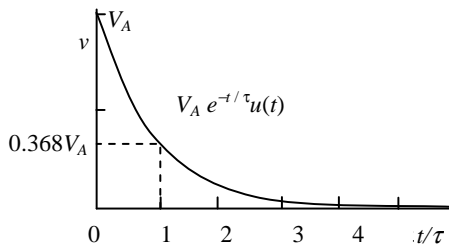
Jika t kita ganti dengan $(t - T_s)$ kita peroleh bentuk gelombang $V_A u(t - T_s)$ yang merupakan bentuk gelombang anak tangga *tergeser ke arah positif* sebesar T_s (Gb.2.6.b.).

$$\begin{aligned} v &= V_A u(t - T_s) \Rightarrow v = 0 \quad \text{untuk } t < T_s \\ &= V_A \quad \text{untuk } t \geq T_s \end{aligned} \quad (2.9.b)$$

Bentuk Gelombang Eksponensial. Sinyal eksponensial merupakan sinyal anak-tangga yang amplitudonya menurun secara eksponensial menuju nol. Persamaan bentuk gelombang sinyal ini adalah:

$$v = (V_A e^{-t/\tau}) u(t) \quad (2.10)$$

Parameter yang penting pada sinyal bentuk ini adalah amplitudo V_A dan konstanta waktu τ (dalam detik). Konstanta waktu ini menentukan kecepatan menurunnya amplitudo sinyal. Makin besar τ makin lambat amplitudo menurun dan makin kecil τ makin cepat amplitudo menurun.

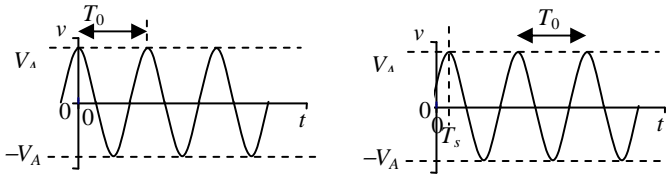


Gb.2.7. Bentuk gelombang eksponensial.

Pada $t = \tau$ sinyal sudah menurun mencapai 36,8 % V_A . Pada $t = 5\tau$ sinyal mencapai 0,00674 V_A , kurang dari 1% V_A . Oleh karena itu kita definisikan *durasi* (lama berlangsung) suatu sinyal eksponensial adalah 5τ . Kalau kita hanya meninjau keadaan untuk $t > 0$, maka $u(t)$ pada persamaan gelombang ini biasanya tidak dituliskan lagi. Jadi:

$$v = V_A e^{-t/\tau} \quad (2.11)$$

Bentuk Gelombang Sinus. Sinus merupakan pengulangan tanpa henti dari suatu osilasi antara dua nilai puncak, seperti terlihat pada Gb.2.8. di bawah ini.



Gb.2.8. Bentuk gelombang sinus.

Amplitudo V_A didefinisikan sebagai nilai maksimum dan minimum osilasi. Periode T_0 adalah waktu yang diperlukan untuk membuat satu siklus lengkap. Dengan menggunakan dua parameter tersebut, yaitu V_A dan T_0 , kita dapat menuliskan persamaan sinus ini dalam fungsi cosinus:

$$v = V_A \cos(2\pi t / T_0) \quad (2.12)$$

Seperti halnya fungsi anak tangga, persamaan umum fungsi sinus diperoleh dengan mengganti t dengan $(t-T_s)$. Jadi persamaan umum gelombang sinus adalah:

$$v = V_A \cos[2\pi(t - T_s) / T_0] \quad (2.13)$$

dengan T_s adalah waktu pergeseran, yang ditunjukkan oleh *posisi positif yang terjadi pertama kali* seperti terlihat pada Gb.2.8. Pada gambar ini T_s adalah positif. Jika T_s negatif pergeserannya akan ke arah negatif.

Pergeseran waktu dapat juga dinyatakan dengan menggunakan sudut:

$$v = V_A \cos[2\pi t / T_0 - \phi] \quad (2.14)$$

Parameter ϕ disebut *sudut fasa*. Hubungan antara waktu pergeseran T_s dan sudut fasa ϕ adalah :

$$\phi = 2\pi \frac{T_s}{T_0} \quad (2.15)$$

Variasi dari gelombang sinus dapat juga dinyatakan dengan menggunakan *frekuensi*. Frekuensi f_0 didefinisikan sebagai jumlah perioda dalam satu satuan waktu, yang disebut frekuensi siklus. Oleh karena perioda T_0 adalah jumlah detik (waktu) per siklus, maka jumlah siklus (perioda) per detik adalah:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.16)$$

dengan satuan *hertz* (Hz), atau siklus per detik. Selain frekuensi siklus, kita mengenal pula *frekuensi sudut* ω_0 dengan satuan *radian per detik* (rad/det), yaitu:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.17)$$

Dengan demikian ada dua cara untuk menyatakan frekuensi, yaitu frekuensi siklus (Hz) dan frekuensi sudut (rad/detik), dan fungsi sinus dapat dinyatakan sebagai

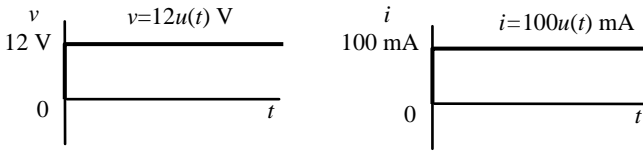
$$\begin{aligned} v &= V_A \cos[2\pi f_0 t - \phi] \quad \text{atau} \\ v &= V_A \cos[\omega_0 t - \phi] \end{aligned} \quad (2.17.a)$$

CONTOH-2.6: Tegangan pada suatu piranti adalah 12 V (konstan) dan arus yang mengalir padanya adalah 100 mA. a). Berapakah daya yang diserap ? b). Berapakah energi yang diserap selama 8 jam? c). Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti tersebut selama 8 jam itu?

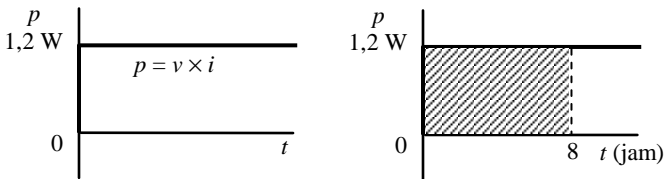
Solusi:

Solusi soal ini telah kita lakukan pada contoh 2.1. Di sini kita akan melihat model sinyalnya. Model matematis dari sinyal tegangan 12 V (konstan) kita tuliskan sebagai $v = 12u(t)$ V, dan arus 100 mA kita tuliskan $i = 100u(t)$ mA.

Jika sinyal-sinyal ini kita gambarkan akan berbentuk seperti di bawah ini.

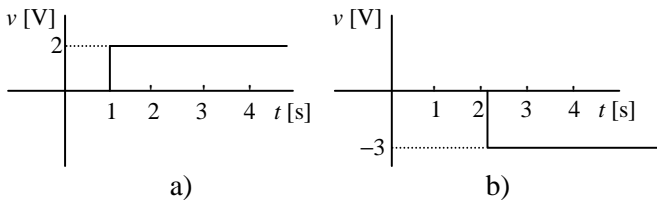


Daya yang diserap adalah $p = v \times i = 1.2 \text{ W}$ dan jika kita gambarkan perubahan daya terhadap waktu adalah seperti gambar berikut ini.



Energi yang diserap selama 8 jam adalah integral dari daya untuk jangka waktu 8 jam. Besar energi ini ditunjukkan oleh luas bagian yang diarsir di bawah kurva daya seperti ditunjukkan pada gambar di sebelah kanan.

CONTOH-2.7: Carilah persamaan bentuk gelombang tegangan yang tergambar di bawah ini.



Solusi :

- a). Bentuk gelombang tegangan ini adalah gelombang anak tangga yang persamaan umumnya adalah $v(t) = A u(t - T_s)$, dengan A = amplitudo dan T_s = pergeseran waktu. Maka persamaan gelombang pada gambar a) adalah

$$v_1(t) = 2u(t-1) \text{ V.}$$

Gelombang ini mempunyai nilai

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 2 \text{ V} & \text{untuk } t \geq 1 \\ &= 0 \text{ V} & \text{untuk } t < 1 \end{aligned}$$

b). Bentuk gelombang tegangan gambar b) adalah

$$v_2(t) = -3u(t-2) \text{ V.}$$

Gelombang ini mempunyai nilai

$$\begin{aligned} v_2(t) &= -3 \text{ V} & \text{untuk } t \geq 2 \\ &= 0 \text{ V} & \text{untuk } t < 2 \end{aligned}$$

Pemahaman :

$u(t)$ adalah fungsi anak tangga satuan, sebagaimana telah didefinisikan. Fungsi anak tangga satuan ini tidak mempunyai satuan. Bentuk gelombang tegangan pada gambar a) diperoleh dengan mengalikan suatu tegangan konstan sebesar 2 V dengan fungsi anak tangga satuan $u(t-1)$ yaitu fungsi anak tangga satuan yang bergeser 1 detik. Sedangkan gelombang tegangan pada gambar b) diperoleh dengan mengalikan tegangan konstan sebesar -3 V dengan fungsi anak tangga satuan yang bergeser 2 detik.

Bentuk gelombang apapun, jika dikalikan dengan fungsi anak tangga satuan $u(t)$ akan bernilai nol untuk $t < 0$, dan jika dikalikan dengan $u(t-T_s)$ akan bernilai nol untuk $t < T_s$.

CONTOH-2.8: Carilah persamaan dan gambarkanlah tiga bentuk gelombang eksponensial berikut ini dalam satu gambar.

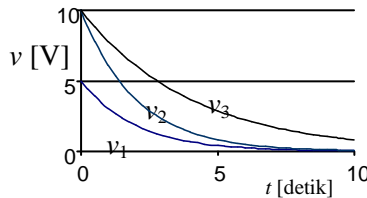
- $v_1(t)$: amplitudo 5 V, konstanta waktu 2 detik
- $v_2(t)$: amplitudo 10 V, konstanta waktu 2 detik
- $v_3(t)$: amplitudo 10 V, konstanta waktu 4 detik

Solusi :

Persamaan umum gelombang eksponensial adalah $v(t) = Ae^{-t/\tau}u(t)$ dengan A = amplitudo, τ = konstanta waktu. Jadi pernyataan ketiga gelombang itu masing-masing adalah

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 5e^{-t/2}u(t) \text{ V;} \\ v_2(t) &= 10e^{-t/2}u(t) \text{ V;} \\ v_3(t) &= 10e^{-t/4}u(t) \text{ V.} \end{aligned}$$

Bentuk gelombang tegangan tergambar di bawah ini.



Pemahaman :

Kita lihat bahwa walaupun v_1 dan v_2 mempunyai amplitudo yang jauh berbeda, mereka teredam dengan kecepatan yang sama karena konstanta waktunya sama. Pada $t = 5 \times$ konstanta waktu, yaitu $5 \times 2 = 10$ detik, nilai gelombang telah dapat diabaikan.

Gelombang tegangan v_2 dan v_3 mempunyai amplitudo sama tetapi konstanta waktunya berbeda. Kita lihat bahwa gelombang yang konstanta waktunya lebih besar lebih lambat menuju nol, sedangkan yang konstanta waktunya lebih kecil lebih cepat menuju nol.

CONTOH-2.9: Tuliskan persamaan gelombang sinus untuk $t > 0$, yang amplitudonya 10 V, frekuensi siklus 50 Hz, dan puncak positif yang pertama terjadi pada $t = 3$ mili detik. Gambarkanlah bentuk gelombangnya.

Solusi :

Pernyataan umum gelombang sinus standar untuk $t > 0$ adalah

$$v = A \cos\left(2\pi \frac{t - T_s}{T_0}\right) u(t) \text{ dengan } A \text{ adalah amplitudo, } T_s \text{ pergeseran}$$

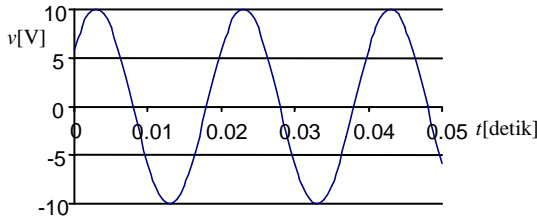
waktu, T_0 periode, dan $u(t)$ adalah fungsi anak tangga satuan. Karena frekuensi siklus $f = 1/T_0$ maka persamaan umum ini juga dapat ditulis sebagai

$$v = A \cos(2\pi f(t - T_s)) u(t)$$

Dari apa yang diketahui dalam persoalan yang diberikan, kita dapat menuliskan persamaan tegangan

$$v = 10 \cos(100\pi(t - 0,003)) u(t)$$

dengan bentuk gelombang terlihat pada gambar berikut ini.



Pemahaman :

Perhatikan bahwa puncak positif pertama terjadi pada $t = 0,003$ detik. Karena frekuensi gelombang 50 Hz, maka ada lima puluh siklus dalam satu detik atau dengan kata lain perioda gelombang ini adalah $1/50$ detik = 0,02 detik. Persamaan umum gelombang sinus dapat ditulis dalam berbagai bentuk seperti berikut ini.

$$v = A \cos\left(2\pi \frac{t - T_s}{T_0}\right) \quad \text{atau} \quad v = A \cos(2\pi f(t - T_s)) \quad \text{atau}$$

$$v = A \cos(\omega(t - T_s)) \quad \text{atau} \quad v = A \cos(\omega t - \phi)$$

Dari persamaan-persamaan umum ini kita dapat dengan mudah menuliskan persamaan bentuk gelombang sinus berdasarkan parameter-parameter yang diketahui.

CONTOH-2.10: Tuliskan persamaan gelombang sinus untuk $t > 0$, yang frekuensinya 1000 rad/s, dan puncak positif yang pertama terjadi pada $t = 1$ mili-detik. Pada $t = 0$ gelombang ini mempunyai nilai 200 V.

Solusi :

Puncak positif yang pertama terjadi pada $t = 1$ mili detik, artinya pada bentuk gelombang ini terjadi pergeseran waktu sebesar 0,001 detik. Persamaan umum fungsi sinus yang muncul pada $t = 0$ adalah $v = A \cos[\omega(t - T_s)]u(t)$. Amplitudo dari gelombang ini dapat dicari karena nilai gelombang pada $t = 0$ diketahui, yaitu 200 V.

$$200 = A \cos(1000(0 - 0,001))u(t) = A \cos(-1) = A \times 0,54$$

$$\Rightarrow A = 200/0,54 = 370 \text{ V}$$

Jadi persamaan gelombang sinus ini adalah :

$$v = 370 \cos[1000(t - 0,001)]u(t) \text{ V}$$

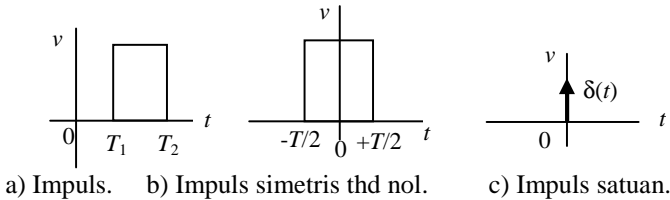
2.3.2. Bentuk Gelombang Komposit

Bentuk gelombang yang diperoleh melalui penggabungan bentuk gelombang dasar disebut *bentuk gelombang komposit*. Beberapa di antaranya akan kita lihat berikut ini.

Fungsi Impuls. Secara umum fungsi impuls dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} v &= Au(t - T_1) - Au(t - T_2) \\ &= A[u(t - T_1) - u(t - T_2)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bentuk gelombang ini adalah gabungan dari dua gelombang anak-tangga dengan amplitudo sama akan tetapi berlawanan tanda, masing-masing dengan pergeseran waktu T_1 dan T_2 . (Gb.2.9.a)



Gb.2.9. Impuls

Fungsi Impuls Satuan. Perhatikan gelombang impuls yang simetris terhadap titik nol seperti pada Gb.2.9.b. Persamaan bentuk gelombang ini adalah:

$$v_1 = \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \quad (2.18.a)$$

Impuls dengan persamaan diatas mempunyai amplitudo $1/T$ dan bernilai nol di semua t kecuali pada selang $-T/2 \leq t \leq +T/2$.

Luas bidang di bawah pulsa adalah satu karena amplitudonya berbanding terbalik dengan durasinya (lebaranya). Jika lebar pulsa T kita perkecil dengan mempertahankan luasnya tetap satu, maka amplitudo akan makin besar. Bila T menuju nol maka amplitudo menuju tak hingga, namun luasnya tetap satu. Fungsi yang diperoleh pada kondisi limit tersebut dinamakan *impuls satuan* (*unit impuls*), dengan simbol $\delta(t)$. Representasi grafisnya terlihat pada Gb.2.9.c. Definisi formal dari impuls satuan adalah:

$$v = \delta(t) = 0 \text{ untuk } t \neq 0 ; \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = u(t) \quad (2.18.b)$$

Kondisi yang pertama dari definisi ini menyatakan bahwa impuls ini nol di semua t kecuali pada $t = 0$, sedangkan kondisi kedua menyatakan bahwa impuls ini adalah turunan dari fungsi anak-tangga satuan.

$$\text{Jadi} \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (2.18.c)$$

Amplitudo impuls satuan adalah tak hingga. Oleh karena itu besar impuls didefinisikan menurut luasnya. Suatu impuls satuan yang muncul pada $t = T_s$ dituliskan sebagai $\delta(t-T_s)$.

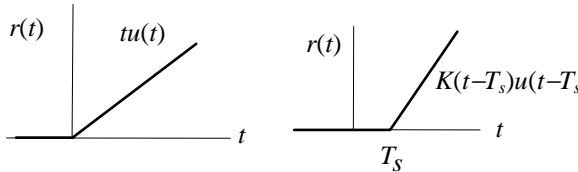
Fungsi Ramp. Jika kita melakukan integrasi pada fungsi anak tangga satuan, kita akan mendapatkan fungsi *ramp satuan* yaitu

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(x)dx = tu(t) \quad (2.19)$$

Ramp satuan ini bernilai nol untuk $t \leq 0$ dan sama dengan t untuk $t > 0$. Perhatikan bahwa laju perubahan (kemiringan) dari ramp satuan adalah 1. Jika kemiringannya adalah K maka persamaannya adalah $r_k(t) = K t u(t)$. Bentuk umum fungsi ramp adalah

$$r(t) = K(t-T_s)u(t-T_s), \quad (2.19.a)$$

yang bernilai nol untuk $t < T_s$ dan memiliki kemiringan K . (Gb.2.10).



Gb.2.10. Fungsi ramp.

Bentuk Gelombang Sinus Tereadam. Bentuk gelombang komposit ini diperoleh dengan mengalikan fungsi sinus dengan fungsi eksponensial, yang memberikan persamaan :

$$v = \sin(\omega t) \left(V_A e^{-t/\tau} \right) u(t) = V_A \sin \omega t e^{-t/\tau} u(t) \quad (2.20)$$

Fungsi anak tangga $u(t)$ menjadi salah satu faktor dalam persamaan ini agar persamaan

bernilai nol pada $t <$

Pada $t = 0$,

gelombang melalui

asal karena $\sin(n\pi) =$

Bentuk gelombang

tidak periodik karena

faktor eksponensial

memaksa

amplitudonya

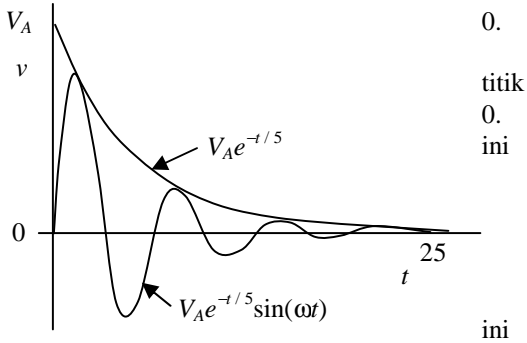
menurun secara

eksponensial. Osilasi

telah mencapai nilai

sangat kecil pada $t =$

sehingga telah dapat diabaikan pada $t > 5\tau$.



Gb.2.11. Gelombang sinus teredam.

Bentuk Gelombang Eksponensial Ganda. Gelombang komposit ini diperoleh dengan menjumlahkan dua fungsi eksponensial beramplitudo sama tapi berlawanan tanda. Persamaan bentuk gelombang ini adalah :

$$\begin{aligned} v &= V_A e^{-t/\tau_1} u(t) - V_A e^{-t/\tau_2} u(t) \\ &= V_A (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) u(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bentuk gelombang komposit ini, dengan τ_2 terlihat pada

Gb.2.12. Untuk $t < 0$

gelombang bernilai

Pada $t = 0$ gelombang

masih bernilai nol

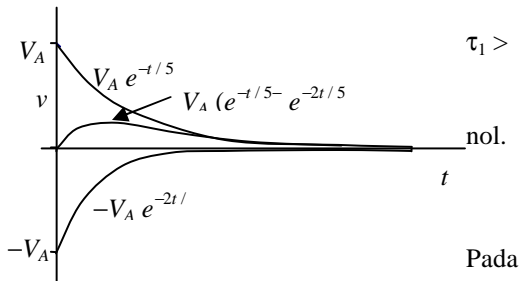
karena kedua fungsi

saling meniadakan.

$t \gg \tau_1$ gelombang ini

menuju nol karena

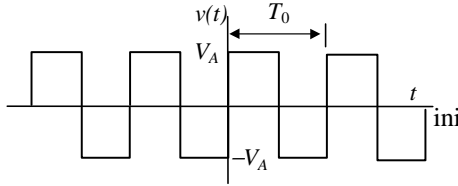
kedua bentuk eksponensial itu menuju nol. Fungsi yang mempunyai konstanta waktu lebih besar akan menjadi fungsi yang lebih menentukan bentuk gelombang.



Gb.2.12. Gelombang eksponensial

Bentuk Gelombang Persegi. Bentuk gelombang persegi juga merupakan gelombang komposit.

Karena gelombang ini merupakan gelombang periodik maka persamaan gelombang dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan untuk setiap siklus.



Gb.2.13. Gelombang persegi.

Persamaan untuk siklus yang pertama setelah $t = 0$, merupakan jumlah dari tiga fungsi anak-tangga, yaitu:

$$v_1 = V_A u(t) - 2V_A u\left(t - \frac{T_0}{2}\right) + V_A u(t - T_0)$$

Persamaan untuk siklus yang kedua setelah $t = 0$ adalah persamaan siklus pertama yang digeser sebesar satu periode :

$$\begin{aligned} v_2 &= V_A u(t - T_0) - 2V_A u\left(t - \frac{T_0}{2} - T_0\right) + V_A u(t - 2T_0) \\ &= V_A u(t - T_0) - 2V_A u\left(t - \frac{3T_0}{2}\right) + V_A u(t - 2T_0) \end{aligned}$$

Persamaan untuk siklus yang ke k adalah persamaan siklus pertama yang digeser sebesar $(k-1)$ periode:

$$v_k = V_A u(t - [k-1]T_0) - 2V_A u\left(t - \frac{2k-1}{2}T_0\right) + V_A u(t - kT_0)$$

Persamaan gelombang persegi dapat diperoleh dengan menjumlahkan $v_k(t)$ dari $k = -\infty$ sampai $k = +\infty$.

$$v = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} v_k(t) \quad (2.22)$$

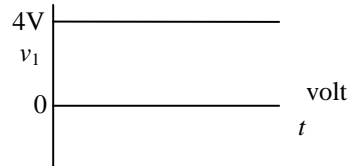
Penjumlahan dari $-\infty$ sampai $+\infty$ tersebut diperlukan karena gelombang persegi melebar ke tak hingga baik ke arah positif maupun ke arah negatif.

CONTOH-2.11: Gambarkanlah bentuk-bentuk gelombang yang persamaannya adalah

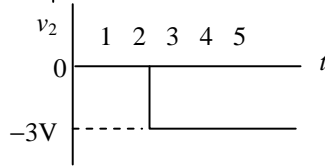
- a). $v_1 = 4 u(t)$ V ; b). $v_2 = -3 u(t-2)$ V
 c). $v_3 = 4u(t)-3u(t-2)$ V; d). $v_4 = 4u(t)-7u(t-2)+3u(t-5)$ V

Solusi :

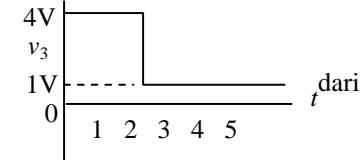
- a). Bentuk gelombang ini adalah gelombang anak tangga dengan amplitudo 4 dan muncul pada $t = 0$.



Bentuk gelombang terlihat pada gambar di samping.

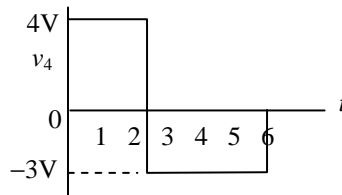


- b). Gelombang anak tangga ini mempunyai amplitudo -3 volt dan muncul pada $t = 2$. Gambar bentuk gelombang terlihat di samping ini



- c). Bentuk gelombang ini terdiri gelombang anak tangga beramplitudo 4 volt yang muncul pada $t = 0$ ditambah gelombang anak tangga beramplitudo -3 volt yang muncul pada $t = 2$. Lihat gambar di samping.

- d). Bentuk gelombang ini terdiri dari tiga gelombang anak tangga yang masing-masing muncul pada $t = 0$, $t = 2$ dan $t = 5$. Amplitudo mereka berturut-turut adalah 4, -7 , dan 3 volt. Bentuk gelombang terlihat pada gambar di samping ini.



CONTOH-2.12: Gambarkanlah bentuk-bentuk gelombang yang persamaannya adalah

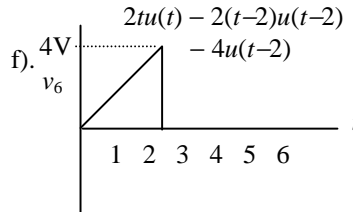
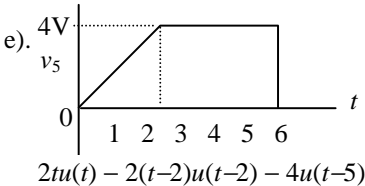
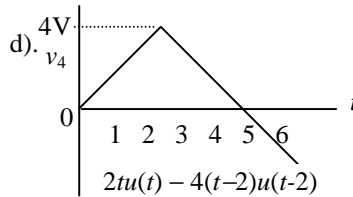
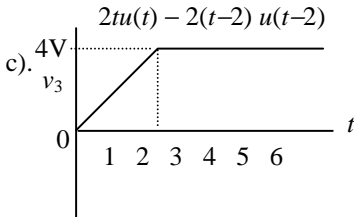
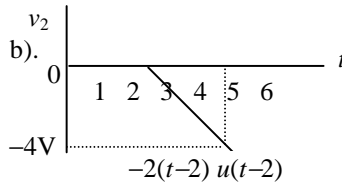
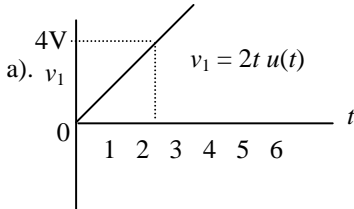
- a). $v_1 = 2t u(t)$ V ;
 b). $v_2 = -2(t-2) u(t-2)$ V ;
 c). $v_3 = 2tu(t) - 2(t-2) u(t-2)$ V;

d). $v_4 = 2tu(t) - 4(t-2)u(t-2)$ V ;

e). $v_5 = 2tu(t) - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-5)$ V ;

f). $v_6 = 2tu(t) - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-2)$ V

Solusi :



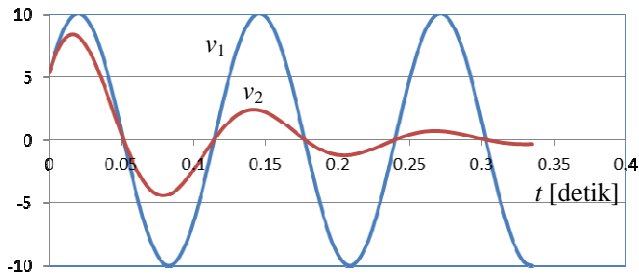
CONTOH-2.13: Tentukanlah persamaan bentuk gelombang yang mulai muncul pada $t = 0$ berikut ini. a). Gelombang sinus : amplitudo 10 V, frekuensi sudut 50 rad per detik, puncak positif pertama terjadi pada $t = 20$ mili-detik. b). Gelombang sinus pada a) yang terredam sehingga pada $t = 0,5$ detik gelombang sinus ini sudah dapat diabaikan nilainya. c). Gambarkanlah bentuk gelombang pada a) dan b).

Solusi:

- a). Gelombang sinus ini baru muncul pada $t = 0$, sehingga persamaan umumnya adalah $v = A \cos(\omega(t - T_s))u(t)$. Dari parameter yang diketahui, persamaan gelombang yang dimaksud adalah $v_1 = 10 \cos(50(t - 0,020))u(t)$ V.
- b). Agar gelombang sinus pada a) teredam, maka harus dikalikan dengan fungsi eksponensial. Jika nilai gelombang sudah harus dapat diabaikan pada $t = 0,5$ detik, maka konstanta waktu dari fungsi eksponensial sekurang-kurangnya haruslah $\tau = 0,5/5 = 0,1$. Jadi persamaan gelombang yang dimaksud adalah

$$v_2 = 10 \cos(50(t - 0,020))e^{-t/0,1} u(t)$$

- c). Gambar kedua bentuk gelombang tersebut di atas adalah sebagai berikut.



Pemahaman:

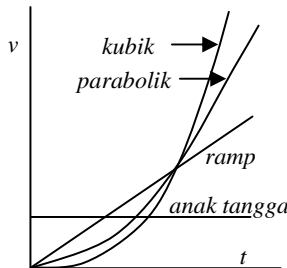
Gelombang sinus pada umumnya adalah non-kausal yang persamaan umumnya adalah $v = A \cos(\omega(t - T_s))$. Dalam soal ini dinyatakan bahwa gelombang sinus baru muncul pada $t = 0$. Untuk menyatakan gelombang seperti ini diperlukan fungsi anak tangga $u(t)$ sehingga persamaan akan berbentuk $v = A \cos(\omega(t - T_s))u(t)$.

Dengan menyatakan bentuk gelombang sinus dengan fungsi cosinus, identifikasi bentuk gelombang menjadi lebih mudah. Puncak pertama suatu fungsi cosinus tanpa pergeseran waktu terjadi pada $t = 0$. Dengan demikian posisi puncak pertama fungsi cosinus menunjukkan pula pergeseran waktunya.

Dengan mengalikan fungsi sinus dengan fungsi eksponensial kita meredam fungsi sinus tersebut. Peredaman oleh fungsi eksponensial berlangsung mulai dari $t = 0$. Oleh karena itu puncak positif pertama dari gelombang sinus teredam pada persoalan di atas mempunyai nilai kurang dari 10 V.

Fungsi Parabolik Satuan dan Kubik Satuan. Telah kita lihat bahwa integrasi fungsi anak tangga satuan memberikan fungsi ramp satuan. Jika integrasi dilakukan sekali lagi akan memberikan fungsi parabolik satuan dan integrasi sekali lagi akan memberikan fungsi kubik satuan. Gb.2.14. di samping ini memperlihatkan evolusi bentuk fungsi anak tangga menjadi fungsi ramp, parabolik, dan kubik melalui integrasi.

Fungsi-ramp, parabolik, dan kubik ini menuju nilai tak hingga jika t menuju tak hingga. Oleh karena itu pemodelan dengan menggunakan fungsi-fungsi ini dibatasi dalam selang waktu tertentu. Perhatikan sinyal gigi gergaji pada Gb.2.5. yang dimodelkan dengan fungsi ramp yang berulang pada setiap selang waktu tertentu.

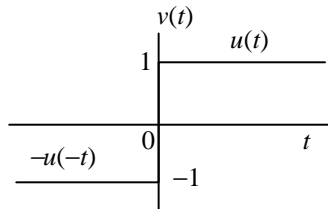


Gb.2.14. Anak tangga, ramp, parabolik, kubik.

Fungsi Signum. Suatu sinyal konstan (tegangan misalnya) yang pada $t = 0$ berubah polaritas, dimodelkan dengan fungsi signum, dituliskan sebagai

$$v(t) = \text{sgn}(t) \quad (2.23)$$

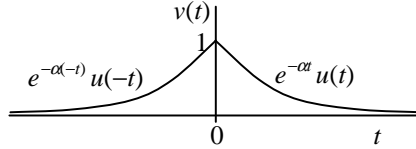
Bentuk gelombang fungsi signum terlihat pada Gb.2.17. di samping ini. Fungsi signum ini merupakan jumlah dari fungsi anak tangga yang telah kita kenal, ditambah dengan fungsi anak tangga yang diperluas untuk $t < 0$.



Gb.2.15. Signum.

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \quad (2.24)$$

Fungsi Eksponensial Dua Sisi. Perluasan fungsi anak tangga untuk mencakup kejadian sebelum $t = 0$ dapat pula dilakukan pada fungsi eksponensial. Dengan demikian kita dapatkan fungsi eksponensial dua sisi yang kita tuliskan sebagai



Gb.2.16. Eksponensial dua sisi.

$$v(t) = e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha(-t)} u(-t) \quad (2.25)$$

dengan bentuk kurva seperti pada Gb.2.16.

SOAL-SOAL

Dalam soal-soal model sinyal berikut ini, satuan waktu t adalah
 s = detik ; ms = milidetik ; μs = mikrodetik

1. Gambarkan dan tentukan persamaan bentuk gelombang sinyal anak tangga berikut ini :
 - a) v_1 : amplitudo 5 V, muncul pada $t = 0$.
 - b) v_2 : amplitudo 10 V, muncul pada $t = 1s$.
 - c) v_3 : amplitudo -5 V, muncul pada $t = 2s$.
2. Dari sinyal-sinyal di soal 1, gambarkanlah bentuk gelombang sinyal berikut ini.
 - a). $v_4 = v_1 + v_2$;
 - b). $v_5 = v_1 + v_3$
 - c). $v_6 = v_1 + v_2 + v_3$
3. Gambarkanlah bentuk gelombang sinyal yang diperoleh dengan cara mengintegrasi bentuk gelombang sinyal pada soal 1.
4. Gambarkanlah bentuk gelombang sinyal yang diperoleh dengan cara mengintegrasi bentuk gelombang sinyal pada soal 3.
5. Gambarkan dan tentukan persamaan bentuk gelombang pulsa tegangan berikut ini :
 - a). Amplitudo 5 V, lebar pulsa 1 s, muncul pada $t = 0$.
 - b). Amplitudo 10 V, lebar pulsa 2 s, muncul pada $t = 1s$.
 - c). Amplitudo -5 V, lebar pulsa 3 s, muncul pada $t = 2 s$.
6. Gambarkan dan tentukan persamaan bentuk gelombang sinyal eksponensial yang muncul pada $t = 0$ dan konstanta waktu τ , berikut ini :
 - a). v_a = amplitudo 5 V, $\tau = 20$ ms.
 - b). v_b = amplitudo 10 V, $\tau = 20$ ms.
 - c). v_c = amplitudo -5 V, $\tau = 40$ ms.
7. Dari bentuk gelombang sinyal pada soal 6, gambarkanlah bentuk gelombang sinyal berikut.
 - a). $v_d = v_a + v_b$;
 - b). $v_e = v_a + v_c$;
 - c). $v_f = v_a + v_b + v_c$
8. Tentukan persamaan bentuk gelombang sinyal sinus berikut ini :
 - a). Amplitudo 10 V, puncak pertama terjadi pada $t = 0$, frekuensi 10 Hz.
 - b). Amplitudo 10 V, puncak pertama terjadi pada $t = 10$ ms, frekuensi 10 Hz.

- c). Amplitudo 10 V, pergeseran sudut fasa 0° , frekuensi 10 rad/detik.
 d). Amplitudo 10 V, pergeseran sudut fasa $+30^\circ$, frekuensi 10 rad/detik.

9. Gambarkanlah bentuk gelombang komposit berikut.

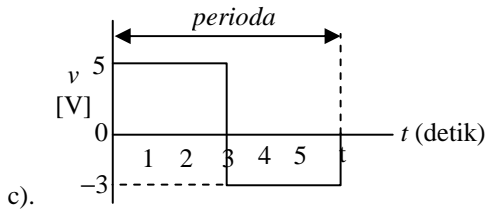
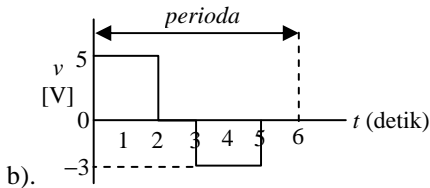
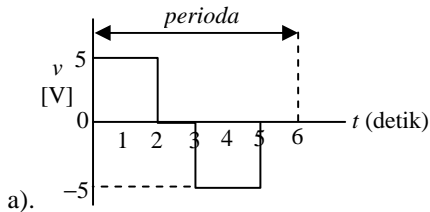
a). $v_1 = 10\{1 - e^{-100t}\}u(t)$ V;

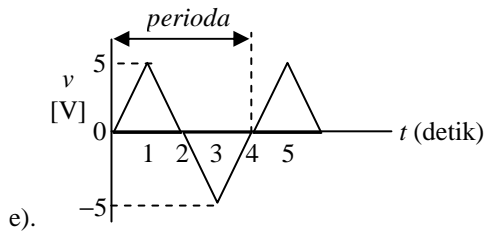
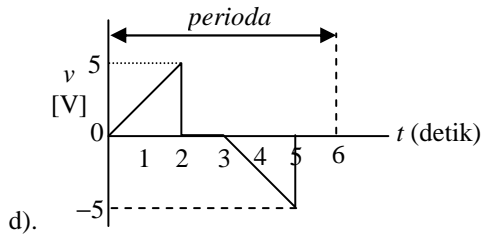
b). $v_2 = \{10 - 5e^{-100t}\}u(t)$ V

c). $v_3 = \{10 + 5\sin(10\pi t)\}u(t)$ V;

d). $v_4 = 10\{1 + e^{-t} \sin(10\pi t)\}u(t)$ V

10. Tentukan persamaan siklus pertama dari bentuk-bentuk gelombang periodik yang digambarkan berikut ini.





BAB 3 Pernyataan Sinyal dan ***Spektrum Sinyal***

Dengan mempelajari lanjutan tentang model sinyal ini, kita akan

- memahami berbagai pernyataan gelombang sinyal;
- mampu mencari nilai rata-rata dan nilai efektif suatu bentuk gelombang sinyal;
- memahami sinyal periodik yang dapat dipandang sebagai suatu spektrum;
- mampu mencari spektrum sinyal;
- memahami arti lebar pita frekuensi.

3.1. Pernyataan-Pernyataan Gelombang Sinyal

3.1.1. Gelombang Periodik dan Aperiodik

Suatu gelombang disebut periodik jika gelombang itu selalu berulang setiap selang waktu tertentu. Jadi jika $v(t)$ adalah periodik, maka $v(t+T_0) = v(t)$ untuk semua nilai t , dengan T_0 adalah periodanya yaitu selang waktu terkecil yang memenuhi kondisi tersebut.

Contoh: sinyal gigi gergaji adalah sinyal periodik.

Sinyal yang tidak periodik disebut juga sinyal aperiodik.

3.1.2. Sinyal Kausal dan Sinyal Non-Kausal

Sinyal kausal bernilai nol sebelum saat T_s tertentu. Jadi jika sinyal $v(t)$ adalah kausal maka $v(t) = 0$ untuk $t < T_s$. Jika tidak demikian maka sinyal itu disebut sinyal non-kausal. Sinyal kausal biasa dianggap bernilai nol pada $t < 0$, dengan menganggap $t = 0$ sebagai awal munculnya sinyal.

Contoh: sinyal sinus adalah sinyal non-kausal; sinyal anak tangga adalah sinyal kausal.

Jika kita mengalikan persamaan suatu bentuk gelombang dengan fungsi anak tangga satuan, $u(t)$, maka kita akan mendapatkan sinyal kausal.

3.1.3. Nilai Sesaat

Nilai amplitudo gelombang $v(t)$, $i(t)$, ataupun $p(t)$ pada suatu saat t tertentu disebut nilai sesaat dari bentuk gelombang itu.

3.1.4. Amplitudo

Pada umumnya amplitudo gelombang berubah terhadap waktu diantara dua nilai ekstrem yaitu amplitudo maksimum, V_{maks} , dan amplitudo minimum, V_{min} .

3.1.5. Nilai amplitudo puncak-ke-puncak (*peak to peak value*)

Nilai amplitudo puncak-ke-puncak menyatakan fluktuasi total dari amplitudo dan didefinisikan sebagai:

$$V_{pp} = V_{maks} - V_{min} \quad (3.1)$$

Dengan definisi ini maka V_{pp} selalu positif, walaupun mungkin V_{maks} dan V_{min} keduanya negatif.

3.1.6. Nilai puncak

Nilai puncak V_p adalah maksimum dari nilai absolut amplitudo.

$$V_p = \text{Max}\{|V_{maks}|, |V_{min}|\} \quad (3.2)$$

3.1.7. Nilai rata-rata

Nilai rata-rata secara matematis didefinisikan sebagai:

$$V_{rr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(x) dx \quad (3.3)$$

Untuk sinyal periodik, selang waktu T sama dengan perioda T_0 . Ada tidaknya nilai rata-rata menunjukkan apakah suatu sinyal mengandung komponen konstan (tidak berubah terhadap waktu) atau tidak. Komponen konstan ini disebut juga *komponen searah* dari sinyal.

3.1.8. Nilai efektif (nilai rms ; *rms value*)

Nilai ini menunjukkan nilai rata-rata *daya* yang dibawa oleh sinyal. Untuk memahami hal ini kita lihat dulu daya sesaat yang diberikan kepada resistor R oleh tegangan $v(t)$, yaitu:

$$p(t) = \frac{1}{R} [v(t)]^2 \quad (3.4)$$

Daya rata-rata yang diberikan kepada resistor dalam selang waktu T adalah:

$$P_{rr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [p(t)] dt \quad (3.5)$$

Kalau kedua persamaan di atas ini kita gabungkan, akan kita peroleh:

$$P_{rr} = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2 dt \right] \quad (3.6)$$

Apa yang berada di dalam kurung besar pada persamaan di atas merupakan nilai rata-rata dari kwadrat gelombang. Akar dari besaran inilah yang digunakan untuk mendefinisikan nilai rms atau nilai efektif.

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2 dt} \quad (3.7)$$

Untuk sinyal periodik, kita mengambil interval satu siklus untuk menghitung nilai rata-rata. Dengan menggunakan nilai rms kita dapat menuliskan daya rata-rata yang diberikan kepada resistor sebagai:

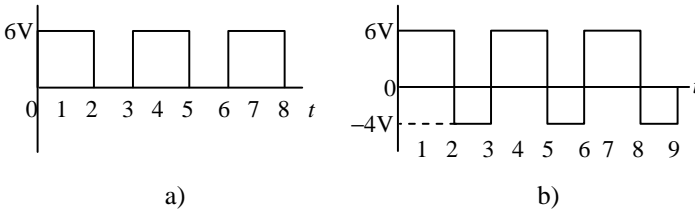
$$P_{rr} = \frac{1}{R} V_{rms}^2 \quad (3.8)$$

Perhatikan bahwa persamaan untuk menghitung P_{rr} dengan menggunakan besaran rms tersebut di atas berbentuk mirip dengan persamaan untuk menghitung daya sesaat pada sinyal searah, yaitu :

$$p(t) = \frac{1}{R} [v(t)]^2 \quad (3.9)$$

Oleh karena itulah maka nilai rms juga disebut nilai efektif karena ia menentukan daya rata-rata yang diberikan kepada resistor, setara dengan sinyal searah $v(t) = V_{as}$ yang menentukan besar daya sesaat.

CONTOH-3.1: Tentukanlah nilai, tegangan puncak (V_p), tegangan puncak-puncak (V_{pp}), periode (T), tegangan rata-rata (V_{rr}), dan tegangan efektif dari bentuk gelombang tegangan berikut ini.



Solusi :

a). $V_p = 6 \text{ V}$; $V_{pp} = 6 \text{ V}$; $T = 3 \text{ s}$

$$V_{rr} = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 6 dt + \int_2^3 0 dt \right) = \frac{1}{3} (6 \times 2 + 0) = 4 \text{ V}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\int_0^2 6^2 dt + \int_2^3 0^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{3} (36 \times 2 + 0)} = 4,9 \text{ V}$$

b). $V_p = 6 \text{ V}$; $V_{pp} = 10 \text{ V}$; $T = 3 \text{ s}$

$$V_{rr} = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 6 dt + \int_2^3 -4 dt \right) = \frac{1}{3} (6 \times 2 - 4 \times 1) = 2,66 \text{ V}$$

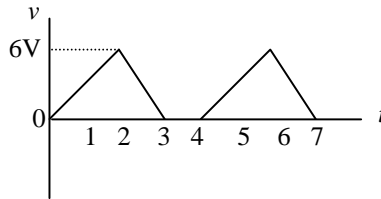
$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\int_0^2 6^2 dt + \int_2^3 (-4)^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{3} (36 \times 2 + 16 \times 1)} \\ = 5,42 \text{ V}$$

Pemahaman :

Gelombang periodik dalam contoh di atas, mempunyai persamaan gelombang yang terdiri dari banyak suku sebagaimana dijelaskan pada gelombang komposit. Akan tetapi untuk menghitung nilai rata-rata ataupun efektif, kita cukup melihat satu siklus saja dan bilamana diperlukan gelombang kita nyatakan dalam beberapa bagian yang mempunyai persamaan sederhana.

CONTOH-3.2:

Tentukanlah nilai tegangan puncak (V_p), tegangan puncak-puncak (V_{pp}), periode (T), tegangan rata-rata (V_{rr}), dan tegangan efektif dari bentuk gelombang tegangan di samping ini.



Solusi :

Bentuk gelombang ini berperiode 4 detik dan dapat kita nyatakan sebagai jumlah dari bentuk-bentuk sederhana antara 0 – 2 detik, antara 2 – 3 detik, dan antara 3 – 4 detik.

$$V_p = 6 \text{ V} \quad ; \quad V_{pp} = 6 \text{ V} \quad ; \quad T = 4 \text{ s}$$

$$V_{rr} = \frac{1}{4} \left(\int_0^2 3t dt + \int_2^3 (6 - 6(t-2)) dt + \int_3^4 0 dt \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{6 \times 3}{2} \right) = 2,25 \text{ V}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\int_0^2 9t^2 dt + \int_2^3 (6 - 6(t-2))^2 dt + \int_3^4 0^2 dt \right)} = 3,0 \text{ V}$$

3.2. Spektrum Sinyal

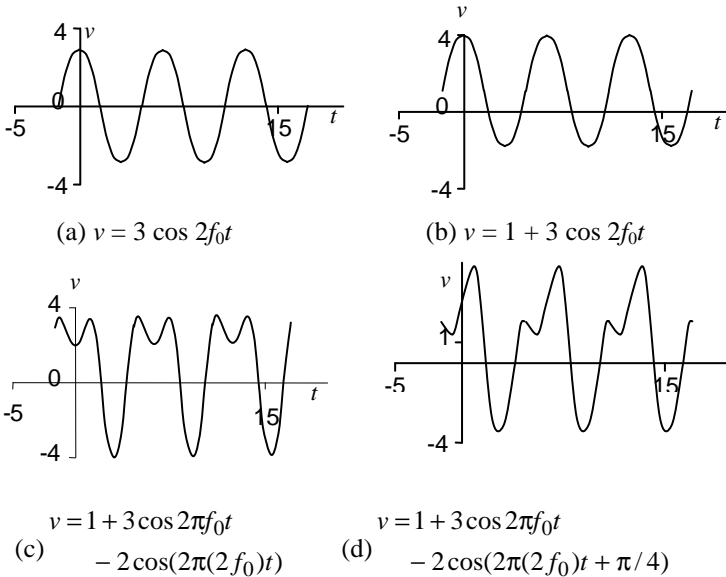
3.2.1. Bentuk Gelombang Periodik dan Komponennya

Kita telah melihat bahwa bentuk gelombang adalah persamaan atau grafik yang menunjukkan *perilaku sinyal sebagai fungsi waktu*. Di samping sebagai fungsi waktu, suatu sinyal juga dapat dinyatakan sebagai suatu *spektrum*, yang menunjukkan *perilaku sinyal sebagai fungsi frekuensi*. Jadi suatu sinyal dapat dipelajari di *kawasan waktu* dengan memandangnya sebagai bentuk gelombang, atau di *kawasan frekuensi* dengan memandangnya sebagai suatu spektrum.

Suatu sinyal periodik dapat diuraikan menjadi jumlah dari beberapa komponen sinus, dengan amplitudo, sudut fasa, dan frekuensi yang berlainan. Dalam penguraian itu, sinyal akan terdiri dari komponen-komponen sinyal yang berupa *komponen searah* (nilai rata-rata dari sinyal), *komponen sinus dengan frekuensi dasar* f_0 , dan *komponen sinus dengan frekuensi harmonisa* nf_0 .

Pernyataan Sinyal dan Spektrum Sinyal

Frekuensi harmonisa adalah nilai frekuensi yang merupakan perkalian frekuensi dasar f_0 dengan bilangan bulat n . Frekuensi f_0 kita sebut sebagai frekuensi dasar karena frekuensi inilah yang menentukan perioda sinyal $T_0 = 1/f_0$. Frekuensi harmonisa dimulai dari harmonisa ke-dua ($2f_0$), harmonisa ke-tiga ($3f_0$), dan seterusnya yang secara umum kita katakan harmonisa ke- n mempunyai frekuensi nf_0 . Gb.3.1. di bawah ini memperlihatkan bagaimana bentuk gelombang ditentukan oleh perberbedaan komponen-komponen yang menyusunnya.



Gb.3.1. Bentuk gelombang periodik tergantung komponen-komponen sinusnya.

Berikut ini kita akan melihat suatu contoh sinyal dengan bentuk gelombang yang dinyatakan oleh persamaan

$$v = 10 + 40 \cos(2\pi f_0 t) + 20 \sin(2\pi(2f_0)t) - 10 \cos(2\pi(4f_0)t)$$

Sinyal ini merupakan jumlah dari satu komponen searah dan tiga komponen sinus yang kita sebut juga komponen bolak-balik. Komponen searah sering kita sebut komponen berfrekuensi nol karena $v(t) = V_A \cos(2\pi f t) = V_A$ jika $f = 0$. Komponen bolak-balik yang pertama adalah komponen sinus dasar karena komponen inilah

Pernyataan Sinyal dan Spektrum Sinyal

yang mempunyai frekuensi paling rendah tetapi tidak nol. Suku ketiga dan keempat adalah harmonisa ke-2 dan ke-4; harmonisa ke-3 tidak ada.

Untuk melihat spektrum sinyal, kita harus menuliskan tiap suku dengan bentuk yang sama yaitu bentuk standar seperti $V_A \cos(2\pi f t + \phi)$. Dengan menggunakan identitas $\sin(x) = \cos(x-90^\circ)$ dan $-\cos(x) = \cos(x+180^\circ)$, maka persamaan sinyal di atas dapat kita tuliskan sebagai:

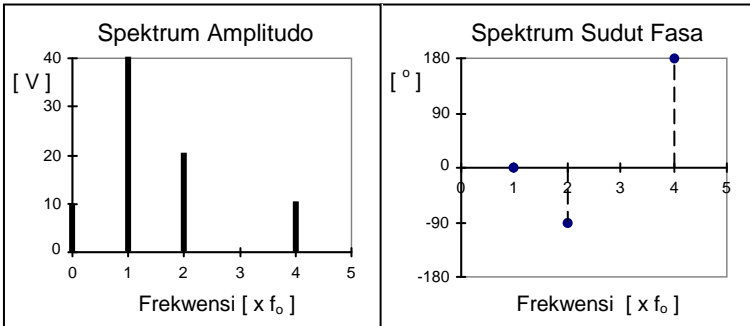
$$v = 10 + 40 \cos(2\pi f_0 t) + 20 \cos(2\pi 2 f_0 t - 90^\circ) + 10 \cos(2\pi 4 f_0 t + 180^\circ)$$

Dalam persamaan ini semua suku telah kita tuliskan dalam bentuk standar, dan kita dapat melihat amplitudo dan sudut fasa dari tiap komponen seperti dalam tabel berikut.

Frekuensi	0	f_0	$2 f_0$	$4 f_0$
Amplitudo (V)	10	40	20	10
Sudut fasa	—	0°	-90°	180°

Tabel ini menunjukkan spektrum dari sinyal yang sedang kita bahas karena ia menunjukkan baik amplitudo maupun sudut fasa dari semua komponen cosinus *sebagai fungsi dari frekuensi*. Sinyal yang kita bahas ini berisi empat macam frekuensi, yaitu : 0, f_0 , $2f_0$, dan $4f_0$. Amplitudo pada setiap frekuensi secara berturut-turut adalah 10, 30, 15, dan 7,5 Volt. Sudut fasa dari komponen bolak-balik yang berfrekuensi f_0 , $2f_0$ dan $4f_0$ berturut turut adalah 0° , -90° , dan 180° .

Dari tabel tersebut di atas kita dapat menggambarkan dua grafik yaitu grafik amplitudo dan grafik sudut fasa, masing-masing sebagai fungsi frekuensi. Grafik yang pertama kita sebut *spektrum amplitudo* dan grafik yang kedua kita sebut *spektrum sudut fasa*, seperti terlihat pada Gb.3.2. berikut ini.



Gb.3.2. Spektrum amplitudo dan spektrum sudut fasa

Penguraian sinyal menjadi penjumlahan harmonisa-harmonisa, dapat diperluas untuk semua bentuk gelombang sinyal periodik. Bentuk gelombang persegi misalnya, yang juga merupakan suatu bentuk gelombang periodik, dapat diuraikan menjadi jumlah harmonisa sinus. Empat suku pertama dari persamaan hasil uraian gelombang persegi ini adalah sebagai berikut:

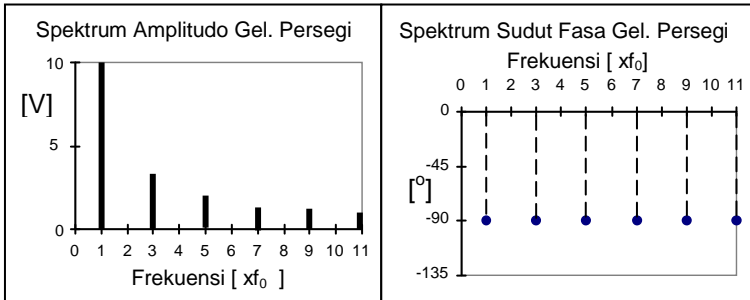
$$v = 10 \cos(2\pi f_0 t - 90^\circ) + \frac{10}{3} \cos(2\pi 3 f_0 t - 90^\circ) + \frac{10}{5} \cos(2\pi 5 f_0 t - 90^\circ) + \frac{10}{7} \cos(2\pi 7 f_0 t - 90^\circ) + \dots$$

Dari persamaan untuk gelombang persegi ini, terlihat bahwa semua harmonisa mempunyai sudut fasa sama besar yaitu -90° ; amplitudonya menurun dengan meningkatnya frekuensi dengan faktor $1/n$; tidak ada komponen searah dan tidak ada harmonisa genap. Tabel amplitudo dan sudut fasa adalah seperti berikut:

Frekuensi:	0	f_0	$2f_0$	$3f_0$	$4f_0$	$5f_0$	$6f_0$..	nf_0
Amplitudo:	0	10	0	3,3	0	2	0	..	$10/n$
Sudut Fasa:	-	-90°	-	-90°	-	-90°	-	..	-90°

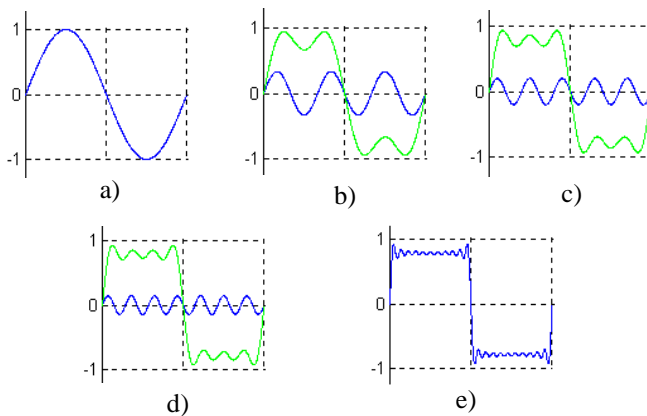
Spektrum amplitudo dan spektrum sudut fasa dari gelombang persegi ini terlihat pada Gb.3.3. di bawah ini.

Pernyataan Sinyal dan Spektrum Sinyal



Gb.3.3. Spektrum amplitudo dan spektrum sudut fasa gelombang persegi.

Gb.3.4. berikut ini memperlihatkan bagaimana gelombang persegi terbentuk dari harmonisa-harmonisanya.



Gb.3.4. Uraian bentuk gelombang persegi.

- a) sinus dasar; b) sinus dasar + harmonisa ke-3; c) sinus dasar + harmonisa ke-3 + harmonisa ke-5; d) sinus dasar + harmonisa ke-3 + harmonisa ke-5 + harmonisa ke-7; e) sinus dasar + harmonisa-harmonisa sampai harmonisa ke-21.

Penjumlahan sampai dengan harmonisa ke-21 memperlihatkan bahwa penjumlahan seterusnya akan makin mendekati bentuk gelombang persegi. Sampai harmonisa ke berapa kita akan melakukan penjumlahan tergantung dari kepuasan kita untuk menerima bentuk yang diperoleh sebagai bentuk pendekatan gelombang persegi.

3.2.2. Lebar Pita

Dari contoh gelombang persegi di atas, terlihat bahwa dengan menambahkan harmonisa-harmonisa pada sinus dasarnya kita akan makin mendekati bentuk gelombang persegi. Penambahan ini dapat kita lakukan terus sampai ke suatu harmonisa tinggi yang memberikan bentuk gelombang yang kita anggap cukup memuaskan artinya cukup dekat dengan bentuk gelombang yang kita inginkan.

Pada spektrum amplitudo, kita juga dapat melihat bahwa makin tinggi frekuensi harmonisa, akan makin rendah amplitudonya. Hal ini tidak hanya berlaku untuk gelombang persegi saja melainkan berlaku secara umum. Oleh karena itu kita dapat menetapkan suatu batas *frekuensi tertinggi* dengan menganggap amplitudo dari harmonisa-harmonisa yang memiliki frekuensi di atas frekuensi tertinggi ini dapat diabaikan. Sebagai contoh, batas frekuensi tertinggi tersebut dapat kita ambil frekuensi harmonisa yang amplitudonya tinggal (misalnya) 2% dari amplitudo sinus dasar.

Jika batas frekuensi tertinggi dapat kita tetapkan, batas frekuensi terendah juga perlu kita tetapkan. Batas frekuensi terendah adalah frekuensi sinus dasar jika bentuk gelombang yang kita tinjau tidak mengandung komponen searah. Jika mengandung komponen searah maka frekuensi terendah adalah nol. Selisih dari frekuensi tertinggi dan terendah disebut *lebar pita* (*band width*).

3.2.3. Deret Fourier

Penguraian suatu sinyal periodik menjadi suatu spektrum sinyal tidak lain adalah pernyataan fungsi periodik kedalam deret Fourier yang kita pelajari dalam matematika. Jika $f(t)$ adalah fungsi periodik yang memenuhi persyaratan Dirichlet, maka $f(t)$ dapat dinyatakan sebagai deret Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \quad (3.10)$$

Persyaratan Dirichlet meminta agar $f(t)$ bernilai tunggal, integral $|f(t)|$ dalam selang satu perioda adalah berhingga, dan $f(t)$ mempunyai ketidak-kontinyuan dalam jumlah yang terbatas dalam satu perioda. Deret Fourier konvergen untuk fungsi periodik yang memenuhi persyaratan ini. Tetapi ada fungsi-fungsi yang tidak memenuhi persyaratan ini namun mempunyai deret Fourier yang

konvergen. Jadi persyaratan Dirichlet ini cukup untuk terjadinya deret Fourier yang konvergen tetapi tidak harus. Persyaratan ini tidak merupakan persoalan yang serius sebab kebanyakan bentuk-bentuk gelombang sinyal yang kita temui dalam rekayasa elektro memenuhi persyaratan ini. Contoh-contoh bentuk gelombang periodik yang sering kita temui adalah gelombang persegi, deretan pulsa, segitiga, gigi-gergaji, sinus, cosinus, sinus setengah gelombang, sinus gelombang penuh.

Dalam persamaan (3.10) a_0 adalah komponen searah yang merupakan nilai rata-rata sinyal sedangkan suku kedua adalah komponen sinus yang merupakan penjumlahan dari fungsi sinus dan cosinus, masing-masing dengan koefisien Fourier a_n dan b_n . Persamaan (3.10) menunjukkan bahwa komponen sinus dari sinyal periodik ditentukan oleh apa yang berada dalam tanda kurung, yaitu

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{a_n} \sin(n\omega_0 t) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Jika $\frac{b_n}{a_n} = \tan \varphi_n$ maka persamaan (3.11) menjadi

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\cos \varphi_n} [\cos \varphi_n \cos(n\omega_0 t) + \sin \varphi_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \right] \end{aligned}$$

dan (3.10) menjadi

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \right] \quad (3.12)$$

Bentuk persamaan (3.12) ini lebih jelas memperlihatkan bahwa a_0 adalah nilai rata-rata sinyal; $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ adalah amplitudo-amplitudo sinyal sinus dan φ_n adalah sudut fasanya. Dengan demikian maka (3.12) merupakan pernyataan matematis dari sinyal periodik secara umum. Nilai φ_n tergantung dari tanda a_n dan b_n .

a_n	b_n	ϕ_n
+	+	di kuadran pertama
-	+	di kuadran ke-dua
-	-	di kuadran ke-tiga
+	-	di kuadran ke-empat

Koefisien Fourier ditentukan melalui hubungan (3.13).

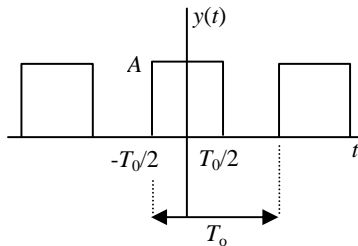
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \\
 b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Perhitungan koefisien Fourier dengan menggunakan formula (3.13) ini dapat dilakukan jika sinyal periodik memiliki persamaan yang diketahui dan mudah di-integrasi. Jika sinyal tersebut sulit dicari persamaannya, misalnya sinyal diketahui dalam bentuk kurva (grafik), maka perhitungan dapat dilakukan dengan pendekatan numerik yang akan kita pelajari di bab lain.

3.2.4. Koefisien Fourier Beberapa Bentuk Gelombang Periodik

Pada sinyal-sinyal periodik yang sering kita temui, banyak diantara koefisien-koefisien Fourier yang bernilai nol. Hal ini tergantung dari *kesimetrisan* sinyal $y(t)$. Ada dua kondisi simetri yaitu *simetri genap* dan *simetri ganjil (gasal)*.

Simetri Genap. Suatu sinyal dikatakan mempunyai simetri genap jika $y(t) = y(-t)$. Sinyal dengan simetri genap simetris terhadap sumbu- y . Untuk sinyal semacam ini, dari (3.10) kita dapatkan



$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \text{ dan}$$

$$y(-t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) - b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

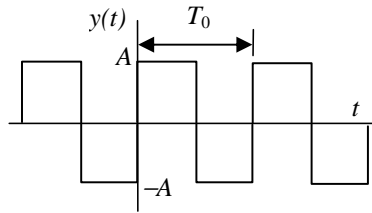
Kalau kedua sinyal ini harus sama, maka haruslah $b_n = 0$, dan uraian sinyal $y(t)$ yang memiliki simetri genap ini menjadi

$$b_n = 0$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (3.14)$$

Sinyal dengan simetri genap merupakan gabungan dari sinyal-sinyal cosinus; sinyal cosinus sendiri adalah sinyal dengan simetri genap.

Simetri Ganjil. Suatu sinyal dikatakan mempunyai simetri ganjil jika $y(t) = -y(-t)$. Sinyal semacam ini simetris terhadap titik-asal $[0,0]$.



Dari (3.10) kita dapatkan

$$-y(-t) = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Kalau sinyal ini harus sama dengan

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

maka haruslah

$$a_0 = 0 \text{ dan } a_n = 0$$

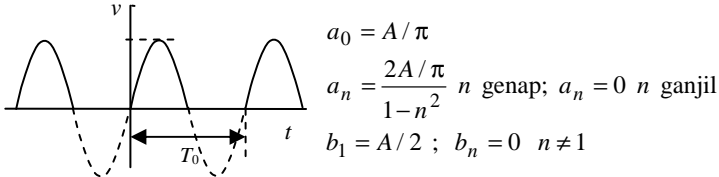
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (3.15)$$

Sinyal dengan simetri ganjil merupakan gabungan dari sinyal-sinyal sinus; sinyal sinus sendiri adalah sinyal dengan simetri ganjil.

Berikut ini diberikan formula untuk menentukan koefisien Fourier pada beberapa bentuk gelombang periodik. Bentuk-bentuk

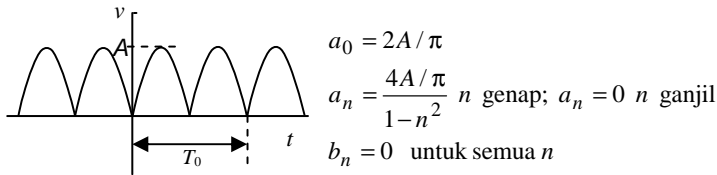
gelombang yang tercantum disini adalah bentuk gelombang yang persamaan matematisnya mudah diperoleh, sehingga pencarian koefisien Fourier menggunakan hubungan (3.13) dapat dilakukan.

Penyearahan Setengah Gelombang:



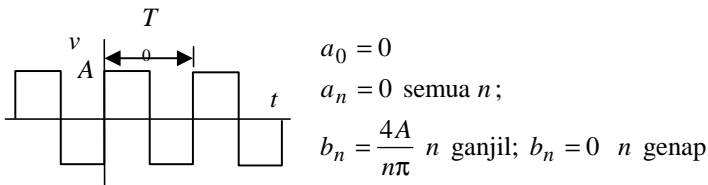
Sinyal ini tidak simetris terhadap sumbu waktu; oleh karena itu $a_0 \neq 0$. Perhitungan a_0 , a_n , b_n lebih mudah dilakukan dengan menggunakan relasi (3.12).

Penyearahan Gelombang Penuh Sinyal Sinus:



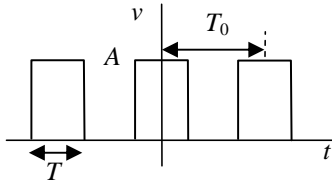
Sinyal ini memiliki simetri genap sehingga ia tidak mengandung komponen sinus; $b_n = 0$ untuk semua n . Ia tidak simetris terhadap sumbu waktu oleh karena itu $a_0 \neq 0$, dengan nilai dua kali lipat dari penyearahan setengah gelombang. Demikian pula halnya a_n untuk n genap bernilai dua kali lipat dari penyearahan setengah gelombang.

Sinyal Persegi:



Sinyal persegi yang tergambar ini memiliki simetri ganjil. Ia tidak mengandung komponen cosinus; $a_n = 0$ untuk semua n . Ia simetris terhadap sumbu waktu, jadi $a_0 = 0$.

Deretan Pulsa:



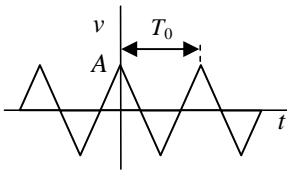
$$a_0 = AT / T_0$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\pi T}{T_0}$$

$$b_n = 0 \text{ untuk semua } n$$

Sinyal yang tergambar ini memiliki simetri genap; $b_n = 0$ untuk semua n . Ia tidak simetris terhadap sumbu waktu, oleh karena itu $a_0 \neq 0$.

Sinyal Segitiga:



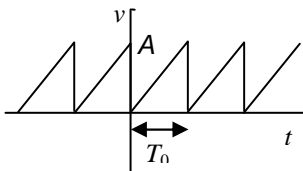
$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{8A}{(n\pi)^2} \text{ } n \text{ ganjil; } a_n = 0 \text{ } n \text{ genap}$$

$$b_n = 0 \text{ untuk semua } n$$

Sinyal segitiga yang tergambar ini mempunyai simetri genap; $b_n = 0$ untuk semua n . Ia simetris terhadap sumbu waktu; $a_0 = 0$.

Sinyal Gigi Gergaji:



$$a_0 = A/2$$

$$a_n = 0 \text{ untuk semua } n$$

$$b_n = -\frac{A}{n\pi} \text{ untuk semua } n$$

Sinyal ini tidak simetris terhadap sumbu waktu; $a_0 = A/2$. Ia memiliki simetri ganjil; $a_n = 0$ untuk semua n .

CONTOH-3.3: Uraikanlah bentuk gelombang penyearahan tegangan setengah gelombang $v = \sin \omega_0 t$ V sampai dengan harmonisa ke-6 dan gambarkan spektrum amplitudo dan bentuk gelombang pendekatannya.

Solusi:

Sinus setengah gelombang ini beramplitudo 1. Koefisien Fourier menurut formula di atas, serta amplitudo dan sudut fasa komponen gelombang ini adalah:

Koefisien Fourier		Amplitudo	ϕ [rad]
a_0	0,318	0,318	
a_1	0	0,5	1,57
b_1	0,5		
a_2	-0,212	0,212	0
b_2	0		
a_4	-0,042	0,042	0
b_4	0		
a_6	-0,018	0,018	0
b_6	0		

Dengan menggunakan koefisien Fourier, persamaan gelombang adalah

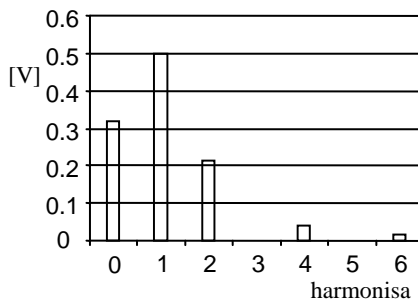
$$v(t) = 0,318 + 0,5 \sin(\omega_0 t) - 0,212 \cos 2\omega_0 t - 0,042 \cos 4\omega_0 t - 0,018 \cos 6\omega_0 t \text{ V}$$

yang nilai amplitudonya adalah

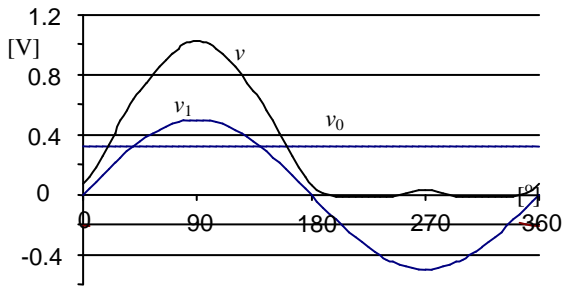
$$A_0 = 0,318 \text{ V}; A_1 = 0,5 \text{ V}; A_2 = 0,212 \text{ V};$$

$$A_4 = 0,042 \text{ V}; A_6 = 0,018 \text{ V}$$

Gambar berikut ini memperlihatkan spektrum amplitudo sedangkan bentuk gelombang pendekatan dalam satu perioda (sampai harmonisa ke-6) terlihat pada gambar di bawah ini.



Pernyataan Sinyal dan Spektrum Sinyal



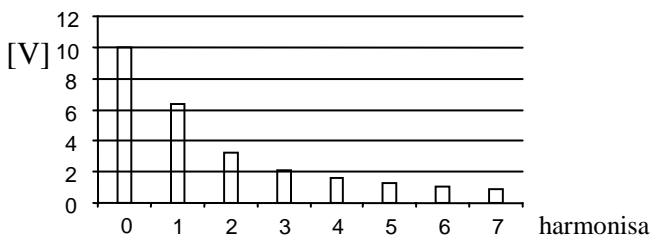
CONTOH-3.4: Suatu tegangan berbentuk gelombang gigi gergaji memiliki nilai maksimum 20 volt, dengan frekuensi 20 siklus per detik. Uraikanlah bentuk gelombang tegangan ini atas komponen-komponen sampai harmonisa ke-7 dan gambarkan spektrum amplitudonya serta bentuk gelombang pendekatan.

Solusi:

Setelah diperoleh koefisien Fourier, persamaan gelombang gigi gergaji dapat dinyatakan dalam komponen-komponennya sebagai:

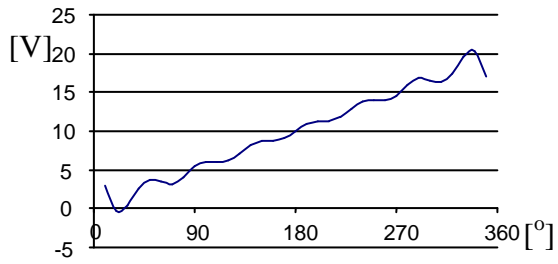
$$v(t) = 10 - 6,366\sin\omega_0 t - 3,183\sin 2\omega_0 t - 2,122\sin 3\omega_0 t - 1,592\sin 4\omega_0 t \\ - 1,273\sin 5\omega_0 t - 1,061\sin 6\omega_0 t - 0,909\sin 7\omega_0 t \quad \text{V}$$

Spektrum amplitudo terlihatkan pada gambar berikut.



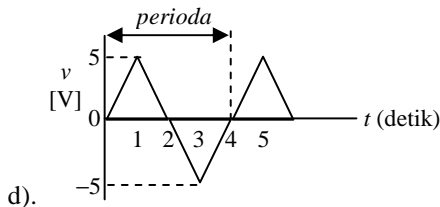
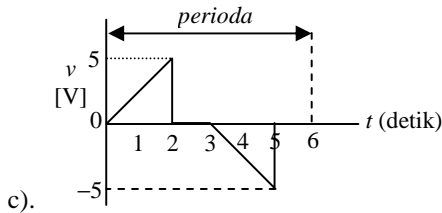
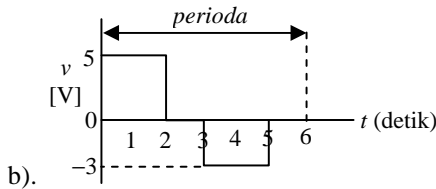
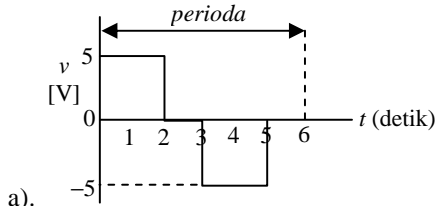
Jika kita gambarkan bentuk gelombang sampai harmonisa ke-7 seperti yang dinyatakan oleh persamaan di atas, kita akan mendapatkan bentuk seperti gambar di bawah ini. Terlihat pada gambar ini bahwa dengan memperhitungkan komponen hanya sampai harmonisa ke-7, bentuk gelombang gigi gergaji yang diperoleh sangat terdistorsi.

Pernyataan Sinyal dan Spektrum Sinyal



Soal-Soal

1. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal-sinyal berikut.



2. a). Gambarkan bentuk gelombang deretan pulsa tegangan beramplitudo 10 V, lebar pulsa 20 ms, perioda 50 ms. b). Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal.
3. a). Gambarkan sinyal tegangan gigi gergaji ber amplitudo 10 V dengan perioda 0,5 s. b). Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal.

Pernyataan Sinyal dan Spektrum Sinyal

4. Untuk menggerakkan sebuah bandul diperlukan pulsa arus 50 mA dengan lebar pulsa 3 ms, yang harus diberikan setiap detik. Jika pulsa arus itu diambil dari batere berkapasitas 0,5 Ah, berapa lamakah batere akan bertahan ?
5. Gambarkan spektrum amplitudo dan sudut fasa dari gelombang tegangan berikut dan tentukan lebar pita dengan mengambil batas terrendah amplitudo harmonisa 5%.
 - a). $v = 4 + 5 \sin 2\pi 2000t - 2 \cos 2\pi 4000t + 0,2 \sin 2\pi 8000t \quad V$
 - b). $v = 3 \cos(2\pi 1000t - 60^\circ) - 2 \sin 2\pi 2000t + \cos 2\pi 8000t \quad V$

BAB 4 Model Piranti Pasif

Suatu piranti mempunyai karakteristik atau perilaku tertentu.

Perilaku suatu piranti dinyatakan oleh *karakteristik i-v* yang dimilikinya, yaitu hubungan antara arus yang melalui piranti dengan tegangan yang ada di antara terminalnya.

Pada umumnya hubungan ini cukup rumit dan tidak linier. Untuk keperluan analisis, kita menggunakan suatu *model linier* yang lebih sederhana yang cukup mendekati sifat-sifat yang menonjol dari piranti itu. Untuk membedakan antara piranti sebagai *benda nyata* dan *modelnya*, model itu kita sebut *elemen*. Piranti dan elemen kita kelompokkan menjadi dua kelompok yaitu *elemen pasif* dan *elemen aktif*. Dalam bab ini kita akan mempelajari piranti dan elemen pasif sedangkan piranti dan elemen aktif akan kita pelajari di bab berikutnya.

Dengan mempelajari model piranti pasif, kita akan

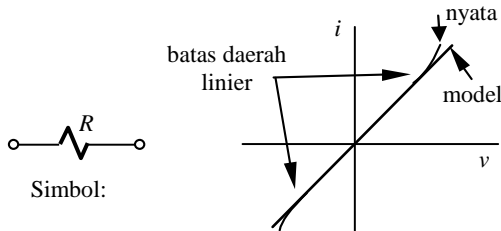
- memahami bahwa dalam analisis rangkaian listrik, piranti dinyatakan sebagai elemen rangkaian yang merupakan model linier dari piranti;
- mampu memformulasikan karakteristik arus-tegangan piranti / elemen pasif seperti resistor, kapasitor, induktor, induktansi bersama, transformator ideal.

4.1. Resistor

Kita mengenal resistor dalam rentang dimensi (ukuran) yang lebar. Resistor yang digunakan pada rangkaian elektronika berukuran hanya beberapa milimeter bahkan ukuran mikron yang tergabung dalam satu chip; untuk keperluan variasi tegangan terdapat potensiometer yang berupa resistor dengan kontak geser. Untuk rangkaian pemroses energi, resistor mempunyai ukuran yang besar seperti misalnya resistor yang digunakan dalam lokomotif kereta listrik model lama. Pada dasarnya kita memerlukan resistor yang murni resistif. Akan tetapi dalam kenyataan hal ini tidak mudah dapat dicapai. Namun demikian dengan teknik-teknik pembuatan tertentu, selalu diusahakan agar resistor mendekati keadaan resistif murni tersebut. (Lihat Lampiran I).

Resistor adalah piranti yang sesungguhnya mempunyai karakteristik *i-v* yang tidak linier (non linier) seperti terlihat pada Gb.4.1. Namun kalau kita perhatikan karakteristik ini, ada bagian tertentu yang dapat didekati

dengan hubungan linier, yaitu bagian yang berada dalam batas daerah operasi resistor tersebut. Batas daerah operasi ini biasanya dinyatakan sebagai batas daya (*power rating*), yaitu daerah yang mempunyai kurva i - v berbentuk garis lurus melalui titik asal. Dalam analisis rangkaian, kita selalu memanfaatkan resistor dalam batas-batas kemampuan daya-nya sehingga kita mempunyai apa yang kita sebut sebagai *resistor linier*.



Gb.4.1. Karakteristi i - v resistor

4.1.1. Karakteristik i - v Resistor

Dengan mengikuti konvensi pasif, hubungan antara arus dan tegangan resistor dapat ditulis dalam suatu persamaan yang dikenal sebagai hukum Ohm yaitu :

$$v_R = R i_R \text{ atau } i_R = G v_R ; \quad \text{dengan } G = \frac{1}{R} \quad (4.1)$$

R dan G adalah suatu konstanta dalam relasi (4.1).

Parameter R disebut *resistansi* dengan satuan ohm, Ω . Parameter G disebut *konduktansi* dengan satuan siemens, S (atau *mho* dalam literatur lama). Secara grafis, hukum Ohm berbentuk garis lurus. Karakteristik i - v dalam hukum Ohm adalah *linier dan bilateral*. *Linier* berarti karakteristiknya berbentuk garis lurus, sehingga tegangan selalu sebanding dengan arus, dan demikian pula sebaliknya. *Bilateral* berarti bahwa kurva karakteristiknya simetris terhadap titik (0,0). Karena sifat bilateral ini maka pembalikan tegangan akan menyebabkan pembalikan arah arus tanpa mengubah besar arusnya. Dengan demikian kita dapat menghubungkan resistor dalam rangkaian tanpa memperhatikan polaritasnya. Hal ini berbeda dengan piranti lain seperti dioda, transistor, OP AMP, sumber, yang menuntut kita untuk selalu memperhatikan polaritasnya karena piranti-piranti ini tidak bersifat bilateral.

4.1.2. Daya Pada Resistor

Daya yang diserap resistor dapat dihitung dengan hubungan

$$p_R = v_R i_R = i_R^2 R = v_R^2 G = \frac{v_R^2}{R} \quad (4.2)$$

Di sini, R bernilai positif maka daya selalu positif. Berdasarkan konvensi pasif, hal ini berarti bahwa resistor selalu *menyerap daya*.

CONTOH-4.1: Tegangan pada sebuah resistor $400 \, \Omega$ adalah $200 \, \text{V}$ (konstan). Berapakah arus yang mengalir melalui resistor tersebut dan berapakah daya yang diserap ? Dalam waktu $8 \, \text{jam}$, berapakah energi yang diserap ?

Solusi:

Arus dan daya pada resistor adalah

$$i = \frac{v}{R} = \frac{200}{400} = 0,5 \, \text{A} \quad \text{dan} \quad p = vi = \frac{v^2}{R} = \frac{(200)^2}{400} = 100 \, \text{W}$$

Karena tegangan dan arus konstan maka jumlah energi yang diserap selama $8 \, \text{jam}$ adalah

$$w = \int_0^8 p dt = \int_0^8 100 dt = 100 \times 8 = 800 \, \text{Watt. jam} = 0,8 \, \text{kWh}$$

CONTOH-4.2: Tegangan pada suatu resistor $1200 \, \Omega$ berubah terhadap waktu sebagai $v_R = 240 \sin 400t \, \text{Volt}$. Bagaimanakah arus yang melalui resistor dan daya yang diserapnya ?

Solusi :

Arus yang melalui resistor adalah

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{240 \sin 400t}{1200} = 200 \sin 400t \, \text{mA.}$$

Daya yang diserap adalah

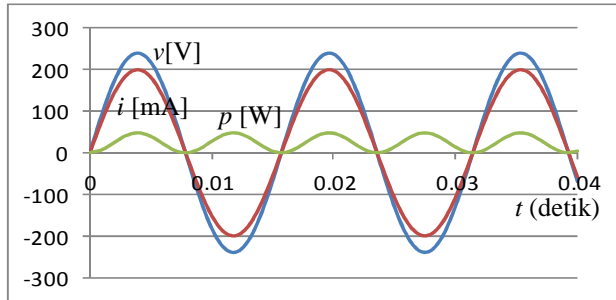
$$p_R = v_R i_R = 240 \sin 400t \times 0,2 \sin 400t = 48 \sin^2 400t \, \text{W}$$

Dengan menggunakan kesamaan $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, maka nilai daya dapat dituliskan

$$p_R = 48 (1 - \cos 800t) / 2 = 24 - 24 \cos 800t \, \text{W}$$

Pemahaman :

Jika kita gambarkan tegangan, arus, dan daya, akan kita peroleh gambar seperti di bawah ini.



Arus dan tegangan bervariasi secara bersamaan. Hal ini terlihat juga dari persamaan arus dan tegangan, yang keduanya merupakan fungsi sinus. Daya bervariasi secara periodik dengan frekuensi dua kali lipat dari frekuensi tegangan maupun arus, namun nilainya tidak pernah negatif. Nilai rata-rata daya selalu positif; hal ini dapat kita lihat juga pada persamaan yang kita peroleh, yang menunjukkan bahwa daya terdiri dari komponen konstan 24 W ditambah komponen yang bervariasi sinusoidal yang memiliki nilai rata-rata 0. Menurut konvensi pasif, nilai rata-rata yang selalu positif menunjukkan bahwa resistor selalu menyerap daya.

4.2. Kapasitor

Seperti halnya resistor, kita mengenal kapasitor yang berdimensi kecil yang sering dipakai pada rangkaian elektronika sampai kapasitor berdimensi besar yang digunakan dalam rangkaian pemrosesan energi yang kita kenal sebagai *capacitor bank*. Untuk keperluan penalaan, kita mengenal juga kapasitor dengan nilai yang dapat diubah yang disebut kapasitor variabel.

Kapasitor adalah suatu piranti dinamik yang berbasis pada variasi kuat medan listrik yang dibangkitkan oleh sumber tegangan. Ada berbagai bentuk kapasitor yang dapat kita jumpai dalam praktik. (Lihat Lampiran II). Bentuk yang paling sederhana adalah dua pelat paralel yang dipisahkan oleh suatu bahan dielektrik. Bahan dielektrik ini memberikan gejala resistansi. Dalam mempelajari analisis rangkaian listrik kita menganggap kapasitor sebagai piranti ideal, tanpa mengandung

resistansi. Suatu kapasitor mempunyai *kapasitansi* C yang besarnya adalah

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad (4.3)$$

dengan ϵ_r adalah permitivitas relatif dielektrik dan ϵ_0 adalah permitivitas ruang hampa; A adalah luas elektroda dan d adalah tebal dielektrik yang sama dengan jarak elektroda. Kapasitansi ini merupakan konstanta yang menentukan hubungan antara beda tegangan antar elektroda kapasitor, v_C , dengan muatan yang terkandung pada elektrodanya, q_C .

$$q_C = C v_C \quad (4.4)$$

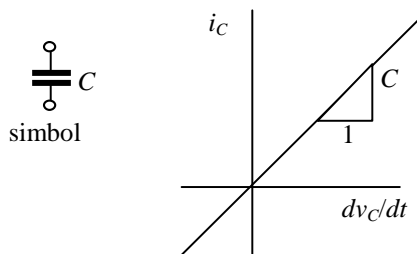
Satuan kapasitansi adalah *farad* (F) (sebagai penghormatan kepada Michel Faraday, seorang fisikawan Inggris).

4.2.1. Karakteristik i - v Kapasitor Ideal

Hubungan antara arus dan tegangan kapasitor dapat kita peroleh dari turunan q_C dalam relasi (4.4), yaitu

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \frac{d(Cv_C)}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} \quad (4.5)$$

Hubungan i - v ini dapat kita gambarkan dalam bentuk grafik seperti terlihat pada Gb.4.2. Arus i_C berbanding lurus dengan turunan terhadap waktu dari v_C dan kemiringan dari garis itu adalah C .



Gb.4.2. Karakteristik i - v kapasitor.

Dalam relasi (4.5), arus i_C merupakan turunan terhadap waktu dari tegangan v_C . Hal ini berarti bahwa jika v_C konstan maka arusnya nol, dan sebaliknya kalau arusnya nol berarti tegangannya konstan. Dengan kata lain kapasitor bersifat sebagai rangkaian terbuka jika diberi tegangan searah. Jadi arus hanya akan mengalir jika tegangannya berubah terhadap

waktu dan oleh karena itu kapasitor disebut *elemen dinamik*. Akan tetapi perubahan tegangan yang tak-kontinu akan memberikan arus yang tak-terhingga besarnya; hal demikian ini secara fisis tidak mungkin. Oleh karena itu tegangan kapasitor harus merupakan fungsi kontinu terhadap waktu. Untuk mencari tegangan v_C kita gunakan hubungan antara arus dan tegangan yang sudah kita peroleh, yaitu $i_C = C dv_C / dt$, dengan mengalikan kedua ruas dengan dt dan mengintegrasinya:

$$\int_{v_C(t_0)}^{v_C(t)} dv_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt = v_C \quad (4.6)$$

Jika dalam menentukan batas-batas integrasi tersebut diatas kapasitor sudah mempunyai tegangan sebesar $v_C(t_0)$ saat $t = t_0$, maka integrasi di atas memberikan :

$$v_C = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt \quad (4.7)$$

Kalau pada saat $t=t_0$ kapasitor belum bertegangan maka $v_C(t_0)=0$, sehingga kita mempunyai hubungan

$$v_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt \quad (4.8)$$

4.2.2. Daya Dan Energi Pada Kapasitor

Dengan mengikuti konvensi pasif, daya kapasitor dapat kita tuliskan sebagai

$$p_C = v_C i_C = C v_C \frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C v_C^2 \right] \quad (4.9)$$

Persamaan (4.9) ini menunjukkan bahwa daya bisa positif bisa juga negatif karena tegangan kapasitor dan laju perubahannya bisa mempunyai tanda yang berlawanan. Daya positif berarti kapasitor menyerap daya, sedangkan kalau daya negatif berarti kapasitor memberikan daya. Kemampuan kapasitor untuk *menyerap* dan *memberikan daya* ini mempunyai arti bahwa kapasitor dapat *menyimpan energi*. Besar energi yang tersimpan pada kapasitor dapat kita lihat dari persamaan (4.9). Karena kita tahu bahwa daya adalah turunan terhadap waktu dari energi, maka apa yang berada dalam tanda kurung pada persamaan (4.9) di atas tentulah menunjukkan energi. Secara matematis

energi yang tersimpan dalam kapasitor pada saat t kita peroleh dari persamaan di atas, yaitu

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 + \text{konstanta} \quad (4.10)$$

Konstanta pada (4.10) adalah jumlah energi yang telah tersimpan sebelumnya, yang kita sebut simpanan energi awal. Apabila simpanan energi awal ini nol, maka

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 \quad (4.11)$$

Energi yang tersimpan ini tidak pernah negatif sebab ia sebanding dengan kwadrat dari tegangan. Kapasitor akan menyerap daya dari rangkaian jika ia sedang melakukan penyimpanan energi. Ia akan mengeluarkan energi yang disimpannya itu pada waktu ia memberikan energi pada rangkaian. Namun *alih energi netto* tidak pernah negatif ; hal ini berarti bahwa kapasitor adalah elemen pasif.

Karena tegangan kapasitor menentukan *status* atau *keadaan energi* dari elemen ini, maka tegangan kapasitor disebut sebagai *peubah keadaan* (*state variable*).

Secara singkat dapat kita katakan bahwa kapasitor merupakan suatu elemen dinamik dengan sifat-sifat sebagai berikut :

- 1). Arus yang melalui kapasitor akan nol jika tegangannya tidak berubah terhadap waktu. Kapasitor berperilaku seperti rangkaian terbuka pada tegangan searah.
- 2). Tegangan kapasitor adalah fungsi kontinyu dari waktu. Perubahan tak kontinyu dari tegangan kapasitor memerlukan arus dan daya yang tak terhingga besarnya, yang secara fisis tidak mungkin terjadi.
- 3). Kapasitor menyerap daya dari rangkaian jika ia melakukan penyimpanan energi. Ia mengeluarkan energi yang disimpan sebelumnya, jika ia memberikan energi pada rangkaian.

CONTOH-4.3: Tegangan pada suatu kapasitor $2 \mu\text{F}$ berubah terhadap waktu sebagai $v_C = 200\sin 400t$ Volt. Bagaimanakah arus yang melalui kapasitor dan daya yang *diserapnya*?

Solusi :

Arus yang melalui kapasitor adalah

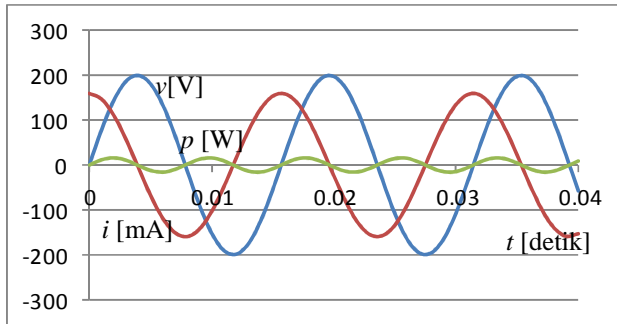
$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 2 \times 10^{-6} \times \frac{d}{dt}(200 \sin 400t) = 160 \cos 400t \text{ mA}$$

Daya yang diserap kapasitor adalah

$$\begin{aligned} p_C &= v_C i_C = 200 \sin 400t \times 0.16 \cos 400t \\ &= 32 \cos 400t \sin 400t = 16 \sin 800t \text{ W} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Jika tegangan, arus, dan daya kita gambarkan akan kita lihat keadaan yang berbeda dengan apa yang kita temui pada resistor pada contoh 4.2. Hal ini diperlihatkan pada gambar di bawah ini. Pada waktu tegangan mulai naik pada $t = 0$, arus justru sudah mulai menurun dari nilai maksimumnya. Dengan kata lain gelombang arus mencapai nilai puncak-nya lebih dulu dari gelombang tegangan; dikatakan bahwa *arus kapasitor mendahului tegangan kapasitor*.



Perbedaan kemunculan ini disebut pergeseran fasa yang untuk kapasitor besarnya adalah 90° ; jadi arus mendahului tegangan dengan beda fasa sebesar 90° .

Daya bervariasi secara sinus dengan frekuensi dua kali lipat dari frekuensi tegangan maupun arus. Akan tetapi variasi ini simetris terhadap sumbu waktu. Selama setengah periode daya bernilai positif dan setengah periode berikutnya daya bernilai negatif; dan demikian berulang seterusnya. Menurut konvensi pasif, hal ini berarti bahwa kapasitor menyerap daya selama setengah periode dan memberikan daya selama setengah periode berikutnya. Secara keseluruhan tidak akan ada penyerapan daya netto; hal ini berbeda dengan resistor yang justru selalu menyerap daya karena daya selalu positif.

4.3. Induktor

Induktor sebagai piranti induktif, dengan dimensi kecil, banyak dipakai dalam rangkain elektronika. Untuk rangkaian pemroses energi, kita mengenal piranti induktif berukuran besar yang disebut *reaktor*. Induktor dibangun dari kawat (konduktor) yang dililitkan pada suatu inti yang terbuat dari bahan magnetik ataupun tanpa inti (berinti udara). Oleh karena ia terbuat dari gulungan kawat, maka induktor selalu mengandung resistansi. Akan tetapi dalam analisis rangkaian listrik yang akan kita pelajari, kita menganggap induktor sebagai piranti ideal tanpa mengandung resistansi.

Induktor adalah elemen dinamik yang berbasis pada variasi medan magnet yang ditimbulkan oleh arus. Pada kumparan dengan jumlah lilitan N , dan dialiri arus sebesar i_L , akan timbul fluksi magnet sebesar $\phi = kNi_L$, dengan k adalah suatu konstanta. Jika tidak ada kebocoran fluksi, fluksi ini akan memberikan *fluksi lingkup* sebesar $\lambda = N\phi = kN^2 i_L$. Hubungan antara arus yang melalui induktor itu dengan fluksi lingkup yang ditimbulkannya dinyatakan dengan suatu konstanta L yang kita sebut *induktansi* induktor dengan satuan *henry*.

$$\lambda = Li_L = kN^2 i_L \quad (4.12)$$

4.3.1. Karakteristik i - v Induktor Ideal

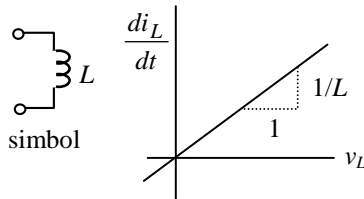
Menurut hukum Faraday, tegangan pada induktor sama dengan laju perubahan fluksi lingkungnya. Karakteristik i - v induktor dapat diperoleh dari turunan terhadap waktu dari λ dengan mengingat bahwa L adalah suatu konstanta.

$$v_L = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d[Li_L]}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad (4.13)$$

Dengan demikian kita mendapatkan hubungan i - v untuk induktor

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (4.14)$$

Hubungan ini dapat kita gambarkan seperti terlihat pada Gb.4.3.


 Gb.4.3. Karakteristik $i - v$ induktor

Turunan terhadap waktu dari i_L pada (4.14) di atas, menunjukkan bahwa tegangan pada induktor adalah nol jika arus tidak berubah terhadap waktu. Jadi pada arus searah tegangan induktor adalah nol, $v_L = 0$; ia berperilaku seperti suatu hubung singkat. Induktor adalah elemen dinamik karena hanya jika ada perubahan arus maka ada tegangan. Akan tetapi perubahan arus yang tak kontinu menyebabkan tegangan menjadi tak terhingga besarnya, yang secara fisis tak mungkin terjadi. Oleh karena itu arus i_L harus kontinu terhadap waktu (arus tidak dapat berubah secara tiba-tiba).

Untuk mencari arus i_L kita gunakan hubungan antara arus dan tegangan yang sudah kita peroleh, yaitu $v_L = L \, di_L/dt$, dengan mengalikan kedua ruas dengan dt dan mengintegrasinya:

$$\int_{i_L(t_0)}^{i_L(t)} di_L = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L dt = i_L \quad (4.15)$$

Jika dalam menentukan batas-batas integrasi tersebut diatas kita menganggap bahwa pada saat $t=t_0$ induktor sudah dialiri arus sebesar $i_L(t_0)$, maka integrasi di atas memberikan :

$$i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L dt \quad (4.16)$$

Kalau pada saat $t = t_0$ induktor belum dialiri arus maka $i_L = 0$, dan

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L dt \quad (4.17)$$

4.3.3. Daya Dan Energi Pada Induktor

Dengan mengikuti konvensi pasif, daya pada induktor dapat kita tuliskan sebagai

$$p_L = v_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L i_L^2 \right] \quad (4.18)$$

Seperti halnya pada kapasitor, persamaan daya untuk induktor ini juga menunjukkan bahwa daya bisa positif bisa juga negatif karena arus induktor dan laju perubahannya bisa mempunyai tanda yang berlawanan. Daya positif berarti induktor menyerap daya sedangkan kalau dayanya negatif berarti induktor memberikan daya. Jadi induktor dapat *menyerap* dan *memberikan daya*; hal ini berarti bahwa induktor dapat *menyimpan energi*.

Besar energi yang tersimpan pada induktor dapat kita lihat dari persamaan (4.18). Daya adalah turunan terhadap waktu dari energi, maka apa yang berada dalam tanda kurung pada persamaan (4.18) menunjukkan besar energi. Secara matematis besar energi pada saat t dapat kita peroleh dari persamaan tersebut, yaitu

$$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2 + \text{konstanta} \quad (4.19)$$

Konstanta pada (4.19) adalah energi yang telah tersimpan pada saat $t = 0$. Apabila simpanan energi awal ini nol, maka energi induktor adalah

$$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \quad (4.20)$$

Energi yang tersimpan ini tidak pernah negatif sebab ia sebanding dengan kwadrat dari arus. Induktor akan menyerap daya dari rangkaian jika ia sedang melakukan penyimpanan energi. Ia akan mengeluarkan energi yang disimpannya jika ia memberikan energi pada rangkaian. Seperti halnya pada kapasitor, alih energi netto pada induktor tidak pernah negatif; hal ini menunjukkan bahwa induktor adalah elemen pasif. Karena arus induktor menentukan status atau keadaan energi dari elemen ini, maka *arus* disebut sebagai *variabel keadaan (state variable)* dari induktor.

Secara singkat dapat kita katakan bahwa induktor merupakan suatu elemen dinamik dengan sifat-sifat sebagai berikut :

- 1). Tegangan pada induktor akan nol jika arusnya tidak berubah terhadap waktu. Induktor berperilaku seperti suatu hubung singkat pada arus searah.
- 2). Arus yang melalui induktor adalah fungsi kontinu dari waktu. Perubahan tak kontinu dari arus induktor memerlukan tegangan serta daya yang tak terhingga besarnya, yang secara fisis tidak mungkin terjadi.
- 3). Induktor menyerap daya dari rangkaian jika ia melakukan penyimpanan energi. Ia mengeluarkan energi yang disimpan sebelumnya jika ia memberikan energi pada rangkaian.

CONTOH-4.4: Tegangan pada suatu induktor 2,5 H berubah terhadap waktu sebagai $v_L = 200\sin 400t$ Volt. Bagaimanakah arus yang melalui induktor dan daya yang diserapnya ?

Solusi :

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt = \frac{200}{2.5 \times 400} \times (-\cos 400t) + K$$

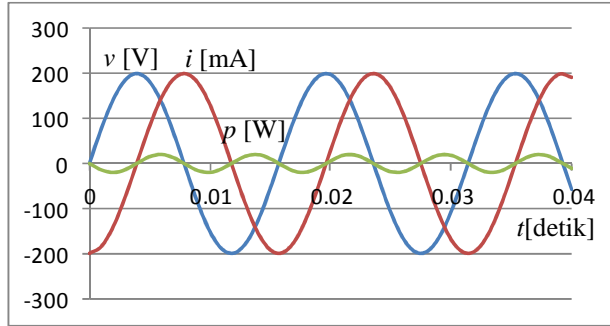
Konstanta integrasi K adalah arus pada induktor pada saat awal integrasi dilakukan, yang kita sebut arus awal induktor. Jika arus awal ini tidak ada maka

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_L &= -200 \cos 400t \text{ mA} \\ \Rightarrow p_L &= v_L i_L = 200 \sin 400t \times (-0.2 \cos 400t) \\ &= -40 \sin 400t \cos 400t = -20 \sin 800t \text{ W} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Variasi v , t , dan p pada induktor di halaman berikut.

Bentuk gelombang tegangan mencapai nilai puncak pertama-nya lebih awal dari bentuk gelombang arus. Jadi tegangan mendahului arus atau lebih sering dikatakan bahwa arus ketinggalan dari tegangan (hal ini merupakan kebalikan dari kapasitor). Perbedaan fasa di sini juga 90° , artinya arus ketinggalan dari tegangan dengan sudut fasa 90° .



Seperti halnya dengan kapasitor, daya bervariasi secara sinus dan simetris terhadap sumbu waktu. Jadi pada induktor juga tidak terjadi transfer energi netto. Induktor menyerap daya dalam setengah periode, dan memberikan daya pada setengah periode berikutnya.

4.4. Induktansi Bersama

Misalkan ada sebuah kumparan yang dialiri arus yang berubah terhadap waktu. Misalkan pula ada sebuah kumparan lain yang berdekatan dengan kumparan yang pertama. Fluksi dari kumparan yang pertama akan melingkupi pula kumparan yang ke-dua dan akan membangkitkan tegangan pada kumparan yang ke-dua itu. Kopling antara arus yang berubah di kumparan yang pertama dengan tegangan yang terbangkitkan di kumparan yang ke-dua menunjukkan adanya suatu *induktansi bersama*. Hal yang sebaliknya juga terjadi, yaitu jika kumparan ke-dua dialiri arus maka akan timbul tegangan di kumparan pertama. Jadi kalau masing-masing dialiri arus maka keduanya akan saling mempengaruhi.

Misalkan jumlah lilitan kumparan pertama adalah N_1 ; jika arus yang mengalir adalah i_1 maka akan timbul fluksi magnetik sebesar $\phi_1 = k_1 N_1 i_1$, dengan k_1 adalah konstanta proporsionalitas. Jika kita anggap tidak ada kebocoran fluksi, maka ϕ_1 akan melingkupi semua lilitan di kumparan pertama ini dan akan menimbulkan apa yang kita sebut sebagai *fluksi lingkup* sebesar $\lambda_{11} = N_1 \phi_1 = k_1 N_1^2 i_1$. Misalkan pula jumlah lilitan kumparan ke-dua N_2 dengan arus i_2 . Fluksi magnetik di kumparan ini adalah $\phi_2 = k_2 N_2 i_2$ dan fluksi lingkupnya $\lambda_{22} = N_2 \phi_2 = k_2 N_2^2 i_2$. Jadi secara singkat

$$\begin{aligned} \phi_1 &= k_1 N_1 i_1 & \text{dan} & & \phi_2 &= k_2 N_2 i_2 \\ \lambda_{11} &= k_1 N_1^2 i_1 & \text{dan} & & \lambda_{22} &= k_2 N_2^2 i_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sebagai akibat fluksi lingkup masing-masing, di setiap kumparan terdapat tegangan

$$v_{11} = \frac{d\lambda_{11}}{dt} = k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} \text{ dan } v_{22} = \frac{d\lambda_{22}}{dt} = k_2 N_2^2 \frac{di_2}{dt} \quad (4.22)$$

Kalau kedua kumparan itu berdekatan satu dengan lainnya, maka sebagian fluksi yang ditimbulkan oleh kumparan yang satu akan melingkupi pula kumparan yang lain. Jadi selain fluksi yang ditimbulkannya sendiri, setiap kumparan melingkupi juga fluksi yang timbul di kumparan yang lain. Kumparan pertama melingkupi fluksinya sendiri ϕ_1 , dan fluksi yang berasal dari kumparan ke-dua $\phi_{12} = N_1 k_{12} \phi_2$. Demikian pula dengan kumparan ke-dua, selain fluksinya sendiri ϕ_2 , ia melingkupi pula $\phi_{21} = N_2 k_{21} \phi_1$ yang berasal dari kumparan pertama.

Di kumparan pertama, ϕ_{12} akan memberikan fluksi lingkup $\lambda_{12} = N_1 \phi_{12} = N_1^2 k_{12} \phi_2$ dan menimbulkan tegangan v_{12} . Di kumparan ke-dua, ϕ_{21} akan memberikan fluksi lingkup $\lambda_{21} = N_2 \phi_{21} = N_2^2 k_{21} \phi_1$ dan menimbulkan tegangan v_{21} . Dengan demikian maka di kumparan pertama ada tegangan v_{11} yang timbul karena fluksi lingkupnya sendiri, λ_{11} , dan ada tegangan v_{12} yang timbul karena ada pengaruh dari kumparan ke-dua, λ_{12} . Jadi tegangan total di kumparan pertama adalah $v_1 = v_{11} + v_{12}$. Demikian pula halnya dengan kumparan ke-dua; di kumparan ini terdapat tegangan total sebesar $v_2 = v_{22} + v_{21}$. Keadaan untuk kedua kumparan ini kita tuliskan seperti berikut.

Kumparan 1

Kumparan 2

$$\begin{aligned} v_1 = v_{11} + v_{12} &= \frac{d\lambda_{11}}{dt} + \frac{d\lambda_{12}}{dt} & v_2 = v_{22} + v_{21} &= \frac{d\lambda_{22}}{dt} + \frac{d\lambda_{21}}{dt} \\ &= \left[k_1 N_1^2 \right] \frac{di_1}{dt} + \left[k_{12} N_1 N_2 \right] \frac{di_2}{dt} & &= \left[k_2 N_2^2 \right] \frac{di_2}{dt} + \left[k_{21} N_2 N_1 \right] \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Kita dapat melihat pada (4.23) bahwa ada empat macam parameter induktansi yaitu :

$$L_1 = k_1 N_1^2 \qquad L_2 = k_2 N_2^2 \quad (4.24)$$

$$\text{dan} \quad M_{12} = k_{12} N_1 N_2 \qquad M_{21} = k_{21} N_2 N_1 \quad (4.25)$$

Induktansi L_1 dan L_2 adalah induktansi sendiri dari masing-masing kumparan sedangkan parameter M_{12} dan M_{21} adalah *induktansi bersama* antara dua kumparan tersebut. Dalam medium magnet yang linier $k_{12} = k_{21} = k_M$ dan dalam kondisi ini kita dapat tuliskan

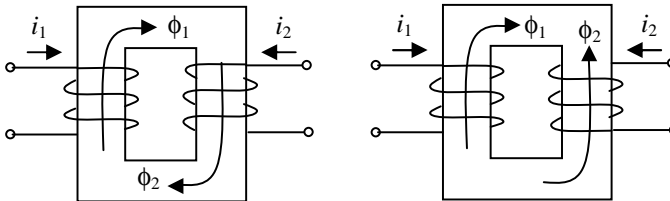
$$M_{12} = M_{21} = k_M N_1 N_2 = M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.26)$$

dengan $k = k_M / \sqrt{(k_1 k_2)}$.

Dengan demikian maka secara umum tegangan di masing-masing kumparan adalah

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11} + v_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad \text{dan} \\ v_2 &= v_{22} + v_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tanda \pm pada (4.27) diperlukan karena pengaruh dari kumparan yang satu terhadap kumparan yang lain tidaklah selalu positif tetapi dapat pula negatif. Pengaruh itu positif jika fluksi dari kumparan yang satu *memperkuat* fluksi dari kumparan yang dipengaruhi; apabila *memperlemah* maka dikatakan bahwa pengaruhnya negatif.



a). Memperkuat (aditif)

b). Melemahkan (substraktif)

Gb.4.4. Induktor terkopel : aditif atau substraktif.

Bagaimana pengaruh positif dan negatif ini terjadi dapat dijelaskan melalui Gb.4.4 yang memperlihatkan dua kumparan terkopel magnetik. Arah fluksi yang dibangkitkan oleh arus di masing-masing kumparan menurut *kaidah tangan kanan*. Dengan arah lilitan kumparan seperti Gb.4.4.a. maka fluksi ϕ_1 yang dibangkitkan oleh i_1 dan ϕ_2 yang dibangkitkan oleh i_2 akan sama arahnya. Dalam keadaan demikian fluksi ϕ_2 dan ϕ_1 saling memperkuat atau *aditif*. Pada Gb.4.4.b. arah lilitan kumparan ke-dua berlawanan dengan arah lilitan kumparan ke-dua pada Gb.4.4.a. Fluksi ϕ_2 berlawanan arah dengan ϕ_1 . Dalam hal ini kedua fluksi saling melemahkan atau *substraktif*.

4.4.1. Konvensi Titik

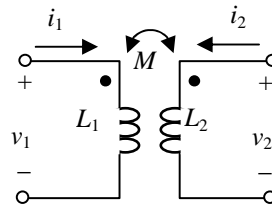
Karena ada kemungkinan fluksi dari kumparan yang satu *memperkuat* atau *memperlemah* fluksi dari kumparan yang lain sehingga diperlukan tanda \pm pada persamaan (4.27), maka timbul pertanyaan kapan tanda $+$ atau $-$ kita gunakan sedangkan kita tahu bahwa *nilai M selalu positif*. Untuk menentukan hal itu kita menggunakan *konvensi titik (dot convention)* agar pengaruh positif atau negatif dari satu kumparan terhadap kumparan lainnya dapat dinyatakan. Kita memberikan tanda titik di salah satu ujung di setiap kumparan dengan pengertian sebagai berikut:

Arus i yang masuk ke ujung yang bertanda titik di salah satu kumparan, akan membangkitkan tegangan *berpolaritas positif* pada ujung kumparan yang lain yang juga bertanda titik. Besar tegangan yang terbangkit adalah $M di/dt$.

4.4.2. Hubungan Tegangan dan Arus

Dengan konvensi titik tersebut di atas, hubungan arus dan tegangan pada dua kumparan yang terkopel secara magnetik, yang simbolnya terlihat pada Gb.4.5, dapat kita turunkan.

Dalam penurunan hubungan ini, untuk masing-masing kumparan kita tetap menggunakan *konvensi pasif*, sedangkan untuk kopling antara kedua kumparan kita gunakan *konvensi titik*. Jadi hubungan tegangan dan arus untuk Gb.4.5. adalah



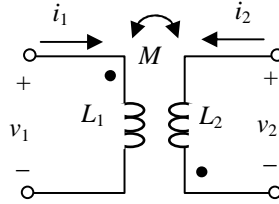
Gb.4.5. Kopling aditif.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11} + v_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= v_{22} + v_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Gb.4.5. adalah simbol dari dua kumparan yang terkopel aditif, yaitu dua kumparan dengan arah lilitan seperti pada Gb.4.4.a. Simbol untuk kumparan terkopel substraktif, dengan arah lilitan seperti Gb.4.4.b., diperlihatkan pada Gb.4.6. dengan hubungan tegangan dan arus :

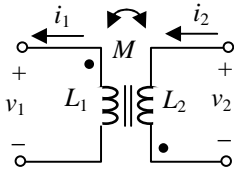
$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_{11} + v_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\
 v_2 &= v_{22} + v_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}
 \end{aligned}
 \quad (4.29)$$

Perhatikanlah bahwa tanda titik terkait dengan keadaan nyata (arah lilitan) sedangkan referensi arus dan tegangan ditentukan tanpa dikaitkan dengan keadaan sebenarnya (kita ingat bahwa arah referensi arus dan tegangan tidak selalu sama dengan keadaan sebenarnya). Oleh karena itu *tanda titik tidak saling terkait dengan referensi arus dan tegangan*. Hal ini jelas terlihat dari Gb.4.6. dan persamaan (4.29) di atas.

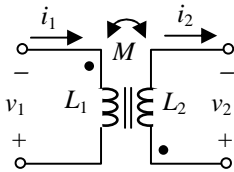


Gb.4.6. Kopling substraktif.

Berikut ini dua contoh lain penurunan hubungan tegangan dan arus dua kumparan yang terkopel magnetik.



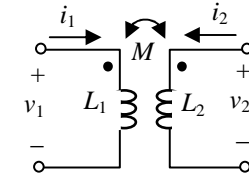
$$\begin{aligned}
 v_1 &= L_1 \frac{d(-i_1)}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\
 v_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d(-i_1)}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}
 \end{aligned}
 \quad (4.30)$$



$$\begin{aligned}
 v_1 &= L_1 \frac{d(-i_1)}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\
 v_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}
 \end{aligned}
 \quad (4.31)$$

Perhatikanlah bahwa dalam penurunan persamaan di atas kita tetap mengikuti konvensi pasif untuk arus dan tegangan, sedangkan untuk pengaruh timbal balik dari kumparan, yang ditunjukkan oleh suku $M \frac{di}{dt}$, kita mengikuti konvensi titik.

CONTOH-4.5: Pada dua kumparan terkopel magnetik seperti pada gambar di samping ini, diketahui bahwa tegangan di kumparan pertama adalah $v_1 = 10 \cos 100t$ V. Tentukanlah tegangan v_2 pada kumparan kedua.



$$L_1 = L_2 = 10 \text{ mH} ; M = 2 \text{ mH}$$

Solusi :

Hubungan arus dan tegangan pada rangkaian kumparan pertama adalah

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \rightarrow 10 \cos 100t = 0,01 \frac{di_1}{dt} + 0$$

karena $i_2 = 0$ (kumparan ke-dua terbuka). Untuk kumparan kedua,

$$v_2 = 0 + 0,002 \frac{di_1}{dt}$$

Dengan memasukkan nilai di_1/dt dari persamaan kumparan pertama ke persamaan kumparan kedua diperoleh

$$v_2 = 0,002 \frac{10 \cos 100t}{0,01} = 2 \cos 100t \text{ V}$$

Pemahaman :

Apabila kita salah memilih tanda induktansi bersama, maka hasil yang akan kita peroleh adalah

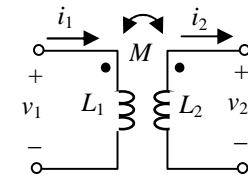
$$v_2 = -2 \cos 100t \text{ V}$$

Kesalahan dalam menentukan tanda untuk M akan menyebabkan ter-inversnya sinyal v_2 . Kesalahan demikian jika terjadi dalam praktek, misalnya untuk pengaturan kecepatan motor, pada waktu motor hendak diperlambat justru kecepatan motor akan bertambah. Oleh karena itu kita harus berhati-hati.

CONTOH-4.6: Pada dua kumparan terkopel magnetik seperti pada gambar di samping ini, diketahui bahwa arus masing-masing kumparan adalah

$$i_1 = 5 \cos 10000t \text{ A}$$

$$i_2 = 2 \sin 5000t \text{ A.}$$



$$L_1 = 0.2 \text{ mH}, L_2 = 0.5 \text{ mH} \\ M = 0.3 \text{ mH}$$

Tentukanlah tegangan v_1 dan v_2 .

Solusi :

Persamaan tegangan-arus untuk masing-masing kumparan adalah

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt} ;$$

$$v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui, akan diperoleh

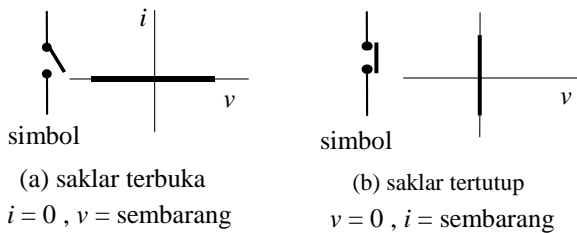
$$v_1 = -10 \sin 10000 t - 3 \cos 5000 t \text{ V}$$

$$v_2 = -5 \cos 5000 t - 15 \sin 10000 t \text{ V}$$

4.5. Saklar

Saklar adalah piranti yang digunakan untuk menutup dan membuka rangkaian. Dalam keadaan tertutup, suatu saklar mempunyai batas arus maksimum yang mampu ia salurkan. Dalam keadaan terbuka, saklar mempunyai batas tegangan maksimum yang mampu ia tahan. Dalam keadaan terbuka ini, terdapat arus kecil yang tetap mengalir yang kita sebut arus bocor. Sebaliknya dalam keadaan tertutup masih terdapat tegangan kecil antar terminalnya.

Untuk rangkaian-elektronik kita mengenal saklar dengan kemampuan arus dalam orde mA dan tegangan dalam orde Volt. Sedangkan piranti penutup dan pembuka rangkaian dengan kapasitas besar kita jumpai pada rangkaian pemroses energi. Pemutus dan pembuka rangkaian berkapasitas besar ini dikenal dengan sebutan *circuit breaker*; ia mempunyai kemampuan menyalurkan arus dalam orde kA dan tegangan dalam kV. Dalam analisis rangkaian, saklar dimodelkan sebagai kombinasi *rangkaian hubung-terbuka* dan *rangkaian hubung-singkat* dan *dianggap ideal* dalam arti tidak terdapat rugi daya, atau dengan kata lain daya selalu nol (tidak menyerap daya). Dalam keadaan terbuka, arus bernilai nol (tanpa arus bocor) sedangkan tegangan pada terminalnya bernilai sembarang tanpa batas. Dalam keadaan tertutup tegangan antara terminalnya nol sedangkan nilai arusnya sembarang tanpa batas. Gb.4.7. di bawah ini menggambarkan karakteristik saklar ideal yang dimaksud.

Gb.4.7. Karakteristik $i-v$ saklar ideal

4.6. Elemen Sebagai Model Dari Gejala

Sebagaimana dijelaskan di atas, elemen adalah model dari piranti, seperti resistor, kapasitor, induktor dan sebagainya. Selain dari pada itu sering terdapat gejala-gejala adanya resistansi, atau kapasitansi, ataupun induktansi pada piranti atau antar piranti, pada konduktor atau antar konduktor dalam rangkaian listrik. Gejala-gejala seperti itu dapat pula dimodelkan sebagai elemen rangkaian. Sebagai contoh, pada saluran transmisi daya terdapat resistansi pada kawat, kapasitansi antar kawat dan antara kawat dengan tanah, dan juga terdapat induktansi. Pada piranti elektronik juga terdapat kapasitansi antar terminal yang disebut kapasitansi bocor. Accu mobil mengandung gejala adanya resistansi yang disebut resistansi internal. Resistansi, kapasitansi, ataupun induktansi pada piranti-piranti tersebut merupakan gejala yang ada pada piranti yang juga dapat dimodelkan sebagai elemen rangkaian.

4.7. Transformator Ideal

Apa yang kita bahas mengenai kumparan terkopel magnetik adalah prinsip dari transformator. Kumparan yang pertama disebut kumparan primer sedang yang kedua disebut kumparan sekunder. Seperti halnya resistor, induktor, dan kapasitor, kita mengenal transformator ukuran kecil yang dipakai pada rangkaian elektronika, dan transformator ukuran besar yang dipakai pada rangkaian pemroses energi, yang biasa disebut transformator daya. Selain itu ada pula transformator-ukur untuk keperluan pengukuran arus tinggi, yang disebut transformator arus, dan pengukuran tegangan tinggi yang disebut transformator tegangan. Dalam kenyataan, transformator-transformator tersebut mengandung ketidak-sempurnaan misalnya fluksi bocor, rugi daya di belitan dan rugi daya dalam inti-nya, serta ketidak-linieran. Transformator yang akan kita bahas di sini adalah transformator ideal.

4.7.1. Kopling Sempurna

Pada transformator ideal kita menganggap bahwa *kopling magnetik antar kumparan terjadi secara sempurna*, artinya semua fluksi yang melingkupi kumparan primer juga melingkupi kumparan sekunder dan demikian pula sebaliknya.

Jika jumlah lilitan di kumparan primer dan sekunder masing-masing adalah N_1 dan N_2 sedangkan arus masing-masing adalah i_1 dan i_2 maka fluksi masing-masing kumparan adalah

$$\phi_1 = k_1 N_1 i_1 \quad \text{dan} \quad \phi_2 = k_2 N_2 i_2$$

dengan k_1 dan k_2 adalah konstanta proporsionalitas.

Selain fluksinya sendiri, setiap kumparan juga melingkupi fluksi yang dibangkitkan di kumparan yang lain, yaitu

$$\phi_{12} = k_{12} N_2 i_2 \quad \text{dan} \quad \phi_{21} = k_{21} N_1 i_1$$

Jika terjadi kopling sempurna, maka

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \phi_2 & \text{dan} & & \phi_{21} &= \phi_1 \\ \text{yang berarti : } k_{12} N_2 i_2 &= k_2 N_2 i_2 & \text{dan} & & k_{21} N_1 i_1 &= k_1 N_1 i_1 \\ \text{sehingga : } k_{12} &= k_2 & \text{dan} & & k_{21} &= k_1 \end{aligned}$$

Untuk medium maknit yang linier maka $k_{12} = k_{21} = k_M$, sehingga untuk transformator ideal ini $k_1 = k_2 = k_{12} = k_{21} = k_M$.

Dengan demikian maka induktansi dan kopling magnetik menjadi

$$L_1 = k_M N_1^2 ; \quad L_2 = k_M N_2^2 ; \quad M = k_M N_1 N_2 = \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.32)$$

Dengan menggunakan (4.27), tegangan pada kumparan primer dan sekunder dapat kita peroleh yaitu

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = N_1 \left(k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right) \\ v_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = \pm N_2 \left(\pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} + k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Rasio persamaan pertama dan kedua dari (4.33), memberikan

$$\frac{v_1}{v_2} = \pm \frac{N_1}{N_2} = \pm a \quad (4.34)$$

Parameter a disebut *perbandingan lilitan*. Jika $a > 1$ ($N_1 > N_2$), kita mempunyai transformator penurun tegangan (*step-down transformer*) dan jika $a < 1$ ($N_1 < N_2$) kita mempunyai transformator penaik tegangan (*step-up transformer*). Tanda + atau – tergantung dari arah referensi arus primer dan sekunder relatif terhadap referensi titik. Jika referensi arah arus di kedua kumparan menuju atau meninggalkan referensi titik, kita berikan tanda +.

4.7.2. Rugi Daya Nol

Selain kopling sempurna, kita juga menganggap bahwa pada transformator ideal tidak ada rugi daya. Hal ini berarti bahwa daya yang diserap di kedua kumparan adalah nol.

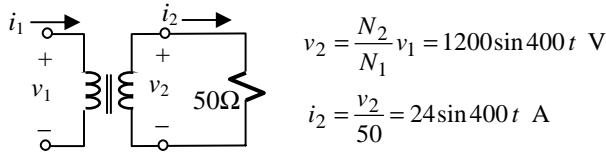
$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \quad \text{atau} \quad \boxed{\frac{i_2}{i_1} = -\frac{v_1}{v_2} = \mp \frac{N_1}{N_2} = \mp a} \quad (4.35)$$

Dari (4.34) dan (4.35) jelas bahwa jika tegangan sekunder lebih besar dari tegangan primer maka arus sekunder lebih kecil dari arus primer. Transformator jenis inilah yang digunakan pada transmisi daya listrik. Untuk penyaluran sejumlah daya tertentu, arus pada saluran transmisi menjadi lebih kecil pada tegangan tinggi, sehingga rugi-rugi daya pada saluran ($i^2 R$) dapat ditekan.

CONTOH-4.7: Suatu transformator mempunyai perbandingan lilitan $N_1/N_2 = 0,1$. Dengan tegangan masukan $120\sin 400t$ V, dan dengan menganggap transformator ini ideal, tentukanlah tegangan sekunder, arus sekunder, serta arus primer, jika diberi beban resistif sebesar 50Ω . Hitung pula daya yang diserap oleh beban.

Solusi :

Gambar dari rangkaian transformator dan perhitungannya adalah seperti berikut.



$$p_R = v_2 i_2 = 1200 \times 24 \sin^2 400t \text{ W} = 28.8 \sin^2 400t \text{ kW.}$$

$$p_R = v_2 i_2 = 1200 \times 24 \sin^2 400t \text{ W} = 28.8 \sin^2 400t \text{ kW.}$$

CONTOH-4.8: Dalam contoh 4.7, berapakah resistansi yang dilihat oleh sumber (yaitu resistansi di sisi primer) ?

Solusi :

Dalam contoh ini tegangan primer adalah $v_1 = 120 \sin 400t$ sedangkan arus yang mengalir adalah $i_1 = 240 \sin 400t$. Jadi resistansi yang terlihat di sisi primer adalah

$$R'_2 = \frac{v_1}{i_1} = \frac{120 \sin 400t}{240 \sin 400t} = 0,5 \text{ } \Omega$$

Pemahaman :

R'_2 ini disebut *resistansi masukan ekivalen (equivalent input resistance)*. Jika kita perhatikan lebih lanjut akan terlihat bahwa

$$R'_2 = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(N_1/N_2)v_2}{(N_2/N_1)i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_2 = a^2 R_2$$

CONTOH-4.9: Sebuah transformator (ideal) digunakan untuk menurunkan tegangan dari $220 \cos 314t$ V ke $110 \cos 314t$ V. Jumlah lilitan primer maupun sekunder tidak diketahui. Untuk mencarinya dibuat kumparan pembantu (kumparan ketiga) dengan 20 lilitan. Dengan memberikan tegangan sebesar $220 \cos 314t$ V pada belitan primer diperoleh tegangan sebesar $5,5 \cos 314t$ V di kumparan pembantu. Carilah jumlah lilitan primer dan sekunder.

Solusi :

Pada waktu tegangan primer $220 \cos 314t$ V, tegangan di kumparan pembantu adalah $5,5 \cos 314t$ V. Jadi perbandingan jumlah lilitan kumparan primer dan kumparan pembantu adalah

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{220 \cos 314t}{5.5 \cos 314t} = 40$$

Karena $N_3 = 20$, maka $N_1 = 40 \times 20 = 800$ lilitan. Perbandingan lilitan transformator adalah

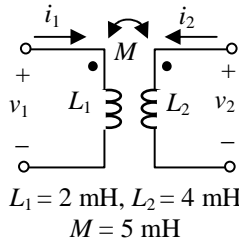
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{110 \cos 314t}{220 \cos 314t} = 0,5$$

Jadi jumlah lilitan sekunder adalah $N_2 = 400$ lilitan.

Soal-Soal

1. Pada sebuah resistor $1 \text{ k}\Omega$ diterapkan satu pulsa tegangan 10 V , dengan lebar pulsa 100 ms . Hitung arus yang mengalir melalui resistor serta daya yang diserap resistor selama tegangan diterapkan. Hitung pula energi yang diserap resistor, dan jumlah muatan yang dipindahkan melalui resistor.
2. Pada sebuah resistor $10 \text{ }\Omega$ diterapkan tegangan eksponensial yang amplitudonya 200 V dan konstanta waktunya 200 ms . Hitunglah arus dan daya pada resistor. Perkirakanlah energi yang diserap resistor dan jumlah muatan yang dipindahkan melalui resistor.
3. Suatu arus sambaran petir dimodelkan sebagai bentuk gelombang eksponensial ganda yang terdiri dari gelombang positif beramplitudo $+100 \text{ kA}$ dengan konstanta waktu $200 \text{ }\mu\text{s}$ dan gelombang negatif beramplitudo -100 kA dengan konstanta waktu $20 \text{ }\mu\text{s}$. Arus sambaran petir ini melalui resistor $1 \text{ }\Omega$; hitunglah tegangan pada resistor dan jumlah muatan dalam sambaran petir ini.
4. Berapakah nilai maksimum arus yang melalui kapasitor $50 \text{ }\mu\text{F}$, jika diketahui bahwa tegangan pada kapasitor berbentuk sinus dengan amplitudo 100 V dan frekuensinya 100 rad/s ?
5. Tegangan pada kapasitor 100 pF berubah sebagai $v_C = 10 e^{-3000 t} u(t) \text{ V}$. Berapa muatan kapasitor pada $t = 0^+$? Berapa muatannya pada $t = 1 \text{ ms}$?
6. Berapakah nilai maksimum tegangan pada induktor 2 H , jika diketahui bahwa arus yang mengalir berbentuk gelombang sinus dengan amplitudo 2 A dan frekuensinya 300 rad/s ?
7. Tegangan pada induktor 4 mH adalah $v_L = 40e^{-2000t}u(t) \text{ V}$. Bagaimanakah bentuk gelombang arusnya ? Bagaimanakah dayanya ?
8. Arus pada induktor 5 mH adalah $i_L(t) = [100 t e^{-1000 t}] u(t) \text{ A}$. Carilah tegangan, serta dayanya.
9. Jika arus sambaran petir pada soal nomer 3 melalui sebuah induktor $10 \text{ }\mu\text{H}$, hitunglah tegangan pada induktor.

10. Pada dua kumparan terkopel berikut ini, tegangan $v_1 = 25[\sin 1000t]u(t)$ V. Kumparan kedua terbuka. Tuliskanlah hubungan i - v kumparan terkopel ini dan carilah i_1 dan v_2 .



11. Jika pada soal nomor 10 yang diketahui adalah arus masukan, yaitu $i_1 = 2 [1 - e^{-2000t}] u(t)$ A, carilah v_2 . Pada $t = 1$ s, berapakah v_2 ?
12. Jika pada soal nomor 10 tegangan masukan tidak diketahui akan tetapi diketahui $i_1 = 2\sin 1000t u(t)$, carilah v_1 dan v_2 .
13. Pada transformator ideal, berapakah perbandingan jumlah lilitan kumparan primer dan sekunder yang diperlukan untuk mengubah tegangan $380\cos 314t$ V, ke $190\cos 314t$ V ?
14. Carilah nilai efektif (*rms*) tegangan primer dan sekunder pada soal nomor 13. Perbandinganlah kedua nilai efektif ini! Bagaimanakah perbandingan nilai efektif arus? (Hasil ini selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan nilai-nilai rms tanpa melalui pernyataan sinyal dalam fungsi t lagi).
15. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada pemecahan soal nomor 14, tentukanlah perbandingan jumlah lilitan transformator ideal yang diperlukan untuk menurunkan tegangan bolak-balik sinus 240 V rms menjadi 12 V rms. Jika resistor 50Ω dihubungkan pada sisi sekunder, hitunglah arus dan daya masukan di sisi primer.
16. Sebuah transformator ideal dengan keluaran ganda, mempunyai jumlah lilitan primer 1000. Lilitan sekunder berjumlah 1200 lilitan terbagi menjadi 3 bagian, masing-masing 200 lilitan, 400 lilitan dan 600 lilitan. Jika tegangan primer berbentuk sinus 220 V rms, tentukanlah nilai rms dari tiga macam tegangan yang diperoleh di belitan sekunder.

BAB 5 Model Piranti Aktif, ***Dioda, OpAmp***

Dengan mempelajari model piranti aktif, kita akan

- mampu memformulasikan karakteristik arus-tegangan elemen aktif: sumber bebas, sumber tak-bebas;
- memahami karakteristik dioda dan mampu menurunkan hubungan masukan-keluaran rangkaian sederhana menggunakan dioda.
- memahami karakteristik OP AMP dan mampu mencari hubungan masukan dan keluaran rangkaian dasar sederhana OP AMP.

5.1. Sumber Bebas

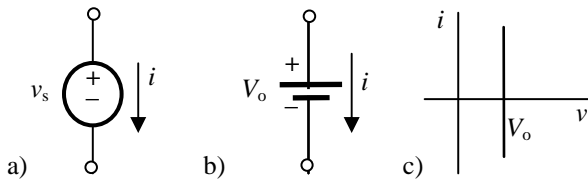
Sumber bebas adalah sumber yang tidak tergantung dari peubah sinyal di bagian lain dari rangkaian. Sumber sinyal dapat dimodelkan dengan dua macam elemen, yaitu: *sumber tegangan* atau *sumber arus*. Sumber-sumber ini dapat membangkitkan sinyal yang konstan ataupun bervariasi terhadap waktu, yang akan menjadi masukan pada suatu rangkaian. Mereka sering disebut sebagai *fungsi penggerak* atau *forcing function* atau *driving function* yang mengharuskan rangkaian memberikan tanggapan.

5.1.1. Sumber Tegangan Bebas Ideal

Gb.5.1. memperlihatkan simbol dan karakteristik i - v dari sumber tegangan bebas ideal. Perhatikan referensi arus dan tegangannya, yang tetap mengikuti konvensi pasif. Karakteristik i - v sumber tegangan ideal memberikan persamaan elemen sebagai berikut:

$v = v_s$ $i = \text{sesuai kebutuhan}$

Persamaan di atas menyatakan bahwa sumber tegangan ideal membangkitkan tegangan v_s pada terminalnya dan akan memberikan arus berapa saja yang diperlukan oleh rangkaian yang terhubung padanya.



Gb.5.1. Sumber tegangan ideal.

- (a) Sumber tegangan bervariasi terhadap waktu;
- (b) Sumber tegangan konstan;
- (c) Karakteristik i - v sumber tegangan konstan

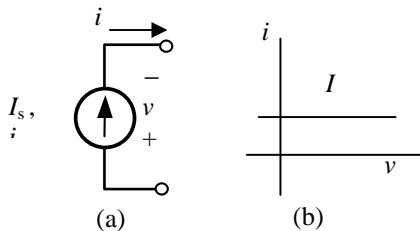
5.1.2. Sumber Arus Bebas Ideal

Gb.5.2. menunjukkan simbol dan karakteristik i - v sumber arus bebas ideal. Perhatikan referensi arus dan tegangannya, yang juga tetap sesuai dengan konvensi pasif. Karakteristik i - v sumber arus ideal memberikan persamaan elemen:

$$i = i_s$$

$v = \text{sesuai kebutuhan}$

Sumber arus ideal memberikan arus i_s dalam arah sesuai dengan arah tanda anak panah pada simbolnya dan memberikan tegangan berapa saja yang diperlukan oleh rangkaian yang terhubung padanya. Perhatikan bahwa *tegangan pada sumber arus* tidaklah nol.



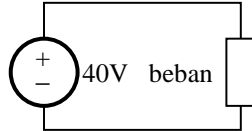
Gb.5.2. Sumber arus ideal.

CONTOH-5.1: Sebuah sumber tegangan konstan 40 V ideal, mencatu sebuah beban. Jika diketahui bahwa beban menyerap daya konstan sebesar 100 W, berapakah arus yang keluar dari

sumber? Jika beban menyerap 200 W, berapakah arus yang keluar dari sumber?

Solusi :

Karena merupakan sumber tegangan ideal maka ia akan memberikan arus berapa saja yang diminta beban dengan tegangan yang konstan 40 V.



Jika daya yang diserap beban 100 W, maka arus yang diberikan oleh sumber adalah

$$i = \frac{p}{v} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A}$$

Jika daya yang diserap beban 200 W, maka arus yang diberikan oleh sumber adalah

$$i = \frac{p}{v} = \frac{200}{40} = 5 \text{ A}$$

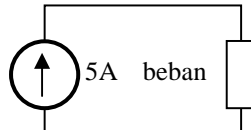
Pemahaman :

Sumber tegangan ideal memberikan arus berapa saja yang diminta oleh beban, pada tegangan kerja yang tidak berubah. Sumber semacam ini dapat kita gunakan untuk mendekati keadaan dalam praktek apabila sumber mempunyai kemampuan yang jauh lebih besar dari daya yang diperlukan oleh beban atau dengan kata lain sumber tersebut kita anggap mempunyai kapasitas yang *tak berhingga*.

CONTOH-5.2: Sebuah sumber arus konstan 5 A ideal, mencatu sebuah beban. Jika diketahui bahwa beban menyerap daya konstan sebesar 100 W, pada tegangan berapakah sumber beroperasi? Jika beban menyerap 200 W, berapakah tegangan sumber?

Solusi :

Sumber arus ideal memberikan arus tertentu, dalam hal ini 5 A, pada tegangan berapa saja yang diperlukan oleh beban.



Jika daya yang diserap beban 100 W, hal itu berarti bahwa tegangan sumber adalah

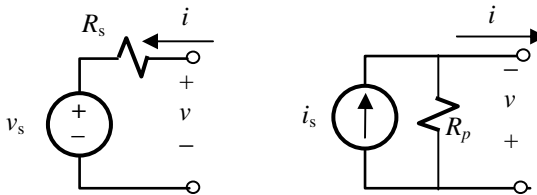
$$v = \frac{p}{i} = \frac{100}{5} = 20 \text{ V}$$

Jika daya yang diserap beban 200 W, maka tegangan sumber adalah

$$v = \frac{p}{i} = \frac{200}{5} = 40 \text{ V}$$

5.2. Sumber Praktis

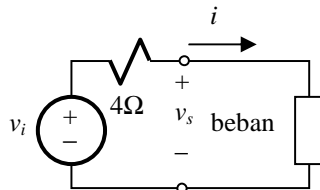
Gb.5.3. menunjukkan model sumber tegangan dan sumber arus praktis; sumber ini disebut *praktis* karena mereka lebih mendekati keadaan nyata dibandingkan dengan model sumber ideal.



Gb.5.3. Sumber tegangan dan sumber arus praktis

Suatu sumber nyata pada umumnya mengandung gejala-gejala adanya resistansi ataupun induktansi dan kapasitansi. Resistor R_s ataupun R_p dalam model sumber praktis yang terlihat pada Gb.5.3. merupakan representasi dari gejala resistansi yang hadir dalam sumber yang dimodelkan dan bukan mewakili resistor yang berupa piranti.

CONTOH-5.3: Sebuah sumber tegangan konstan praktis dengan resistansi 4Ω , mencatu sebuah beban. Jika diketahui bahwa beban menyerap daya konstan sebesar 100 W, dan diketahui pula bahwa arus yang mengalir padanya adalah 2,5 A, berapakah tegangan sumber dan arus yang keluar dari sumber? Jika sumber tidak dibebani, berapakah tegangannya?



Solusi :

Rangkaian sumber praktis terdiri dari *sumber ideal* v_i dan *resistansi* sebesar 4Ω . Tegangan sumber praktis adalah v_s dan tegangan ini sama dengan tegangan pada beban.

Jika daya dan arus pada beban adalah 100 W dan 2,5 A, maka tegangan sumber adalah

$$v_s = \frac{p}{i} = \frac{100}{2.5} = 40 \text{ V}$$

Karena hanya ada satu beban yang dilayani oleh *sumber praktis*, maka arus yang keluar dari sumber sama dengan arus beban yaitu 2,5 A. Arus ini pula yang keluar dari sumber *tegangan ideal* v_i dan mengalir melalui R_i . Bagi sumber tegangan ideal v_i , daya yang diserap oleh resistansi R_i ikut menjadi bebannya, yaitu

$$p_{Ri} = i^2 R_i = (2.5)^2 \times 4 = 25 \text{ W}$$

Dengan demikian *sumber tegangan ideal* menanggung beban

$$p_{tot} = 100 + 25 = 125 \text{ W}.$$

Dengan arus yang 2,5 A, maka tegangan sumber ideal adalah

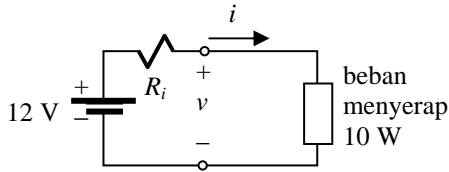
$$v_i = 125 / 2.5 = 50 \text{ V}.$$

Tegangan inilah yang akan terlihat pada sumber praktis, v_s , apabila ia tidak dibebani, karena pada saat tanpa beban tidak ada arus yang mengalir sehingga tidak ada tegangan pada R_i .

Pemahaman :

Dalam contoh di atas, sumber praktis yang merupakan sumber tegangan konstan, mempunyai resistansi R_i yang kita sebut resistansi internal. Resistansi inilah yang menyebabkan terjadinya perbedaan nilai tegangan sumber praktis pada saat berbeban dan pada saat tidak berbeban. Pada sumber praktis yang bukan tegangan konstan, misalnya tegangan sinus, tidak hanya terdapat resistansi internal saja tetapi mungkin juga induktansi internal.

CONTOH-5.4: Sebuah accu (accumulator) 12 V, berkapasitas 40 Ah. Jika sebuah beban yang menyerap daya 10 Watt dihubungkan padanya, berapa lamakah accu tersebut dapat melayani beban yang ditanggungnya ?



Solusi :

Jika kita menganggap accu sebagai sebuah sumber tegangan ideal yang memberikan daya kepada beban dengan tegangan konstan 12 V, maka arus yang akan mengalir ke beban adalah

$$i = \frac{p}{v} = \frac{10}{12} \text{ A}$$

Karena kapasitasnya 40 Ah, accu akan mampu mencatu beban selama

$$t = \frac{40}{10/12} = 48 \text{ jam}$$

Pemahaman :

Accu mengubah energi kimia menjadi energi listrik. Dalam proses pengubahan tersebut terdapat sejumlah energi yang tidak dapat dikeluarkan melainkan berubah menjadi panas. Accu dapat dimodelkan sebagai sumber tegangan dengan resistansi internal sebesar R_i . Jadi model rangkaian mirip dengan rangkaian pada contoh 5.13. Dengan model ini maka energi tidak hanya diserap oleh beban tetapi juga oleh R_i . Dengan adanya resistansi internal itu tegangan pada beban akan lebih kecil dari tegangan sumber ideal. Selain dari pada itu, jika accu tidak mendapatkan tambahan energi dari luar, tegangan akan terus menurun selama proses pengaliran daya ke beban. Jika resistansi beban tidak berubah, penyerapan daya pada beban juga tidak konstan 10 watt.

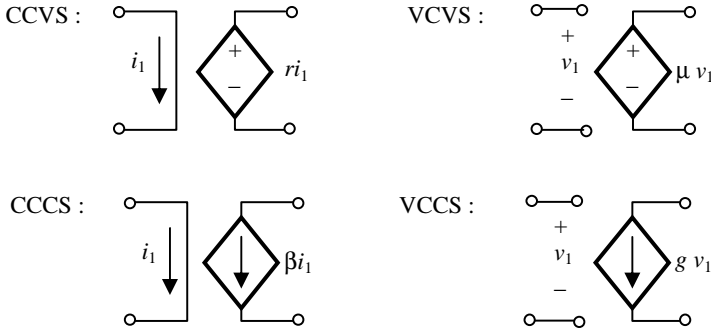
5.3. Sumber Tak-Bebas (*Dependent Sources*)

Sumber bebas yang kita ulas di atas adalah model dari suatu piranti; artinya, kita mengenalnya baik *sebagai elemen* maupun *sebagai piranti* (seperti halnya resistor, induktor dan kapasitor). Berbeda dengan elemen-elemen tersebut, *sumber tak-bebas* adalah elemen yang tidak mewakili piranti tertentu melainkan menjadi model karakteristik suatu piranti. Sumber tak-bebas adalah elemen aktif yang kita gunakan dalam kombinasi dengan elemen lain untuk memodelkan piranti aktif seperti misalnya transistor ataupun OP AMP. Berikut ini kita akan melihat contoh rangkaian dengan sumber tak-bebas.

Keluaran sumber tak-bebas dikendalikan oleh (tergantung dari) tegangan atau arus di bagian lain dari rangkaian. Sumber tak-bebas yang akan kita pelajari adalah sumber tak-bebas linier, baik itu sumber tegangan maupun sumber arus. Karena ada dua macam besaran yang dikendalikan, yaitu tegangan ataupun arus, dan ada dua macam besaran pengendali yang juga berupa arus ataupun tegangan, maka kita mengenal empat macam sumber tak-bebas, yaitu:

- a). Sumber tegangan dikendalikan oleh arus: *current-controlled voltage source* (CCVS).
- b). Sumber tegangan dikendalikan oleh tegangan: *voltage-controlled voltage source* (VCVS).
- c). Sumber arus dikendalikan oleh arus : *current-controlled current source* (CCCS).
- d). Sumber arus dikendalikan oleh tegangan : *voltage-controlled current source* (VCCS).

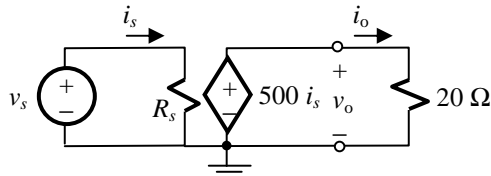
Gb.5.4. memperlihatkan simbol-simbol sumber tak bebas. Kita ambil contoh CCCS. Arus keluaran CCCS tergantung dari arus masukan i_1 dan faktor perkalian tak berdimensi β , menjadi βi_1 . Ketergantungan seperti ini tidak kita dapatkan pada sumber bebas. Arus yang diberikan oleh sumber arus bebas, tidak tergantung dari rangkaian yang terhubung ke padanya.



Gb.5.4. Simbol sumber tak-bebas.

Masing-masing sumber tak-bebas mempunyai parameter tunggal μ , β , r , dan g sebagai cirinya. Parameter-parameter ini disebut *gain*. Dalam hal ini, μ dan β merupakan parameter yang tak berdimensi yang masing-masing disebut *voltage gain* dan *current gain*. Parameter r berdimensi ohm dan disebut *transresistance* (kependekan dari *transfer resistance*). Parameter g berdimensi siemens, disebut *transconductance*.

CONTOH-5.5: Sebuah sumber tak-bebas CCVS seperti tergambar di bawah ini mencatu beban konstan yang mempunyai resistansi 20Ω .



Rangkaian pengendali terdiri dari sumber tegangan ideal v_s dan resistansi $R_s = 60 \Omega$. Hitunglah daya yang diserap oleh beban jika sumber tegangan pengendali $v_s = 24 \text{ V}$. Hitung pula daya tersebut jika tegangan sumber pengendali dinaikkan menjadi 36 V .

Solusi :

Tegangan pengendali v_s sama dengan tegangan pada resistansi R_s . Jika $v_s = 24 \text{ V}$, maka arus i_s adalah

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} = \frac{24}{60} = 0,4 \text{ A} .$$

Tegangan keluaran $v_o = 500i_s = 500 \times 0,4 = 200 \text{ V}$. Tegangan v_o ini sama dengan tegangan beban, sehingga daya yang diserap beban adalah

$$p_o = \frac{(v_o)^2}{20} = 2000 \text{ W}$$

Jika tegangan v_s dinaikkan menjadi 36 V, maka

$$i_s = \frac{36}{60} = 0,6 \text{ A}$$

$$\rightarrow v_o = 500 \times 0,6 = 300 \text{ V}; \quad \rightarrow p_o = \frac{(300)^2}{20} = 4500 \text{ W}$$

Pemahaman :

Jika kita hitung, daya yang diberikan oleh sumber pengendali v_s akan kita peroleh

$$p_s = v_s i_s = 60 \times 0,4 = 24 \text{ W}$$

Daya ini jauh lebih kecil dari daya yang diserap beban, yaitu sebesar 2000 W. Hal ini berarti bahwa daya yang diterima oleh beban bukan berasal dari sumber v_s . Dari manakah asalnya ?

Telah disebutkan di depan bahwa sumber tak-bebas adalah elemen aktif yang kita gunakan dalam kombinasi dengan elemen lain untuk memodelkan piranti aktif. Piranti aktif ini mempunyai *catu daya* yang *tidak tergambarkan* dalam simbol sumber tak-bebas. Dari *catu daya* inilah sesungguhnya asal daya yang diterima oleh beban. Sumber v_s dalam contoh soal ini merupakan sumber pengendali dan bukan sumber daya untuk memberikan daya ke beban.

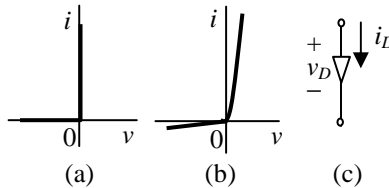
Sebagai contoh, model sumber tak-bebas ini dapat kita gunakan untuk memodelkan generator arus searah berpenguatan bebas. Sumber tegangan v_s merupakan sumber penguat untuk memberikan arus penguat sebesar i_s . Arus penguat ini menimbulkan fluksi magnetik pada generator, yang jika diputar dengan kecepatan konstan akan memberikan tegangan dan daya ke beban. Dalam model generator arus searah ini, *catu daya* yang memberikan daya ke beban berupa masukan daya mekanis untuk memutar generator.

Piranti aktif lain dalam elektronika, seperti misalnya OP AMP atau transistor, dapat pula dimodelkan dengan sumber tak-bebas. *Catu daya* pada piranti-piranti ini berupa catu daya listrik, bukan daya mekanis seperti pada pemodelan generator arus searah di atas.

5.4. Dioda Ideal

Dioda ideal tidak menyerap daya tetapi juga tidak memberikan daya. Ia banyak dimanfaatkan untuk “mengatur” aliran daya dari sumber ke beban oleh karena itu ia kita bahas di bab ini.

Dioda merupakan piranti dua terminal yang meloloskan aliran arus ke satu arah dan menahan aliran arus pada arah sebaliknya. Perilaku ini mirip dengan saklar yang tertutup untuk arah arus tertentu tetapi terbuka untuk arah yang berlawanan, dan dapat dinyatakan dengan karakteristik i - v seperti terlihat pada Gb.5.5.a.



Gb.5.5. Dioda

Karakteristik ini adalah karakteristik dioda ideal, yang pada kenyataannya mempunyai karakteristik tak-linier seperti terlihat pada Gb.5.5.b. Simbol dari dioda beserta referensi arus dan tegangan ditunjukkan pada Gb.5.5.c. Karakteristik dioda ideal, dapat kita nyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \text{Dioda konduksi : } i_D > 0, v_D &= 0 \\ \text{Dioda tak konduksi: } i_D &= 0, v_D < 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dalam praktik, kita perlu memperhatikan tegangan balik dioda, yaitu v_D yang negatif pada saat dioda tak-konduksi. Tegangan balik ini tidak diperkenankan melebihi suatu nilai tertentu. Setiap jenis dioda mempunyai ketahanan untuk menahan tegangan balik tertentu dan juga batas kemampuan arus tertentu yang tidak boleh dilampaui.

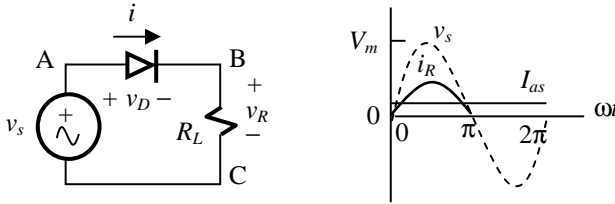
5.4.1. Penyearah Setengah Gelombang

Penyearah adalah rangkaian listrik yang memproses sinyal bolak-balik (sinyal sinus) menjadi sinyal searah. Sinyal searah yang dihasilkannya bukan merupakan sinyal konstan, melainkan sinyal

yang berubah terhadap waktu tetapi selalu positif. Jika sinyal yang disearahkan (sinyal masukan) berupa sinyal sinus yang mempunyai nilai rata-rata nol, hasil penyearahan (sinyal keluaran) mempunyai nilai rata-rata tidak nol. Berikut ini kita akan membahas salah satu jenis penyearah yaitu penyearah setengah gelombang.

Rangkaian penyearah beserta bentuk gelombang masukan dan keluarannya diperlihatkan pada Gb.5.6. Tegangan sumber berupa sinyal sinus $v_s = V_m \sin \omega t$. Karena sifat dioda yang hanya meloloskan arus ke satu arah saja maka arus yang melalui resistor R hanya berlangsung setiap setengah periode.

Pada waktu dioda konduksi $v_D = 0$ dan tegangan di simpul B sama dengan tegangan di simpul A; tegangan beban R sama dengan tegangan sumber dan arus di R $i_R = v_s / R$. Pada waktu dioda tak-konduksi tak ada arus mengalir di R ; tegangan di R nol. Gelombang arus i_R diperlihatkan pada Gb.5.6.



Gb.5.6. Penyearah setengah gelombang.

Jadi pada penyearah setengah gelombang, arus hanya mengalir pada periode positif. Nilai rata-rata arus adalah:

$$\begin{aligned}
 I_{as} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_R d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{V_m \sin \omega t}{R} d(\omega t) + 0 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{V_m}{R} [\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{V_m}{\pi R} = \frac{I_m}{\pi}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Persamaan (5.2) memperlihatkan bahwa penyearah setengah gelombang menghasilkan arus searah (yaitu arus rata-rata) sebesar kira-kira 30% dari nilai arus maksimum. Arus maksimum sendiri sebanding dengan tegangan maksimum masukan. Tegangan balik maksimum dioda sama dengan tegangan puncak negatif masukan yaitu tegangan dioda pada saat ia tidak konduksi.

CONTOH-5.6: Jika pada Gb.5.6. $v_s = 220 \sin \omega t$ sedangkan $R = 5 \text{ k}\Omega$, berapakah nilai arus searah (arus rata-rata) pada R ?

Solusi :

Pada waktu dioda konduksi

$$i_R = \frac{v_s}{R} = \frac{220 \sin \omega t}{5000} = 110 \sin \omega t \text{ mA}$$

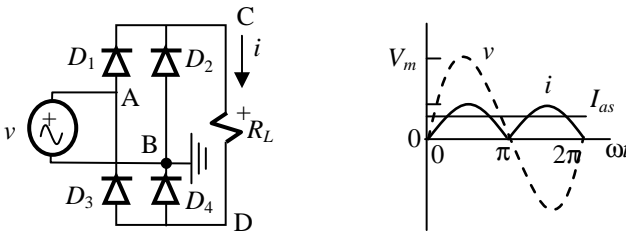
$$\Rightarrow I_{as} = I_m / \pi = 110 / \pi = 35 \text{ mA}$$

5.4.2. Penyearah Gelombang Penuh

Pada penyearah gelombang penuh arus ke beban mengalir pada seluruh perioda. Kita akan melihat salah satu rangkaian penyearah gelombang penuh yaitu rangkaian dengan menggunakan empat dioda yang biasa disebut *rangkaian jembatan*. Rangkaian yang lain yaitu rangkaian yang menggunakan *transformator ber-titik-tengah (center-tapped)* akan kita lihat di bab lain.

Rangkaian penyearah jembatan serta sinyal hasil pemrosesannya terlihat pada Gb.5.7. Dengan mudah dapat dihitung nilai arus searah

$$I_{as} = \frac{2 V_m}{\pi R_L} = \frac{2 I_m}{\pi} \quad (5.3)$$



Gb.5.7. Penyearah gelombang penuh jembatan (empat dioda).

Bagaimana penyearah ini bekerja dapat kita terangkan sebagai berikut. Kita perhatikan tegangan di simpul-simpul A, B, C dan D. Kita ambil simpul B sebagai simpul referensi.

Jika simpul A bertegangan positif, D_1 konduksi sedangkan D_3 tak-konduksi; $v_{D1} = 0$ dan $v_C = v_A$ yang berarti D_2 tak-konduksi karena

mendapat tegangan negatif sedangkan D_4 konduksi karena mendapat tegangan positif. Arus i mengalir dari simpul A ke C melalui beban R ke simpul D dan kembali ke sumber melalui simpul B; terbentuk loop tertutup ACDBA.

Sementara itu di loop yang mengandung dioda yang tidak konduksi, yaitu loop ADCBA, dioda D_2 dan D_3 tidak konduksi. Jika dioda-3 dan dioda-2 identik maka masing-masing memperoleh *tegangan negatif* sebesar $-V_m \sin \omega t$.

Dalam setengah periode berikutnya, terjadi situasi yang berbalikan. D_1 dan D_4 tidak konduksi sedangkan D_2 dan D_3 konduksi. Jadi dalam seluruh periode arus i bernilai positif walaupun dioda-dioda hanya konduksi dalam setengah periode. Dengan demikian terjadilah penyearahan dalam seluruh periode, atau dengan kata lain kita memperoleh penyearah gelombang penuh. Jika semua dioda identik maka tegangan balik maksimum sama dengan V_m

CONTOH 5.7: Jika pada Gb.5.7. $v = 220 \sin \omega t$ sedangkan $R = 5k\Omega$, berapakah komponen arus searah yang melalui R ?

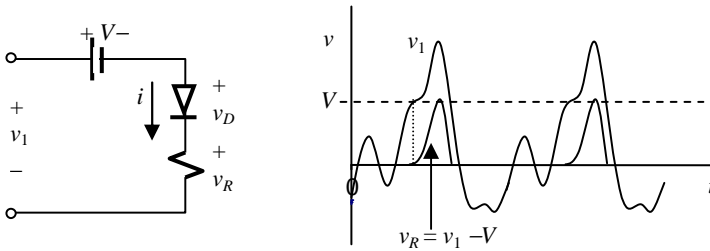
Solusi :

$$\text{Setiap setengah periode, } i_R = \frac{v}{R} = \frac{220 \sin \omega t}{5000} = 110 \sin \omega t \text{ mA}$$

$$\text{Nilai rata-ratanya adalah : } I_{as} = 2I_m / \pi = 70 \text{ mA}$$

5.4.3. Pemotong Gelombang

Rangkaian pemotong gelombang digunakan untuk menghilangkan bagian gelombang sinyal yang tidak diinginkan. Pada penyearah setengah gelombang kita lihat bahwa dioda meniadakan arus negatif; dengan kata lain ia memotong bagian negatif dari gelombang masukan. Jika sebuah sumber tegangan konstan V dihubungkan seri dengan dioda dan dengan polaritas yang berlawanan, seperti terlihat pada Gb.5.8., maka arus hanya akan mengalir jika tegangan masukan v_1 lebih besar dari tegangan konstan ini. Dengan cara ini, tegangan pada resistor R hanya akan ada jika tegangan v_1 lebih besar dari V .



Gb.5.8. Pemotong gelombang

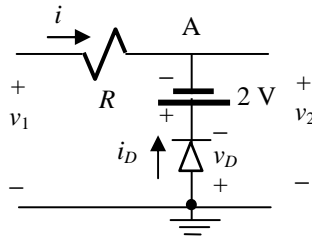
Kita aplikasikan HTK pada rangkaian ini:

Jika dioda konduksi, $v_D = 0$, sehingga $v_R = v_1 - V$.

Jika dioda tak-konduksi, $i = 0$, sehingga $v_R = 0$.

Jadi rangkaian ini meniadakan bagian tegangan masukan yang lebih kecil dari V , atau dengan kata lain ia memotong gelombang masukan v_1 . Tegangan v_R akan muncul jika $v_1 > V$ sedangkan bagian lain dari v_1 akan dihilangkan seperti terlihat pada Gb.5.8.

CONTOH-5.8: Pada rangkaian di samping ini, $v_1 = 8 \sin \omega t$; gambarkanlah v_1 dan v_2 dan gambarkan pula *karakteristik transfer*, yaitu v_2 sebagai fungsi dari v_1 .



Solusi :

Aplikasi HTK pada rangkaian ini memberikan:

Jika dioda konduksi

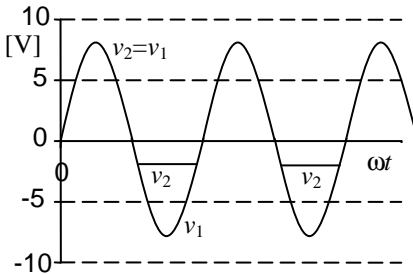
$$v_D = 0 \rightarrow V_A = v_2 = -2 \text{ V}$$

$$i_D = -i = -\frac{v_1 + 2}{R} > 0 \rightarrow v_1 < -2 \text{ V}$$

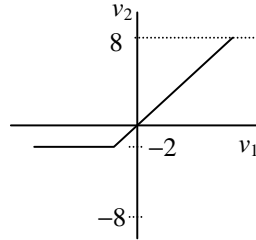
Jadi dioda konduksi jika $v_1 < -2 \text{ V}$. Pada waktu itu tegangan $v_2 = -2 \text{ V}$.

Karena dioda konduksi jika $v_1 < -2 \text{ V}$, maka jika $v_1 > -2 \text{ V}$ dioda tidak akan konduksi dan pada waktu itu $i = 0$, dan $v_2 = v_1$.

Bentuk gelombang tegangan dan karakteristik transfer adalah sebagai berikut:



bentuk gelombang tegangan

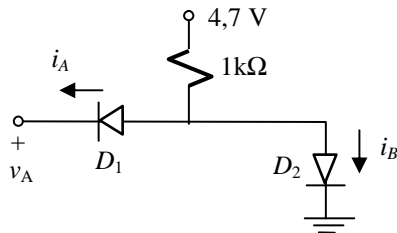


karakteristik transfer

5.4.4. Pensaklaran

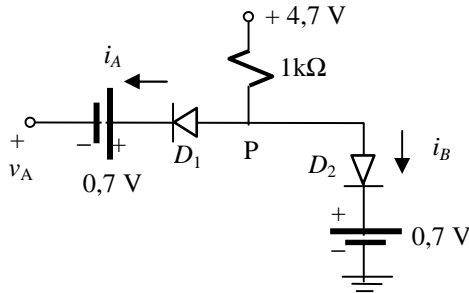
Dalam kenyataan, dioda semikonduktor memerlukan suatu *pra-tegangan* agar terjadi konduksi arus. Besarnya pra-tegangan ini adalah sekitar 0,3 V untuk dioda germanium dan 0,7 V untuk dioda silikon. Oleh karena itu model rangkaian dioda akan memberikan hasil yang lebih memuaskan jika dinyatakan sebagai kombinasi seri dari sebuah dioda ideal dan sumber tegangan berpolaritas berlawanan dengan polaritas dioda ideal tersebut. Berikut ini adalah sebuah contoh rangkaian dengan dioda silikon.

CONTOH 5.9: Rangkaian di samping ini merupakan rangkaian pensaklaran yang dibangun dari dua dioda silikon. Tentukan i_A dan i_B jika $v_A = 1$ V.



Solusi :

Model rangkaian dengan dioda silikon ini adalah sebagai berikut.



Untuk simpul P terdapat kemungkinan-kemungkinan berikut:

Jika D_1 dan D_2 konduksi $v_{D1} = v_{D2} = 0$

$$v_P = v_A + 0,7 = 0,7 \rightarrow v_A = 0$$

\Rightarrow tidak sesuai dengan yang diketahui.

Situasi ini tidak terjadi.

Jika D_1 konduksi dan D_2 tak-konduksi,

$$i_B = 0 \rightarrow v_P = v_A + 0,7 = 1,7 \text{ V}$$

$$\Rightarrow v_P > 0,7 \rightarrow D_2 \text{ harus konduksi}$$

Situasi ini tidak terjadi.

Jika D_1 tak-konduksi dan D_2 konduksi,

$$i_A = 0 \rightarrow v_P = 0,7 < (v_A + 0,7) \rightarrow D_1 \text{ tak konduksi}$$

$$\Rightarrow i_B = (4,7 - v_P) / 1 = (4,7 - 0,7) / 1 = 4 \text{ mA}$$

Situasi inilah yang terjadi.

Pada situasi terakhir inilah arus mengalir melalui D_2 sebesar $i_B = 4 \text{ mA}$, sedangkan $i_A = 0$.

Pemahaman:

Dari tiga kemungkinan operasi yang disebutkan di atas, hanya kemungkinan ke-3 yang bisa terjadi, yaitu D_1 tak-konduksi dan D_2 konduksi. Dengan kata lain arus akan mengalir melalui D_2 jika D_1 tak-konduksi; sedangkan D_1 tak-konduksi hanya apabila $v_P > v_A$. Padahal v_P tidak akan lebih besar dari $0,7 \text{ V}$ karena pada saat itu $v_{D2} = 0$. Jadi ada situasi batas dimana

$$v_P = 0,7 = v_A - 0,7 \text{ V} \quad \text{atau} \quad v_A = 0 \text{ V}$$

Jika simpul A sedikit saja bertegangan, arus pada dioda D_2 akan berubah dari 0 menjadi 4 mA.

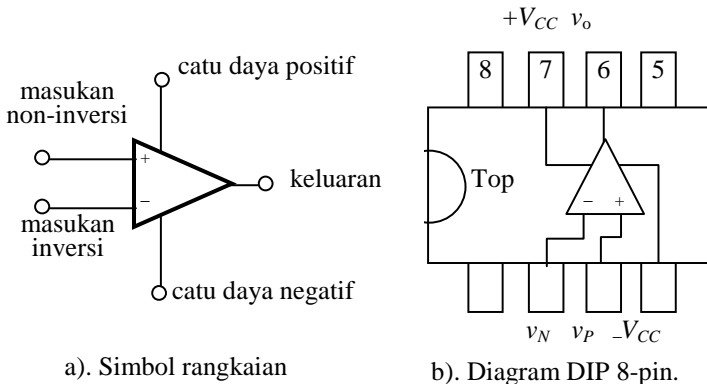
5.5. Penguat Operasional (OP AMP)

OP AMP bukanlah elemen pencatu daya, melainkan bekerja dengan bantuan catu daya dari luar sehingga ia mampu memperbesar sinyal masukan. Oleh karena itu ia kita pelajari dalam bab yang membahas model piranti ini, namun masih terbatas pada situasi yang belum memerlukan aplikasi metoda analisis. Metoda analisis sendiri baru akan kita pelajari beberapa bab ke belakang.

OP AMP adalah suatu piranti berbentuk rangkaian terintegrasi yang cukup rumit, terdiri dari transistor, resistor, dioda, kapasitor, yang semuanya terangkai dalam satu chip. Walaupun rangkaiannya rumit, OP AMP dapat dimodelkan dengan suatu karakteristik $i-v$ yang agak sederhana. Kita tidak akan membahas apa yang sebenarnya terjadi dalam piranti ini, tetapi akan memandang OP AMP sebagai elemen rangkaian dengan hubungan-hubungan arus dan tegangan tertentu.

5.5.1. Notasi

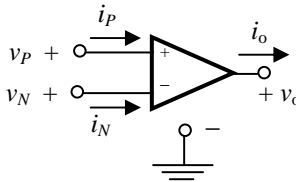
OP AMP merupakan piranti lima terminal dengan simbol seperti pada Gb.5.9.a. Gambar fisik piranti ini diberikan secara sederhana pada Gb.5.9.b. yang menunjukkan posisi-posisi terminalnya.



Gb.5.9. Simbol dan diagram OP AMP.

$+V_{CC}$: catu tegangan positif; $-V_{CC}$: catu tegangan negatif

Dua diantara terminal tersebut bertanda $+V_{CC}$ dan $-V_{CC}$. Dua terminal ini adalah terminal catu, yang menghubungkan OP AMP dengan sumber tegangan. Sumber tegangan inilah yang akan mencatu kebutuhan daya dalam rangkaian. Tegangan catu menentukan batas atas dan batas bawah tegangan keluaran. Walaupun sesungguhnya penguat ini beroperasi karena ada tegangan catu, namun terminal tegangan catu ini sering tidak digambarkan sehingga kita mempunyai diagram yang disederhanakan, seperti terlihat pada Gb.5.10. Perhatikan notasi serta referensi arus dan tegangannya.



Gb.5.10. Rangkaian OP AMP disederhanakan.

Notasi-notasi yang kita pergunakan adalah :

v_P = tegangan masukan non-inversi; i_P = arus masukan non-inversi;

v_N = tegangan masukan inversi; i_N = arus masukan inversi;

v_o = tegangan keluaran; i_o = arus keluaran;

Tegangan dihitung terhadap titik referensi umum (bertanda “-”).

Perlu kita perhatikan bahwa dalam diagram rangkaian yang disederhanakan seperti pada Gb.5.10, banyak bagian rangkaian yang tidak digambarkan. Oleh karena itu kita tidak boleh sembarangan mengaplikasikan HAK untuk rangkaian tersebut; sebagai contoh kita harus menyadari bahwa $i_o \neq i_P + i_N$

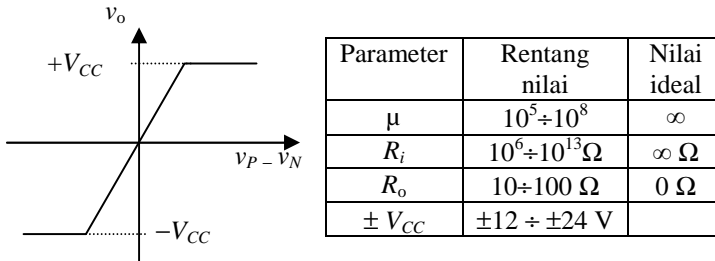
5.5.2. Karakteristik Alih (Karakteristik Transfer)

Karakteristik alih OP AMP memberikan hubungan antara v_P , v_N , dan v_o , yang diperlihatkan pada Gb.5.11. Karakteristik ini terbagi dalam tiga daerah operasi, yaitu daerah jenuh negatif, daerah linier, dan daerah jenuh positif. Dalam pembahasan rangkaian dengan OP AMP di sini, kita hanya akan meninjau daerah operasi yang linier

saja. Dalam daerah ini terdapat hubungan linier antara v_o dan $(v_P - v_N)$, yang dapat dinyatakan dengan

$$v_o = \mu(v_P - v_N) \quad (5.4)$$

Konstanta μ disebut *gain loop terbuka* (*open loop gain*), yang dalam Gb.5.11 adalah kemiringan kurva di daerah linier.



Gb.5.11. Karakteristik alih OP AMP dan rentang nilai μ .

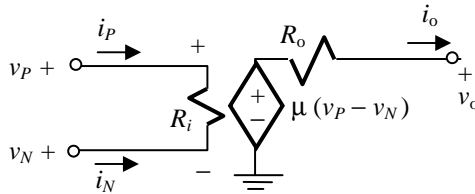
Nilai μ sangat besar, biasanya lebih dari 10^5 . Selama nilai netto $(v_P - v_N)$ cukup kecil, v_o akan proporsional terhadap masukan. Akan tetapi jika $\mu (v_P - v_N) > V_{CC}$ OP AMP akan jenuh; tegangan keluaran tidak akan melebihi tegangan catu $\pm V_{CC}$.

5.5.3. Model Ideal OP AMP

OP AMP yang beroperasi di daerah linier dapat dimodelkan sebagai rangkaian sumber tak-bebas seperti terlihat pada Gb.5.12. Model ini melibatkan resistansi masukan R_i , resistansi keluaran R_o , dan VCVS dengan *gain* μ . Rentang nilai parameter-parameter ini diberikan dalam Tabel-5.1.

Dengan bekerja di daerah linier, tegangan keluaran v_o tidak akan melebihi $\pm V_{CC}$.

$$|v_o| \leq |V_{CC}| \quad \text{atau} \quad |\mu(v_P - v_N)| \leq |V_{CC}| \Rightarrow |v_P - v_N| \leq \left| \frac{V_{CC}}{\mu} \right|$$



Gb.5.12. Model OP AMP

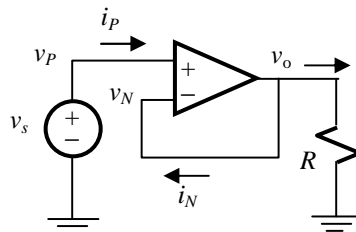
Karena μ sangat besar, yang untuk OP AMP ideal dapat dianggap $\mu = \infty$, sedangkan V_{CC} tidak lebih dari 24 Volt, maka dapat dikatakan bahwa $(V_{CC}/\mu) = 0$ sehingga kita dapat menganggap bahwa $v_P = v_N$. Sementara itu untuk OP AMP ideal $R_i = \infty$ sehingga arus masuk di kedua terminal masukan dapat dianggap nol. Jadi untuk OP AMP ideal kita mendapatkan :

$$\begin{aligned} v_P &= v_N \\ i_P &= i_N = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Karakteristik inilah yang akan kita penggunaan dalam analisis rangkaian dengan OP AMP.

5.5.4. Rangkaian Penyangga (*buffer, voltage follower*)

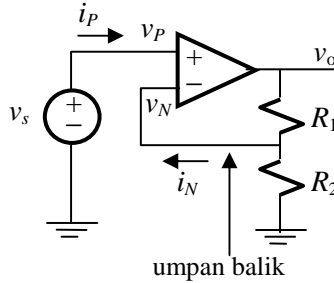
Berikut ini kita akan melihat salah satu rangkaian dasar OP AMP yaitu rangkaian penyangga atau *buffer*. Yang dimaksud dengan rangkaian dasar adalah rangkaian yang digunakan untuk membangun suatu rangkaian yang lebih lengkap, yang dapat berfungsi sesuai dengan hubungan masukan-keluaran yang diinginkan. Perlu kita ingat bahwa jika kita membangun suatu rangkaian yang memenuhi hubungan masukan-keluaran yang kita inginkan, hasil atau jawabannya tidaklah berupa jawaban tunggal. Ada beberapa kemungkinan struktur rangkaian yang dapat memenuhi hubungan masukan-keluaran yang kita inginkan.



Gb.5.13. Rangkaian penyangga.

Rangkaian penyangga (Gb.5.13) digunakan sebagai antar-muka untuk “meng-isolasi” beban terhadap sumber. Rangkaian umpan balik merupakan hubungan langsung dari terminal keluaran ke terminal masukan inversi.

Dengan hubungan ini maka $v_N = v_o$. Sinyal masukan dihubungkan ke terminal non-inversi yang akan memaksa $v_P = v_s$. Karena model ideal OP AMP mengharuskan $v_P = v_N$, maka $v_o = v_s$. Jadi dalam rangkaian ini gain loop tertutup $K = 1$. Besar tegangan keluaran mengikuti tegangan masukan. Oleh karena itu rangkaian ini juga disebut *voltage follower*.



Gb.5.14. Penguat non-inversi.

5.5.5. Penguat Non-Inversi

Pada rangkaian penyangga, $v_P = v_s = v_N = v_o$. Jika kita buat v_N lebih kecil dari v_o dengan menggunakan pembagi tegangan, maka kita peroleh penguat non-inversi. Perhatikan diagram rangkaian pada Gb.5.14.

Pada terminal masukan non-inversi diberikan tegangan masukan v_s , sedang terminal masukan inversi dihubungkan ke rangkaian keluaran. Hubungan keluaran dengan masukan ini kita sebut *umpan balik (feed back)* dan rangkaian seperti ini kita sebut rangkaian dengan umpan balik. Dengan adanya umpan balik terjadi interaksi antara masukan dan keluaran.

Model ideal OP AMP mengharuskan $i_N = i_P = 0$; oleh karena itu tegangan v_N dapat dicari dengan kaidah pembagi tegangan, yaitu

$$v_N = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o$$

Pada terminal masukan non-inversi $v_P = v_s$. Karena model ideal OP AMP juga mengharuskan $v_P = v_N$ maka

$$v_P = v_N = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o = v_s$$

sehingga

$$v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_s$$

Inilah hubungan antara keluaran dan masukan yang dapat kita tuliskan

$$v_o = K v_s \quad \text{dengan} \quad K = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

Konstanta K ini kita sebut *gain loop tertutup* karena *gain* ini diperoleh pada rangkaian dengan umpan balik. Dengan demikian kita mempunyai dua macam *gain*, yaitu *gain* loop terbuka (μ) dan *gain* loop tertutup (K). *Gain* loop terbuka sangat besar nilainya namun ketidak pastiannya juga besar. *Gain* loop tertutup lebih kecil namun nilainya dapat kita kendalikan dengan lebih cermat yaitu dengan cara memilih resistor berkualitas baik, dengan ketelitian cukup tinggi. Jadi dengan membuat umpan balik, kita memperoleh *gain* yang lebih kecil tetapi dengan ketelitian lebih baik.

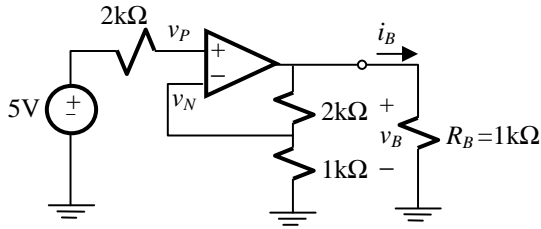
Dalam menghitung K di atas, kita menggunakan model ideal dengan μ yang tak hingga besarnya. Dalam kenyataan, μ mempunyai nilai besar tetapi tetap tertentu. Berapa besar pengaruh nilai μ yang tertentu ini terhadap nilai K dapat kita analisis dengan menggunakan rangkaian model sumber tak-bebas seperti pada Gb.5.12. yang dilengkapi dengan umpan balik seperti pada Gb.5.14. Analisisnya tidak kita lakukan di sini namun hasil yang akan diperoleh adalah berbentuk

$$K^* = \frac{K}{1 + (K/\mu)}$$

dengan K^* adalah *gain* loop tertutup jika μ mempunyai nilai tertentu. Model ideal akan memberikan hasil yang baik selama $K \ll \mu$.

CONTOH 5.10:

Pada rangkaian penguat non-inversi di bawah ini tentukan tegangan, arus dan daya pada beban R_B .



Solusi :

$$\left. \begin{aligned} i_P = 0 &\rightarrow v_P = v_s = 5 \text{ V} \\ i_N = 0 &\rightarrow v_N = \frac{1}{1+2} v_o = \frac{v_o}{3} \end{aligned} \right\} \text{ maka}$$

$$\frac{v_o}{3} = 5 \text{ V} \rightarrow v_o = 15 \text{ V}$$

Jadi

$$v_B = v_o = 15 \text{ V}; \quad i_B = \frac{v_B}{R_B} = 15 \text{ mA}; \quad p_B = v_B i_B = 225 \text{ mW}.$$

Pemahaman :

Arus dari sumber 5 V adalah nol. Sumber ini tidak terbebani. Daya yang diserap oleh beban berasal dari catu daya pada OP AMP, yang tidak tergambarkan dalam rangkaian ini. OP AMP mempunyai batas maksimum arus yang dapat ia berikan. Jika kita misalkan arus maksimum yang dapat diberikan oleh OP AMP dalam rangkaian di atas adalah 10 mA maka arus ini harus dibagi antara beban dan rangkaian umpan balik. Karena $i_N = 0$, maka arus yang melalui rangkaian umpan balik, i_f , adalah :

$$i_f = \frac{v_o}{1+2} = \frac{15}{3} = 5 \text{ mA}$$

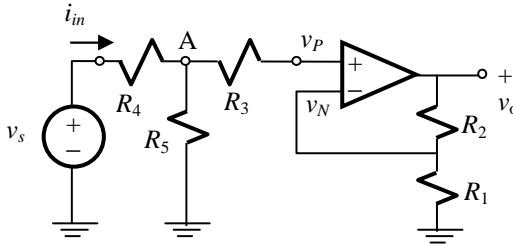
Arus yang melalui beban maksimum menjadi $i_{maks} = 10 - 5 = 5 \text{ mA}$. Agar tidak terjadi pembebanan berlebihan, resistansi beban paling sedikit adalah :

$$R_{B \min} = \frac{v_o}{5} = 3 \text{ k}\Omega$$

Daya maksimum yang bisa diberikan ke beban menjadi:

$$p_{B \max} = v_o i_{maks} = 15 \times 5 = 45 \text{ mW}$$

CONTOH 5.11: Carilah hubungan keluaran-masukan dari penguat non inversi di bawah ini, dan cari pula resistansi masukannya.



Solusi:

Karena $i_P = 0$, maka $v_P = v_A = \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s$

Karena $i_N = 0$ maka $v_N = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$

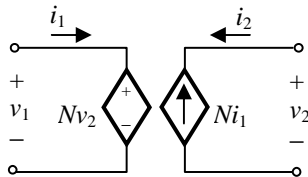
$$v_P = v_N \rightarrow \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \rightarrow \frac{v_o}{v_s} = \frac{R_5}{R_4 + R_5} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

Rangkaian-rangkaian dasar OP AMP yang lain seperti penguat inversi, penjumlah (*adder*), pengurang (penguat diferensial), integrator, diferensiator, akan kita pelajari setelah kita mempelajari metoda-metoda analisis.

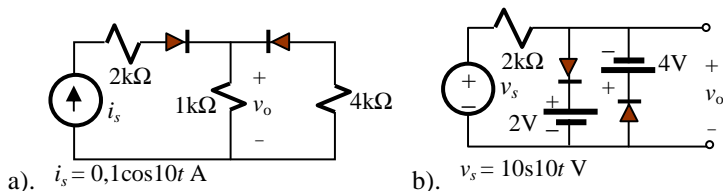
Soal-Soal

1. Sebuah pencatu daya dimodelkan sebagai sumber tegangan bebas 60 V dan resistansi seri R_i sebesar 0,5 Ω . Pada pembebanan 20 A, berapakah daya yang diberikan sumber dan yang diserap R_i ? Berapakah daya yang diterima oleh beban dan pada tegangan berapakah daya diterima.
2. Sebuah piranti pencatu daya dimodelkan sebagai sumber arus praktis yang terdiri dari sumber arus bebas 2 A dengan resistor paralel $R_p = 100 \Omega$. Pada waktu dibebani, arus yang melalui R_p adalah 0,2 A. Pada tegangan berapakah sumber arus bekerja ? Berapakah daya yang diberikan oleh sumber arus ? Berapakah daya yang diserap oleh R_p ? Berapakah daya yang diterima beban ? Berapa arus beban ?

3. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai CCCS dengan arus keluaran $I_o = 10I_f$ dimana I_f adalah arus pengendali. Piranti ini dibebani resistor 300Ω . Jika $I_f = 100 \text{ mA}$, berapakah daya yang diserap beban dan pada tegangan berapakah beban menyerap daya ?
4. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai VCVS dengan tegangan keluaran $V_o = 100V_f$ dimana V_f adalah tegangan pengendali. Piranti ini dibebani resistor 50Ω . Jika $V_f = 2 \text{ V}$, berapakah daya yang diserap beban dan berapakah arus beban ?
5. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai VCCS dengan arus keluaran $I_o = 2V_f$ dimana V_f adalah tegangan pengendali. Piranti ini dibebani resistor 50Ω . Jika $V_f = 2 \text{ V}$, berapakah daya yang diserap beban dan pada tegangan berapakah beban menyerap daya ?
6. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai CCVS dengan tegangan keluaran $V_o = 100I_f$ dimana I_f adalah arus pengendali. Piranti ini dibebani resistor 300Ω . Jika $I_f = 2 \text{ A}$, berapakah daya yang diserap beban dan berapakah arus beban ?
7. Pada model sumber tak bebas di samping ini, tunjukkanlah bahwa karakteristik $i-v$ dari piranti yang dimodelkannya adalah karakteristik transformator ideal.

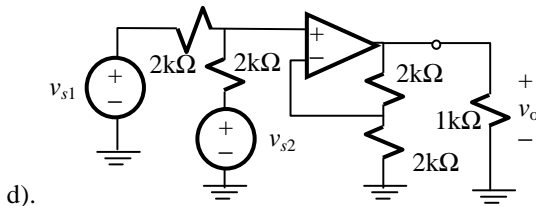
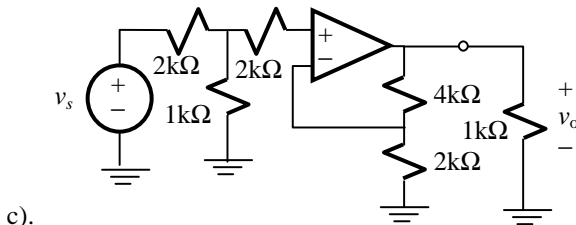
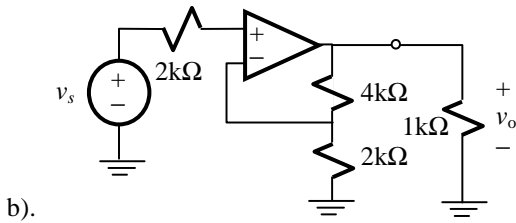
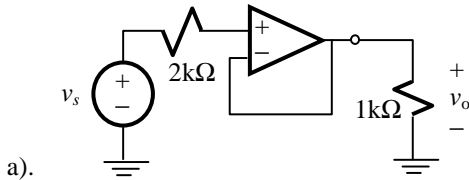


8. Carilah tegangan v_o rangkaian-rangkaian berikut.



9. Sebuah dioda mempunyai resistansi balik $200 \text{ k}\Omega$ dan karakteristik $i-v$ linier $I = 0,005 \text{ V}$, digunakan sebagai penyearah setengah gelombang untuk mencatu resistor $10 \text{ k}\Omega$. Tentukan tegangan pada resistor jika tegangan masukan adalah $v_s = 10\cos 300t \text{ V}$.

10. Sebuah penyearah setengah gelombang digunakan untuk mengisi batere. Berapa jam-kah diperlukan waktu untuk mengisi muatan 40 Ah jika arus efektif (rms) pengisian adalah 10 A.
11. Sebuah penyearah gelombang penuh digunakan untuk mengisi batere. Berapa jam-kah diperlukan waktu untuk mengisi muatan 50 Ah jika arus efektif (rms) pengisian adalah 10A.
12. Carilah hubungan antara tegangan v_o dan v_s .



BAB 6 Hukum-Hukum Dasar

Pekerjaan analisis pada suatu rangkaian linier yang parameternya diketahui, mencakup pemilihan teknik analisis dan penentuan besaran keluaran (*output*) jika besaran masukannya (*input*) diketahui, ataupun penentuan hubungan antara keluaran dan masukan. Agar kita mampu melakukan analisis kita perlu memahami beberapa hal yaitu hukum-hukum yang berlaku dalam suatu rangkaian, kaidah-kaidah rangkaian, teorema-teorema rangkaian serta metoda-metoda analisis. Dalam bab ini kita akan membahas hal yang pertama, yang mencakup hukum Ohm dan hukum Kirchhoff.

Dengan mempelajari hukum-hukum dasar ini, kita akan

- mampu menghitung resistansi konduktor jika parameternya diketahui.
- mampu mengaplikasikan Hukum Arus Kirchhoff (HAK) untuk menuliskan persamaan arus atau tegangan di suatu simpul.
- mampu mengaplikasikan Hukum Tegangan Kirchhoff (HTK) untuk menuliskan persamaan tegangan atau arus di suatu mesh ataupun loop.
- mampu mengaplikasikan HAK untuk simpul super maupun HTK untuk mesh super.

6.1. Hukum Ohm

Salah satu hasil percobaan laboratorium yang dilakukan oleh George Simon Ohm (1787-1854) adalah hubungan arus dan tegangan yang kemudian dikenal dengan hukum Ohm. Namun hukum Ohm sendiri merupakan hasil analisis matematis dari rangkaian galvanik yang didasarkan pada analogi antara aliran listrik dan aliran panas. Formulasi Fourier untuk aliran panas adalah

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dl} \quad (6.1)$$

dengan Q adalah quantitas panas dan T adalah temperatur, sedangkan k adalah konduktivitas panas, A luas penampang, dan T temperatur.

Dengan mengikuti formulasi Fourier untuk persamaan konduksi panas dan menganalogikan intensitas medan listrik dengan gradien temperatur, Ohm menunjukkan bahwa arus listrik yang mengalir pada konduktor dapat dinyatakan dengan

$$I = \frac{A}{\rho} \frac{dv}{dl} \quad (6.2)$$

Jika konduktor mempunyai luas penampang A yang merata, maka persamaan arus itu menjadi

$$I = \frac{A}{\rho} \frac{V}{l} = \frac{V}{R} \quad \text{dengan} \quad R = \frac{\rho l}{A} \quad (6.3)$$

V adalah beda tegangan pada konduktor sepanjang l dengan luas penampang A , ρ adalah karakteristik material yang disebut resistivitas, sedangkan R adalah resistansi konduktor. Persamaan (6.3) dapat ditulis juga sebagai

$$V = IR \quad (6.4)$$

dan untuk tegangan yang berubah terhadap waktu menjadi

$$v = iR \quad (6.5)$$

Hukum Ohm ini sangat sederhana namun kita harus tetap ingat bahwa ia hanya berlaku untuk material homogen ataupun elemen yang linier.

CONTOH-6.2: Seutas kawat terbuat dari tembaga dengan resistivitas $0,018 \, \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$. Jika kawat ini mempunyai penampang $10 \, \text{mm}^2$ dan panjang $300 \, \text{m}$, hitunglah resistansinya. Jika kawat ini dipakai untuk menyalurkan daya (searah), hitunglah tegangan jatuh pada saluran ini (yaitu beda tegangan antara ujung kirim dan ujung terima saluran) jika arus yang mengalir adalah $20 \, \text{A}$. Jika tegangan di ujung kirim adalah $220 \, \text{V}$, berapakah tegangan di ujung terima? Berapakah daya yang “hilang” pada saluran ?

Solusi :

Resistansi kawat adalah :

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{0,018 \times 300}{10} = 0,054 \, \Omega$$

Jika kawat ini dipakai untuk saluran daya, diperlukan saluran balik sehingga resistansi total adalah :

$$R_{saluran} = 2 \times 0,054 = 0,108 \, \Omega$$

Tegangan jatuh pada saluran adalah :

$$\Delta V_{saluran} = i R_s = 20 \times 0,108 = 2,16 \, \text{V}$$

Jika tegangan ujung kirim adalah 220 V, maka tegangan di ujung terima adalah

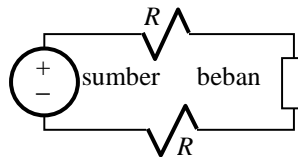
$$v_{terima} = 220 - 2,16 = 217,84 \, \text{V}$$

Daya hilang pada saluran adalah :

$$\begin{aligned} P_{saluran} &= i \times \Delta V_{saluran} = 20 \times 2,16 = 43,2 \, \text{W} \\ &= i^2 R = (20)^2 \times 0,108 = 43,2 \, \text{W} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Sesungguhnya resistansi kawat terdistribusi sepanjang kawat. Dalam analisis rangkaian, resistansi yang terdistribusi ini kita nyatakan sebagai suatu *parameter tergumpal (lumped parameter)*. Jadi resistansi kawat itu dinyatakan sebagai satu elemen rangkaian, yaitu R , sehingga diagram rangkaian menjadi seperti di samping ini.



6.2. Hukum Kirchhoff

Kita telah mempelajari piranti dan modelnya serta bagaimana hubungan antara *arus dan tegangan* pada piranti tersebut dengan memandangnya sebagai suatu komponen yang berdiri sendiri. Berikut ini kita akan mempelajari piranti-piranti yang terhubung membentuk suatu rangkaian. Hubungan *arus dan tegangan pada rangkaian* menurut suatu hukum yang menyatakan *sifat-sifat rangkaian*, hasil pemikiran ilmuwan Jerman Gustav Kirchhoff (1824 - 1887), yang disebut hukum Kirchhoff.

Sebelum membahas hukum Kirchhoff ada beberapa istilah yang terkait dengan *diagram rangkaian*, yang perlu kita fahami, yaitu :

Terminal : ujung akhir piranti atau sambungan rangkaian.

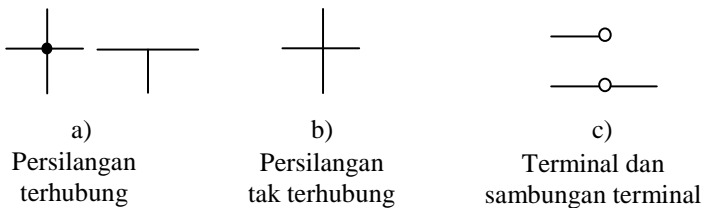
Rangkaian : beberapa piranti yang dihubungkan pada terminalnya.

Simpul (Node): titik sambung antara dua atau lebih piranti.

Catatan : Walaupun sebuah simpul diberi pengertian sebagai sebuah titik tetapi kawat-kawat yang terhubung langsung ke titik simpul itu merupakan bagian dari simpul; jadi dalam hal ini kita mengabaikan resistansi kawat.

Simpai (Loop) : rangkaian tertutup yang terbentuk apabila kita berjalan mulai dari salah satu simpul mengikuti sederetan piranti dengan melewati tiap simpul tidak lebih dari satu kali dan berakhir pada simpul tempat kita mulai perjalanan.

Selain istilah-istilah tersebut di atas, dalam menggambarkan hubungan atau sambungan-sambungan kita akan menggunakan cara-cara seperti terlihat pada Gb.6.3.



Gb.6.3. Penggambaran sambungan rangkaian.

6.2.1. Hukum Arus Kirchhoff (HAK) - *Kirchhoff's Current Law (KCL)*

Hukum Kirchhoff yang pertama ini menyatakan bahwa :

Setiap saat, jumlah aljabar dari arus di satu simpul adalah nol.

Di sini kita harus memperhatikan referensi arah arus. Bila arus yang *menuju* simpul diberi tanda *positif*, maka arus yang *meninggalkan* simpul diberi tanda *negatif* (atau sebaliknya bila arus yang *meninggalkan* bertanda *positif*, arus yang *menuju* simpul bertanda

negatif). Perlu diingat bahwa arah arus di sini adalah arah referensi dan bukan arah arus sebenarnya.

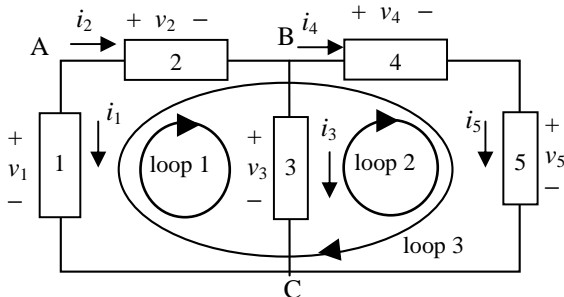
Hukum Arus Kirchhoff merupakan pernyataan *prinsip konservasi muatan*. Jumlah elektron per detik yang datang dan yang pergi haruslah sama, di titik manapun dalam rangkaian. Oleh karena itu jumlah arus di suatu simpul harus nol. Jika tidak, akan terjadi penumpukan muatan di simpul tersebut yang menurut hukum Coulomb akan terjadi “ledakan muatan”; tetapi hal demikian tidak pernah terjadi.

6.2.2. Hukum Tegangan Kirchhoff (HTK) - *Kirchhoff's Voltage Law (KVL)*

Hukum Kirchhoff yang kedua ini menyatakan bahwa :

Setiap saat, jumlah aljabar tegangan dalam satu loop adalah nol.

Di sinipun kita harus memperhatikan tanda referensi tegangan dalam menuliskan persamaan tegangan loop. Tegangan diberi tanda positif jika kita bergerak dari “+” ke “-” dan diberi tanda negatif bila kita bergerak dari “-” ke “+”.



HAK untuk simpul :

$$A : -i_1 - i_2 = 0$$

$$B : +i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

$$C : +i_1 + i_3 + i_4 = 0$$

HTK untuk loop :

$$1 : -v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$2 : -v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

$$3 : -v_1 + v_2 + v_4 + v_5 = 0$$

Gb.6.4. HAK dan HTK

Hukum Tegangan Kirchhoff merupakan pernyataan kembali prinsip konservasi energi. Dalam rangkaian pada Gb.6.4., sebagian piranti mungkin berupa sumber dan sebagian yang lain berupa beban.

Menurut prinsip konservasi energi, energi yang diberikan oleh sumber dalam suatu selang waktu tertentu harus sama dengan energi yang diserap oleh beban selama selang waktu yang sama. Mengingat konvensi pasif, hal itu berarti bahwa jumlah aljabar energi di semua piranti adalah nol, dan berarti pula bahwa jumlah aljabar daya (hasil kali tegangan dan arus tiap elemen) sama dengan nol.

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_4 = 0$$

Karena $i_1 = -i_2$ dan $i_2 = i_3 + i_4$ maka persamaan di atas dapat kita tulis

$$v_1(-i_3 - i_4) + v_2(i_3 + i_4) + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_4 = 0$$

atau

$$i_3(-v_1 + v_2 + v_3) + i_4(-v_1 + v_2 + v_4 + v_5) = 0$$

Karena nilai arus tidak nol maka haruslah

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad \text{dan} \quad -v_1 + v_2 + v_4 + v_5 = 0$$

Persamaan pertama adalah persamaan untuk loop-1 dan persamaan kedua adalah untuk loop-3. Dari persamaan loop-1 kita peroleh $-v_1 + v_2 = -v_3$ dan jika ini kita substitusikan ke persamaan loop-3, akan kita peroleh persamaan loop-2 yaitu:

$$-v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

Pengembangan HTK dan HAK. Loop-1 dan loop-2 pada Gb.6.4. merupakan loop-loop terkecil yang tidak melingkupi loop lain di dalamnya. Loop semacam ini disebut *mesh*. Hal ini berbeda dengan loop-3 yang merupakan gabungan dari mesh-1 dan mesh-2 (loop-1 dan loop-2). Loop yang merupakan gabungan dari beberapa mesh disebut juga *mesh super*. Persamaan dari suatu mesh super adalah gabungan dari persamaan mesh-mesh penyusunnya sebagaimana telah ditunjukkan di atas.

Kita perhatikan sekarang simpul A dan B pada Gb.6.4. HAK untuk kedua simpul ini adalah:

$$-i_1 - i_2 = 0 \quad \text{dan} \quad +i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

Jika kedua persamaan ini kita gabungkan akan kita peroleh :

$$-i_1 - i_3 - i_4 = 0$$

Ini adalah persamaan dari sebuah “simpul” yang merupakan gabungan dari dua simpul, yaitu simpul A dan B. Simpul gabungan dari beberapa simpul semacam ini disebut *simpul super*. Contoh lain untuk *simpul super* adalah gabungan simpul B dan C. Persamaan simpul super BC ini adalah :

$$+i_2 - i_4 + i_5 + i_1 = 0$$

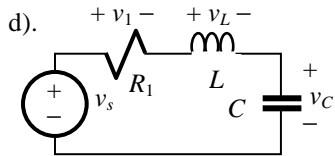
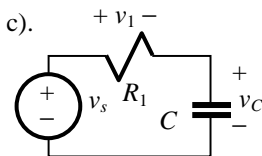
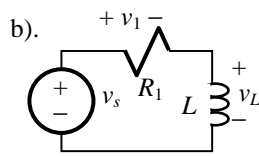
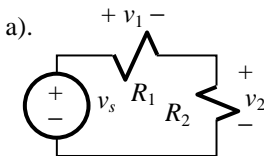
Penggabungan simpul-simpul seperti ini tidak terbatas hanya dua simpul. Jika simpul A, B, dan C kita gabungkan akan menjadi simpul super ABC yang persamaannya adalah :

$$-i_4 + i_5 = 0$$

Dengan demikian maka :

HAK berlaku untuk simpul tunggal maupun simpul super
dan
HTK berlaku untuk mesh tunggal maupun mesh super

CONTOH-6.3: Aplikasikan HTK pada empat macam rangkaian di bawah ini. Nyatakan pula persamaan yang diperoleh dengan arus elemen sebagai peubah jika arus awal induktor dan tegangan awal kapasitor adalah nol.



Solusi :

Aplikasi HTK untuk masing-masing rangkaian akan memberikan

a). $-v_s + v_1 + v_2 = 0 \rightarrow v_s = i_1 R_1 + i_2 R_2$

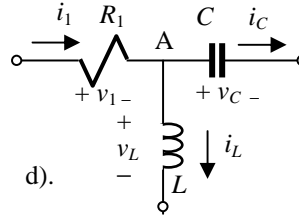
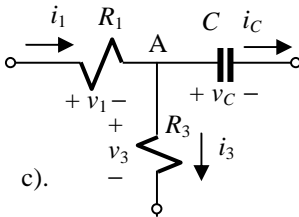
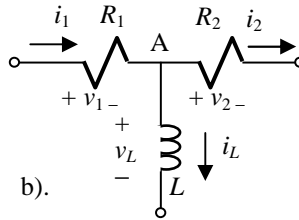
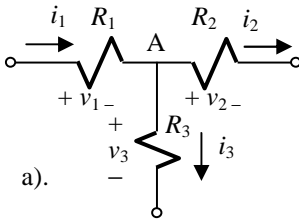
b). $-v_s + v_1 + v_L = 0 \rightarrow v_s = v_1 + v_L = i_1 R_1 + L \frac{di_L}{dt}$

$$\text{c). } -v_s + v_1 + v_C = 0 \rightarrow v_s = v_1 + v_C = i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_C dt$$

$$\text{d). } -v_s + v_1 + v_L + v_C = 0$$

$$\rightarrow v_s = v_1 + v_L + v_C = i_1 R_1 + L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int i_C dt$$

CONTOH-6.4: Aplikasikan HAK untuk simpul A dari berbagai macam bagian rangkaian di bawah ini. Nyatakan pula persamaan yang diperoleh dengan tegangan elemen sebagai peubah jika tegangan awal kapasitor dan arus awal induktor adalah nol.



Solusi :

Aplikasi HAK untuk simpul A pada bagian-bagian rangkaian tersebut di atas memberikan:

$$\text{a). } i_1 - i_2 - i_3 = 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = 0$$

$$\text{b). } i_1 - i_2 - i_L = 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{1}{L} \int v_L dt = 0$$

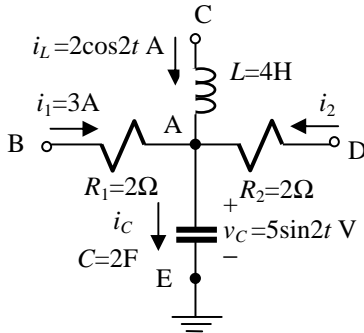
$$\text{c). } i_1 - i_C - i_3 = 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - C \frac{dv_C}{dt} - \frac{v_3}{R_3} = 0$$

$$\text{d). } i_1 - i_C - i_L = 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - C \frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{L} \int v_L dt = 0$$

Pemahaman :

Pada contoh 6.2. dan 6.3. di atas terlihat bahwa persamaan rangkaian dapat berbentuk persamaan aljabar biasa, yaitu apabila elemen-elemen rangkaian hanya terdiri dari resistor saja, atau berbentuk persamaan diferensial orde satu atau persamaan integro-diferensial. Dua bentuk persamaan terakhir ini terjadi jika rangkaian mengandung elemen dinamis.

CONTOH-6.5: Gambar di bawah ini menunjukkan keadaan di sekitar simpul A dari suatu rangkaian. Tentukan i_2 dan tegangan di simpul-simpul yang bukan simpul referensi.



Solusi :

Aplikasi HAK pada simpul A memberikan :

$$i_1 + i_L + i_2 - i_C = 0 \rightarrow i_2 = i_C - i_L - i_1$$

$$\rightarrow i_2 = 2 \frac{d(5 \sin 2t)}{dt} - 2 \cos 2t - 3 = 18 \cos 2t - 3 \text{ A}$$

Tegangan simpul-simpul non-referensi adalah

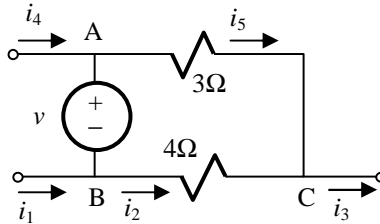
$$v_A = v_C = 5 \sin 2t \text{ V}$$

$$v_B = v_A + i_1 R_1 = 5 \sin 2t + 6 \text{ V}$$

$$v_C = v_A + v_L = 5 \sin 2t + 4 \frac{d(2 \cos 2t)}{dt} = -11 \sin 2t \text{ V}$$

$$v_D = v_A + i_2 R_2 = 5 \sin 2t + 36 \cos 2t - 6 \text{ V}$$

CONTOH-6.6: Pada rangkaian di bawah ini, diketahui bahwa arus-arus $i_1 = 5\text{ A}$, $i_2 = 2\text{ A}$, dan $i_3 = 8\text{ A}$. Tentukanlah arus i_1 , i_2 , dan tegangan v .



Solusi :

Jika kita gabungkan simpul A, B, dan C menjadi satu simpul super dan kita aplikasikan HAK, kita akan mendapatkan persamaan untuk simpul super ABC :

$$i_4 + i_1 - i_3 = 0 \Rightarrow i_4 = i_3 - i_1 = 8 - 5 = 3\text{ A}$$

Aplikasi HAK untuk simpul C memberikan:

$$i_2 + i_5 - i_3 = 0 \Rightarrow i_5 = i_3 - i_2 = 8 - 2 = 6\text{ A}$$

Tegangan v dapat kita cari dengan mengaplikasikan HTK untuk loop ABCA :

$$-v + 3i_5 - 4i_2 = 0 \rightarrow v = 3 \times 6 - 4 \times 2 = 10\text{ V}$$

6.3. Basis Analisis Rangkaian

Sesungguhnya dalam contoh-contoh 6.1. sampai 6.5. kita telah melakukan analisis rangkaian. Analisis tersebut kita lakukan dengan cara menerapkan langsung hukum Kirchhoff. Secara tidak sadar, disamping hukum Kirchhoff, kita telah pula memasukkan batasan-batasan elemen yang membentuk rangkaian tersebut yaitu berupa karakteristik i - v dari elemen. Pada resistor R misalnya, harus berlaku $v_R = i_R R$; untuk induktor harus berlaku $v_L = L \frac{di}{dt}$ dan untuk kapasitor $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$.

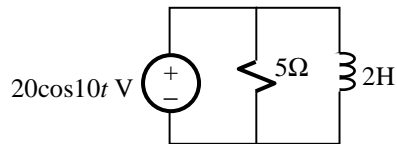
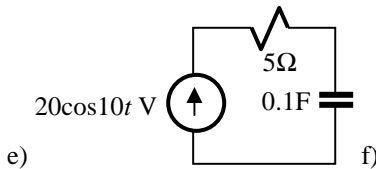
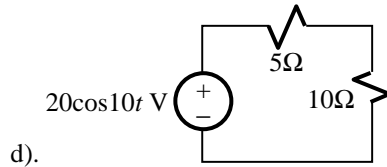
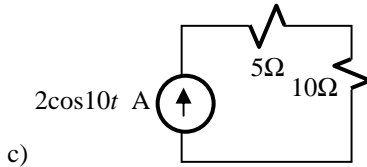
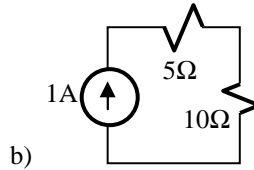
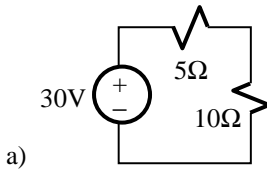
Jadi di dalam suatu rangkaian, Hukum Kirchhoff harus dipenuhi sementara elemen-elemen yang membentuk rangkaian itu mempunyai karakteristik i - v masing-masing yang juga harus dipenuhi. Kita katakan bahwa *Hukum Kirchhoff merupakan persyaratan rangkaian* sedangkan *karakteristik i - v elemen merupakan persyaratan elemen*. Dalam suatu rangkaian, kedua

persyaratan tersebut secara bersamaan harus dipenuhi dan hal ini menjadi basis untuk melakukan analisis rangkaian.

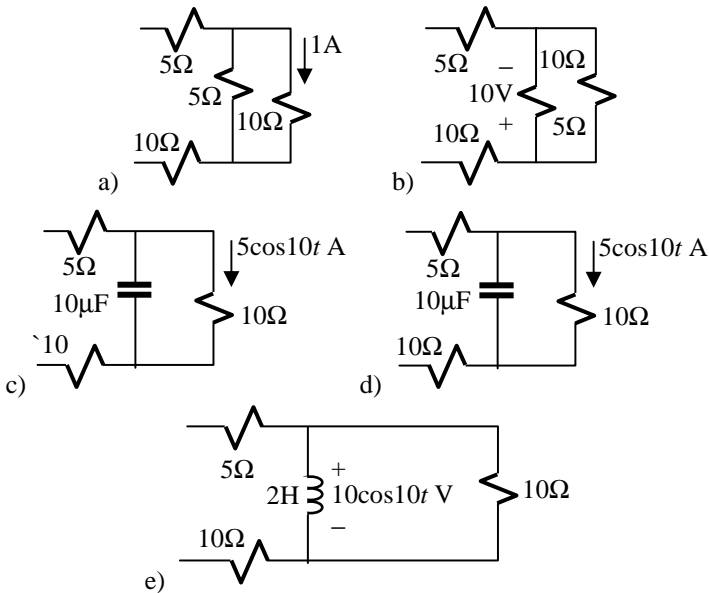
Selain daripada itu kita menganggap bahwa rangkaian-rangkaian yang kita hadapi tersusun dari elemen-elemen linier sehingga rangkaian kita merupakan rangkaian linier. Disamping linier, semua elemen juga mempunyai nilai yang tidak tergantung dari waktu sehingga kita mempunyai rangkaian yang *tidak merupakan fungsi waktu* atau *invarian waktu*. Jadi dalam analisis rangkaian yang akan kita pelajari dalam buku ini, hanyalah sinyal yang merupakan fungsi waktu sedangkan karakteristik rangkaian tidak merupakan fungsi waktu.

Soal-Soal

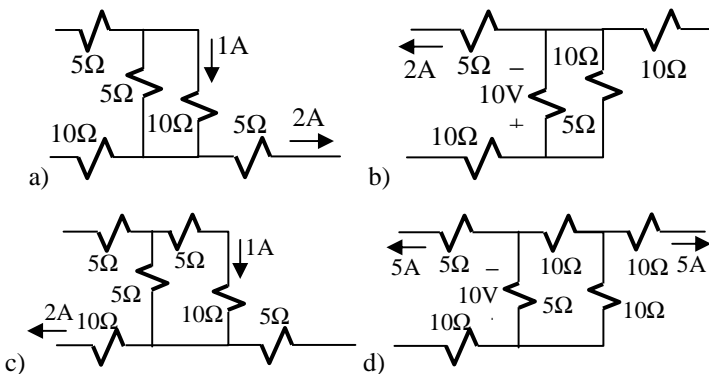
1. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen (termasuk sumber) pada rangkaian-rangkaian berikut.



2. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada bagian rangkaian berikut ini.



3. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada bagian rangkaian ini.



BAB 7 Kaidah dan Teorema Rangkaian

Kaidah rangkaian merupakan konsekuensi dari hukum-hukum rangkaian sedangkan teorema rangkaian merupakan pernyataan dari sifat-sifat dasar rangkaian linier. Kedua hal tersebut akan kita pelajari dalam bab ini. Kaidah dan teorema rangkaian menjadi dasar pengembangan metoda-metoda analisis yang akan kita pelajari pada bab selanjutnya.

Kaidah-kaidah rangkaian yang akan kita pelajari meliputi hubungan-hubungan seri dan paralel, rangkaian-rangkaian ekivalen, kaidah pembagi tegangan, pembagi arus.

Teorema rangkaian yang akan kita pelajari meliputi prinsip proporsionalitas, prinsip superposisi, teorema Thévenin, teorema Norton, teorema substitusi, teorema Millman, teorema alih daya maksimum, teorema Tellegen.

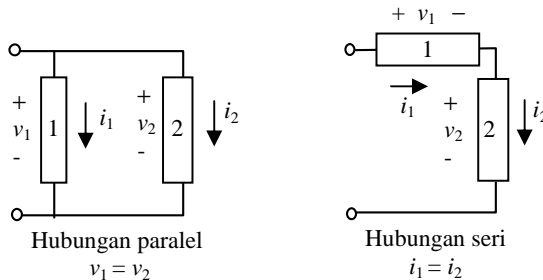
Dengan mempelajari kaidah-kaidah rangkaian dan teorema rangkaian kita akan

- mampu mencari nilai ekivalen dari elemen-elemen yang terhubung seri, terhubung paralel, terhubung bintang (Y) dan terhubung segitiga (Δ);
- mampu menentukan tegangan tiap elemen pada elemen-elemen yang terhubung seri;
- mampu menentukan arus cabang pada cabang-cabang rangkaian yang terhubung paralel.
- mampu menunjukkan bahwa rangkaian linier mengikuti prinsip proporsionalitas.
- mampu mengaplikasikan prinsip superposisi.
- memahami teorema Millman, teorema Thévenin dan teorema Norton, dan mampu mencari rangkaian ekivalen Thévenin ataupun Norton.
- mampu menentukan nilai elemen beban agar terjadi alih daya maksimum.

7.1. Kaidah-Kaidah Rangkaian

7.1.1. Hubungan Seri dan Paralel

Dua elemen dikatakan terhubung paralel jika mereka terhubung pada dua simpul yang sama. Dengan menerapkan HTK pada loop yang dibentuk oleh dua elemen itu akan terlihat bahwa tegangan pada elemen-elemen itu harus sama.



Gb.7.1. Hubungan paralel dan seri.

Dua elemen dikatakan terhubung seri jika mereka hanya mempunyai satu simpul bersama dan tidak ada elemen lain yang terhubung pada simpul itu. Penerapan HAK akan memperlihatkan bahwa arus yang mengalir di kedua elemen itu sama. Hubungan paralel maupun seri tidak terbatas hanya dua elemen.

7.1.2. Rangkaian Ekuivalen (Rangkaian Pengganti)

Analisis terhadap suatu rangkaian sering akan menjadi lebih mudah dilaksanakan jika sebagian dari rangkaian dapat diganti dengan rangkaian lain yang ekuivalen dan lebih sederhana. Basis untuk terjadinya ekuivalensi antara dua macam rangkaian adalah hubungan i - v dari keduanya.

Dua rangkaian disebut ekuivalen jika antara dua terminal tertentu mereka mempunyai karakteristik i - v yang identik

7.1.3. Resistansi Ekuivalen

Resistansi ekuivalen dari beberapa resistor yang terhubung seri adalah resistor yang nilai resistansinya sama dengan jumlah nilai resistansi yang disambung seri tersebut.

$$\text{Resistansi Seri: } R_{ekiv} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \quad (7.1)$$

Hal ini mudah dibuktikan jika diingat bahwa resistor-resistor yang dihubungkan seri dialiri oleh arus yang sama, sedangkan tegangan di masing- masing resistor sama dengan arus kali resistansinya.

Menurut HTK, tegangan total pada terminal dari rangkaian seri tersebut sama dengan jumlah tegangan di masing-masing resistor. Jadi

$$\begin{aligned} V_{total} &= V_{R1} + V_{R2} + \dots = R_1 i + R_2 i + \dots \\ &= (R_1 + R_2 + \dots) i = R_{ekivalen} i. \end{aligned}$$

Penggantian $(R_1 + R_2 + \dots)$ dengan R_{ekiv} , tidak mengubah hubungan antara arus dan tegangan di terminal ujung.

Konduktansi ekivalen dari beberapa konduktansi yang disambung paralel sama dengan jumlah konduktansi masing-masing.

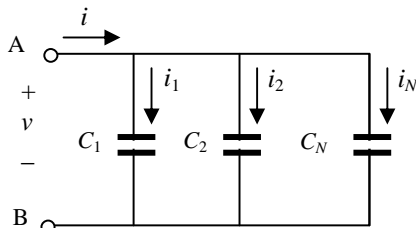
$$\text{Konduktansi Paralel: } G_{ekiv} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots \quad (7.2)$$

Hal ini juga mudah dibuktikan, mengingat bahwa masing-masing elemen yang dihubungkan paralel memperoleh tegangan yang sama. Sementara itu arus total sama dengan jumlah arus di masing-masing elemen yang terhubung paralel tersebut.

$$i_{total} = i_{G1} + i_{G2} + \dots = G_1 v + G_2 v + \dots = (G_1 + G_2 + \dots) v = G_{ekivalen} v$$

7.1.4. Kapasitansi Ekivalen

Pencarian nilai ekivalen dari kapasitor maupun induktor yang terhubung seri ataupun paralel dapat dilakukan dengan menggunakan cara yang sama seperti mencari resistansi ekivalen.



Gb.7.2. Kapasitor paralel.

Gb.7.2. memperlihatkan beberapa kapasitor terhubung paralel.

Aplikasi HAK pada simpul A memberikan :

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \dots + i_N = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt} = C_{ek} \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

Jadi kapasitansi ekivalen dari kapasitor yang terhubung paralel adalah

$$\text{Kapasitor Paralel: } C_{ek} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \quad (7.3)$$

Untuk kapasitor yang dihubungkan seri kita mempunyai hubungan:

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + \cdots + v_N \\ &= v_{10} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i dt + v_{20} + \frac{1}{C_2} \int_0^t i dt + \cdots + v_{N0} + \frac{1}{C_N} \int_0^t i dt \\ &= v_{ek0} + \frac{1}{C_{ek}} \int_0^t i dt \end{aligned}$$

Jadi untuk kapasitor yang dihubungkan seri maka kapasitansi ekivalennya dapat dicari dengan hubungan :

$$\text{Kapasitor Seri: } \frac{1}{C_{ek}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \quad (7.4)$$

7.1.5. Induktansi Ekivalen

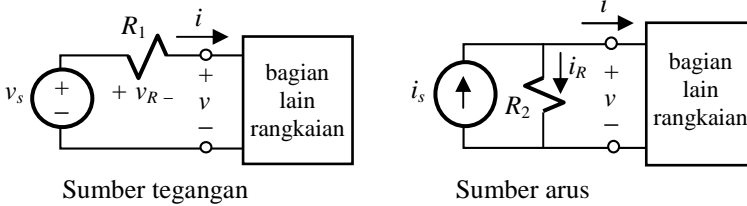
Induktansi ekivalen dari induktor yang dihubungkan seri ataupun paralel dapat dicari dengan cara yang sama, dan hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\text{Induktansi Seri: } L_{ek} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N \quad (7.5)$$

$$\text{Induktansi Paralel: } \frac{1}{L_{ek}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N} \quad (7.6)$$

7.1.6. Sumber Ekivalen

Suatu sumber tegangan praktis dapat digantikan oleh sumber arus praktis ekivalennya dan demikian juga sebaliknya. Secara umum kita katakan bahwa sumber tegangan bebas yang terhubung seri dengan resistor dapat diganti oleh sumber arus bebas diparalelkan dengan resistor. Demikian pula sebaliknya, sumber arus bebas yang terhubung paralel dengan resistor dapat diganti oleh sumber tegangan bebas diseri dengan resistor. Perhatikan model sumber tegangan dan sumber arus pada Gb.7.3.



Gb.7.3. Ekvivalensi sumber tegangan dan sumber arus.

Formulasi hubungan arus dan tegangan masing-masing jenis sumber adalah:

Sumber Tegangan:

$$v = v_s - v_R = v_s - iR_1$$

$$i = \frac{v_s - v}{R_1} = \frac{v_s}{R_1} - \frac{v}{R_1}$$

Sumber Arus:

$$v = i_R R_2 = (i_s - i)R_2$$

$$i = i_s - i_R = i_s - \frac{v}{R_2}$$

Kedua model itu akan ekuivalen apabila:

$$v_s - iR_1 = i_s R_2 - iR_2 \quad \text{dan} \quad \frac{v_s}{R_1} - \frac{v}{R_1} = i_s - \frac{v}{R_2}$$

$$\rightarrow v_s = i_s R_2 \quad \text{dan} \quad iR_1 = iR_2 \quad \text{dan} \quad \frac{v_s}{R_1} = i_s$$

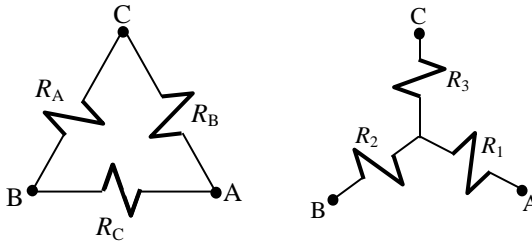
$$\Rightarrow \frac{v}{R_1} = \frac{v}{R_2} \quad \text{dan} \quad R_1 = R_2 \quad (7.7)$$

Jika persyaratan untuk terjadinya ekivalensi itu terpenuhi maka bagian rangkaian yang lain tidak akan terpengaruh jika kita menggantikan model sumber tegangan dengan model sumber arus ekivalennya ataupun sebaliknya mengganti sumber arus dengan sumber tegangan ekivalennya. Menggantikan satu model sumber dengan model sumber lainnya disebut *transformasi sumber*.

7.1.7. Transformasi Y-Δ

Dalam beberapa rangkaian mungkin terjadi hubungan yang tidak dapat disebut sebagai hubungan seri, juga tidak paralel. Hubungan semacam ini mengandung bagian rangkaian dengan tiga terminal yang mungkin terhubung Δ (segi tiga) atau terhubung Y (bintang) seperti terlihat pada Gb.7.4. Menggantikan hubungan Δ dengan

hubungan Y yang ekuivalen, atau sebaliknya, dapat mengubah rangkaian menjadi hubungan seri atau paralel.



Gb.7.4 Hubungan Δ dan hubungan Y.

Kedua macam hubungan itu akan ekuivalen jika dari tiap pasang terminal A-B, B-C, C-A, terlihat resistor ekuivalen yang sama. Jadi kedua rangkaian itu harus memenuhi

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2 \\ R_{BC} &= \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_2 + R_3 \\ R_{CA} &= \frac{R_B(R_C + R_A)}{R_A + R_B + R_C} = R_3 + R_1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Dari (7.8) ini kita peroleh relasi rangkaian ekuivalen Y dari suatu rangkaian Δ , dan rangkaian ekuivalen Δ dari suatu rangkaian Y, seperti berikut.

Ekuivalen Y dari Δ
$R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$
$R_2 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$
$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$

Ekuivalen Δ dari Y
$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$
$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$
$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$

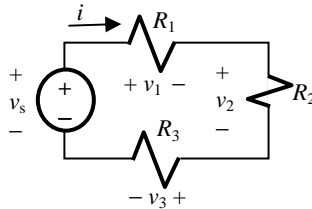
Suatu rangkaian Y dan Δ dikatakan **seimbang** jika $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$ dan $R_A = R_B = R_C = R_\Delta$. Dalam keadaan seimbang seperti ini, transformasi Y - Δ menjadi sederhana, yaitu:

$$\text{Keadaan seimbang: } R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \text{dan} \quad R_\Delta = 3R_Y$$

7.1.8. Kaidah Pembagi Tegangan

Kaidah ini memberikan distribusi tegangan pada elemen yang dihubungkan seri dalam rangkaian.

Dengan mengaplikasikan HTK pada loop rangkaian Gb.7.5, kita mendapatkan :



Gb.7.5. Pembagian tegangan

$$v_s = v_1 + v_2 + v_3 = (R_1 + R_2 + R_3)i$$

$$\rightarrow i = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{v_s}{R_{total}}$$

Tegangan pada masing-masing elemen adalah :

$$v_1 = R_1 i = \left(\frac{R_1}{R_{total}} \right) v_s ; \quad v_2 = \left(\frac{R_2}{R_{total}} \right) v_s ; \quad v_3 = \left(\frac{R_3}{R_{total}} \right) v_s \quad (7.9)$$

Secara umum dapat kita tuliskan:

$$\text{Pembagi Tegangan: } v_k = \left(\frac{R_k}{R_{total}} \right) v_{total}$$

(7.10)

Jadi tegangan total didistribusikan pada semua elemen sebanding dengan resistansi masing-masing dibagi dengan resistansi ekuivalen.

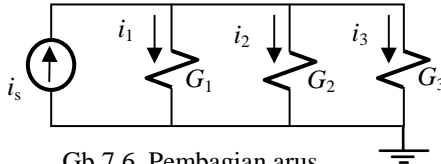
7.1.9. Kaidah Pembagi Arus

Dalam rangkaian paralel, arus terbagi sebanding dengan konduktansi di masing-masing cabang. Kita ambil contoh rangkaian seperti pada Gb.7.6.

Hubungan antara arus i_s dan tegangan v dapat dicari sbb.

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 = vG_1 + vG_2 + vG_3$$

$$\rightarrow v = i_s / (G_1 + G_2 + G_3) = i_s / G_{total}$$



Gb.7.6. Pembagian arus.

Dari v yang diperoleh dapat dihitung arus di masing-masing resistor.

$$i_1 = vG_1 = \left(\frac{G_1}{G_{total}} \right) i_s ; i_2 = \left(\frac{G_2}{G_{total}} \right) i_s ; i_3 = \left(\frac{G_3}{G_{total}} \right) i_s \quad (7.11)$$

Secara umum :

Pembagi Arus : $i_k = \left(\frac{G_k}{G_{total}} \right) i_{total}$	(7.12)
---	--------

7.2. Teorema Rangkaian

Teorema-teorema rangkaian berbasis pada sifat linier dari rangkaian. Dalam membahas teorema-teorema ini kita akan melihat pada rangkaian dengan elemen resistor saja agar pemahamannya menjadi lebih mudah. Selain prinsip proporsionalitas, prinsip superposisi, teorema Thévenin, teorema Norton, dan teorema alih daya maksimum, akan dibahas juga secara singkat teorema Millman, teorema substitusi dan teorema Tellegen; tiga teorema terakhir ini dapat dilewati untuk sementara tanpa memberikan kesulitan pada pembahasan pada bab-bab selanjutnya.

7.2.1. Proporsionalitas (Kesebandingan Lurus)

Dalam rangkaian linier, sinyal keluaran merupakan fungsi linier dari sinyal masukan. Sebagai fungsi linier, keluaran tersebut memiliki sifat homogen dan aditif. Sifat homogen itu muncul dalam bentuk kesebandingan antara keluaran (*output*) dan masukan (*input*), yang berarti bahwa keluaran dari rangkaian linier berbanding lurus dengan masukannya. Sifat homogen ini kita sebut **proporsionalitas**. Sementara itu sifat aditif terlihat apabila kita mempunyai rangkaian yang mengandung lebih dari satu masukan. Keluaran dari rangkaian linier semacam ini merupakan jumlah dari semua keluaran yang

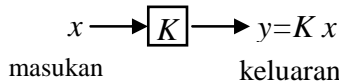
diperoleh jika seandainya masing-masing masukan bekerja secara terpisah. Sifat aditif ini kita sebut *superposisi*.

Karakteristik i - v dari resistor linier, $v = R i$, adalah contoh dari suatu hubungan linier. Kalau arus meningkat 2 kali maka tegangan juga meningkat 2 kali. Sementara itu daya, $p = i^2 R$, bukanlah hubungan linier. Jadi dalam rangkaian linier *hanya tegangan dan arus saja yang memiliki hubungan linier*.

Hubungan antara masukan dan keluaran secara umum dapat ditulis :

$$y = K x \quad (7.13)$$

dengan x adalah masukan (bisa tegangan, bisa juga arus), y adalah keluaran, dan K adalah konstanta proporsionalitas. Hubungan ini dapat digambarkan dengan diagram blok seperti Gb.7.7.



Gb.7.7. Hubungan masukan – keluaran rangkaian linier.

7.2.2. Prinsip Superposisi

Prinsip superposisi memberikan hubungan antara keluaran dengan beberapa masukan di dalam suatu rangkaian yang dapat dituliskan sebagai

$$y = y_1 + y_2 + y_3 \cdots = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + \cdots \quad (7.14)$$

dengan $y_i = K_i x_i$, dan y_i adalah keluaran yang diperoleh jika masing-masing masukan, x_i , bekerja sendiri-sendiri. K_i adalah konstanta yang besarnya tergantung dari rangkaian. Secara singkat dapat dikatakan bahwa *keluaran dari rangkaian resistor linier merupakan kombinasi linier dari masukan*. Dengan kata lain, keluaran rangkaian adalah jumlah dari kontribusi masing-masing sumber. Kontribusi suatu sumber pada keluaran rangkaian dapat dicari dengan mematikan sumber-sumber yang lain.

- a. Mematikan *sumber tegangan* berarti membuat tegangan sumber itu menjadi nol, artinya sumber ini menjadi *hubungan singkat*.
- b. Mematikan *sumber arus* adalah membuat arus sumber menjadi nol, artinya sumber ini menjadi *hubungan terbuka*.

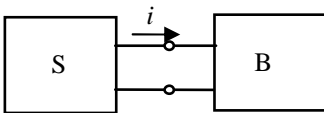
7.2.3. Teorema Millman

Teorema Millman menyatakan bahwa apabila beberapa sumber tegangan v_k yang masing-masing memiliki resistansi seri R_k dihubungkan paralel maka hubungan paralel tersebut dapat digantikan dengan satu sumber tegangan ekuivalen v_{ekiv} dengan resistansi seri ekuivalen R_{ekiv} sedemikian sehingga

$$\frac{v_{ekiv}}{R_{ekiv}} = \sum \frac{v_k}{R_k} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{R_{ekiv}} = \sum \frac{1}{R_k} \quad (7.14)$$

7.2.4. Teorema Thévenin dan Teorema Norton

Kedua teorema ini dikembangkan secara terpisah akan tetapi kita akan membahasnya secara bersamaan. Secara umum, rangkaian listrik terdiri dari dua bagian rangkaian yang menjalankan fungsi berbeda, yang dihubungkan oleh terminal interkoneksi. Untuk hubungan dua terminal seperti terlihat pada Gb.7.8, satu bagian disebut *seksi sumber* dan bagian yang lain disebut *seksi beban*. Pengertian *seksi sumber* di sini adalah *bagian rangkaian yang*



Gb.7.8. Seksi sumber [S]
dan seksi beban [B].

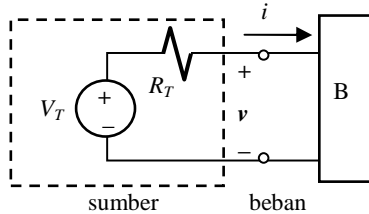
mengandung sumber dan bukan hanya sebuah sumber saja.

Sinyal listrik dikirimkan dari seksi sumber dan diberikan kepada seksi beban. Interaksi antara seksi sumber dan seksi beban, merupakan salah satu masalah

utama yang dibahas dalam analisis dan rancangan rangkaian listrik. Rangkaian seksi sumber dapat digantikan dengan rangkaian ekuivalen Thévenin atau rangkaian ekuivalen Norton. Kondisi yang diperlukan agar rangkaian ekuivalen ini ada, dikatakan secara formal sebagai suatu teorema:

Theorema Thévenin menyatakan bahwa jika rangkaian seksi sumber pada hubungan dua-terminal adalah linier, maka sinyal pada terminal interkoneksi tidak akan berubah jika rangkaian seksi sumber itu diganti dengan rangkaian ekuivalen Thévenin.

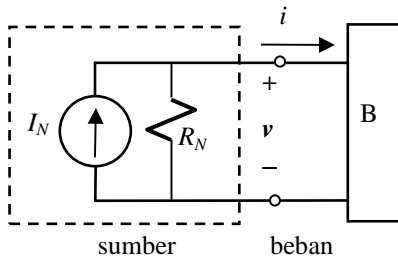
Gb.7.9. menunjukkan bentuk rangkaian ekivalen Thévenin; seksi sumber digantikan oleh *satu sumber tegangan V_T yang terhubung seri dengan resistor R_T* .



Gb.7.9. Rangkaian ekivalen **Thévenin**

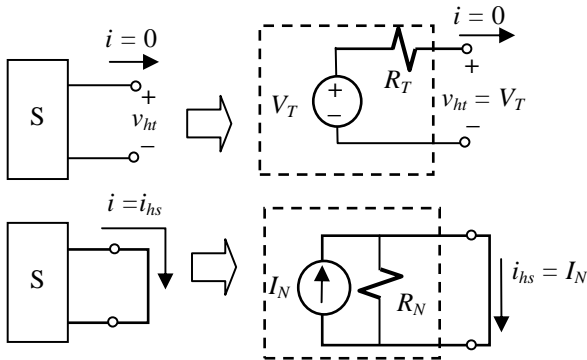
Theorema Norton menyatakan bahwa jika rangkaian seksi sumber pada hubungan dua-terminal adalah linier, maka sinyal pada terminal interkoneksi tidak akan berubah jika rangkaian seksi sumber itu diganti dengan rangkaian ekivalen Norton.

Gb.7.10. menunjukkan bentuk rangkaian ekivalen Norton; seksi sumber digantikan oleh *satu sumber arus I_N yang terhubung paralel dengan resistor R_N* .



Gb.7.10. Rangkaian ekivalen **Norton**

Bagaimana mencari tegangan ekivalen Thevenin dan arus ekivalen Norton, dijelaskan pada Gb.7.11.

Gb.7.11. Mencari V_T dan I_N

V_T adalah tegangan pada terminal interkoneksi apabila beban dilepas; sedangkan I_N adalah arus hubung singkat yang mengalir apabila beban diganti dengan suatu hubung singkat.

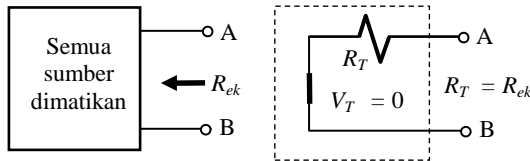
Perhatikan bahwa persyaratan agar kita dapat mencari rangkaian ekuivalen Thévenin atau Norton adalah bahwa *rangkaian seksi sumber harus linier*. Persyaratan ini tidak diperlukan untuk rangkaian bebannya, jadi *rangkaian beban boleh linier boleh pula tidak linier (non-linear)*.

Karena kedua rangkaian ekuivalen itu dapat menggantikan satu macam seksi sumber maka kedua rangkaian ekuivalen itu harus mempunyai karakteristik i - v yang sama. Hal ini berarti bahwa dalam keadaan terbuka, $V_T = I_N R_N$; dan dalam keadaan hubung singkat $I_N = V_T / R_T$. Kedua hal ini mengharuskan $V_T = I_N R_N = I_N R_T$ yang berarti R_N harus sama dengan R_T . Jadi parameter rangkaian ekuivalen Thévenin maupun Norton dapat diperoleh dengan mencari tegangan hubungan-terbuka (v_{ht}) dan arus hubung-singkat (i_{hs}) di terminal seksi sumber.

Jadi

$$V_T = v_{ht} ; \quad I_N = i_{hs} ; \quad R_T = R_N = v_{ht} / i_{hs} \quad (7.16)$$

Cara Lain Mencari Resistor Ekuivalen Thévenin (R_T). Resistansi ekuivalen Thévenin R_T dapat diperoleh dengan cara lain yaitu dengan mencari resistansi ekuivalen yang dilihat dari terminal ke arah seksi sumber dengan seluruh sumber dimatikan. Jika resistansi tersebut adalah R_{ek} maka $R_T = R_{ek}$ (Gb.7.12.).



Gb.7.12. Cara lain mencari R_T

Dengan singkat dapat dikatakan bahwa untuk menentukan rangkaian ekuivalen Thévenin ataupun rangkaian ekuivalen Norton, dua dari tiga parameter di bawah ini dapat digunakan.

- Tegangan hubungan terbuka pada terminal
- Arus hubung singkat pada terminal
- Resistor ekuivalen sumber dilihat dari terminal dengan semua sumber dimatikan.

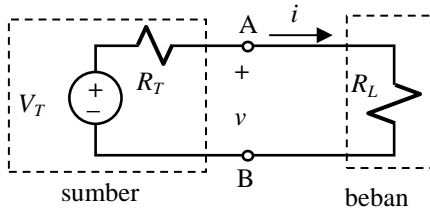
Ketiga parameter tersebut dihitung dengan *seksi beban tidak terhubung pada seksi sumber*. Jadi rangkaian ekuivalen Thévenin dan rangkaian ekuivalen Norton merupakan karakteristik seksi sumber dan *tidak tergantung dari beban*. Perhatikanlah bahwa rangkaian ekuivalen Thévenin menjadi suatu model *sumber praktis*.

7.2.5. Alih Daya Maksimum

Salah satu persoalan penting dalam rangkaian yang terdiri dari seksi sumber dan seksi beban adalah pengendalian tingkat sinyal di terminal interkoneksinya. Persoalan yang akan kita lihat disini adalah mengenai tingkat sinyal maksimum yang dapat dialihkan melalui terminal interkoneksi. Hubungan antara seksi sumber dan seksi beban dapat kita bagi dalam empat macam keadaan, yaitu :

- Sumber tetap, beban bervariasi.
- Sumber bervariasi, beban tetap.
- Sumber bervariasi, beban bervariasi.
- Sumber tetap, beban tetap.

Kita akan membatasi diri pada hubungan antara suatu *sumber tetap* dengan *beban yang bervariasi*. Seksi sumber merupakan rangkaian linier dan dinyatakan dengan rangkaian ekuivalen Thévenin dan beban dinyatakan dengan resistor ekuivalen R_L , seperti terlihat pada Gb.7.13.



Gb.7.13. Alih sinyal dari seksi sumber ke beban

Kaidah pembagi tegangan, memberikan tegangan di A-B sebagai

$$v = \frac{R_L}{R_L + R_T} V_T$$

Jika V_T tidak berubah, tegangan v akan maksimum bila R_L bernilai sangat besar dibanding dengan R_T . Keadaan idealnya adalah R_L bernilai tak terhingga, yang berarti rangkaian terbuka. Dalam keadaan ini tegangan maksimum adalah $v_{\max} = V_T = v_{ht}$. Jadi tegangan maksimum yang bisa diperoleh di terminal interkoneksi adalah tegangan hubungan terbuka v_{ht} .

Arus yang mengalir ke beban adalah

$$i = V_T / (R_L + R_T)$$

Dari hubungan ini jelas bahwa arus akan maksimum bila R_L jauh lebih kecil dibanding dengan R_T atau mendekati nol (hubung singkat). Jadi arus maksimum yang bisa diperoleh di terminal AB adalah arus hubung singkat

$$i_{maks} = V_T / R_T = I_N = i_{hs}$$

Daya yang diberikan oleh sumber ke beban adalah

$$p = vi = \frac{R_L V_T^2}{(R_L + R_T)^2}$$

Dalam persamaan daya ini terlihat bahwa kondisi untuk menghasilkan tegangan maksimum ($R_L = \infty$) maupun arus maksimum ($R_L = 0$) menyebabkan daya menjadi nol. Ini berarti bahwa nilai R_L yang dapat menghasilkan alih daya maksimum harus terletak di antara kedua nilai ekstrem tersebut. Untuk mencarinya kita turunkan p terhadap R_L dan membuatnya bernilai 0.

$$\frac{dp}{dR_L} = \frac{\left[(R_L + R_T)^2 - 2R_L(R_L + R_T) \right] V_T^2}{(R_L + R_T)^4} = \frac{R_T - R_L}{(R_L + R_T)^3} V_T^2 = 0$$

Turunan itu akan menjadi nol bila $R_L = R_T$. Jadi *alih daya akan maksimum jika resistansi beban sama dengan resistansi Thévenin*. Jika keadaan seperti ini dicapai, dikatakan bahwa sumber dan beban *mencapai kesesuaian* atau dalam keadaan “*matched*”.

Besar daya maksimum yang dialihkan diperoleh dengan memasukkan kondisi $R_L = R_T$ ke persamaan untuk daya p :

$$p_{maks} = \frac{V_T^2}{4R_T} \quad (7.17)$$

Karena $V_T = I_N R_T$ maka :

$$p_{maks} = \frac{I_N^2 R_T}{4} \quad (7.18)$$

atau

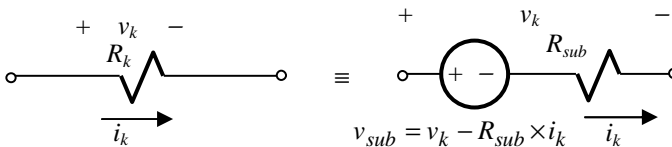
$$p_{maks} = \frac{V_T I_N}{4} = \left[\frac{v_{ht}}{2} \right] \left[\frac{i_{hs}}{2} \right] \quad (7.19)$$

Dengan demikian maka

Rangkaian sumber ekuivalen dengan resistansi Thévenin R_T akan memberikan daya maksimum kepada resistansi beban R_L bila $R_L = R_T$.

7.2.6. Teorema Substitusi

Teorema substitusi menyatakan bahwa suatu cabang rangkaian antara dua simpul dapat disubstitusi oleh cabang baru tanpa mengganggu arus dan tegangan di cabang-cabang yang lain asalkan tegangan dan arus antara kedua simpul tersebut tidak berubah.



Gb.7.14. Substitusi cabang rangkaian.

Secara umum dapat kita katakan bahwa jika suatu cabang pada rangkaian berisi resistansi R_k yang bertegangan v_k dan dialiri arus i_k maka resistansi pada cabang ini dapat kita substitusi dengan

$$R_{sub} + v_{sub}$$

$$\text{di mana } v_{sub} = v_k - R_{sub} \times i_k$$

sedangkan R_{sub} dapat bernilai sembarang.

Mengubah isi suatu cabang dengan tetap mempertahankan nilai arus dan tegangannya tidak akan mengubah relasi hukum Kirchhoff. Oleh karena itulah teorema ini berlaku. Teorema ini dapat kita manfaatkan untuk menggantikan resistansi yang berada di suatu cabang dengan suatu sumber tegangan atau sebaliknya.

7.2.7. Teorema Tellegen

Berikut ini kita akan membahas perimbangan daya dari keseluruhan rangkaian, yang terdiri dari banyak elemen. Untuk menghitung daya di masing-masing elemen kita memerlukan parameter *tegangan elemen* v_k dan *arus elemen* i_k . Sesuai dengan konvensi pasif, hasil kali $v_k \times i_k$ bernilai *positif jika elemen yang bersangkutan menyerap daya* dan bernilai *negatif jika memberikan daya*.

Teorema Tellegen menyatakan bahwa jika v_k mengikuti hukum tegangan Kirchhoff (HTK) dan i_k mengikuti hukum arus Kirchhoff (HAK), maka

$$\sum_{k=1}^N v_k \times i_k = 0 \quad (7.20)$$

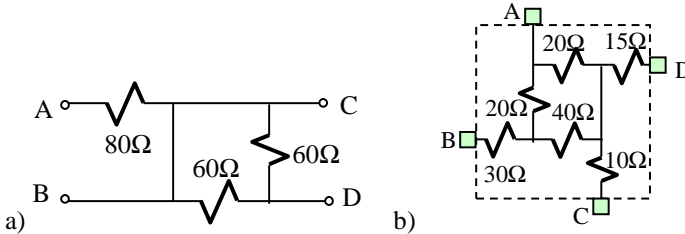
Penjumlahan tersebut meliputi seluruh elemen (N = jumlah elemen). Teorema ini hanya memerlukan persyaratan bahwa HTK dan HAK dipenuhi, tanpa mempedulikan karakteristik i - v dari elemen. Dengan demikian maka teorema ini berlaku baik untuk rangkaian linier maupun non-linier.

Teorema ini menyatakan bahwa di setiap rangkaian listrik harus ada perimbangan yang tepat antara daya yang diserap oleh elemen pasif dengan daya yang diberikan oleh elemen aktif. Hal ini sesuai dengan prinsip konservasi energi. Lebih dari sekedar memenuhi prinsip konservasi energi, kita dapat menarik kesimpulan bahwa satu-satunya cara agar energi dapat *diserap dari* atau *disalurkan ke* suatu bagian rangkaian adalah melalui *tegangan dan arus* di terminalnya.

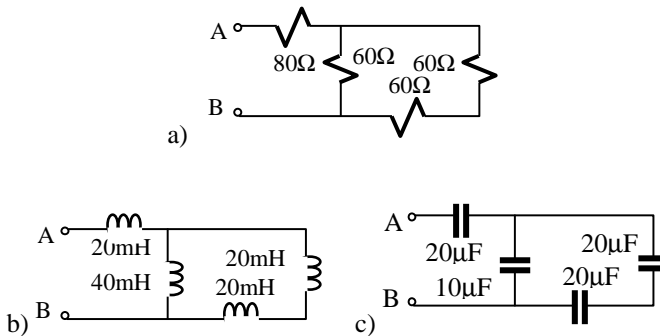
Soal-Soal

R, L, dan C Ekvivalen.

1. Carilah resistansi ekuivalen antara terminal A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, dan C-D.

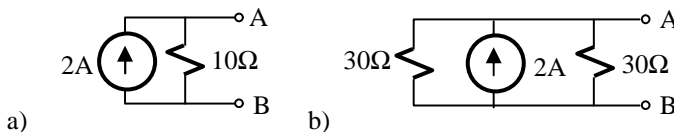


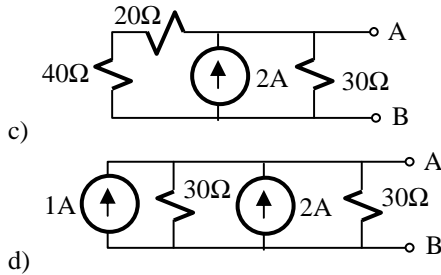
2. Carilah resistansi ekuivalen antara terminal A-B dari rangkaian-rangkaian di bawah ini.



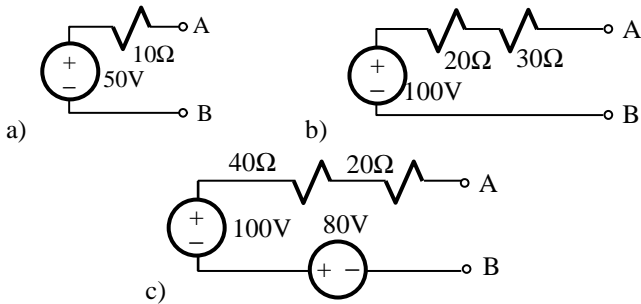
Sumber Ekvivalen:

3. Dari rangkaian sumber arus berikut ini carilah rangkaian ekuivalen sumber tegangannya di terminal A-B.



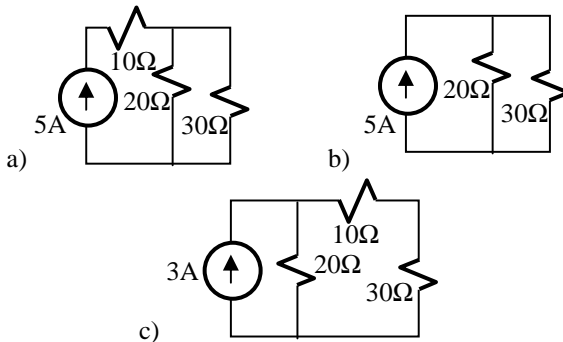


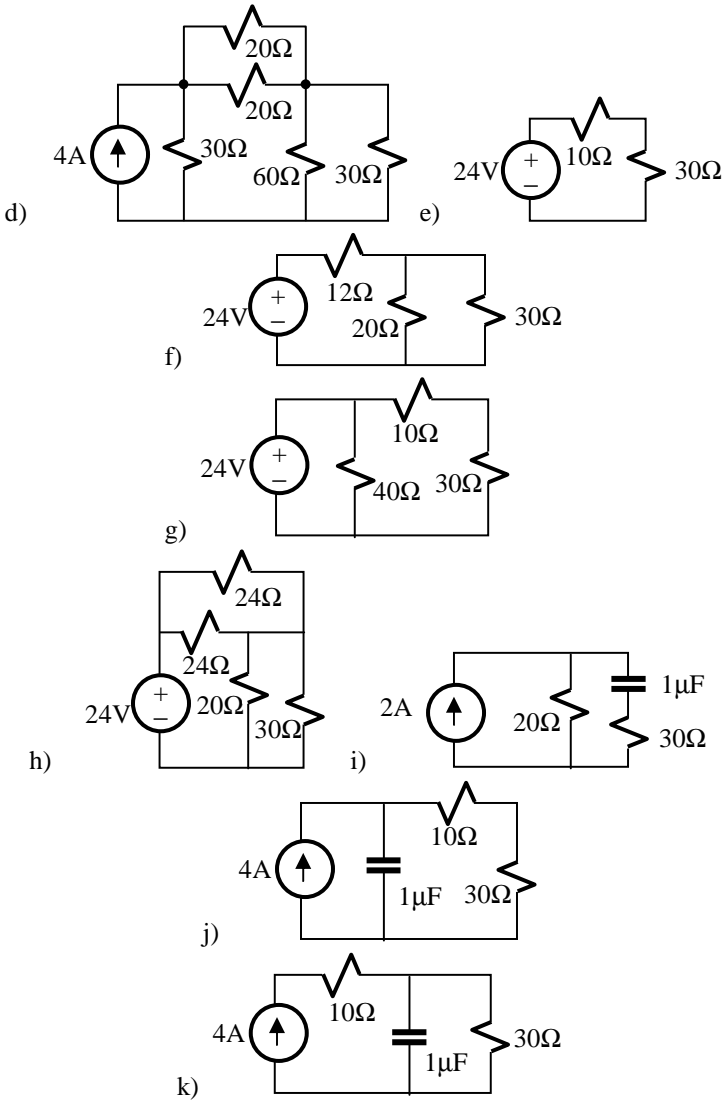
4. Dari rangkaian sumber tegangan di bawah ini carilah rangkaian ekuivalen sumber arusnya di terminal A-B.

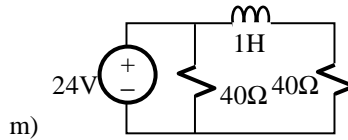
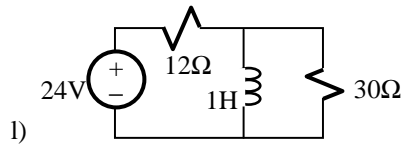


Pembagi Tegangan dan Pembagi Arus.

5. Carilah arus dan tegangan di masing-masing resistor pada rangkaian di samping ini dan hitung daya yang diberikan sumber.

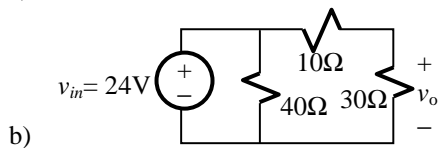
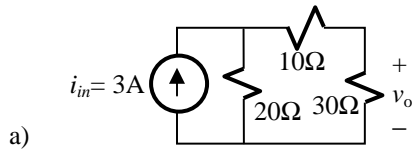






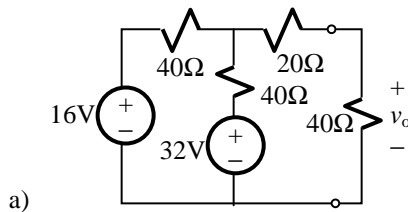
Proporsionalitas

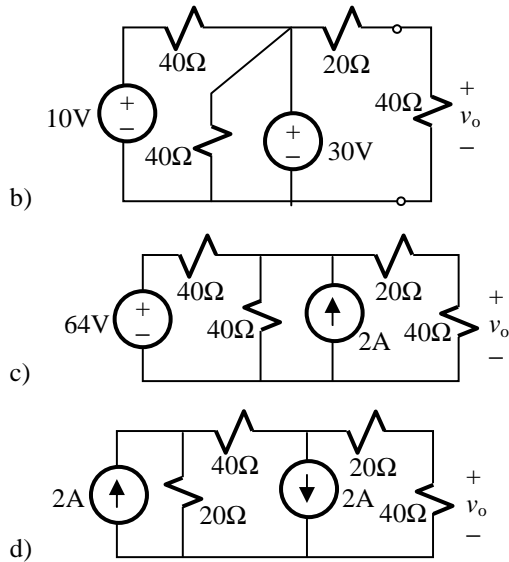
6. Carilah hubungan antara keluaran v_o dan masukan i_{in} rangkaian di samping ini, dan gambarkan diagram blok rangkaian.



Superposisi

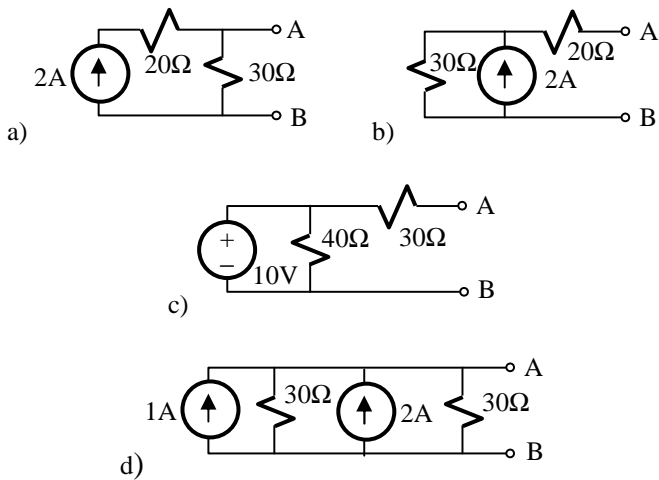
7. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.

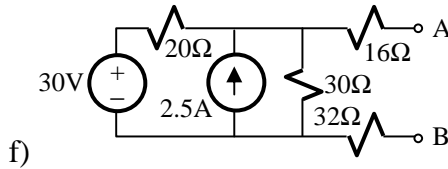
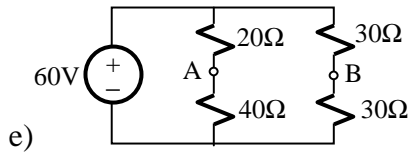




Rangkaian Ekuivalen Thévenin & Norton

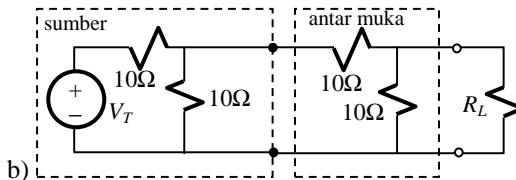
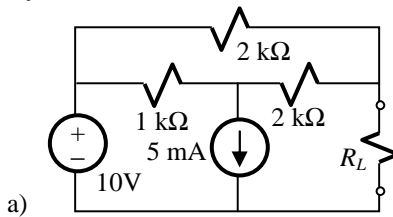
8. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton di terminal A-B dari rangkaian di bawah ini.





Alih Daya Maksimum

9. Pada rangkaian di bawah ini tentukanlah nilai resistansi beban R_L sehingga terjadi alih daya maksimum pada beban dan carilah besarnya daya maksimum tersebut.



BAB 8 Metoda Analisis Dasar

Metoda analisis dikembangkan berdasarkan teorema rangkaian beserta hukum-hukum dan kaidah rangkaian. Kita akan mempelajari dua kelompok metoda analisis yaitu *metoda analisis dasar* dan *metoda analisis umum*. Metoda analisis dasar terutama digunakan pada rangkaian-rangkaian sederhana, sedangkan untuk rangkaian yang lebih rumit kita memerlukan metoda yang lebih sistematis yaitu metoda analisis umum. Kita mempelajari metoda analisis agar kita dapat melakukan analisis rangkaian sederhana secara manual. Kemampuan melakukan analisis secara manual ini sangat diperlukan untuk memahami sifat dan perilaku rangkaian. Di bab ini kita akan mempelajari metoda analisis dasar sedangkan metoda analisis umum akan kita pelajari di bab berikutnya.

Dengan mempelajari metoda analisis dasar kita akan

- mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda reduksi rangkaian;
- mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda keluaran satu satuan;
- mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda superposisi;
- mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda rangkaian ekivalen Thévenin atau rangkaian ekivalen Norton.

Secara garis besar, apa yang dimaksud dengan analisis rangkaian adalah mencari hubungan antara besaran keluaran dan besaran masukan pada suatu rangkaian jika parameter semua elemen yang menyusun rangkaian tersebut diketahui; atau mencari keluaran rangkaian jika masukannya diketahui.

Teorema rangkaian beserta hukum-hukum dan kaidah rangkaian yang telah kita pelajari, menjadi dasar dari metoda-metoda analisis rangkaian yang kita sebut sebagai *metoda analisis dasar*. Dalam menggunakan metoda ini kita melakukan perhitungan-perhitungan dengan mengamati bentuk rangkaian yang kita hadapi. Metoda ini terutama digunakan pada rangkaian-rangkaian yang sederhana.

Metoda analisis dasar yang akan kita pelajari di sini mencakup:

- metoda reduksi rangkaian

- metoda keluaran satu satuan
- metoda superposisi
- metoda rangkaian Thévenin dan rangkaian Norton.

Masing-masing metoda mempunyai kegunaan tertentu. Kekhususan masing-masing metoda itulah yang mendorong kita untuk mempelajari semua metoda dan tidak terpaku pada salah satu metoda saja. Pemilihan metoda analisis ditentukan oleh apa yang ingin kita capai dalam melakukan analisis.

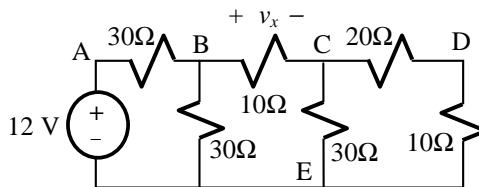
Dalam metoda analisis dasar, kita melakukan perhitungan-perhitungan langsung pada model rangkaian. Melalui latihan yang cukup, kita akan mampu menentukan metoda dan urutan kerja yang singkat serta dapat memahami perilaku rangkaian listrik dengan baik. Metoda ini sangat praktis selama rangkaian yang kita hadapi cukup sederhana. Contoh-contoh yang akan kita lihat untuk memahami metoda-metoda analisis ini mencakup rangkaian pasif (dengan elemen R) dan rangkaian aktif (dengan sumber bebas dan sumber tak-bebas).

8.1. Metoda Reduksi Rangkaian

Strategi metoda ini adalah mereduksi bentuk rangkaian sedemikian rupa sehingga menjadi rangkaian yang lebih sederhana; dengan rangkaian yang lebih sederhana ini besaran yang dicari dapat dihitung dengan lebih mudah. Untuk menyederhanakan rangkaian, kita dapat menggunakan konsep ekivalensi seri-paralel, transformasi Y- Δ , dan transformasi sumber. Yang kita perlukan adalah kejelian dalam melihat struktur rangkaian untuk melakukan penyederhanaan rangkaian. Bagaimana metoda ini diaplikasikan, kita akan melihat pada contoh-8.1 berikut ini.

CONTOH-8.1:

Carilah tegangan v_x pada rangkaian di bawah ini.



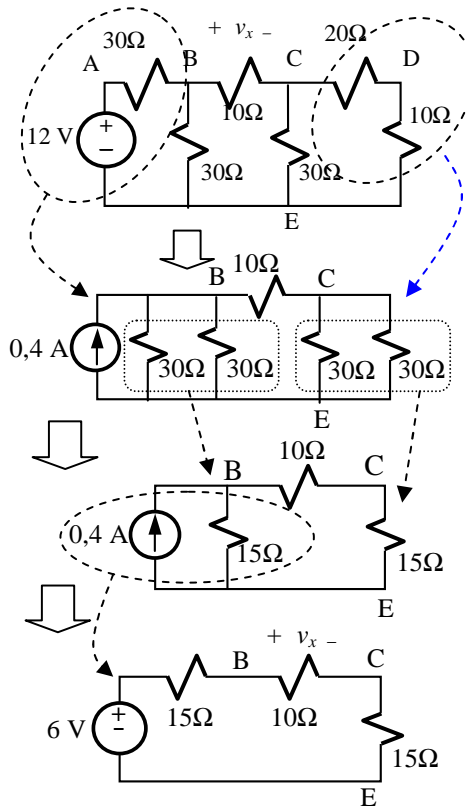
Solusi:

Rangkaian ini mengandung beberapa bagian yang berupa hubungan seri dan hubungan paralel elemen-elemen. Bagian-bagian tersebut dapat kita ganti dengan rangkaian ekuivalennya, dengan memanfaatkan kaidah-kaidah rangkaian yang telah kita pelajari. Proses ini dapat kita amati pada gambar berikut.

Langkah-langkah yang kita tempuh adalah sebagai berikut:

Sumber tegangan yang tersambung seri dengan resistor $30\ \Omega$ dapat diganti dengan

sebuah sumber arus yang diparalel dengan resistor, sedang sambungan seri resistor $10\ \Omega$ & $20\ \Omega$ di cabang CDE dapat diganti dengan sebuah resistor. Penggantian ini menghasilkan angkaian dengan dua pasang resistor paralel $30\ \Omega$, yang masing-masing dapat diganti dengan satu resistor $15\ \Omega$. Dengan langkah ini sumber arus terparalel dengan resistor $15\ \Omega$, yang kemudian dapat diganti dengan sebuah sumber tegangan yang disambung



$$\Rightarrow v_x = \left(\frac{10}{15 + 10 + 15} \right) \times 6 = 1,5\text{ V}$$

seri dengan sebuah resistor $15\ \Omega$; bagian lain berupa dua resistor 10 dan 15Ω yang tersambung seri.

Rangkaian kita menjadi sebuah sumber tegangan dengan sambungan seri tiga buah resistor, dan tegangan yang kita cari dapat kita peroleh dengan memanfaatkan kaidah pembagi tegangan; hasilnya $v_x = 1,5\text{ V}$.

Pemahaman: Untuk mengaplikasikan metoda ini kita harus dengan seksama memperhatikan bagian-bagian yang dapat disederhanakan. Pada dasarnya kita melakukan ekivalensi bagian-bagian yang berada di antara dua simpul. Bagian yang telah digantikan oleh rangkaian ekivalennya, masih dapat digabungkan dengan bagian lain yang juga telah digantikan oleh rangkaian ekivalennya.

8.2. Metoda Keluaran Satu Satuan (*Unit Output Method*)

Metoda “*unit output*” adalah suatu teknik analisis yang berbasis pada proporsionalitas dari rangkaian linier. Metoda ini pada dasarnya adalah mencari konstanta K yang menentukan hubungan antara masukan dan keluaran, dengan menganggap bahwa keluarannya adalah satu unit. Atas dasar itu ditentukan berapa besarnya masukan yang diperlukan untuk menghasilkan satu unit keluaran tersebut. Teknik ini dapat diaplikasikan pada *rangkaian berbentuk tangga*. Langkah-langkahnya adalah sbb:

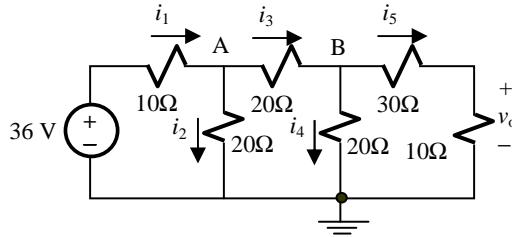
1. Misalkan keluarannya adalah satu unit (tegangan ataupun arus)
2. Secara berurutan gunakan HAK, HTK, dan hukum Ohm untuk mencari masukan.
3. Sifat proporsional dari rangkaian linier mengharuskan

$$K = \frac{(\text{keluaran})}{(\text{masukan})} = \frac{1}{(\text{masukan untuk satu unit keluaran})} \quad (8.1)$$

4. Keluaran untuk sembarang masukan adalah $K \times \text{masukan}$.

CONTOH-8.2:

Carilah tegangan keluaran v_o dari rangkaian di samping ini.

**Solusi:**

Kita misalkan tegangan $v_o = 1$ V. Kemudian secara berturut turut kita hitung i_5 , v_C ,

i_4 , i_3 , v_B , i_2 , i_1 , dan akhirnya v_s yaitu tegangan sumber jika keluarannya 1 V. Dari sini kemudian kita hitung faktor proporsionalitas K , dan dengan nilai K yang diperoleh ini kita hitung v_o yang besarnya adalah K kali tegangan sumber sebenarnya (yaitu 36 V).

$$\text{Misalkan } v_o = 1 \text{ V} \rightarrow i_5 = \frac{v_o}{10} = 0,1 \text{ A}$$

$$v_B = 0,1(30+10) = 4 \text{ V}$$

$$\rightarrow i_4 = \frac{v_B}{20} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ A} \rightarrow i_3 = i_4 + i_5 = 0,3 \text{ A}$$

$$v_A = v_B + i_3 \times 20 = 10 \text{ V} \rightarrow i_2 = \frac{v_A}{20} = 0,5 \text{ A} \rightarrow i_1 = i_2 + i_3 = 0,8 \text{ A}$$

$$v_s = v_A + i_1 \times 20 = 10 + 0,8 \times 10 = 18 \text{ V}$$

$$K = \frac{1}{v_s} = \frac{1}{18} \rightarrow v_o (\text{seharusnya}) = K \times 36 = 2 \text{ V}$$

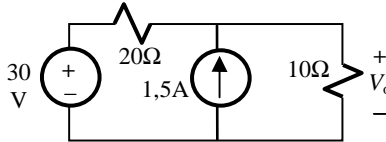
8.3. Metoda Superposisi

Prinsip superposisi dapat kita manfaatkan untuk melakukan analisis rangkaian yang mengandung lebih dari satu sumber. Langkah-langkah yang harus diambil adalah sebagai berikut:

1. *Matikan* semua sumber (masukan) kecuali salah satu di antaranya, dan hitung keluaran rangkaian yang dihasilkan oleh satu sumber ini.
2. Ulangi langkah 1, sampai semua sumber mendapat giliran.

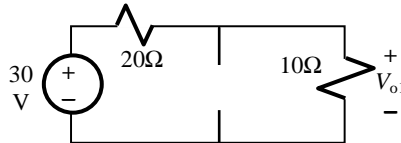
3. Keluaran yang dicari adalah kombinasi linier (jumlah aljabar) dari kontribusi masing-masing sumber.

CONTOH-8.3: Rangkaian di samping ini mengandung dua sumber. Carilah tegangan keluaran V_o .



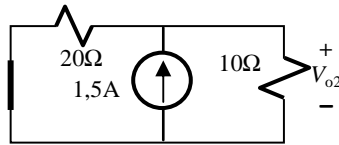
Solusi :

Matikan sumber arus.
Rangkaian menjadi seperti gambar di samping ini.



$$V_{o1} = \frac{10}{10 + 20} \times 30 = 10 \text{ V}$$

Matikan sumber tegangan.
Rangkaian menjadi seperti gambar di samping ini.



$$V_{o2} = \left(\frac{20}{20 + 10} \times 1.5 \right) \times 10 = 10 \text{ V}$$

Tegangan keluaran apabila kedua sumber bekerja bersama-sama adalah

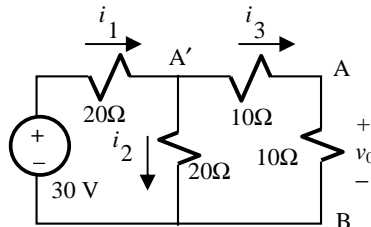
$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = 20 \text{ V}$$

8.4. Metoda Rangkaian Ekivalen Thévenin

Berikut ini akan kita lihat aplikasi teorema Thévenin dalam analisis rangkaian.

CONTOH-8.4:

Gunakanlah metoda rangkaian ekivalen Thevenin untuk menghitung tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.



Solusi :

Untuk mencari tegangan sumber Thévenin V_T di terminal AB, kita lepaskan beban di AB, sehingga AB terbuka, $i_3=0$, dan

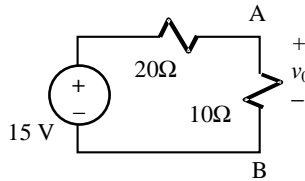
$$V_T = v_{AB\text{ ht}} = v_{A'B} = \frac{20}{20+20} \times 30 = 15 \text{ V}$$

Resistansi Thévenin R_T adalah resistansi yang dilihat dari terminal AB ke arah sumber dengan sumber dimatikan (dalam hal ini hubung singkat). Maka R_T berupa resistor 10Ω yang terhubung seri dengan dua resistor 20Ω yang tersambung paralel. Jadi

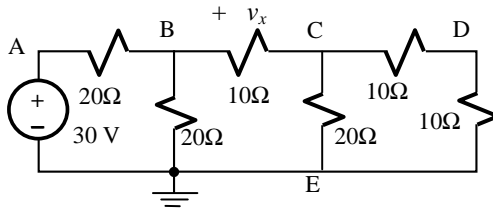
$$R_T = 10 + \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 20 \Omega$$

Rangkaian ekuivalen Thévenin adalah seperti gambar di samping ini dan kita peroleh

$$v_o = \frac{10}{10+20} \times 15 = 5 \text{ V}$$

**CONTOH-8.5:**

Gunakan rangkaian ekuivalen Thévenin untuk menghitung tegangan v_x pada rangkaian di samping ini.

**Solusi :**

Rangkaian ini telah kita analisis dengan menggunakan metoda reduksi rangkaian. Kita akan mencoba melakukan analisis dengan metoda rangkaian ekuivalen Thévenin.

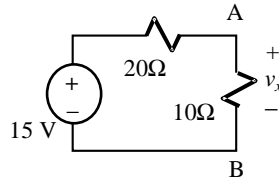
Jika resistor 10Ω (yang harus kita cari tegangannya) kita lepaskan, maka tidak ada arus mengalir pada cabang-cabang CE, CD, dan DE sehingga tegangan simpul C sama dengan D sama pula dengan E yaitu nol. Tegangan simpul B dapat kita cari dengan kaidah pembagi tegangan

$$v_B = \frac{20}{20+20} \times 30 = 15 \text{ V}.$$

Tegangan Thévenin:

$$V_T = v_B - v_C = 15 - 0 = 15 \text{ V}.$$

Resistansi Thévenin adalah resistansi yang dilihat dari terminal BC setelah resistor 10Ω dilepas.



$$R_T = (20 \parallel 20) + \{20 \parallel (10 + 10)\} = 10 + 10 = 20 \Omega$$

Rangkaian ekivalen Thévenin dengan bebannya menjadi seperti gambar di samping dan tegangan v_x mudah dihitung, yaitu :

$$v_x = \frac{10}{10+20} \times 15 = 5 \text{ V}$$

8.4.1. Beban Non Linier

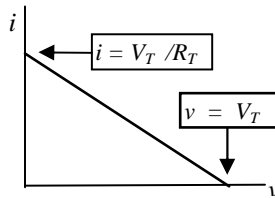
Parameter rangkaian ekivalen Thévenin dan Norton (V_T , R_T , dan I_N) dihitung dengan beban dilepas. Ini berarti bahwa *rangkaian ekivalen tersebut merupakan karakteristik sumber dan tidak dipengaruhi oleh beban*. Oleh karena itu kita dapat memanfaatkan rangkaian ekivalen Thévenin dan Norton untuk menentukan tegangan, arus, maupun daya pada *beban non linier dua terminal*. Ini merupakan salah satu hal penting yang dapat kita peroleh dari rangkaian ekivalen Thévenin dan Norton.

Bagaimana interaksi antara sumber (yang dinyatakan dengan rangkaian ekivalen Thévenin-nya) dengan beban yang non-linier, akan kita lihat berikut ini. Kita lihat lebih dahulu karakteristik i - v dari suatu rangkaian ekivalen Thévenin. Perhatikan hubungan rangkaian ekivalen Thévenin dengan bebannya. Bagaimanapun keadaan beban, linier atau non-linier, hubungan antara tegangan di terminal beban, yaitu v , dengan tegangan V_T dapat dinyatakan sebagai

$$-V_T + iR_T + v = 0 \quad \rightarrow \quad i = \left(\frac{V_T}{R_T} \right) - \left(\frac{1}{R_T} \right) v \quad (8.2)$$

Persamaan (8.2) ini memberikan hubungan antara arus i dan tegangan v dari rangkaian ekivalen Thévenin dan merupakan karakteristik i - v dari rangkaian sumber. Jika kita gambarkan kurva i

terhadap v maka akan terlihat bahwa persamaan ini merupakan persamaan garis lurus di bidang i - v seperti tampak pada Gb.8.1. di samping ini. Perhatikan bahwa garis lurus ini ditentukan oleh dua titik yaitu:



Gb.8.1. Garis beban

$$i = \frac{V_T}{R_T} = i_{hs} \quad \text{dan} \quad v = V_T = v_{ht}$$

Garis lurus itu disebut *garis beban* (*load line*) (sebenarnya ia ditentukan oleh parameter-parameter rangkaian sumber dan bukan oleh parameter beban akan tetapi sudah sejak lama nama “*load line*” itu disandangnya). Sementara itu beban mempunyai karakteristik i - v -nya sendiri, yang secara matematis dapat dituliskan sebagai: $i = f(v)$.

Dengan demikian kita mempunyai dua persamaan yaitu persamaan untuk *arus rangkaian sumber* yaitu

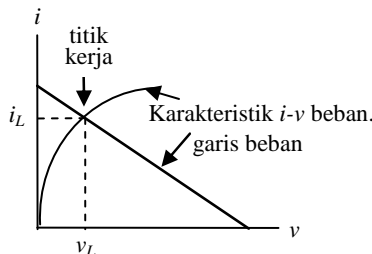
$$i = \left(\frac{V_T}{R_T} \right) - \left(\frac{1}{R_T} \right) v$$

dan persamaan untuk *arus beban* yaitu

$$i = f(v)$$

Dalam analisis rangkaian, kita harus menyelesaikan dua persamaan itu secara simultan. Jika $f(v)$ diketahui maka solusi persamaan dapat dilakukan secara analitis. Tetapi pada umumnya solusi secara grafis sudah cukup memadai. Berikut ini dipaparkan bagaimana cara grafis tersebut dilaksanakan.

Misalkan karakteristik i - v beban mempunyai bentuk tertentu, yang jika dipadukan dengan grafik i - v sumber (yaitu garis beban) akan terlihat seperti pada Gb.8.2. Kedua kurva akan berpotongan di suatu titik. Titik potong



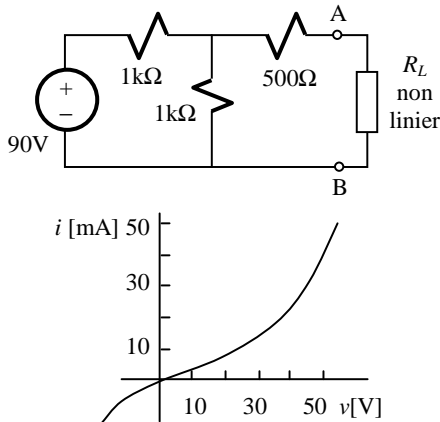
Gb 8.2. Penentuan titik kerja.

tersebut memberikan nilai arus i dan tegangan v yang memenuhi

karakteristik sumber maupun beban. Titik ini disebut *titik kerja*, atau dalam elektronika disebut *Q-point*. Arus dan tegangan beban adalah i_L dan v_L .

Perhatikan bahwa apabila rangkaian mengandung elemen non linier prinsip proporsionalitas dan superposisi tidak berlaku. Sebagai contoh, apabila tegangan sumber naik dari 15 menjadi 30 V, arus dan tegangan beban tidak dua kali lebih besar.

CONTOH-8.6: Rangkaian berikut ini, mempunyai beban resistor non-linier dengan karakteristik i - v seperti yang diberikan di sampingnya. Hitunglah daya yang diserap oleh beban.



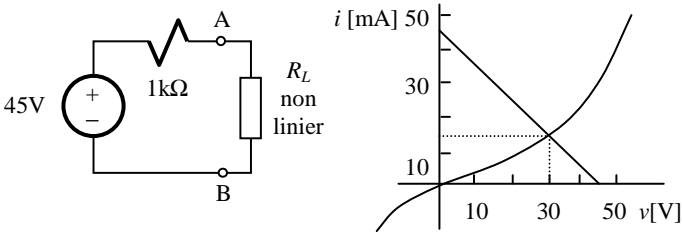
Solusi :

Beban dilepas untuk mencari rangkaian ekuivalen Thévenin.

$$V_T = v_{AB \text{ ht}} = \frac{1}{1+1} \times 60 = 45 \text{ V}$$

$$R_T = 500 + 1000 \parallel 1000 = 1000 \text{ } \Omega$$

Rangkaian ekuivalen dan garis beban yang diplot bersama dengan karakteristik i - v beban adalah seperti di bawah ini.



Dari grafik ini kita temukan titik-kerja yang menyatakan bahwa arus yang mengalir adalah 15 mA pada tegangan 30 V. Jadi daya yang diserap beban adalah :

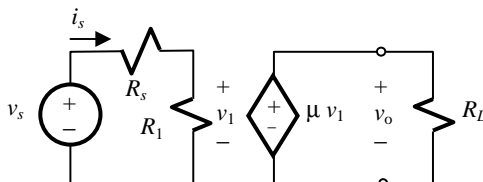
$$p_L = v_L i_L = 30 \times 15 = 450 \text{ mW} .$$

8.4.2. Rangkaian Dengan Sumber Tak-Bebas Tanpa Umpun Balik

Contoh-contoh persoalan yang kita ambil dalam membahas metoda-metoda analisis dasar yang telah kita lakukan, adalah rangkaian dengan elemen aktif yang berupa sumber bebas. Metoda analisis dasar dapat pula kita gunakan pada rangkaian dengan sumber tak-bebas asalkan pada rangkaian tersebut *tidak terdapat cabang umpun balik*. Cabang umpun balik adalah cabang yang menghubungkan bagian keluaran dan bagian masukan, sehingga terjadi interaksi antara keluaran dan masukan. Apabila rangkaian mempunyai umpun balik, hendaknya digunakan metoda analisis umum (lihat bab selanjutnya). Berikut ini kita akan melihat rangkaian-rangkaian dengan sumber tak-bebas *tanpa umpun balik*.

CONTOH-8.7:

Tentukanlah tegangan keluaran v_o serta daya yang diserap oleh beban R_L pada rangkaian dengan sumber tak-bebas VCVS di samping ini.



Solusi :

Rangkaian ini tidak mengandung umpan balik; tidak ada interaksi antara bagian keluaran dan masukan. Tegangan v_1 pada loop pengendali dapat diperoleh melalui kaidah pembagi tegangan

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_s} v_s$$

Dengan demikian maka keluaran VCVS adalah :

$$v_o = \mu v_1 = \frac{\mu R_1}{R_1 + R_s} v_s$$

Daya yang diserap oleh beban adalah :

$$p_L = \frac{v_o^2}{R_L} = \frac{1}{R_L} \times \left(\frac{\mu R_1 v_s}{R_1 + R_s} \right)^2$$

Pemahaman :

Tegangan keluaran VCVS berbanding lurus dengan masukannya. Jika nilai $\mu > 1$ maka rangkaian ini berfungsi sebagai *penguat (amplifier)*. Jika $\mu < 1$ rangkaian ini menjadi *peredam (attenuator)*, dan jika $\mu = 1$ maka ia menjadi *penyangga (buffer atau follower)*.

Kelebihan dari rangkaian dengan VCVS ini dibandingkan dengan rangkaian pasif dapat kita lihat sebagai berikut. Jika kita menghubungkan R_L langsung ke terminal v_1 (berarti paralel dengan R_1) maka tegangan keluaran pada beban adalah

$$v_o(\text{pasif}) = \frac{R_1 \parallel R_L}{R_s + (R_1 \parallel R_L)} \times v_s$$

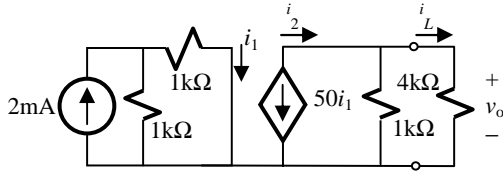
Jika kita bandingkan formulasi v_o untuk kedua keadaan tersebut akan terlihat bahwa *pada rangkaian pasif tegangan keluaran tergantung dari resistansi beban, sedangkan pada rangkaian aktif tegangan keluaran tergantung dari μ tetapi tidak tergantung dari resistansi beban.*

Daya yang diberikan oleh sumber tegangan v_s adalah :

$$p_s = v_s i_s = \frac{v_s^2}{R_s + r_1}$$

Daya ini tidak tergantung dari R_L , yang berarti bahwa bertambahnya daya yang

diserap oleh beban (p_L) tidak mempengaruhi sumber tegangan v_s . Keadaan ini mencegah terjadinya interaksi antara beban dan sumber, artinya tersambunganya R_L tidak menjadi beban bagi v_s . Daya yang diserap oleh beban berasal dari catu daya pada piranti aktif yang diwakili oleh VCVS, yang tidak diperlihatkan pada diagram rangkaian. Sumber tak-bebas memberikan alih daya yang sifatnya *unilateral*.



CONTOH-8.8: Tentukan hubungan keluaran-masukan pada rangkaian dengan CCCS di samping ini.

Solusi:

Untuk mencari v_o kita memerlukan i_1 yang dapat dicari dengan kaidah pembagi arus.

$$i_1 = \frac{1}{1+1} \times 2 = 1 \text{ mA}$$

Dari sini kita mendapatkan i_2 yaitu $i_2 = -50 \times i_1 = -50 \text{ mA}$.

Tanda “-” diperlukan karena referensi arah arus i_2 berlawanan dengan arah arus positif sumber arus tak-bebas CCCS. Dari sini

kita dapatkan: $i_L = \frac{1}{1+4} i_2 = -10 \text{ mA}$.

Tegangan keluaran: $v_o = -10 \times 10^{-3} \times 4000 = -40 \text{ V}$

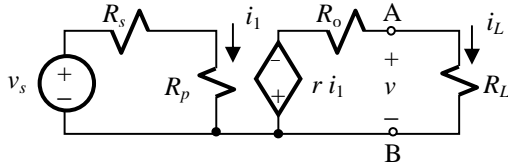
Hubungan keluaran-masukan menjadi: $\frac{v_o}{i_s} = \frac{-40}{0,002} = -20000$

Pemahaman:

Hasil diatas mengandung tanda negatif. Ini berarti bahwa sinyal keluaran berlawanan dengan sinyal masukan. Dengan kata lain terjadi proses pembalikan sinyal pada rangkaian di atas, dan kita sebut *inversi sinyal*.

CONTOH-8.9:

Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dilihat di terminal AB, dari rangkaian dengan CCVS di samping ini.

**Solusi :**

Tegangan Thévenin V_T adalah tegangan terminal AB terbuka (jika beban R_L dilepas), yaitu :

$$V_T = v_{AB \text{ ht}} = -ri_1 = -r \left(\frac{v_s}{R_s + R_p} \right)$$

Tanda “-” ini karena arah referensi tegangan CCCS berlawanan dengan referensi tegangan v_{AB} . Arus hubung singkat di terminal AB jika beban diganti dengan hubung singkat adalah :

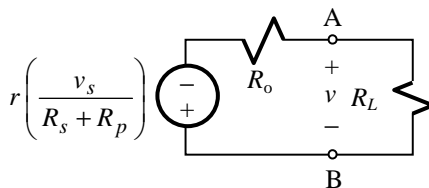
$$i_{AB \text{ hs}} = \frac{-ri_1}{R_o} = \frac{-rv_s}{R_o(R_s + R_p)}$$

Resistansi Thévenin R_T adalah :

$$R_T = \frac{v_{AB \text{ ht}}}{i_{AB \text{ hs}}} = \left(\frac{-rv_s}{R_p + R_s} \right) / \left(\frac{-rv_s}{R_o(R_s + R_p)} \right) = R_o$$

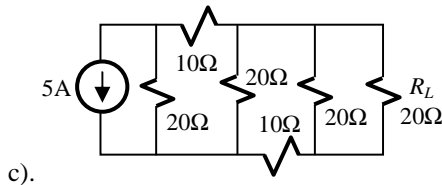
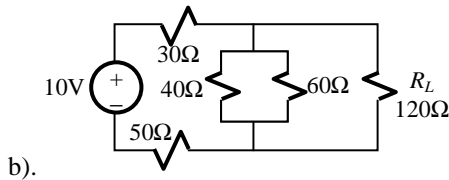
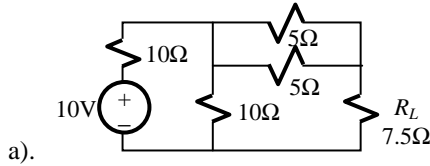
Rangkaian Thévenin yang kita cari adalah seperti gambar di bawah ini. Perhatikan polaritas dari tegangan

$$V_T = -ri_1 .$$

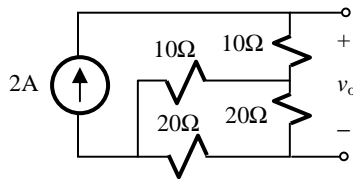


Soal-Soal

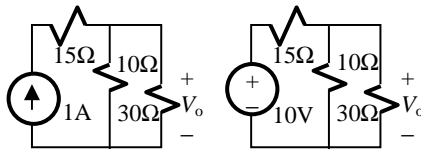
1. Carilah arus yang melalui beban R_L dan daya yang diberikan oleh sumber pada rangkaian berikut.



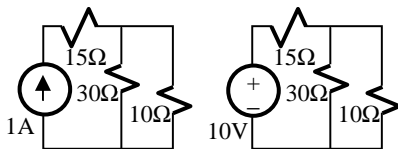
2. Carilah tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini. Berapakah resistansi beban yang harus dihubungkan ke terminal keluaran agar terjadi alih daya maksimum ?



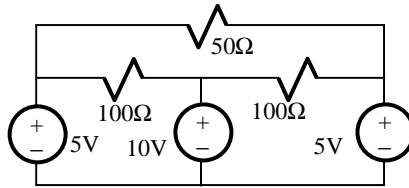
3. Gunakan metoda *unit output* untuk mencari tegangan keluaran V_o pada dua rangkaian berikut ini



4. Gunakan metoda rangkaian ekuivalen Thévenin atau Norton untuk menentukan tegangan dan arus di resistor $10\ \Omega$ pada kedua rangkaian di samping ini.

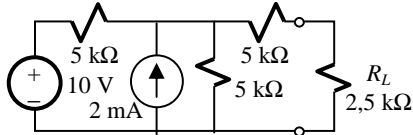


5. Carilah tegangan dan arus tiap resistor pada rangkaian berikut.

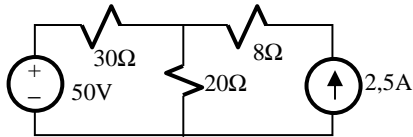


6. Hitunglah daya yang dikeluarkan oleh masing-masing sumber pada soal 5.

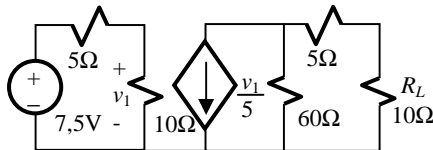
7. Pada rangkaian di samping ini hitunglah arus yang melalui resistor beban R_L .



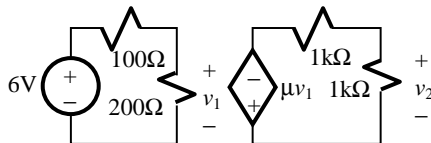
8. Pada rangkaian di samping ini hitunglah daya yang diserap resistor 8Ω dan daya masing-masing sumber.



9. Pada rangkaian berikut ini, hitunglah arus yang melalui beban R_L .



10. Berapa μ agar rangkaian berikut ini mempunyai keluaran $v_2 = -10\text{ V}$.



.

BAB 9 Metoda Analisis Umum

Dengan mempelajari metoda analisis umum kita akan

- memahami dasar-dasar metoda tegangan simpul;
- mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda tegangan simpul;
- memahami dasar-dasar metoda arus mesh;
- mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda arus mesh.

Metoda analisis umum yang akan kita pelajari mencakup *metoda tegangan simpul* dan *metoda arus mesh*. Pada dasarnya kedua metoda ini dapat kita terapkan pada sembarang rangkaian listrik, walaupun dalam hal-hal tertentu metoda tegangan simpul lebih baik dibandingkan dengan metoda arus mesh, terutama dalam menangani rangkaian-rangkaian elektronik.

Metoda tegangan simpul dan metoda arus mesh pada dasarnya adalah mencari suatu persamaan linier yang merupakan diskripsi lengkap dari suatu rangkaian dan kemudian memecahkan persamaan itu dengan memanfaatkan aljabar linier. Metoda ini lebih abstrak dibandingkan dengan metoda-metoda analisis dasar karena kita tidak menangani langsung rangkaian yang kita hadapi melainkan mencari pemecahan dari satu set persamaan yang mewakili rangkaian tersebut. Dengan metoda ini kita tidak terlibat dalam upaya untuk mencari kemungkinan penyederhanaan rangkaian ataupun penerapan teorema rangkaian. Kita lebih banyak terlibat dalam usaha mencari pemecahan persamaan linier, sehingga agak “kehilangan sentuhan” dengan rangkaian listrik yang kita hadapi. Namun demikian kerugian itu mendapat kompensasi, yaitu berupa lebih luasnya aplikasi dari metoda tegangan simpul dan metoda arus mesh ini.

9.1. Metoda Tegangan Simpul (*Node Voltage Method* , *Nodal Analysis*)

9.1.1. Dasar

Jika salah satu simpul dalam suatu rangkaian ditetapkan sebagai simpul referensi yang dianggap bertegangan nol, maka tegangan pada simpul-simpul yang lain dapat dinyatakan secara relatif terhadap simpul referensi tersebut. Jika dalam suatu rangkaian terdapat n simpul, sedangkan salah satu simpul ditetapkan sebagai simpul referensi, maka masih ada $(n - 1)$ simpul yang harus dihitung tegangannya. Jadi untuk menyatakan rangkaian secara lengkap dengan menggunakan tegangan simpul sebagai peubah, diperlukan $(n - 1)$ buah persamaan. Jika persamaan ini dapat dipecahkan, berarti kita dapat memperoleh nilai tegangan di setiap simpul, yang berarti pula bahwa kita dapat menghitung arus di setiap cabang.

Basis untuk memperoleh persamaan tegangan simpul adalah persyaratan-persyaratan yang harus dipenuhi dalam analisis rangkaian, yaitu persyaratan elemen dan persyaratan rangkaian. Persyaratan elemen menyatakan bahwa karakteristik $i-v$ dari setiap elemen dalam rangkaian harus dipenuhi. Hal ini berarti bahwa hubungan antara *arus cabang* (arus yang melalui elemen di cabang tersebut), dengan *tegangan simpul* (tegangan kedua simpul yang mengapit elemen / cabang yang bersangkutan) ditentukan oleh karakteristik $i-v$ elemen yang ada di cabang tersebut. Ini berarti pula bahwa arus cabang dapat dinyatakan dengan tegangan simpul. Sebagai contoh, bila sebuah resistor dengan konduktansi G berada di antara simpul X dan Y, maka arus cabang tempat resistor itu berada dapat ditulis sebagai

$$i_{XY} = G(v_X - v_Y) \quad (9.1)$$

dengan i_{XY} adalah arus yang mengalir dari X ke Y, v_X dan v_Y masing-masing adalah tegangan simpul X dan simpul Y. Sementara itu persyaratan rangkaian, yaitu hukum arus Kirchhoff (HAK), juga harus dipenuhi. Oleh karena itu untuk suatu simpul M yang terhubung ke k titik simpul lain melalui konduktansi G_i ($i = 1$ sampai k), berlaku

$$\sum i_M = 0 = \sum_{i=1}^k G_i (v_M - v_i) = v_M \sum_{i=1}^k G_i - \sum_{i=1}^k G_i v_i \quad (9.2)$$

dengan v_M adalah tegangan simpul M, v_i adalah tegangan simpul-simpul lain yang terhubung ke M melalui konduktansi masing-masing sebesar G_i .

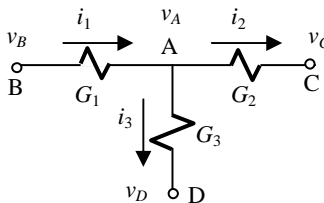
Persamaan (9.2) adalah persamaan tegangan untuk satu simpul. Jika persamaan ini kita terapkan untuk $(n - 1)$ simpul yang bukan simpul referensi maka kita akan memperoleh $(n-1)$ persamaan yang kita inginkan. Jadi untuk memperoleh persamaan tegangan simpul dari suatu rangkaian, kita lakukan langkah-langkah berikut:

1. Tentukan simpul referensi umum.
2. Aplikasikan persamaan (9.2) untuk simpul-simpul yang bukan simpul referensi.
3. Cari solusi persamaan yang diperoleh pada langkah 2.

9.1.2. Kasus-Kasus Dalam Mencari Persamaan Tegangan Simpul

Persamaan tegangan simpul untuk suatu simpul diperoleh melalui aplikasi HAK untuk simpul tersebut. Jika terdapat suatu cabang yang mengandung sumber tegangan bebas (yang merupakan elemen dengan arus dan resistansi tak diketahui), kita akan menemui sedikit kesulitan dalam penurunan persamaan tegangan simpul. Berikut ini kita akan mempelajari penurunan persamaan tegangan untuk suatu simpul dengan melihat beberapa kasus jenis elemen yang berada pada cabang-cabang rangkaian yang terhubung ke simpul tersebut.

Kasus-1: Cabang-Cabang Berisi Resistor. Dalam kasus ini persamaan (9.4) dapat kita aplikasikan tanpa kesulitan. Perhatikan hubungan simpul-simpul seperti terlihat pada Gb.9.1. Walaupun referensi arah arus tidak semuanya meninggalkan simpul A namun hal ini tidak akan mengganggu aplikasi persamaan (9.2) untuk simpul A.



Gb.9.1. Cabang berisi resistor.

Persamaan untuk simpul A:

$$v_A(G_1 + G_2 + G_3) - G_1 v_B - G_2 v_C - G_3 v_D = 0 \quad (9.3)$$

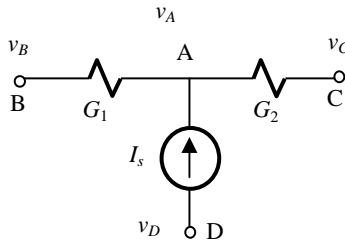
Sekiranya kita menuruti referensi arus pada Gb.9.1. kita akan memperoleh persamaan arus untuk simpul A sebagai $i_1 - i_2 - i_3 = 0$, yang akan memberikan persamaan tegangan simpul

$$G_1(v_B - v_A) - G_2(v_A - v_C) - G_3(v_A - v_D) = 0 \quad \text{atau} \\ -v_A(G_1 + G_2 + G_3) + v_B G_1 + v_C G_2 + v_D G_3 = 0$$

yang tidak lain adalah persamaan (9.4) yang diperoleh sebelumnya.

Kasus-2: Cabang Berisi Sumber Arus. Perhatikan Gb.9.2. Dalam kasus ini kita tidak mengetahui konduktansi yang ada antara simpul A dan D yang berisi

sumber arus bebas. Tetapi hal ini tidak memberikan kesulitan dalam aplikasi (9.2) untuk simpul A, karena sesungguhnya persamaan (9.2) itu berangkat dari persamaan arus untuk suatu simpul. Dengan demikian maka nilai arus yang



Gb.9.2. Cabang berisi sumber arus.

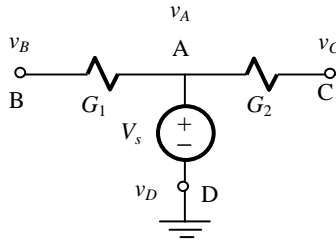
ditunjukkan oleh sumber arus itu dapat kita masukkan dalam persamaan tanpa mengubahnya menjadi hasil kali antara konduktansi dengan beda tegangan simpul.

Yang perlu diperhatikan adalah arah referensi arusnya, yang harus *bertanda positif apabila ia meninggalkan simpul yang sedang ditinjau*, sesuai dengan persyaratan persamaan (9.2). Untuk simpul A pada Gb.9.2. persamaan yang diperoleh adalah:

$$v_A(G_1 + G_2) - I_s - v_B G_1 - v_C G_2 = 0 \quad (9.4)$$

Kasus-3: Cabang Berisi Sumber Tegangan. Dalam kasus ini terdapat dua kemungkinan.

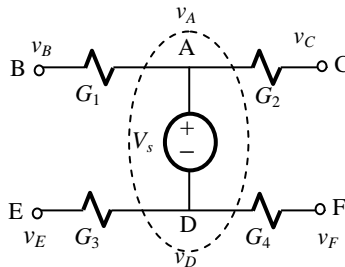
Kemungkinan pertama : salah satu simpul sumber tegangan menjadi simpul referensi seperti terlihat pada Gb.9.3.



Gb.9.3. Cabang berisi sumber tegangan.

Simpul A menjadi simpul terikat, artinya tegangannya ditentukan oleh tegangan sumber; jadi tegangan simpul A tidak perlu lagi dihitung, $v_A = V_s$.

Kemungkinan yang kedua: simpul-simpul yang mengapit sumber tegangan bukan merupakan simpul referensi seperti terlihat pada Gb.9.4. Dalam hal terakhir ini, sumber tegangan beserta kedua simpul yang mengapitnya kita jadikan sebuah *simpul-super (super-node)*. Jadi simpul A, D, dan sumber tegangan pada Gb.9.4. kita pandang sebagai *satu* simpul-super.



Gb.9.4. Sumber tegangan antara dua simpul yang bukan simpul referensi.

Hukum Arus Kirchhoff berlaku juga untuk simpul-super ini. Persamaan tegangan untuk simpul-super ini tidak hanya satu melainkan dua persamaan, karena ada dua simpul yang di-satu-kan, yaitu:

- persamaan tegangan simpul yang diturunkan dari persamaan arus seperti halnya persamaan (9.4), ditambah dengan
- persamaan tegangan internal simpul-super yang memberikan hubungan tegangan antara simpul-simpul yang digabungkan menjadi simpul-super tersebut.

Perhatikan Gb.9.4: Simpul-super terdiri dari simpul A, D dan sumber tegangan V_s . Simpul-super ini terhubung ke simpul-simpul B dan C melalui A dengan konduktansi G_1 dan G_2 ; ia juga terhubung ke simpul-simpul E dan F melalui D dengan konduktansi G_3 dan G_4 . Persamaan tegangan untuk simpul-super ini adalah :

$$v_A(G_1 + G_2) + v_D(G_3 + G_4) - v_B G_1 - v_C G_2 - v_E G_3 - v_F G_4 = 0$$

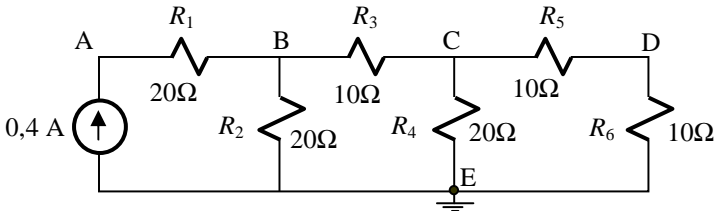
dan

$$v_A - v_D = V_s \quad (9.5)$$

Demikianlah tiga kasus yang mungkin kita hadapi dalam mencari persamaan tegangan pada suatu simpul. Dalam peninjauan kasus-kasus tersebut di atas, kita hanya melihat rangkaian resistor. Walaupun demikian metoda ini dapat kita gunakan untuk rangkaian dengan elemen dinamis yang akan kita lihat kemudian.

Berikut ini kita akan melihat aplikasi metoda tegangan simpul untuk rangkaian resistor. Rangkaian yang akan kita lihat masih termasuk sederhana, yang juga dapat dipecahkan dengan menggunakan metoda analisis dasar. Akan tetapi yang kita tekankan di sini adalah melihat bagaimana metoda tegangan simpul ini diaplikasikan.

CONTOH-9.1: Carilah tegangan simpul A, B, C, dan D pada rangkaian di bawah ini.



Solusi :

Rangkaian ini berbentuk tangga dan perhatikan bahwa di sini kita mempunyai sumber arus, bukan sumber tegangan.

Langkah pertama adalah menentukan simpul referensi umum, yang dalam hal ini kita tetapkan simpul E. Dengan demikian kita mempunyai empat simpul yang bukan simpul referensi yaitu A, B, C dan D.

Langkah kedua adalah mencari persamaan tegangan simpul dengan mengaplikasikan persamaan (2.30) pada ke-empat simpul non-referensi tersebut di atas. Persamaan tegangan simpul yang kita peroleh adalah :

$$\begin{aligned}v_A(G_1) - 0.4 - v_B(G_1) &= 0 \\v_B(G_1 + G_2 + G_3) - v_A(G_1) - v_C(G_3) &= 0 \\v_C(G_3 + G_4 + G_5) - v_B(G_3) - v_D(G_5) &= 0 \\v_D(G_5 + G_6) - v_C(G_5) &= 0\end{aligned}$$

dengan G_1, G_2, \dots, G_6 adalah konduktansi elemen-elemen yang besarnya adalah $G_i = 1/R_i$. Dalam bentuk matriks, dengan memasukkan nilai-nilai G , persamaan ini menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai elemen matriks ini kita perbaiki agar perhitungan selanjutnya menjadi lebih mudah. Jika baris pertama sampai ketiga kita kalikan 20 sedangkan baris ke-empat kita kalikan 10, akan kita peroleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

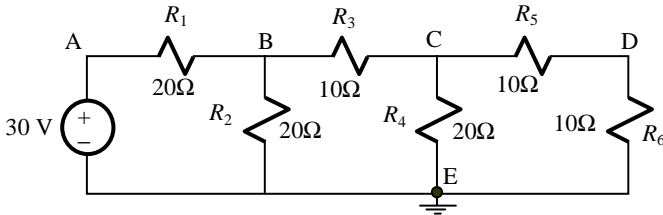
Dengan demikian maka kita dapat menghitung tegangan-tegangan simpul mulai dari simpul D sebagai berikut :

$$\rightarrow v_D = \frac{16}{16} = 1 \text{ V}; \quad v_C = \frac{16 + 6 \times v_D}{11} = \frac{16 + 6}{11} = 2 \text{ V}$$

$$v_B = \frac{8 + 2 \times v_C}{3} = \frac{8 + 4}{3} = 4 \text{ V}; \quad v_A = 8 + v_B = 12 \text{ V}$$

Dengan diperolehnya nilai tegangan simpul, arus-arus cabang dapat dihitung.

CONTOH-9.2: Carilah tegangan pada simpul A, B, C, dan D pada rangkaian berikut.



Solusi :

Simpul A terhubung ke simpul referensi melalui sumber tegangan. Dengan demikian simpul A merupakan *simpul terikat* yang nilai tegangannya ditentukan oleh sumber tegangan, yaitu 30 V. Persamaan tegangan simpul yang dapat kita peroleh adalah:

$$v_A = 30$$

$$v_B(G_1 + G_2 + G_3) - v_A G_1 - v_C(G_3) = 0$$

$$v_C(G_3 + G_4 + G_5) - v_B(G_3) - v_D(G_5) = 0$$

$$v_D(G_5 + G_6) - v_C(G_5) = 0$$

Dengan memasukkan nilai-nilai konduktansi dan menuliskannya dalam bentuk matriks, kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kita ubah nilai elemen matriks untuk mempermudah perhitungan seperti yang kita lakukan pada contoh sebelumnya dengan

mengalikan baris ke-2 dan ke-3 dengan 20 dan mengalikan baris ke-4 dengan 10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

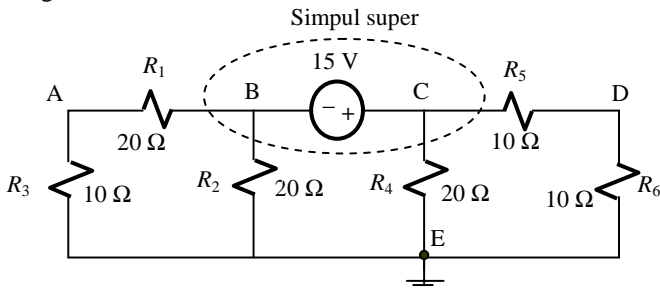
Eliminasi Gauss memberikan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\begin{aligned} \rightarrow v_D &= \frac{30}{16} = 2,5 \text{ V}; \quad v_C = \frac{30+10}{8} = 5 \text{ V}; \\ v_B &= \frac{30+10}{4} = 10 \text{ V}; \quad v_A = 30 \text{ V} \end{aligned}$$

CONTOH-9.3: Carilah tegangan pada simpul A, B, C, dan D di rangkaian berikut.



Solusi :

Berbeda dengan contoh sebelumnya, dalam rangkaian ini sumber tegangan tidak terhubung langsung ke titik referensi umum. Sumber tegangan dan simpul-simpul yang mengapitnya jadikan satu simpul-super. Persamaan yang dapat kita peroleh adalah :

$$\text{Simpul-super } \begin{cases} v_A(G_3 + G_1) - v_B G_1 = 0 \\ v_B(G_1 + G_2) + v_C(G_4 + G_5) - v_A G_1 - v_D G_5 = 0 \\ v_B - v_C = -15 \\ v_D(G_5 + G_6) - v_C G_5 = 0 \end{cases}$$

Kita masukkan nilai G dan persamaan ini kita tuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) & -\frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kita kalikan baris pertama dan ke-dua dengan 20 serta baris keempat dengan 10 sehingga kita peroleh matriks dengan elemen-elemen bilangan bulat. Setelah itu kita lakukan eliminasi Gauss yang akan memberikan :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -75 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan inilah tegangan-tegangan simpul dapat kita tentukan, seperti yang kita lakukan pada contoh sebelumnya. Pembaca diharapkan untuk mencoba sendiri.

Dengan uraian dan contoh-contoh di atas dapat kita katakan secara singkat bahwa :

- Untuk simpul M yang terhubung ke k simpul lain melalui konduktansi G_i berlaku:

$$\sum_1^k (v_M - v_i) G_i = 0 \quad \text{atau} \quad \sum_1^k v_M G_i - \sum_1^k v_i G_i = 0$$

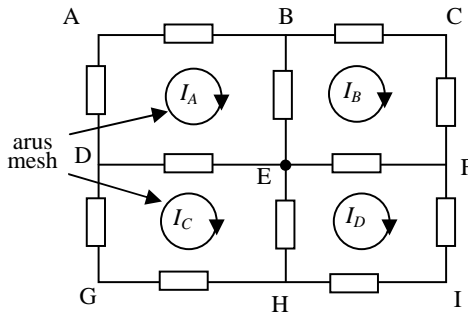
Aplikasi formula ini untuk seluruh simpul yang bukan simpul referensi menghasilkan persamaan tegangan simpul rangkaian.

- Simpul M yang terhubung ke simpul referensi melalui sumber tegangan, merupakan simpul-terikat yang tegangannya ditentukan oleh tegangan sumber.
- Sumber tegangan dan simpul-simpul yang mengapitnya dapat menjadi simpul-super yang mempunyai suatu hubungan internal yang ditentukan oleh tegangan sumber.
- Sumber arus di suatu cabang memberikan kepastian nilai arus di cabang tersebut dan nilai arus ini langsung masuk dalam persamaan tegangan simpul.

9.2. Metoda Arus Mesh (*Mesh Current Method*)

Metoda ini sangat bermanfaat untuk analisis rangkaian yang mengandung banyak elemen terhubung seri. Pengertian mengenai *mesh* telah kita peroleh, yaitu loop yang tidak melingkupi elemen atau cabang lain.

Dalam Gb.9.5 loop ABEDA, BCFEB, DEHGD, EFIHE, adalah mesh, sedangkan loop ABCFEDA bukan mesh.



Gb.9.5. Loop dan mesh

Dengan pengertian ini maka kita menurunkan pengertian *arus mesh*, yaitu arus yang kita bayangkan mengalir di suatu mesh. Dalam Gb.9.5, I_A , I_B , I_C , I_D adalah arus-arus mesh dengan arah anak panah menunjukkan arah positif. Arus di suatu cabang adalah jumlah aljabar dari arus mesh di mana cabang itu menjadi anggota. Arus di cabang AB misalnya, adalah sama dengan arus mesh I_A . Arus di cabang BE adalah $(I_A - I_B)$, arus di cabang EH adalah $(I_C - I_D)$, dan seterusnya. Secara umum kita dapat mengatakan bahwa

Jika cabang ke- k hanya merupakan anggota dari mesh X yang mempunyai arus mesh I_X maka arus i_k yang melalui cabang itu adalah $i_k = I_X$ dengan arah referensi arus i_k sesuai dengan I_X .

Jika cabang ke- k merupakan anggota dari mesh X dan mesh Y yang masing-masing mempunyai arus mesh I_X dan I_Y , maka arus i_k yang melalui cabang tersebut adalah $i_k = I_X - I_Y$ dengan X adalah mesh yang mempunyai arah referensi arus yang sesuai dengan arah referensi arus i_k .

Perhatikan :

- Arus mesh bukanlah pengertian yang berbasis pada sifat fisis rangkaian melainkan suatu peubah yang kita gunakan dalam analisis rangkaian.
- Kita hanya membicarakan rangkaian planar; referensi arus mesh di semua mesh mempunyai arah yang sama (dalam hal ini kita pilih searah putaran jarum jam).

Metoda arus mesh pada dasarnya adalah mencari persamaan linier dengan *arus mesh sebagai peubah*, yang secara lengkap merupakan diskripsi dari rangkaian. Seperti halnya pada pembahasan metoda tegangan simpul, kita akan melihat lebih dulu bagaimana persamaan arus mesh tersebut dapat diperoleh.

9.2.1. Dasar

Metoda arus mesh, seperti halnya metoda tegangan simpul, berbasis pada persyaratan elemen dan persyaratan rangkaian yang harus dipenuhi dalam analisis rangkaian listrik. Perbedaan hanya terletak pada persyaratan rangkaian; pada metoda tegangan simpul digunakan hukum arus Kirchhoff (HAK) sedangkan pada metoda arus mesh digunakan hukum tegangan Kirchhoff (HTK). Suatu mesh tidak lain adalah bentuk loop yang paling sederhana. Oleh karena itu hukum Kirchhoff untuk tegangan juga berlaku pada mesh. Untuk suatu mesh X yang terbentuk dari m cabang yang masing-masing berisi resistor, sedang sejumlah n dari m cabang ini menjadi anggota dari mesh lain, berlaku

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^m v_x &= 0 = \sum_{x=1}^{m-n} v_x + \sum_{y=1}^n v_y \\ &= I_X \sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y (I_X - I_y) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Di sini v_x adalah tegangan pada elemen di cabang yang hanya menjadi anggota mesh X; v_y adalah tegangan pada elemen di cabang yang menjadi anggota mesh X dan mesh lain; I_x adalah arus mesh X; I_y adalah arus mesh lain yang berhubungan dengan mesh X; R_x menunjukkan resistor pada cabang-cabang yang hanya menjadi anggota mesh X; R_y menunjukkan resistor pada cabang-cabang yang menjadi anggota mesh X dan mesh lain.

Persamaan (9.5) dapat ditulis:

$$I_X \left(\sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y \right) - \sum_{y=1}^n I_y R_y = 0 \quad (9.7)$$

Atau secara umum

$$I_X \sum R_X - \sum I_Y R_Y = 0 \quad (9.8)$$

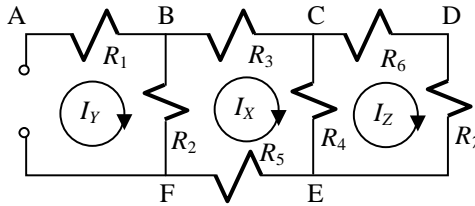
dengan I_X adalah arus mesh X, R_X adalah resistor pada cabang-cabang yang membentuk mesh X, I_Y adalah arus mesh lain yang berhubungan dengan mesh X melalui cabang yang berisi resistor R_Y . Persamaan (9.7) adalah persamaan arus mesh untuk suatu mesh tertentu. Jika persamaan ini kita aplikasikan untuk semua mesh pada suatu rangkaian kita akan mendapatkan persamaan arus mesh untuk rangkaian tersebut. Jadi langkah-langkah dalam analisis dengan menggunakan metoda arus mesh adalah :

1. Tentukan arah referensi arus mesh di setiap mesh dan juga tegangan referensi pada tiap elemen.
2. Aplikasikan persamaan (9.7) untuk setiap mesh. Dengan langkah ini kita memperoleh persamaan arus mesh dari rangkaian.
3. Hitung arus mesh dari persamaan yang diperoleh pada langkah kedua

9.2.2. Kasus-Kasus Dalam Mencari Persamaan Arus Mesh

Berikut ini kita akan melihat beberapa kasus yang mungkin kita jumpai dalam mencari persamaan arus mesh untuk satu mesh tertentu. Kasus-kasus ini sejajar dengan kasus-kasus yang kita jumpai pada pembahasan mengenai metoda tegangan simpul.

Kasus-1: Mesh Mengandung Hanya Resistor. Pada Gb.9.6. mesh BCEFB dan CDEC, terdiri hanya dari elemen resistor saja. Aplikasi persamaan (9.7) untuk kedua mesh ini tidak menimbulkan kesulitan, dan kita akan memperoleh persamaan:



Gb.9.6. Kasus 1.

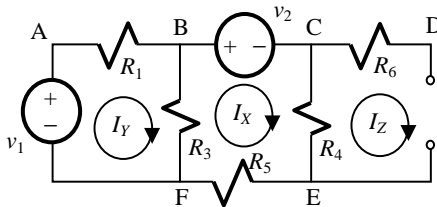
Mesh BCEFB :

$$I_X (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - I_Y R_2 - I_Z R_4 = 0 \quad (9.9)$$

Mesh CDEC :

$$I_Z (R_4 + R_6 + R_7) - I_X R_4 = 0$$

Kasus-2: Mesh Mengandung Sumber Tegangan. Mesh ABFA dan BCEFB pada Gb.9.7. mengandung sumber tegangan. Hal ini tidak akan menimbulkan kesulitan karena metoda arus mesh berbasis



Gb.9.7. Kasus 2 : mesh dengan sumber tegangan.

metoda arus mesh berbasis pada Hukum Tegangan Kirchhoff. Nilai tegangan sumber dapat langsung dimasukkan dalam persamaan, dengan memperhatikan tandanya. Untuk mesh ABFA dan BCEFB persamaan arus mesh yang dapat kita peroleh adalah :

Mesh ABFA :

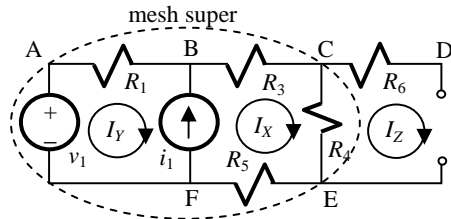
$$I_Y (R_1 + R_2) - I_X R_2 - v_1 = 0 \quad (9.10)$$

Mesh BCEFB :

$$I_X (R_2 + R_4 + R_5) - I_Y R_2 - I_Z R_4 + v_2 = 0$$

Kasus-3: Mesh Mengandung Sumber Arus. Pada Gb.9.8. di cabang BF terdapat sumber arus yang menjadi anggota mesh ABFA dan BCEFB.

Tegangan suatu sumber arus tidak tertentu sehingga tidak mungkin diperoleh persamaan arus mesh untuk ABFA dan BCEFB. Untuk mengatasi kesulitan ini maka kedua mesh itu digabung menjadi satu yang kita sebut *mesh- super*.



Gb.9.8. Kasus 3 : mesh mengandung sumber

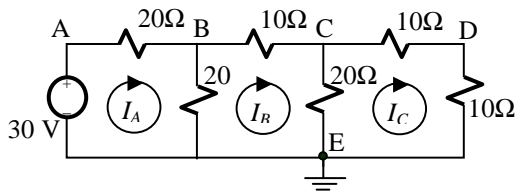
Pernyataan dari mesh-super ini harus terdiri dari dua persamaan yaitu persamaan untuk loop gabungan dari dua mesh, ABCEFA, dan persamaan yang memberikan hubungan antara arus-arus di kedua mesh, yaitu I_X dan I_Y . Persamaan yang dimaksud adalah:

$$\begin{aligned} \text{loop ABCEFA: } & I_Y R_1 + I_X (R_3 + R_4 + R_5) - v_1 - I_Z R_4 = 0 \\ \text{cabang BF: } & I_X - I_Y = i_1 \end{aligned} \quad (9.11)$$

Jadi rangkaian tiga mesh itu kita pandang sebagai terdiri dari dua mesh saja, yaitu satu mesh biasa CDEC dan satu mesh-super ABCEFA.

CONTOH-9.4:

Gunakan metoda arus mesh untuk analisis rangkaian di samping ini.



Solusi :

Langkah pertama adalah menentukan referensi arus mesh, I_A , I_B , I_C .

Langkah kedua adalah menuliskan persamaan arus mesh untuk setiap mesh. Perlu kita perhatikan bahwa mesh ABEA

mengandung sumber tegangan. Persamaan yang kita peroleh adalah:

$$\text{Mesh ABEA : } I_A(20+20) - I_B 20 - 30 = 0$$

$$\text{Mesh BCEB : } I_B(20+10+20) - I_A 20 - I_C 20 = 0$$

$$\text{Mesh CDEC : } I_C(20+10+10) - I_B 20 = 0$$

Dalam bentuk matriks persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 50 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

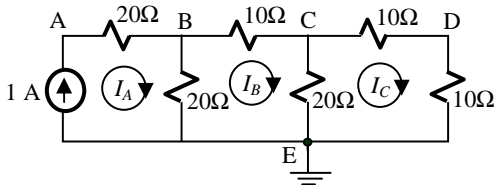
Eliminasi Gauss memberikan :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $I_C = 0,25 \text{ A}$; $I_B = 0,5 \text{ A}$; $I_A = 1 \text{ A}$. Selanjutnya tegangan-tegangan simpul dan arus-arus cabang dapat ditentukan

CONTOH-9.5: Tentukan arus-arus mesh pada rangkaian di

samping ini. Perhatikanlah bahwa pada rangkaian ini terdapat sumber arus.



Solusi :

Dalam kasus ini arus mesh I_A ditentukan oleh sumber, yaitu sebesar 1 A. Persamaan yang dapat kita peroleh adalah :

$$\text{Mesh ABEA : } I_A = 1$$

$$\text{Mesh BCEB : } I_B(20+10+20) - I_A(20) - I_C(20) = 0$$

$$\text{Mesh CDEC : } I_C(20+10+10) - I_B(20) = 0$$

yang dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -20 & 50 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

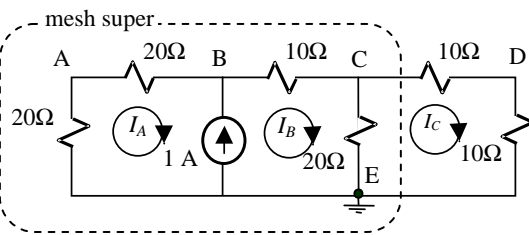
Dengan demikian maka nilai arus-arus mesh adalah :

$$I_C = 0,25 \text{ A}; \quad I_B = 0,5 \text{ A}; \quad I_A = 1 \text{ A}.$$

Selanjutnya arus cabang dan tegangan simpul dapat dihitung.

CONTOH-9.6: Tentukan arus mesh pada rangkaian di samping ini.

Perhatikan bahwa ada sumber arus yang menjadi anggota dari dua mesh yang berdampingan.



Solusi:

Kedua mesh berdampingan yang sama-sama mengandung sumber arus itu kita jadikan satu mesh-super. Persamaan arus mesh yang dapat kita peroleh adalah :

$$\text{mesh super} \begin{cases} I_A(20 + 20) + I_B(10 + 20) - I_C(20) = 0 \\ I_A - I_B = -1 \\ I_C(20 + 10 + 10) - I_B(20) = 0 \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks persamaan arus mesh tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} 40 & 30 & -20 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yang memberikan

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi $I_C = 1/3 \text{ A}$, $I_B = 2/3 \text{ A}$, dan $I_A = -1/3 \text{ A}$.

Selanjutnya arus cabang dan tegangan simpul dapat dihitung.

Dengan uraian dan contoh-contoh di atas dapat kita katakan secara singkat bahwa :

- Untuk suatu mesh X dengan arus mesh I_x yang terdiri dari m cabang dan n dari m cabang ini menjadi anggota dari mesh lain yang masing-masing mempunyai arus mesh I_y , berlaku

$$I_X \sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y (I_X - I_y) = 0 \quad \text{atau}$$

$$I_X \left(\sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y \right) - \sum_{y=1}^n I_y R_y = 0$$

Aplikasi formula ini untuk seluruh mesh menghasilkan persamaan arus mesh rangkaian.

- Mesh X yang mengandung sumber arus yang tidak menjadi anggota dari mesh lain, arus mesh I_x ditentukan oleh sumber arus tersebut.
- Sumber arus dan mesh-mesh yang mengapitnya dapat menjadi mesh-super dengan suatu hubungan internal yaitu beda arus mesh dari kedua mesh sama dengan arus sumber.
- Sumber tegangan di suatu cabang memberikan kepastian nilai tegangan antara dua simpul di cabang tersebut dan nilai tegangan ini langsung masuk dalam persamaan arus mesh.

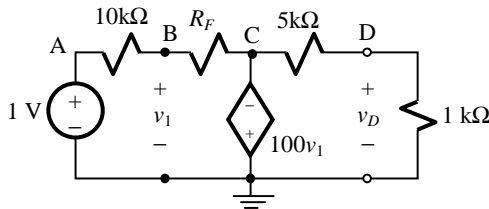
9.2.3. Rangkaian Sumber Tak-Bebas Dengan Umpan Balik

Analisis rangkaian yang mengandung sumber tak-bebas dengan *umpan balik* hendaklah dilakukan dengan menggunakan metoda tegangan simpul atau metoda arus mesh. Umpan balik terjadi jika ada aliran sinyal dari sisi keluaran ke sisi pengendali.

CONTOH-9.7: Tentukanlah R_F pada rangkaian di samping ini agar pada beban $1 \text{ k}\Omega$ terdapat tegangan -10 V .

Solusi :

Persamaan tegangan simpul di simpul-simpul A, B, C, dan D pada rangkaian ini adalah



$$\text{A: } v_A = 1 \text{ V} \quad ; \quad \text{B: } \frac{v_B - v_A}{10} + \frac{v_B - v_C}{R_F} = 0 \quad ;$$

$$\text{C: } v_C = -100v_1 \quad ; \quad \text{D: } \frac{v_D - v_C}{5} + \frac{v_D}{1} = 0$$

Karena disyaratkan agar $v_D = -10 \text{ V}$, maka dari persamaan simpul C dan D kita dapat memperoleh nilai v_1 .

$$v_1 = -\frac{v_C}{100} = \frac{-5v_D - v_D}{100} = \frac{60}{100} = 0,6 \text{ V}$$

Kalau kita masukkan nilai v_1 ini ke persamaan simpul B akan kita peroleh

$$\frac{0,6 - 1}{10} + \frac{0,6 + 100 \times 0,6}{R_F} = 0$$

$$\Rightarrow R_F = 60,6 \times \frac{10}{0,4} = 1515 \text{ k}\Omega \approx 1,5 \text{ M}\Omega$$

9.3. Beberapa Catatan Tentang Metoda Tegangan Simpul dan Metoda Arus Mesh

Pada metoda tegangan simpul kita menggunakan salah satu simpul sebagai simpul referensi yang kita anggap bertegangan nol, sedangkan tegangan simpul-simpul yang lain dihitung terhadap simpul referensi ini. Simpul referensi tersebut dapat kita pilih dengan bebas sehingga perbedaan pemilihan simpul referensi dalam menyelesaikan persoalan satu rangkaian tertentu dapat menghasilkan nilai-nilai tegangan simpul yang berbeda. Namun demikian tegangan cabang-cabang rangkaian akan tetap sama hanya memang kita harus melakukan perhitungan lagi untuk memperoleh nilai tegangan cabang-cabang tersebut (yaitu mencari selisih tegangan antara dua simpul).

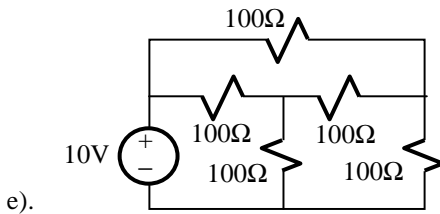
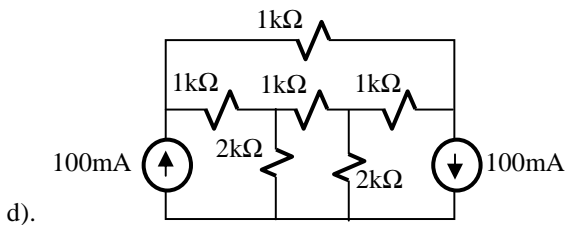
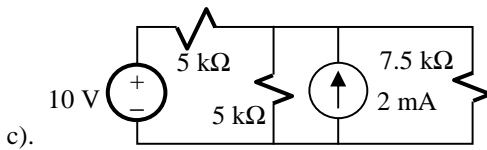
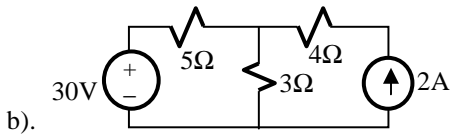
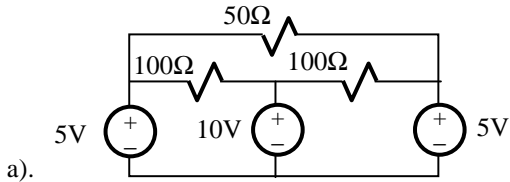
Pada rangkaian listrik yang besar, seperti misalnya jaringan kereta rel listrik ataupun jaringan PLN, orang melakukan pengukuran tegangan bukan terhadap simpul referensi umum seperti dalam pengertian metoda tegangan simpul melainkan terhadap titik netral atau *ground* di masing-masing lokasi pengukuran. Pengukuran ini belum tentu sesuai dengan perhitungan dalam analisis menggunakan metoda tegangan simpul karena *ground* di lokasi pengukuran tidaklah selalu sama dengan titik referensi umum dalam analisis. Akan tetapi karena jaringan-jaringan penyalur energi tersebut dapat dilihat sebagai berbentuk rangkaian tangga, maka permasalahan ini dengan mudah dapat diatasi dan akan dibahas lebih lanjut.

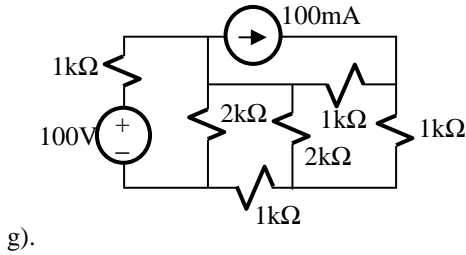
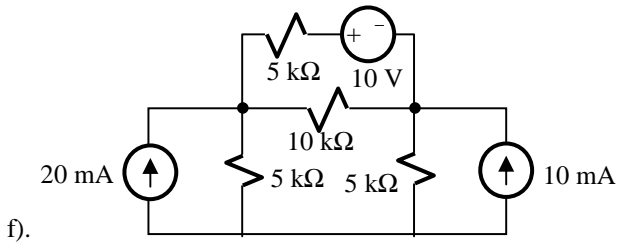
Metoda arus mesh dapat diterapkan pada rangkaian planar yaitu suatu rangkaian yang diagramnya dapat digambarkan pada satu bidang datar tanpa terjadi persilangan antar cabang rangkaian. Untuk rangkaian nonplanar metoda arus mesh tak dapat diterapkan dan kita perlu menggunakan metoda arus loop.

Metoda Analisis Berbantuan Komputer. Untuk rangkaian-rangkaian yang rumit, analisis secara manual tidaklah efektif bahkan hampir tidak mungkin lagi dilakukan. Untuk itu kita memerlukan bantuan komputer. Metoda ini tidak dibahas dalam buku ini.

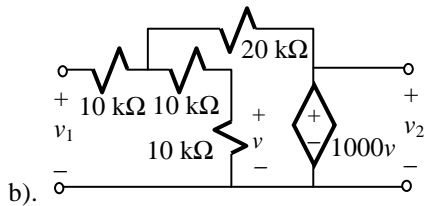
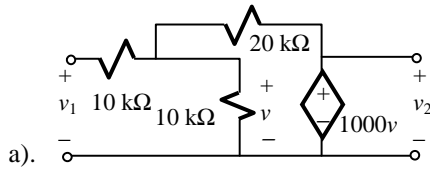
Soal-Soal

1. Carilah tegangan dan arus di masing-masing elemen pada rangkaian-rangkaian di bawah ini dan hitunglah daya yang diberikan oleh sumber.

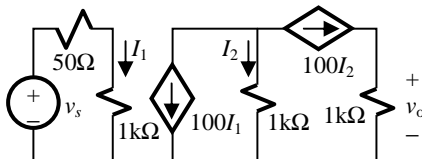




2. Tentukanlah v_2 pada dua rangkaian di bawah ini.



3. Pada rangkaian di bawah ini, carilah hubungan masukan-keluaran $v_o = Kv_s$.



BAB 10 Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

Dalam bab ini kita akan melihat beberapa contoh aplikasi analisis rangkaian yang dapat memberikan gambaran keadaan nyata. Rangkaian yang akan kita bahas meliputi rangkaian-rangkaian pemrosesan energi.

Pemrosesan energi listrik pada umumnya dilakukan dengan tiga macam cara, yaitu teknologi arus searah, teknologi arus bolak-balik, dan teknologi pulsa. Mengenai teknologi yang terakhir ini, tidak termasuk dalam cakupan buku ini; kita dapat mempelajarinya pada pelajaran lain. Teknologi arus bolak-balik dengan sinyal sinus merupakan teknologi yang sangat luas dipakai dalam pembangkitan maupun penyaluran energi listrik, namun rangkaian arus bolak-balik ini akan kita pelajari di bab lain; di bab ini kita hanya akan melihat rangkaian pemroses energi dengan tegangan dan arus searah, yang kita sebut rangkaian arus searah. Dalam rekayasa praktis, rangkaian pemroses energi yang pada umumnya merupakan rangkaian berbentuk tangga, digambarkan dengan cara yang lebih sederhana yaitu dengan menggunakan diagram satu garis. Bagaimana diagram ini dikembangkan, akan kita lihat pula di bab ini.

Cakupan bahasan dalam bab ini meliputi alat ukur dan pengukuran arus searah, saluran dan jaringan distribusi daya arus searah, penyediaan baterai sebagai sumber tenaga arus searah.

Dengan mempelajari rangkaian pemroses energi ini, kita akan

- mampu menghitung parameter penyalur daya arus searah.
- mampu melakukan perhitungan penyaluran daya arus searah.
- mampu melakukan analisis rangkaian arus searah yang diberikan dalam bentuk diagram satu garis.
- mampu melakukan perhitungan dalam susunan baterai.

10.1. Pengukur Tegangan dan Arus Searah

Salah satu jenis alat pengukur tegangan dan arus searah adalah jenis kumparan berputar yang terdiri dari sebuah kumparan yang berada dalam suatu medan magnetik permanen. Kumparan yang disangga

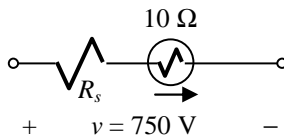
oleh sumbu dan dilengkapi dengan pegas ini akan berputar apabila ia dialiri arus. Perputaran akan mencapai kedudukan tertentu pada saat momen putar yang timbul akibat adanya interaksi medan magnetik dan arus kumparan, sama dengan momen lawan yang diberikan oleh pegas. Sudut pada kedudukan seimbang ini kita sebut sudut defleksi. Defleksi maksimum terjadi pada arus maksimum yang diperbolehkan mengalir pada kumparan. Karena kumparan harus ringan, ia harus dibuat dari kawat yang halus sehingga arus yang mengalir padanya sangat terbatas. Kawat kumparan ini mempunyai resistansi yang kita sebut resistansi internal alat ukur.

Walaupun arus yang melalui kumparan sangat terbatas besarnya, namun kita dapat membuat alat ukur ini mampu mengukur arus sampai ratusan amper dengan cara menambahkan resistor paralel (*shunt*). Terbatasnya arus yang diperbolehkan melalui kumparan juga berarti bahwa tegangan pada terminal kumparan juga sangat terbatas; namun dengan menambahkan resistansi seri terhadap kumparan, kita dapat membuat alat ukur ini mampu mengukur tegangan sampai beberapa ratus volt.

CONTOH-10.1: Sebuah alat ukur kumparan berputar mempunyai resistansi internal $10\ \Omega$ dan berdefleksi maksimum jika arus yang mengalir pada kumparan adalah $50\ \text{mA}$. Tentukan resistansi seri yang harus ditambahkan agar alat ini mampu mengukur tegangan sampai $750\ \text{V}$.

Solusi :

Dengan penambahan resistor seri R_s terjadi pembagian tegangan antara R_s dengan kumparan; dengan memilih nilai R_s yang tepat tegangan pada kumparan tetap pada batas yang diijinkan. Rangkaian alat ukur menjadi seperti gambar berikut. Dengan arus pada kumparan dibatasi pada $50\ \text{mA}$, maka:

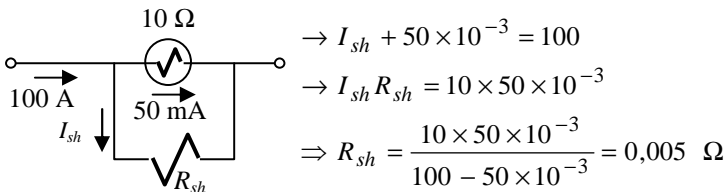


$$\frac{750}{R_s + 10} = 50 \times 10^{-3} \Rightarrow R_s = \frac{750}{50 \times 10^{-3}} - 10 = 14990\ \Omega$$

CONTOH-10.2: Alat ukur kumparan berputar pada contoh-10.1. (yang memiliki resistansi internal $10\ \Omega$ dan defleksi maksimum terjadi pada arus kumparan $50\ \text{mA}$) hendak digunakan untuk mengukur arus sampai $100\ \text{A}$. Tentukan nilai resistasi shunt yang diperlukan.

Solusi:

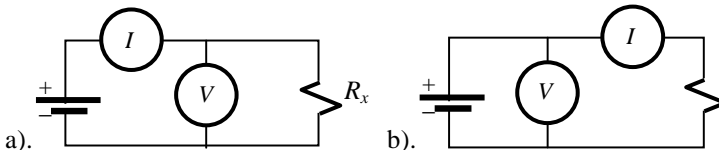
Dengan penambahan shunt R_{sh} akan terjadi pembagian arus antara R_{sh} dengan kumparan. Dengan memilih nil R_{sh} yang tepat, arus yang mengalir pada kumparan tetap dalam batas yang diijinkan. Rangkaian alat ukur dengan shunt terlihat pada gambar berikut. Dengan arus kumparan $50\ \text{mA}$, maka :



10.2. Pengukuran Resistansi

Salah satu metoda untuk mengukur resistansi adalah metoda voltmeter-ampere-meter. Dalam metoda ini nilai resistansi dapat dihitung dengan mengukur tegangan dan arus secara simultan. Dalam contoh berikut ini diberikan dua macam rangkaian yang biasa digunakan untuk mengukur resistansi dengan metoda voltmeter-ampere-meter.

CONTOH-10.3: Resistansi R_x hendak diukur dengan menggunakan dua macam rangkaian berikut ini. Jika resistansi internal voltmeter dan amperemeter masing-masing adalah R_V dan R_I dan penunjukan voltmeter dan amperemeter adalah V dan I , hitunglah R_x pada kedua macam cara pengukuran tersebut.



Solusi :

Untuk rangkaian a), tegangan pada R_x adalah V sedangkan arus yang melalui R_x adalah

$$I_x = I - \frac{V}{R_V} \quad \text{sehingga} \quad R_x = \frac{V}{I_x} = \frac{V}{I - (V/R_V)}$$

Jika pengukuran dilakukan dengan menggunakan rangkaian b), arus yang melalui R_x adalah I sedangkan tegangan pada R_x adalah

$$V_x = V - IR_I$$

sehingga

$$R_x = \frac{V}{I_x} = \frac{V - IR_I}{I} = \frac{V}{I} - R_I$$

Pemahaman :

Kesalahan pengukuran akan kecil dan nilai R_x dapat dinyatakan dengan $R_x = V/I$ jika R_V cukup besar pada rangkaian a) atau R_I cukup kecil pada rangkaian b).

10.3. Resistansi Kabel Penyalur Daya

Kabel digunakan sebagai penyalur daya dari sumber ke beban. Setiap ukuran dan jenis kabel mempunyai batas kemampuan pengaliran arus yang tidak boleh dilampaui; arus yang melebihi batas akan menyebabkan pemanasan pada kabel yang akan memperpendek umur kabel. Di samping itu, resistansi konduktor kabel akan menyebabkan terjadinya beda tegangan antara sumber dan beban. Oleh karena itu pemilihan ukuran kabel harus disesuaikan dengan besarnya beban. Selain resistansi konduktor, resistansi isolasi kabel juga merupakan parameter yang harus diperhatikan; menurunkan resistansi isolasi akan menyebabkan kenaikan arus bocor.

CONTOH-10.4: Resistansi konduktor suatu kabel sepanjang 500 m pada 20°C adalah 0.58 Ω dan resistansi isolasinya adalah 975 M Ω . Carilah resistansi konduktor dan isolasinya per kilometer.

Solusi :

Resistansi konduktor sebanding dengan panjangnya sesuai dengan relasi $R = \rho l/A$, maka resistansi konduktor per kilometer adalah

$$R_{konduktor} = 2 \times 0,58 = 1,16 \text{ } \Omega \text{ per km.}$$

Resistansi isolasi adalah resistansi antara konduktor dan tanah (selubung kabel). Luas penampang isolasi, yaitu luas penampang yang dilihat oleh konduktor ke arah selubung, berbanding terbalik terhadap panjang kabel; makin panjang kabel, makin kecil resistansi isolasinya. Resistansi isolasi kabel per kilometer adalah

$$R_{isolasi} = (1/2) \times 975 = 488 \text{ M}\Omega \text{ per km.}$$

CONTOH-10.5: Dua penggalan kabel, masing masing mempunyai resistansi konduktor $0,7 \text{ } \Omega$ dan $0,5 \text{ } \Omega$ dan resistansi isolasi $300 \text{ M}\Omega$ dan $600 \text{ M}\Omega$. Jika kedua penggalan kabel itu disambungkan untuk memperpanjang saluran, berapakah resistansi konduktor dan isolasi saluran ini ?

Solusi :

Karena disambung seri, resistansi total adalah :

$$R_{konduktor} = 0,7 + 0,5 = 1,2 \text{ } \Omega$$

Sambungan seri kabel, menyebabkan resistansi isolasinya terhubung paralel. Jadi resistansi isolasi total adalah :

$$R_{isolasi} = \frac{300 \times 600}{300 + 600} = 200 \text{ M}\Omega$$

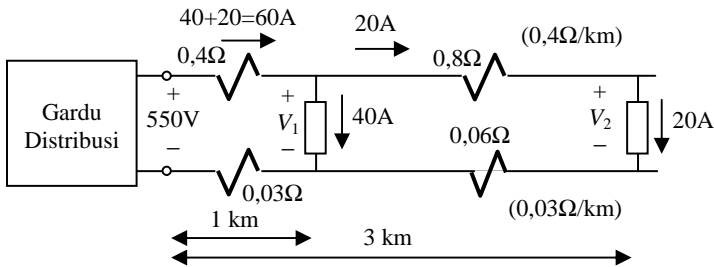
10.4. Penyaluran Daya Melalui Saluran Udara

Selain kabel, penyaluran daya dapat pula dilakukan dengan menggunakan saluran di atas tanah yang kita sebut saluran udara. Saluran udara ini dipasang dengan menggunakan tiang-tiang yang dilengkapi dengan isolator penyangga atau isolator gantung yang biasanya terbuat dari keramik atau gelas. Konduktornya sendiri dapat merupakan konduktor tanpa isolasi (telanjang) dan oleh karena itu permasalahan arus bocor terletak pada pemilihan isolator penyangga di tiang-tiang dan hampir tidak terkait pada panjang saluran sebagaimana yang kita jumpai pada kabel.

CONTOH-10.6: Dari suatu gardu distribusi dengan tegangan kerja 550 V disalurkan daya ke dua rangkaian kereta listrik. Dua rangkaian kereta tersebut berada masing-masing pada jarak 1 km dan 3 km dari gardu distribusi. Kereta pertama mengambil arus 40 A dan yang ke-dua 20 A. Resistansi kawat saluran udara adalah $0,4 \Omega$ per km, sedangkan resistansi rel sebagai saluran balik adalah $0,03 \Omega$ per km. Tentukanlah (a) tegangan kerja di masing-masing kereta, (b). Daya yang diserap saluran (termasuk rel).

Solusi :

Diagram rangkaian listrik dari sistem yang dimaksudkan dapat digambarkan seperti di bawah ini.



a). Tegangan kerja kereta pertama (V_1) dan kereta kedua (V_2) adalah:

$$V_1 = 550 - 60(0,4 + 0,03) = 524,2 \text{ V}$$

$$V_2 = V_1 - 20(0,8 + 0,06) = 507 \text{ V}$$

b). Daya yang diserap saluran adalah

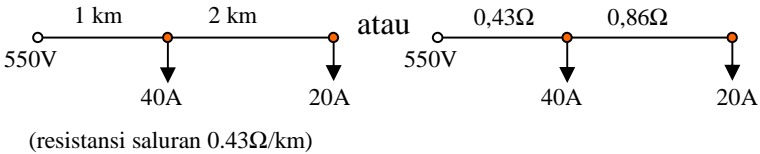
$$\begin{aligned} P_{\text{saluran}} &= 60^2 (0,4 + 0,03) + 20^2 (0,8 + 0,06) \\ &= 1892 \text{ W} = 1,89 \text{ kW} \end{aligned}$$

10.5. Diagram Satu Garis

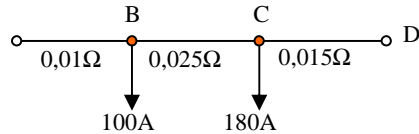
Penggambaran saluran distribusi seperti pada contoh 10.6. di atas dapat dilakukan dengan lebih sederhana, yaitu menggunakan *diagram satu garis*. Cara inilah yang sering dilakukan dalam praktik. Satu saluran digambarkan dengan hanya satu garis saja, beban dinyatakan dengan kebutuhan daya atau besar arusnya. Posisi gardu dan beban-beban dinyatakan dalam panjang saluran ataupun resistansi saluran. Resistansi saluran dinyatakan sebagai resistansi

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

total yaitu jumlah resistansi kawat kirim dan resistansi kawat balik. Sebagai contoh, diagram satu garis dari sistem penyaluran daya pada contoh 10.6. dapat kita gambarkan sebagai berikut.



CONTOH-10.7: Suatu saluran distribusi 2 kawat dicatu dari kedua ujungnya (A dan D) dengan tegangan 255 V dan 250 V. Beban sebesar 100 A dan 180 A berada di titik A simpul B dan C seperti terlihat pada diagram satu garis berikut. Resistansi yang tertera pada gambar adalah resistansi satu kawat. Tentukanlah tegangan di tiap titik beban (B dan C) serta arus di tiap-tiap bagian saluran.



Solusi:

Dengan memperhitungkan saluran balik, resistansi saluran menjadi dua kali lipat. Persamaan tegangan simpul untuk “simpul” B dan C adalah

$$70 V_B - 20 V_C = 12650$$

$$53,3 V_C - 20 V_B = 8153,3$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{12650 \times 53,3 + 8153,3 \times 20}{53,3 \times 70 - 400} = 251,3 \text{ V}$$

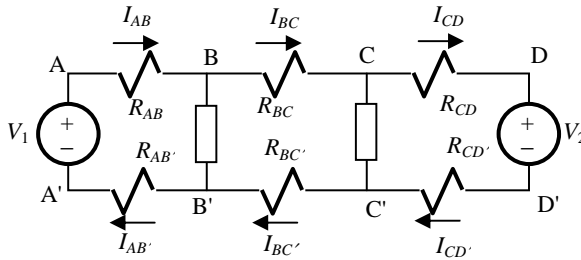
$$\Rightarrow V_C = \frac{8153,3 + 20 \times 251,3}{53,3} = 247,1 \text{ V}$$

Arus pada segmen AB, BC dan CD adalah :

$$I_{AB} = \frac{V_A - V_B}{R_{AB}} = \frac{255 - 251,3}{0,02} = 185 \text{ A};$$

$$I_{BC} = I_{AB} - 100 = 85 \text{ A}; I_{DC} = 180 - I_{BC} = 95 \text{ A}$$

Penurunan Diagram Satu Garis. Bagaimana mungkin metoda tegangan simpul dapat kita aplikasikan pada rangkaian yang digambarkan dengan diagram satu garis? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita lihat diagram rangkaian sebenarnya (dua kawat) sebagai berikut.



Jika simpul B dan B' serta C dan C' kita pandang sebagai dua simpul super, maka untuk keduanya berlaku

$$I_{AB} - I_{BC} + I_{BC}' - I_{AB}' = 0 \quad \text{dan} \quad I_{BC} - I_{CD} + I_{CD}' - I_{BC}' = 0$$

Karena $I_{AB} = I_{AB}'$ (hubungan seri), maka haruslah

$$I_{BC} = I_{BC}' \quad \text{dan oleh karenanya} \quad I_{CD} = I_{CD}'$$

Dengan kesamaan arus-arus ini maka aplikasi HTK untuk setiap mesh pada rangkaian di atas akan memberikan

$$V_{A'A} + I_{AB}R_{AB} + V_{BB'} + I_{AB'}R_{AB'} = 0$$

$$V_{B'B} + I_{BC}R_{BC} + V_{CC'} + I_{BC'}R_{BC'} = 0$$

$$V_{C'C} + I_{CD}R_{CD} + V_{DD'} + I_{CD'}R_{CD'} = 0$$

yang dapat ditulis sebagai

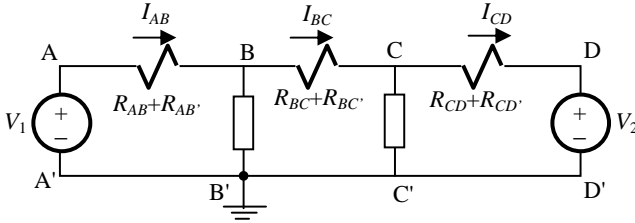
$$V_{A'A} + I_{AB}(R_{AB} + R_{AB'}) + V_{BB'} = 0$$

$$V_{B'B} + I_{BC}(R_{BC} + R_{BC'}) + V_{CC'} = 0$$

$$V_{C'C} + I_{CD}(R_{CD} + R_{CD'}) + V_{DD'} = 0$$

Tiga persamaan terakhir ini tidak lain adalah persamaan rangkaian yang berbentuk :

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

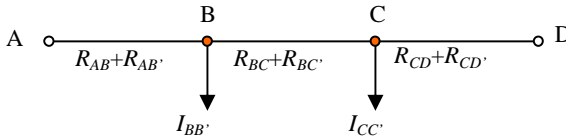


Dengan mengambil simpul B' sebagai simpul referensi kita dapat memperoleh persamaan tegangan untuk simpul B dan C sebagai

$$V_B \left(\frac{1}{R_{AB} + R_{AB'}} + \frac{1}{R_{BC} + R_{BC'}} \right) + I_{BB'} - \frac{V_A}{R_{AB} + R_{AB'}} - \frac{V_C}{R_{BC} + R_{BC'}} = 0$$

$$V_C \left(\frac{1}{R_{BC} + R_{BC'}} + \frac{1}{R_{CD} + R_{CD'}} \right) + I_{CC'} - \frac{V_B}{R_{BC} + R_{BC'}} - \frac{V_D}{R_{CD} + R_{CD'}} = 0$$

Inilah persamaan tegangan simpul B dan C yang dapat kita peroleh langsung dari diagram satu garis :



Jadi, dengan *menambahkan* resistansi *saluran balik* pada *saluran kirim*, maka saluran balik tidak lagi mengandung resistansi. Dengan demikian saluran balik ini dapat kita pakai sebagai simpul referensi yang bertegangan nol untuk seluruh panjang saluran balik tersebut.

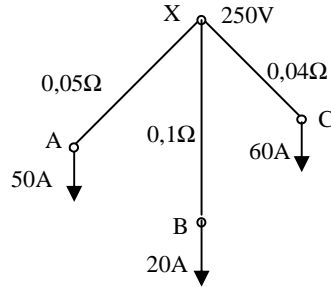
Dengan cara demikian ini, maka kita dapat memperoleh persamaan “tegangan simpul” langsung dari diagram satu garis tanpa harus menggambarkan diagram rangkaian sebenarnya, dengan catatan bahwa yang dimaksud dengan “tegangan simpul” adalah *tegangan antara saluran pengirim dan saluran balik di lokasi yang sama*.

10.6. Jaringan Distribusi Daya

Penyaluran daya listrik dapat bermula dari satu sumber ke beberapa titik beban ataupun dari beberapa sumber ke beberapa titik beban. Jaringan penyaluran daya ini, yang disebut jaringan distribusi daya,

dapat berbentuk jaringan *radial*, *mesh*, atau *ring*. Ke-tiga bentuk jaringan tersebut akan kita lihat secara berturut-turut dalam contoh berikut.

CONTOH-10.8: Tiga beban di A, B, dan C, masing-masing memerlukan arus 50, 20, dan 60 A dicatu dengan jaringan radial dari sumber X yang tegangannya 250 V. Penyaluran daya dari sumber ke beban dilakukan melalui saluran yang resistansi totalnya (saluran pengirim dan saluran balik) diperlihatkan pada gambar. Carilah tegangan masing-masing beban dan daya diserap saluran pada tiap cabang saluran.



Solusi :

$$V_A = V_X - 0,05 \times 50 = 247,5 \text{ V};$$

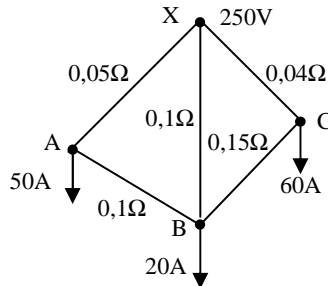
$$V_B = 250 - 0,1 \times 20 = 248 \text{ V};$$

$$V_C = 250 - 0,04 \times 60 = 247,6 \text{ V}$$

$$p_{XA} = (50)^2 \times 0,05 = 125 \text{ W}; \quad p_{XB} = (20)^2 \times 0,1 = 40 \text{ W};$$

$$p_{XC} = (60)^2 \times 0,04 = 144 \text{ W}$$

CONTOH-10.9: Titik beban A dan B serta B dan C pada contoh 10.8, dihubungkan dengan interkonektor yang resistansi masing-masing terlihat pada gambar di samping ini. Carilah tegangan masing-masing beban dan daya diserap saluran pada tiap cabang saluran dan *interconnector*, serta arus saluran.



Solusi :

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A, B, dan C adalah

$$V_A \left(\frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,1} \right) + 50 - \frac{V_B}{0,1} - \frac{V_X}{0,05} = 0$$

$$V_B \left(\frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,15} \right) + 20 - \frac{V_A}{0,1} - \frac{V_C}{0,15} - \frac{V_X}{0,1} = 0$$

$$V_C \left(\frac{1}{0,04} + \frac{1}{0,15} \right) + 60 - \frac{V_B}{0,15} - \frac{V_X}{0,04} = 0$$

$$30V_A + 50 - 10V_B - 5000 = 0$$

$$\frac{80}{3}V_B + 20 - 10V_A - \frac{20}{3}V_C - 2500 = 0$$

$$\frac{95}{3}V_C + 60 - \frac{20}{3}V_B - 6250 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 30 & -10 & 0 \\ -30 & 80 & -20 \\ 0 & -20 & 95 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4950 \\ 7440 \\ 18570 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 125 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 495 \\ 1239 \\ 30954 \end{vmatrix}$$

Dari sini kita peroleh

$$V_C = 247,63 \text{ V}; V_B = \frac{1239 + 2 \times 247,64}{7} = 247,75 \text{ V};$$

$$V_A = \frac{495 + 247,75}{3} = 247,58 \text{ V}$$

Daya diserap saluran adalah

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

$$P_{XA} = \frac{(V_X - V_A)^2}{R_{XA}} = \frac{(250 - 247,58)^2}{0,05} = 117 \text{ W}$$

$$P_{XB} = \frac{(250 - 247,75)^2}{0,1} = 50,6 \text{ W}$$

$$P_{XC} = \frac{(250 - 247,63)^2}{0,04} = 146,4 \text{ W}$$

$$P_{AB} = \frac{(V_A - V_B)^2}{0,1} = \frac{(247,58 - 247,75)^2}{0,1} = 0,3 \text{ W}$$

$$P_{BC} = \frac{(247,75 - 247,63)^2}{0,15} = 0,1 \text{ W}$$

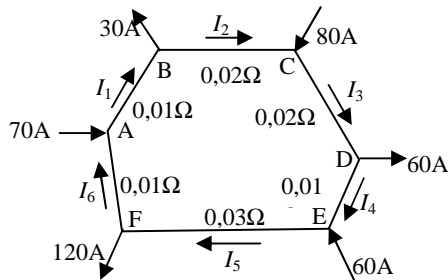
Arus pada saluran:

$$I_{XA} = \frac{(V_X - V_A)}{R_{XA}} = \frac{(250 - 247,58)}{0,05} = 48,4 \text{ A}$$

$$I_{XB} = \frac{(250 - 247,75)}{0,1} = 22,5 \text{ A}$$

$$I_{XC} = \frac{(250 - 247,63)}{0,04} = 59,3 \text{ A}$$

CONTOH-10.10: Gambar berikut ini adalah diagram satu garis jaringan distribusi dengan sumber-sumber yang dinyatakan sebagai arus masuk ke jaringan dan beban-beban dinyatakan dengan arus keluar dari jaringan. Pada jaringan berstruktur cincin ini, hitunglah arus-arus pada tiap cabang saluran.



Solusi :

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

Aplikasi HTK untuk loop dan HAK untuk lima “simpul” memberikan persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,02 & 0,01 & 0,03 & 0,01 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -70 \\ 30 \\ -80 \\ 60 \\ -60 \end{vmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -70 \\ -150 \\ -390 \\ -450 \\ -81 \end{vmatrix}$$

Dari sini kita peroleh :

$$\begin{aligned} I_6 &= -81 \text{ A} ; I_5 = 39 \text{ A} ; I_4 = -21 \text{ A} ; \\ I_3 &= 39 \text{ A} ; I_2 = -41 \text{ A} ; I_1 = -11 \text{ A} \end{aligned}$$

Tanda negatif : arah arus berlawanan dengan arah referensi.

10.7. Baterai

Baterai merupakan sumber daya arus searah yang banyak digunakan, terutama untuk daya yang tidak terlalu besar serta keadaan darurat. Untuk daya besar, susunan baterai dicatu oleh sumber arus searah yang diperoleh dari penyearahan arus bolak-balik. Berikut ini kita akan melihat penyediaan baterai, sedangkan penyearahan arus bolak-balik akan kita lihat pada sub-bab berikutnya mengenai rangkaian dengan dioda.

Suatu baterai tersusun dari *sel-sel* yang merupakan sumber daya searah melalui konversi energi kimia. Setiap sel mempunyai tegangan yang tidak besar dan oleh karena itu untuk memperoleh tegangan sumber yang kita inginkan, kita harus menyusun *sel-sel*

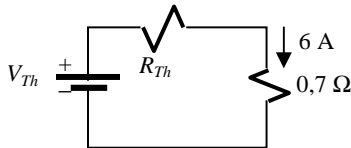
itu menjadi suatu susunan batere. Sebagai contoh, sumber daya untuk mobil merupakan sumber dengan tegangan 12 V yang tersusun dari 6 *sel* terhubung seri dan masing-masing *sel* bertegangan 2 volt.

Penyediaan batere haruslah diusahakan optimal baik dilihat dari pertimbangan ekonomis maupun teknis. Berikut ini suatu contoh perhitungan penyediaan batere.

CONTOH-10.11: Suatu susunan batere diperlukan untuk memberikan arus sebesar 6 A pada beban resistif sebesar $0,7 \Omega$. Jika sel-sel yang tersedia mempunyai ggl (emf) 2,1 V dengan resistansi internal $0,5 \Omega$, tentukanlah jumlah sel dan susunannya.

Solusi :

Jika kita anggap susunan batere kita sebagai suatu sumber Thévenin, maka untuk mencapai transfer daya maksimum resistansi Thévenin harus sama dengan resistansi beban, yaitu



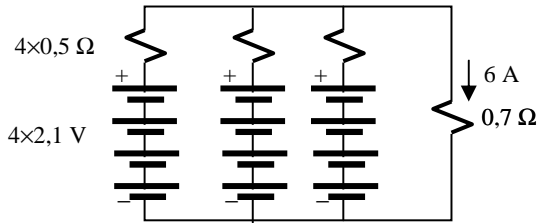
$$R_{Th} = R_{beban} = 0,7 \Omega$$

Karena arus ditetapkan sebesar 6 A, maka sumber tegangan Thévenin, V_{Th} , haruslah

$$V_{Th} = 6 \times (0,7 + 0,7) = 8,4 \text{ V}$$

Sel yang tersedia mempunyai ggl 2,1 V sehingga diperlukan 4 buah sel dihubungkan seri untuk memperoleh tegangan 8,4 V. Susunan seri ini mempunyai resistansi total sebesar $4 \times 0,5 = 2 \Omega$. Untuk memperoleh R_{Th} sebesar $0,7 \Omega$ (atau mendekati) diperlukan tiga susunan paralel, yang akan memberikan $R_{ekivalen} = 0,66 \Omega$. Jadi kita memerlukan $4 \times 3 = 12$ sel, yang tersusun menjadi 4 seri 3 paralel seperti terlihat pada gambar di bawah ini.

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)



Pemahaman :

Jika susunan seri kita kurangi jumlah sel-nya, menjadi hanya 3, maka tegangan total menjadi $3 \times 2,1 = 6,3 \, \text{V}$, dan resistansinya menjadi $3 \times 0,5 = 1,5 \, \Omega$. Dengan mempertahankan susunan tetap 3 paralel, resistansi ekivalen menjadi $0,5 \, \Omega$. Arus beban akan menjadi

$$6,3 / (0,5 + 0,7) = 5,025 \, \text{A},$$

kurang dari yang diharapkan yaitu $6 \, \text{A}$.

Jika kita coba menambah jumlah cabang paralelnya menjadi 4, resistansi ekivalen menjadi $1,5 / 4 = 0,375 \, \Omega$. Arus beban menjadi $6,3 / (0,375 + 0,7) = 5,86 \, \text{A}$; tetap masih kurang dari $6 \, \text{A}$. Jadi susunan 12 sel menjadi 4 seri terparalel 3, adalah yang optimal dengan arus beban $8,4 / (0,66 + 0,7) = 6,17 \, \text{A}$.

10.7.1. Sel-sel Ujung (Sel Akhir)

Pada umumnya pembebanan pada batere tidaklah selalu tetap. Jika arus beban bertambah, maka tegangan batere akan menurun karena ada resistansi internal. Tegangan batere juga akan menurun pada beban konstan, seiring dengan berjalannya waktu. Oleh karena itu jika diperlukan suatu tegangan keluaran yang tertentu besarnya, maka diperlukan *sel ujung* yang akan dimasukkan ataupun dikeluarkan dari susunan batere agar perubahan tegangan keluaran masih dalam batas-batas yang diperbolehkan.

CONTOH-10.12: Dari suatu susunan batere diperlukan tegangan keluaran sebesar $220 \, \text{V}$. Jika tegangan maksimum tiap sel adalah $2,5 \, \text{V}$ sedangkan tegangan minimum yang masih diperkenankan adalah $1,85 \, \text{V}$, berapakah jumlah sel (terhubung seri) yang diperlukan, dan berapakah jumlah sel ujung.

Solusi :

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

Jumlah sel yang diperlukan harus dihitung dengan memperhatikan tegangan minimum sel agar pada tegangan minimum ini tegangan keluaran baterai masih bernilai 220 V.

Jadi jumlah sel yang diperlukan adalah $N = \frac{220}{1,85} = 119$ buah

Pada saat sel bertegangan maksimum, jumlah sel yang diperlukan hanyalah $N_0 = \frac{220}{2,5} = 88$ buah

Jadi jumlah sel ujung adalah $N_u = 119 - 88 = 31$ buah.

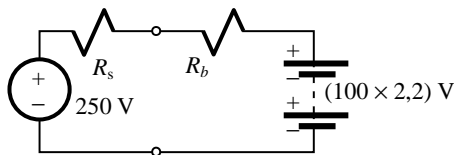
10.7.2. Pengisian Baterai

Dalam proses pengisian baterai, daya dari sumber ditransfer ke baterai. Daya yang dikeluarkan oleh sumber, selain untuk mengisi baterai sebagian akan hilang menjadi panas dalam baterai (karena adanya resistansi internal baterai), hilang pada saluran, dan juga hilang pada sumber itu sendiri karena adanya resistansi internal sumber. Kita lihat contoh berikut ini.

CONTOH-10.13: Sebuah sumber tegangan searah 250 V dengan resistansi internal sebesar $0,5 \Omega$ digunakan untuk mengisi baterai yang terdiri dari 100 sel, masing-masing dengan ggl 2,2 V dan resistansi internal $0,01 \Omega$. Hitunglah a) arus pengisian. b) daya pengisian baterai, c) daya hilang sebagai panas dalam baterai, d) daya hilang sebagai panas pada sumber.

Solusi :

Rangkaian pengisian baterai adalah seperti gambar di samping ini.



Ggl total baterai dan resistansi internalnya adalah :

$$GGL = 100 \times 2,2 = 220 \text{ V} ; \quad R_b = 100 \times 0,01 = 1 \Omega$$

a). Arus pengisian adalah :

$$I = \frac{V_{\text{sumber}} - GGL}{R_s + R_b} = \frac{250 - 220}{0,5 + 1} = 20 \text{ A}$$

b). Daya untuk pengisian batere adalah :

$$P_{pengisian} = GGL \times I = 220 \times 20 = 4400 \text{ W}$$

c). Daya hilang sebagai panas dalam batere adalah ;

$$P_{panas} = I^2 R_b = 20^2 \times 1 = 400 \text{ W}$$

d). Daya hilang pada sumber :

$$P_{panas \text{ sumber}} = I^2 R_{sumber} = 20^2 \times 0,5 = 200 \text{ W}$$

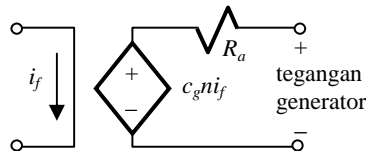
10.8. Generator Arus Searah

Pembahasan secara rinci dari suatu generator arus searah dapat kita pelajari dalam pembahasan khusus mesin-mesin listrik. Generator arus searah dalam ulasan berikut ini dipandang sebagai piranti yang dapat dimodelkan secara sederhana, sebagai sebuah sumber arus searah selain batere yang kita bahas di atas.

Kita mengenal beberapa jenis generator yang dibedakan menurut macam penguatan (eksitasi) yang digunakan, yaitu generator berpenguatan bebas, generator berpenguatan seri, dan generator berpenguatan shunt (paralel), generator berpenguatan kompon. Di sini kita hanya akan melihat generator berpenguatan bebas.

Generator arus searah berpenguatan bebas dapat dimodelkan dengan sumber tegangan tak-bebas

CCVS. Arus eksitasi, i_f , mengalir melalui kumparan eksitasi, yang merupakan kumparan stator, dan menimbulkan medan magnet. Dalam medan magnetik inilah rotor yang



CCVS, model generator arus searah

mendukung kumparan jangkar berputar dengan kecepatan n putaran per menit (n rpm) sehingga di kumparan jangkar ini timbul tegangan. Tegangan jangkar ini mencatu beban yang dihubungkan ke terminal generator; karena belitan jangkar memiliki resistansi maka terdapat resistansi seri yang terhubung ke tegangan yang terbangkit di kumparan jangkar yang disebut resistansi jangkar, R_a . Tegangan yang terbangkit di kumparan jangkar sebanding dengan

Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)

fluksi magnetik di stator dan kecepatan perputaran rotor sehingga tegangan jangkar dapat dinyatakan dengan

$$V_g = k_a n \phi$$

dengan k_a suatu konstanta yang tergantung dari konstruksi jangkar, n kecepatan perputaran rotor, dan ϕ adalah fluksi magnet. Jika kita anggap rangkaian magnetik memiliki karakteristik linier maka fluksi ϕ dapat kita anggap sebanding dengan arus eksitasi

$$\phi = k_f i_f$$

sehingga tegangan generator dapat kita nyatakan sebagai

$$V_g = c_g n i_f$$

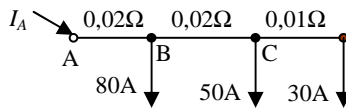
dengan c_g adalah suatu tetapan.

Soal-Soal

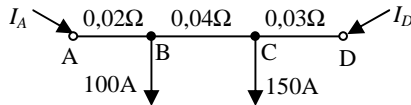
1. Tegangan pada sebuah resistor R yang sedang dialiri arus searah diukur dengan menggunakan sebuah voltmeter yang mempunyai resistansi internal $20 \text{ k}\Omega$. Voltmeter menunjuk 200 V . Jika arus total adalah $0,05 \text{ A}$, hitunglah nilai R .
2. Arus yang melalui sebuah resistor R diukur menggunakan ampermeter yang mempunyai resistansi internal $0,1 \text{ }\Omega$ (resistor R dihubungkan seri dengan ampermeter). Jika tegangan yang diberikan adalah 10 V dan ampermeter menunjuk 50 A . Hitung R .
3. Sebuah voltmeter jika dihubungkan *langsung* ke sumber tegangan menunjuk 240 V , jika *melalui resistor seri* $50 \text{ k}\Omega$, ia menunjukkan 90 V . Berapakah resistansi internalnya ?
4. Sebuah voltmeter jika diserikan dengan resistor $50 \text{ k}\Omega$ menunjuk 90 V pada tegangan sumber 240 V . Jika resistor $50 \text{ k}\Omega$ diganti dengan suatu resistansi R_x maka voltmeter menunjuk 3 V . Dengan membandingkan dua pengukuran tersebut, hitunglah R_x .
5. Dua buah voltmeter masing-masing mempunyai resistansi internal $20 \text{ k}\Omega$ dan $30 \text{ k}\Omega$. Jika mereka dihubungkan seri dan pada hubungan seri ini diberikan tegangan 300 V , berapakah penunjukkan masing-masing ?

6. Suatu baterai terdiri dari 10 buah sel masing-masing mempunyai emf 1,8 V dan resistansi internal 0,02 Ω . Jika sepuluh sel itu dihubungkan seri untuk mencatu beban resistor 2,8 Ω , berapakah daya yang diserap beban ? Jika sepuluh sel tersebut dihubungkan paralel untuk mencatu beban yang sama, berapa daya diserap beban ?
7. Dua buah baterai 120 V mempunyai resistansi internal berbeda, masing-masing 0,2 Ω dan 0,25 Ω . Kedua baterai diparalelkan untuk mencatu daya pada resistor 60 Ω . Hitunglah arus yang diberikan oleh masing-masing baterai.
8. Sebuah beban memerlukan arus 100 mA pada tegangan 5 V. Sumber yang tersedia bertegangan 24 V. Untuk memenuhi keperluan itu digunakan potensiometer yang resistansi totalnya 10 k Ω . Berapa daya diserap beban dan berapa daya diberikan oleh sumber ?
9. Dua alat pemanas digunakan secara bersamaan pada tegangan 240 V. Arus total yang mereka ambil adalah 15 A. Salah satu pemanas diketahui menyerap daya 1200 W. Berapa daya yang diserap pemanas yang lain dan hitunglah resistansi masing-masing pemanas.
10. Resistansi konduktor suatu jenis kabel adalah 0,014 Ω per 100 m. Kabel jenis ini digunakan untuk menyalurkan daya searah ke sebuah beban 100 A pada jarak 250 m dari pusat pencatu daya. Hitung perbedaan tegangan antara ujung kirim dan ujung terima kabel dan hitung daya hilang pada saluran ini.
11. Tiga buah beban masing-masing 50 A, dihubungkan pada satu pusat pencatu daya searah melalui kabel-kabel yang terpisah. Resistansi kabel (saluran kirim + saluran balik) ke beban A, B, dan C berturut-turut adalah 0,05 , 0,1 , dan 0,02 Ω . Jika tegangan di pencatu daya adalah 250 V, hitung tegangan di masing-masing beban.
12. Diagram satu garis berikut ini menunjukkan penyaluran daya searah ke tiga beban menggunakan satu saluran kabel. Pusat pencatu daya di A bekerja pada tegangan 250 V. Tentukan pada tegangan berapa masing-masing beban beroperasi.

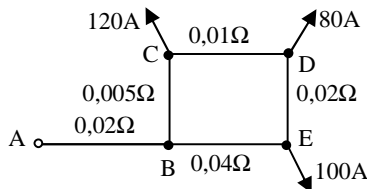
Rangkaian Pemroses Energi (Arus Searah)



13. Suatu kabel penyalur daya dicatu di kedua ujungnya untuk memberi daya pada dua beban seperti terlihat pada diagram satu garis berikut. Jika tegangan di A 255 V , dan di D 250 V , hitunglah tegangan di B dan C. Hitung pula arus masuk di A dan D, dan arus di segmen B-C.



14. Gambarkan diagram satu garis untuk sistem pada soal 11. Jika beban A dan B dihubungkan dengan kabel konektor yang resistansinya $0,1\ \Omega$, dan beban B dan C dengan kabel konektor $0,015\ \Omega$. hitung tegangan di masing-masing beban.
15. Diagram satu garis suatu jaringan distribusi daya searah dengan konfigurasi cincin adalah sebagai berikut. Jika sumber di A bekerja pada 250 V , hitung tegangan masing-masing beban dan arus di segmen-segmen jaringan distribusi.



16. Sebuah beban 100 A berada pada jarak 250 m dari pusat pencatu daya. Jika tegangan jatuh pada beban tidak boleh lebih dari 5 V dan jika resistivitas bahan konduktor kabel adalah $0,018\ \Omega.\text{mm}^2/\text{m}$, hitunglah penampang konduktor kabel yang diperlukan.

BAB 11 Rangkaian Pemroses Sinyal ***(Rangkaian Dioda dan OPAMP)***

Dalam bab ini kita akan melihat beberapa contoh aplikasi analisis rangkaian, dengan contoh-contoh rangkaian pemrosesan sinyal. Kita akan melihat rangkaian-rangkaian dengan menggunakan dioda dan rangkaian dengan OP AMP.

Dengan mempelajari rangkaian pemroses sinyal di bab ini, kita akan

- memahami rangkaian penyearah, pemotong gelombang;
- mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian dioda;
- mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian OP AMP dengan resistor.
- mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian OP AMP dengan elemen dinamis.
- memahami hubungan-hubungan bertingkat rangkaian OP AMP.

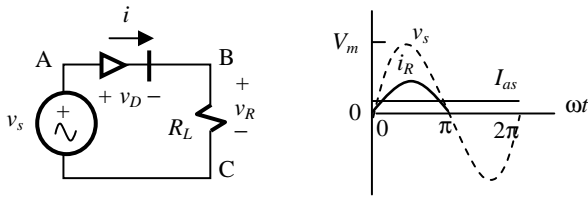
11.1. Rangkaian Dengan Dioda

Kita telah melihat bagaimana karakteristik dioda dan kita juga telah mempelajari rangkaian dengan dioda pada waktu membahas model piranti. Rangkaian yang telah kita kenal adalah penyearah setengah gelombang, penyearah gelombang penuh dengan empat dioda (penyearah jembatan), dan rangkaian pensaklran. Berikut ini kita masih akan melihat penyearah gelombang penuh dari jenis yang lain, yaitu menggunakan transformator. Namun untuk mengingat kembali, kita sebutkan secara ringkas apa yang sudah kita pelajari.

11.1.1. Penyearah Setengah Gelombang

Rangkaian dan hasil penyearahan digambarkan lagi seperti terlihat pada Gb.11.1. Nilai rata-rata arus adalah:

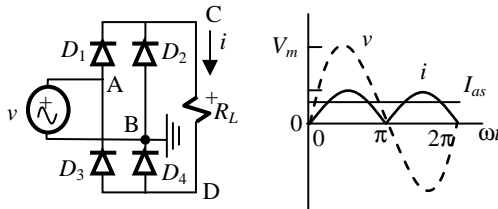
$$I_{as} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_R d(\omega t) = \frac{V_m}{\pi R} = \frac{I_m}{\pi}$$



Gb.11.1. Penyearah setengah gelombang.

11.1.2. Penyearah Gelombang Penuh (Rangkaian Jembatan)

Rangkaian penyearah jembatan serta sinyal hasil pemrosesannya digambarkan lagi seperti terlihat pada Gb.11.2.



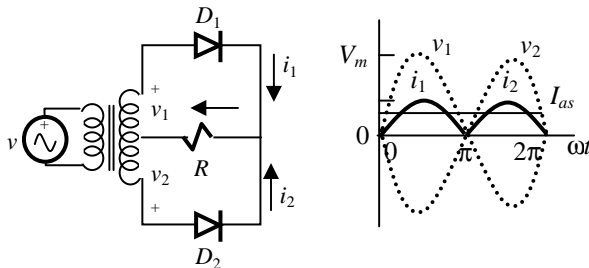
Gb.11.2. Penyearah gelombang penuh jembatan.

Dengan mudah dapat dihitung nilai arus searah

$$I_{as} = \frac{2}{\pi} \frac{V_m}{R_L} = \frac{2I_m}{\pi}$$

11.1.3. Penyearah Gelombang Penuh Dengan Transformator

Diagram rangkaian penyearah ini terlihat pada Gb.11.3.



Gb.11.3. Penyearah gelombang penuh dengan transformator ber-titik-tengah.

Rangkaian ini menggunakan transformator dengan belitan sekunder terbagi dua sama besar (belitan sekunder mempunyai titik tengah) sehingga dapat memberikan dua tegangan sekunder sama besar. Perbandingan lilitan transformator untuk keperluan ini disesuaikan dengan besar tegangan keluaran yang diinginkan.

Aplikasi HTK untuk kedua loop di sekunder transformator memberikan

$$\begin{aligned} v_1 - v_{D1} - iR &= 0 \rightarrow i = \frac{v_1 - v_{D1}}{R} = \frac{V_{1m} \sin \omega t - v_{D1}}{R} \\ v_2 - v_{D2} - iR &= 0 \rightarrow i = \frac{v_2 - v_{D2}}{R} = \frac{-V_{m1} \sin \omega t - v_{D2}}{R} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Pada waktu D_1 konduksi,

$$i = \frac{V_{1m} \sin \omega t}{R}$$

yang hanya akan bernilai positif pada selang $0 \leq \omega t \leq \pi$. Dalam selang ini persamaan kedua dari (11.1) menjadi

$$\frac{V_{m1} \sin \omega t}{R} = \frac{-V_{1m} \sin \omega t - v_{D2}}{R} \rightarrow v_{D2} = -2V_{m1} \sin \omega t \quad (11.2)$$

Jadi pada saat D_1 konduksi, D_2 tidak konduksi karena $v_{D2} < 0$.

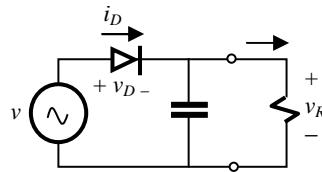
Pada setengah periode berikutnya, D_2 konduksi sedangkan D_1 tidak konduksi. Arus yang mengalir pada R akan tetap sama seperti pada setengah periode sebelumnya. Tegangan balik maksimum yang diderita oleh dioda adalah $-2V_{m1}$.

11.1.4. Filter (Tapis) Pasif

Tujuan dari penyearahan adalah memperoleh arus searah. Dalam penyearah yang kita bahas di atas, kita tidak memperoleh arus searah murni melainkan arus searah yang berubah secara periodik; jadi arus searah ini mengandung komponen arus bolak-balik. Variasi tegangan ini disebut riak tegangan. Riak tegangan pada penyearah gelombang penuh lebih kecil dari riak tegangan pada penyearah setengah gelombang. Untuk lebih memperkecil riak tegangan ini digunakan filter yang bertugas untuk meloloskan komponen searah dan mencegah komponen bolak-balik.

Filter Kapasitor. Dengan menambahkan kapasitor paralel dengan beban R pada rangkaian penyearah setengah gelombang, maka riak tegangan akan sangat ditekan. Sebagaimana kita ketahui, kapasitor dapat menyimpan energi. Pada saat tegangan sumber naik, kapasitor akan terisi sampai mencapai tegangan maksimum. Pada saat tegangan sumber menurun, kapasitor akan melepaskan energi yang disimpannya melalui beban (karena pada saat ini dioda tidak konduksi). Dengan demikian beban akan tetap memperoleh aliran energi walaupun dioda tidak konduksi. Selanjutnya bila dioda konduksi lagi, kapasitor akan terisi dan energi yang tersimpan ini akan dilepaskan lagi pada waktu dioda tidak konduksi; dan demikian seterusnya. Filter semacam ini tentu saja dapat pula digunakan pada penyearah gelombang penuh.

Gb.11.4. memperlihatkan rangkaian penyearah setengah gelombang dengan filter kapasitor. Jika $v = V_m \sin \omega t$, bagaimanakah bentuk tegangan keluaran pada beban R ?



Gb.11.4. Filter kapasitor.

Pada waktu dioda konduksi, kapasitor terisi sampai tegangan maksimum. Pada waktu v menurun tegangan sumber menjadi lebih kecil dari tegangan kapasitor dan dioda tidak konduksi, $v_C = v_R$. Kapasitor melepaskan muatannya melalui R dan selama pelepasan muatan ini, kita mempunyai loop tertutup RC seri. Untuk loop ini berlaku

$$v_R = v_C = Ri_R = R(-i_C) = -RC \frac{dv_C}{dt} \rightarrow RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

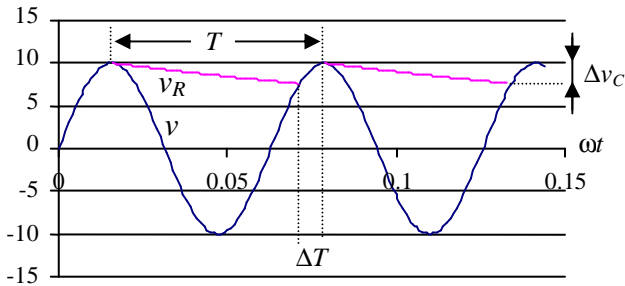
Persamaan diferensial ini memberikan

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{1}{RC} dt \rightarrow \ln v_C = -\frac{1}{RC} t + K \Rightarrow v_C = K_1 e^{-(1/RC)t}$$

Nilai K_1 ditentukan oleh nilai awal tegangan kapasitor yaitu pada saat ia mulai melepaskan energinya yang hampir sama besar dengan tegangan maksimum yang dicapai sesaat sebelum dioda berhenti konduksi, yaitu V_m . Jadi $v_C = V_m e^{-(1/RC)t}$. Dioda akan kembali konduksi manakala $v > v_C$. Maka tegangan pada R adalah

$$\text{pada waktu dioda konduksi: } v_R = v_C = V_m \sin \omega t \text{ V}$$

$$\text{pada waktu dioda tak konduksi: } v_R = v_C = V_m e^{-(1/RC)t} \text{ V}$$



Dengan menambahkan kapasitor, riak tegangan dapat diperkecil. Kita dapat melihat bahwa tegangan kapasitor menurun sebesar Δv_C . Penurunan tegangan ini menunjukkan adanya pelepasan muatan sebesar $C\Delta v_C$ dan ini sama dengan jumlah muatan yang ditransfer melalui R dalam selang waktu $(T-\Delta T)$, yaitu sebesar $I_{as}(T-\Delta T)$. Dengan relasi ini kita dapat memperkirakan besarnya C yang diperlukan untuk membatasi riak tegangan (membatasi Δv_C).

$$\begin{aligned}\Delta q_C &= C \Delta v_C = I_{as}(T - \Delta T) \approx I_{as}T \\ \Rightarrow C &= \frac{I_{as}T}{\Delta v_C} = \frac{I_{as}}{f\Delta v_C} = \frac{V_{as}}{Rf\Delta v_C}\end{aligned}\quad (11.3)$$

CONTOH-11.1: Pada penyearah dengan filter Gb.11.2, $R = 5 \text{ k}\Omega$, dan diinginkan tegangan dan arus di R adalah $I_{as} = 10 \text{ mA}$ dan $V_{as} = 50 \text{ V}$, sedangkan riak tegangan tak lebih dari $1\% \times V_{as}$, berapakah nilai C dan berapa tegangan masukan v jika frekuensinya 50 Hz ?

Solusi :

$$\begin{aligned}\Delta v_C &= 0,01V_{as} \rightarrow \frac{V_{as}}{\Delta v_C} = 0,1 \\ \rightarrow C &= \frac{V_{as}}{Rf\Delta v_C} = \frac{1}{5000 \times 50} \times \frac{1}{0,01} = 400 \text{ }\mu\text{F}\end{aligned}$$

$$V_{as} = 50 \text{ V} \rightarrow V_m \approx 50 \text{ V} \rightarrow v = 50 \sin(100\pi t) \text{ V}$$

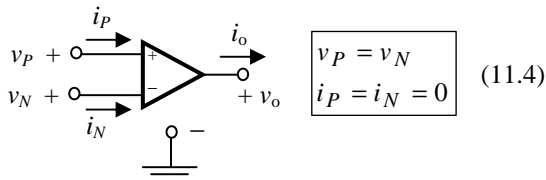
(jika sumber yang tersedia 220 V , diperlukan transformator).

11.2. Rangkaian Dengan OP AMP

Karakteristik OP AMP telah kita bahas pada waktu kita membahas model piranti di Bab-5. Dua rangkaian dasar OP AMP, yaitu rangkaian penyangga dan rangkaian penguat non-inversi telah pula kita pelajari. Di sub-bab ini kita akan membahas rangkaian-rangkaian OP AMP yang lain termasuk rangkaian dengan elemen dinamis. Apa yang telah kita pelajari mengenai OP AMP akan kita ulang secara ringkas.

11.2.1. Karakteristik Penguat Operasional (OP AMP) Ideal

OP AMP adalah suatu piranti berbentuk rangkaian terintegrasi yang cukup rumit, terdiri dari transistor,

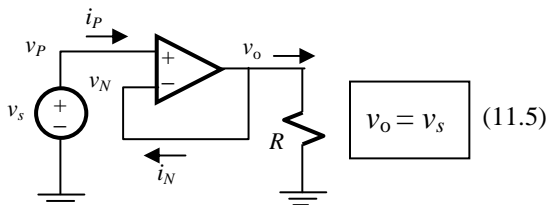


Gb.11.5. Rangkaian dan karakteristik OP AMP ideal.

resistor, dioda, kapasitor, yang semuanya terangkai dalam satu chip. Walaupun rangkaianannya rumit, OP AMP dapat dimodelkan dengan suatu karakteristik i - v yang agak sederhana. Rangkaian dan karakteristik OP AMP ideal yang kita gunakan untuk melakukan analisis adalah seperti terlihat pada Gb.11.5.

11.2.2. Rangkaian Penyangga

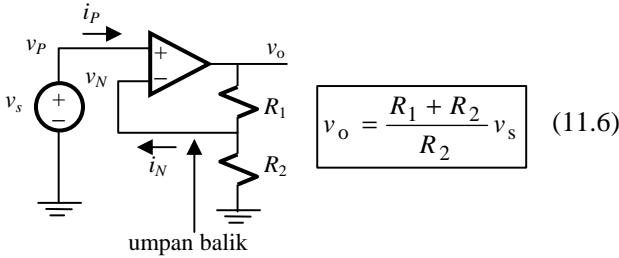
Rangkaian penyangga serta relasi masukan-keluaran diperlihatkan lagi pada Gb.11.6.



Gb.11.6 Rangkaian Penyangga.

11.2.3. Rangkaian Penguat Non-Inversi

Rangkaian penguat non-inversi serta relasi masukan-keluaran diperlihatkan lagi pada Gb.11.7.

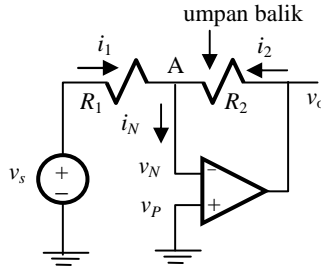


Gb.11.7. Rangkaian penguat non-inversi

11.2.4. Rangkaian Penguat Inversi

Diagram rangkaian penguat inversi terlihat pada Gb.11.8. Sinyal masukan dan umpan balik, keduanya dihubungkan ke terminal masukan inversi. Terminal non-inversi dihubungkan ke titik pentanahan, sehingga $v_p = 0$.

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah



Gb.11.8. Penguat inversi

$$v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + i_N - \frac{v_s}{R_1} - \frac{v_o}{R_2} = 0$$

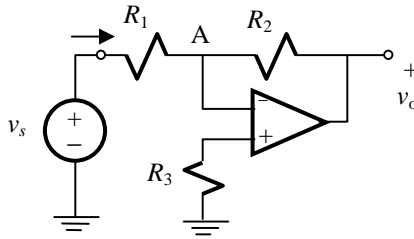
Oleh karena $v_N = v_p = 0$ dan $i_N = i_p = 0$, maka

$$\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_2} = 0 \quad \text{sehingga} \quad v_o = - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) v_s \quad (11.7)$$

Kita lihat bahwa *gain* loop tertutup adalah $K = - (R_2 / R_1)$. Tanda negatif menunjukkan terjadinya pembalikan polaritas sinyal. Oleh karena itu rangkaian ini disebut penguat inversi.

CONTOH-11.2: Di

samping ini adalah salah satu varian rangkaian penguat inversi. Tentukanlah hubungan keluaran-masukan dan resistansi masukan.

**Solusi :**

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A (terminal inversi) :

$$v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + i_N - \frac{v_s}{R_1} - \frac{v_o}{R_2} = 0$$

Untuk OP AMP ideal $i_N = i_P = 0$, dan $v_N = v_P = 0$ maka

$$\frac{-v_s}{R_1} + \frac{-v_o}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_2}{R_1}$$

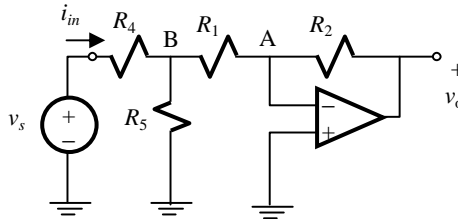
Karena $v_A = v_P = 0$ maka $i_{in} = v_s / R_1$. Resistansi masukan adalah

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{v_s}{v_s / R_1} = R_1$$

Pengaruh adanya R_3 akan terlihat jika kita menggunakan rangkaian Gb.5.12.

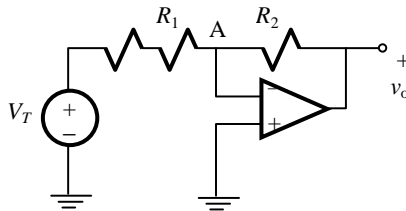
CONTOH-11.3:

Pada variasi rangkaian penguat inversi di samping ini, tentukanlah hubungan keluaran-masukan dan resistansi masukan.

**Solusi :**

Kita pandang rangkaian ini terdiri dari seksi sumber, yaitu rangkaian sebelah kiri dari simpul B, dan seksi beban yaitu rangkaian di sebelah kanan simpul B (rangkaian penguat

inversi). Jika seksi sumber kita ganti dengan rangkaian ekuivalen Thévenin-nya, maka rangkaian menjadi seperti di bawah ini.



$$V_T = \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s ; R_T = R_4 \parallel R_5$$

Dengan cara seperti pada contoh sebelumnya, kita akan memperoleh

$$\frac{v_o}{V_T} = -\frac{R_2}{R_1 + R_T} = -\frac{R_2}{R_1 + R_4 \parallel R_5}$$

Maka :

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{v_o}{V_T} \times \frac{V_T}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1 + R_4 \parallel R_5} \times \frac{R_5}{R_4 + R_5} = -\frac{R_2 R_5}{(R_1 R_5 + R_1 R_4 + R_4 R_5)}$$

Resistansi masukan adalah $R_{in} = v_s / i_{in}$. Karena $v_A = v_N = v_P = 0$, maka $i_{in} = v_s / (R_4 + R_1 \parallel R_5)$, sehingga

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_{in}} = R_4 + R_1 \parallel R_5 = \frac{R_4(R_1 + R_5) + R_1 R_5}{R_1 + R_5}$$

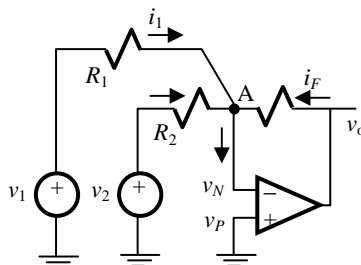
11.2.5. Rangkaian Penjumlah

Diagram rangkaian penjumlah atau *adder* terlihat pada Gb.11.9.

Rangkaian ini mempunyai dua masukan dan keduanya dihubungkan ke terminal masukan yang sama, yang disebut titik penjumlah.

Terminal masukan non-inversi ditanahkan, sehingga $v_P = 0 = v_N$ dan $i_N = 0$ (model ideal).

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah



Gb.11.9. Rangkaian penjumlah.

$$v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_F} \right) + i_N - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_o}{R_F} = 0$$

$$\rightarrow \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_o}{R_F} = 0$$

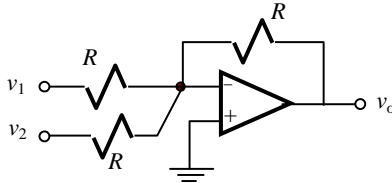
Dari persamaan ini dapat diperoleh hubungan antara keluaran dan masukan yaitu

$$v_o = -R_F \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) = -\frac{R_F}{R_1} v_1 - \frac{R_F}{R_2} v_2 = K_1 v_1 + K_2 v_2 \quad (11.8)$$

Jadi, tegangan keluaran merupakan jumlah dari tegangan masukan yang masing-masing dikalikan dengan *gain* yang berkaitan. Jumlah masukan sudah barang tentu tidak terbatas hanya dua. Jika terdapat N masukan dengan tegangan masukan masing-masing v_n dan resistansi R_n maka

$$v_o = \sum_n K_n v_n \quad \text{dengan} \quad K_n = -\frac{R_F}{R_n} \quad (11.9)$$

CONTOH-11.4: Carilah tegangan keluaran dari rangkaian di samping ini.

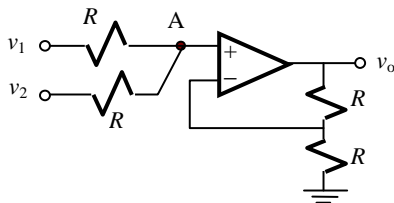


Solusi :

$$v_o = -\frac{R}{R} v_1 - \frac{R}{R} v_2 = -(v_1 + v_2)$$

Tegangan keluaran merupakan inversi dari jumlah tegangan masukan.

CONTOH-11.5: Carilah tegangan keluaran dari rangkaian di samping ini.



Solusi :

Persamaan tegangan untuk simpul A adalah

$$v_P \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) + i_P - \frac{v_1}{R} - \frac{v_2}{R} = 0$$

$$\rightarrow v_P = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Karena $v_N = v_o/2$, maka :

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_o}{2} \rightarrow v_o = v_1 + v_2$$

Tegangan keluaran merupakan jumlah tegangan masukan.

Pemahaman :

Masing-masing sumber pada rangkaian ini mengeluarkan arus :

$$i_1 = \frac{v_1 - v_P}{R} = \frac{v_1 - v_2}{2R} ; i_2 = \frac{v_2 - v_P}{R} = \frac{v_2 - v_1}{2R}$$

Sumber-sumber terbebani secara tidak merata (tidak sama). Pembebanan sumber tidak terjadi apabila $v_1 = v_2$. Hal ini berbeda dengan rangkaian pada contoh 7.7.

Pada contoh 7.23. masing-masing sumber mengeluarkan arus

$$i_1 = \frac{v_1 - v_N}{R} = \frac{v_1}{R} ; i_2 = \frac{v_2 - v_N}{R} = \frac{v_2}{R}$$

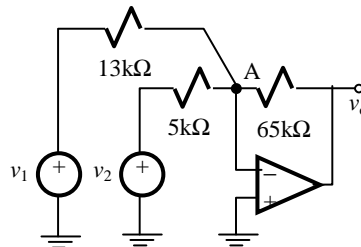
Jadi pada rangkaian penjumlah inversi, sumber akan tetap terbebani walaupun $v_1 = v_2$.

CONTOH 11.6:

Carilah tegangan keluaran v_o dari rangkaian penjumlah di samping ini.

Solusi :

Rangkaian penjumlah ini mempunyai keluaran



$$v_o = -\frac{65}{13} v_1 - \frac{65}{5} v_2 = -(5v_1 + 13v_2)$$

Pemahaman :

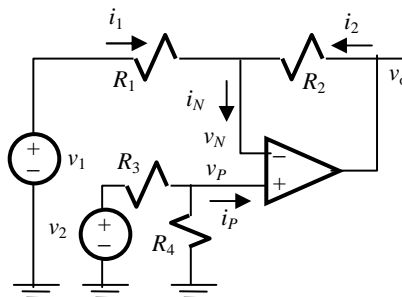
Apabila kita diminta untuk merancang penjumlah dengan formulasi v_o seperti di atas, kita tidak akan memperoleh nilai resistor seperti apa yang tertera dalam diagram di atas. Dalam kenyataan nilai-nilai resistansi pada rangkaian ini tidak ada di pasaran. Oleh karena itu kita harus melakukan modifikasi dengan memilih nilai resistor yang ada di pasaran yang mendekati nilai-nilai ini. Misalkan resistor 65 k Ω kita ganti dengan 56 k Ω . Penggantian ini mengharuskan dua resistor yang lain bernilai masing-masing 11.2 k Ω dan 4.31 k Ω . Dengan toleransi $\pm 5\%$ kita dapat memilih resistor 11 k Ω dan 4.3 k Ω . Pemilihan nilai-nilai resistor yang ada di pasaran ini akan memberikan formulasi tegangan keluaran

$$v_o = -\frac{56}{11}v_1 - \frac{56}{4.3}v_2 = -(5.09v_1 + 13.02v_2)$$

Dalam perancangan, kita harus melakukan kompromi seperti ini. Tegangan keluaran yang kita peroleh akan mempunyai kesalahan jika dibandingkan terhadap formulasi ideal yang semula diinginkan. Namun dengan pemilihan komponen yang tepat, kesalahan ini dapat dibatasi tidak lebih dari sesuatu nilai yang ditetapkan; dalam contoh ini kesalahan tersebut tidak lebih dari 2 %.

11.2.6. Rangkaian Pengurang atau Penguat Diferensial

Diagram rangkaian penguat atau pengurang diferensial ini terlihat pada Gb.11.10. Salah satu tegangan masukan dihubungkan ke terminal masukan inversi dengan rangkaian inversi, sedangkan tegangan masukan yang lain dihubungkan ke terminal masukan non-inversi



Gb.11.10. Penguat diferensial.

dengan rangkaian non inversi. Hubungan masukan – keluaran dapat dicari dengan menggunakan prinsip superposisi. Jika v_2 dimatikan maka terminal non inversi terhubung melalui resistor ke titik

pentanahan, jadi $v_P = 0$ karena $i_P = 0$. Dalam keadaan ini rangkaian bekerja sebagai penguat inversi; maka

$$v_{o1} = -\frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (11.10)$$

Jika v_1 dimatikan maka terminal inversi mendapat tegangan yang besarnya adalah

$$v_N = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{o2} \quad (11.11)$$

Tegangan di terminal non-inversi

$$v_P = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 \quad (11.12)$$

Karena $v_N = v_P$ maka dari (11.11) dan (11.12) kita peroleh

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{o2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 \quad \text{atau} \quad v_{o2} = \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) v_2 \quad (11.13)$$

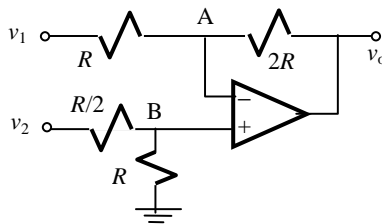
Keluaran total adalah

$$\begin{aligned} v_o &= v_{o1} + v_{o2} = -\left(\frac{R_2}{R_1} \right) v_1 + \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) v_2 \\ &= -K_1 v_1 + K_2 v_2 \end{aligned} \quad (11.14)$$

Dalam keadaan khusus, jika kita buat $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ maka $v_o = v_2 - v_1$.

CONTOH 11.7:

Carilah v_o pada rangkaian di bawah ini.



Solusi :

Persamaan tegangan untuk simpul A dan B memberikan

$$v_N \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) + i_N - \frac{v_1}{R} - \frac{v_o}{2R} = 0 \rightarrow \frac{3v_N}{2R} = \frac{v_1}{R} + \frac{v_o}{2R}$$

$$\rightarrow v_N = \frac{2v_1}{3} + \frac{v_o}{3}$$

$$v_P \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R} \right) + i_P - \frac{2v_2}{R} = 0 \rightarrow v_P = \frac{2v_2}{3}$$

Karena $v_N = v_P$ maka

$$\frac{2v_1}{3} + \frac{v_o}{3} = \frac{2v_2}{3} \rightarrow v_o = 2v_2 - 2v_1$$

Pemahaman :

Dalam rangkaian di atas, arus yang keluar dari masing-masing sumber adalah

$$i_1 = \frac{v_1 - v_N}{R} = \frac{v_1 - v_P}{R} = \frac{v_1 - 2v_2/3}{R} = \frac{3v_1 - 2v_2}{3R}$$

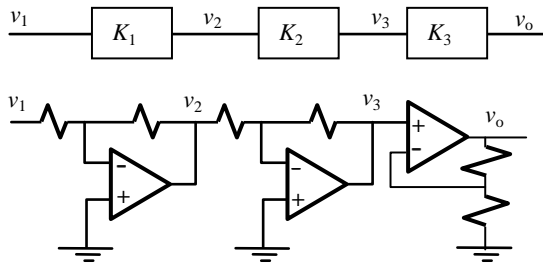
$$i_2 = \frac{v_2}{R + R/2} = \frac{2v_2}{3R}$$

Terlihat di sini bahwa masing-masing sumber mendapat beban yang berbeda. Kejadian seperti ini harus diperhatikan agar jangan terjadi pembebanan berlebihan pada salah satu sumber. Pembebanan pada sumber akan tetap terjadi walaupun $v_1 = v_2$.

Pembebanan pada sumber dapat diadukan dengan menghubungkan sumber langsung ke terminal masukan OP AMP sehingga sumber akan melihat resistansi masukan yang tak-hingga besarnya. Rangkaian yang kita bangun akan memerlukan lebih dari satu OP AMP yang terangkai secara bertingkat, suatu bentuk hubungan yang akan kita bahas berikut ini.

11.2.7. Hubungan Bertingkat Rangkaian OP AMP

Hubungan bertingkat adalah hubungan dari dua atau lebih unit rangkaian dimana keluaran dari satu unit rangkaian menjadi masukan bagi unit rangkaian berikutnya. Suatu contoh hubungan bertingkat diberikan pada Gb.11.11.



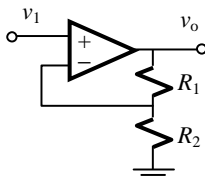
Gb.11.11. Hubungan bertingkat.

Keunggulan rangkaian OP AMP adalah bahwa mereka dapat dihubungkan secara bertingkat tanpa menyebabkan perubahan hubungan masukan-keluaran dari masing-masing rangkaian.

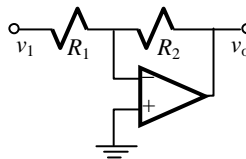
Jika masing-masing rangkaian (masing-masing tingkat) dalam contoh ini mempunyai *gain* K_1 , K_2 , dan K_3 , maka *gain* keseluruhannya menjadi $K_1 \times K_2 \times K_3$.

Rangkaian OP AMP mempunyai resistansi keluaran nol. Oleh karena itu pada hubungan bertingkat tidak terjadi pengaruh pembebanan pada rangkaian OP AMP dan dengan demikian tidak mengubah hubungan masukan-keluaran. Walaupun demikian, daya yang diperlukan oleh suatu tingkat harus masih dalam batas kemampuan daya tingkat di depannya. Oleh karena itu kita perlu mengetahui resistansi masukan rangkaian OP AMP agar kita dapat melakukan evaluasi apakah keperluan daya suatu tingkat tidak melampaui kemampuan daya tingkat di depannya.

Secara umum resistansi masukan dapat dinyatakan sebagai $R_{in} = v_{in} / i_{in}$. Pada penguat non-inversi, $i_{in} = i_p = 0$, sehingga penguat non-inversi mempunyai resistansi masukan $R_{in} = \infty$.



Penguat Non-Inversi

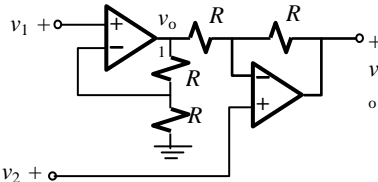


Penguat Inversi

Pada penguat inversi, $i_{in} = (v_{in} - v_N) / R_1$; karena $v_N = v_P = 0$ maka $i_{in} = v_{in} / R_1$, sehingga untuk penguat inversi $R_{in} = R_1$. Dalam

hubungan bertingkat, resistansi masukan **penguat inversi** yang nilainya berhingga ini akan membebani rangkaian tingkat di depannya. Dalam perancangan, kita cenderung untuk membuat R_1 besar untuk memperkecil pembebanan ini. Tetapi *gain* loop tertutup dari penguat ini berbanding terbalik dengan R_1 , yaitu $K = -(R_2 / R_1)$; jadi jika R_1 diperbesar *gain* akan mengecil. Menghadapi hal demikian ini kita harus melakukan kompromi dalam memilih nilai R_1 .

CONTOH-11.8: Tentukan tegangan keluaran v_o dari hubungan bertingkat di samping ini.



Solusi :

Tingkat pertama rangkaian ini berupa penguat non-

inversi dengan keluaran $v_{o1} = 2v_1$. Keluaran ini menjadi masukan di tingkat ke dua yang berupa sebuah penguat diferensial dengan keluaran yang dapat diturunkan sebagai berikut.

$$v_N \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) + i_N - \frac{v_{o1}}{R} - \frac{v_o}{R} = 0$$

$$\rightarrow v_o = 2v_N - v_{o1} = 2v_2 - 2v_1$$

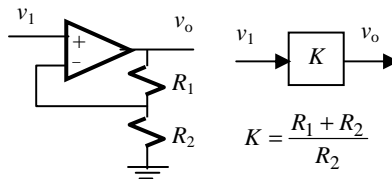
Pemahaman :

Keluaran dari rangkaian ini sama dengan rangkaian pada contoh-11.7. Jelaslah bahwa suatu formulasi keluaran dapat dipenuhi oleh lebih dari satu macam rangkaian. Rangkaian mana yang dipilih dalam suatu perancangan tergantung dari berbagai pertimbangan, baik teknis maupun ekonomi.

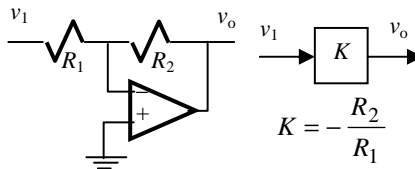
Jika kita bandingkan rangkaian pada contoh-11.7 dan 11.8 akan terlihat bahwa sumber-sumber pada contoh-11.7 terbebani sedangkan pada contoh-11.8 sumber-sumber tidak terbebani karena mereka terhubung pada penguat non-inversi yang resistansi masukannya tak-hingga. Jika daya sumber sangat terbatas, rangkaian pada contoh-11.8 akan menjadi pilihan walaupun untuk itu diperlukan biaya lebih besar karena perlu dua OP AMP.

11.3. Diagram Blok

Dalam rangkaian-rangkaian OP AMP yang kita bahas di atas (penguat inversi, non-inversi, penjumlah, pengurang), terdapat hubungan linier antara keluaran dan masukan. Oleh karena itu kita dapat melihat setiap rangkaian sebagai suatu unit pemroses sinyal yang mengandung suatu konstanta tertentu yang menetapkan hubungan antara masukan dan keluarannya. Unit itu dapat digambarkan dengan suatu blok saja dengan menyebutkan konstanta proporsionalitasnya. Cara penggambaran seperti ini kita sebut diagram blok. Gb.11.12 memperlihatkan rangkaian, diagram blok, dan konstanta proporsionalitas dari penguat non-inversi dan penguat inversi.



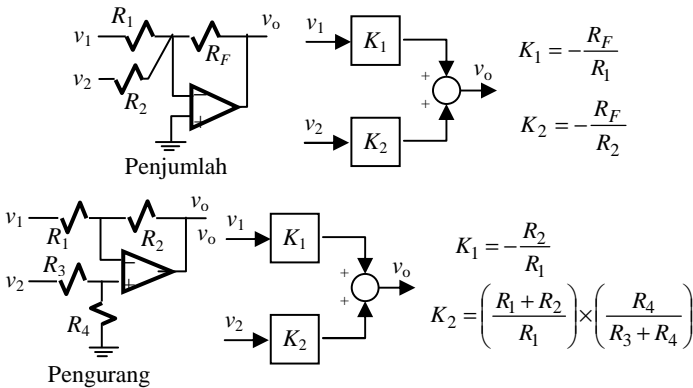
Penguat Non-Inversi



Penguat Inversi

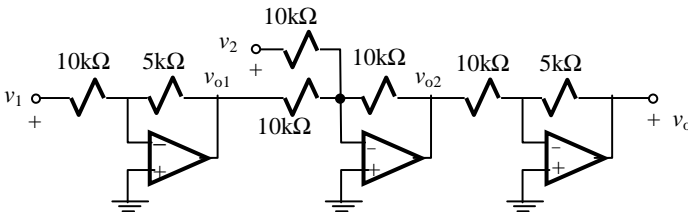
Gb.11.12. Rangkaian dan diagram blok penguat non-inversi dan penguat inversi

Gb.11.13. memperlihatkan rangkaian, diagram blok, dan konstanta proporsionalitas penjumlah dan pengurang. Suatu diagram blok memperlihatkan urutan pemrosesan sinyal secara fungsional tanpa melihat detail rangkaian listriknya.



Gb.11.13. Rangkaian dan diagram blok penjumlah dan pengurang.

CONTOH-11.9: Gambarkan diagram blok rangkaian di bawah ini dan tentukan tegangan keluaran v_o .

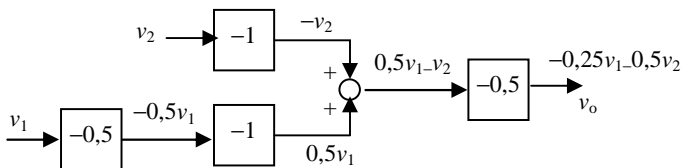


Solusi :

Tingkat pertama adalah penguat inversi dengan $K_1 = -0,5$.

Tingkat ke-dua adalah penjumlah inversi dengan $K_2 = -1$ untuk masukan v_{o1} dan v_2 .

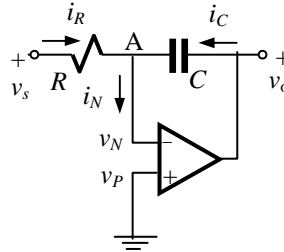
Tingkat ke-tiga adalah penguat inversi dengan $K_3 = -0,5$. Diagram blok rangkaian ini dan keluarannya v_o adalah sebagai berikut:



11.4. Rangkaian OP AMP Dinamik

11.4.1. Rangkaian Integrator

Integrator adalah salah satu rangkaian OP AMP dinamik. Rangkaian integrator mirip dengan rangkaian penguat inversi tetapi resistor pada saluran umpan balik diganti dengan kapasitor, seperti terlihat pada Gb.11.14. Bagaimana rangkaian ini berfungsi dapat kita analisis sebagai berikut.



Gb.11.14. Integrator inversi

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah:

$$v_N \left(\frac{1}{R} \right) - C \frac{d}{dt} (v_o - v_N) - \frac{v_s}{R} = 0$$

Untuk OP AMP ideal $v_N = v_P = 0 = v_A$, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\frac{v_s}{R} = -C \frac{d}{dt} (v_o) \quad \text{atau} \quad \int_{v_o(0)}^{v_o(t)} d(v_o) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s dt$$

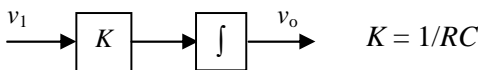
Dari persamaan ini kita peroleh

$$v_o = v_o(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_s dt \quad (11.15.a)$$

Karena $v_A = 0$, maka $v_o = v_C$; jika tegangan awal kapasitor adalah nol, maka $v_o(0) = v_C(0) = 0$, dan persamaan (11.15.a) menjadi

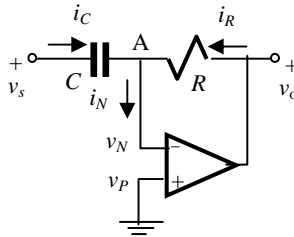
$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s dt \quad (11.15.b)$$

Jadi tegangan keluaran v_o merupakan integral dari tegangan masukan v_s . Rangkaian ini merupakan rangkaian integrator inversi karena konstanta proporsionalitasnya negatif. Diagram blok dari integrator adalah sebagai berikut:



11.4.2. Rangkaian Diferensiator

Rangkaian diferensiator diperoleh dengan menukar posisi resistor dan kapasitor pada rangkaian integrator, seperti terlihat pada Gb.11.15. Persamaan tegangan simpul untuk simpul A dalam rangkaian ini adalah:



Gb.11.15. Diferensiator

$$\frac{v_N}{R} - C \frac{d}{dt}(v_s - v_N) - \frac{v_o}{R} = 0$$

Karena $v_A = v_N = v_P = 0$, maka

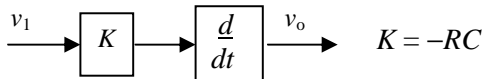
$$\frac{v_o}{R} = -C \frac{d}{dt}(v_s) \quad \text{atau} \quad \int_{v_s(0)}^{v_s(t)} d(v_s) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_o dt$$

Di sini v_s merupakan tegangan kapasitor, dan jika tegangan awal kapasitor adalah nol maka

$$v_s = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_o dt \quad \text{atau} \quad v_o = -RC \frac{dv_s}{dt} \quad (11.16)$$

Jadi tegangan keluaran merupakan diferensiasi dari tegangan masukan. Rangkaian ini disebut diferensiator inversi karena konstanta proporsionalitasnya negatif.

Diagram blok dari diferensiator adalah sebagai berikut:

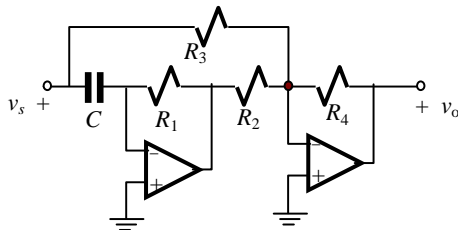


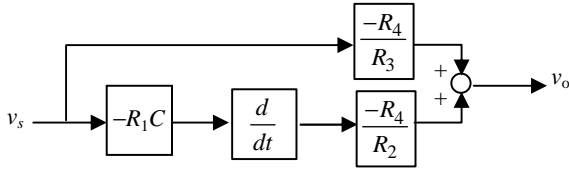
CONTOH-11.10:

Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.

Solusi :

Rangkaian ini terdiri dari diferensiator inversi dan penjumlah inversi. Diagram blok dari rangkaian ini adalah :



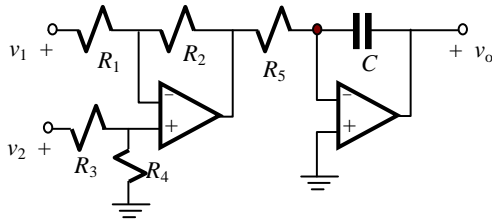


Tegangan keluaran adalah

$$\begin{aligned} v_o &= \left(-R_1 C \frac{dv_s}{dt} \right) \left(\frac{-R_4}{R_2} \right) + \left(\frac{-R_4}{R_3} \right) v_s \\ &= \left(\frac{R_1 R_4 C}{R_2} \right) \frac{dv_s}{dt} - \left(\frac{R_4}{R_3} \right) v_s \end{aligned}$$

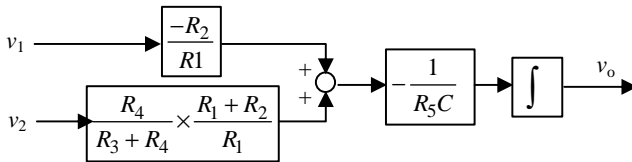
CONTOH-11.11:

Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.



Solusi :

Rangkaian ini terdiri dari penguat diferensial dan integrator. Diagram blok dari rangkaian ini adalah :



Tegangan keluaran adalah

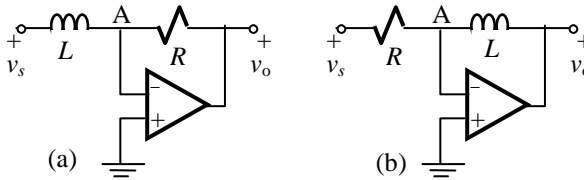
$$v_o(t) = -\frac{1}{R_5 C} \int_0^t \left\{ \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) v_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) v_1 \right\} dt + v_o(0)$$

Pemahaman :

Jika kita buat semua resistor bernilai sama, R , maka keluaran dari rangkaian di atas adalah

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t \{v_2 - v_1\} dt + v_o(0)$$

CONTOH-11.12: Tunjukkanlah bahwa keluaran rangkaian OP AMP dengan induktor di bawah ini masing-masing merupakan integrasi dan diferensiasi tegangan masukannya.



Solusi :

Rangkaian

a)

:

$$v_N = v_P = 0 \rightarrow v_L = v_s = L \frac{di_L}{dt} \rightarrow \int_0^t v_s dt = L \int_{i_L(0)}^{i_L(t)} di_L$$

$i_L(0)$ adalah arus awal induktor. Jika arus awal ini nol maka

$$\int_0^t v_s dt = L \int_0^{i_L(t)} di_L \rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_s dt$$

Untuk terminal masukan inversi berlaku

$$i_L + \frac{v_o}{R} + 0 = 0 \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^t v_s dt + \frac{v_o}{R} = 0 \text{ sehingga}$$

$$v_o = -\frac{R}{L} \int_0^t v_s dt$$

Rangkaian b) : Jika arus awal induktor adalah nol maka

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_o dt$$

Untuk terminal masukan inversi berlaku

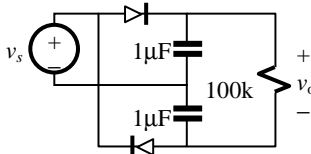
$$i_L + \frac{v_s}{R} + 0 = 0 \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^t v_o dt + \frac{v_s}{R} = 0$$

Dari sini diperoleh

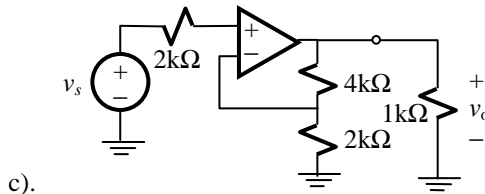
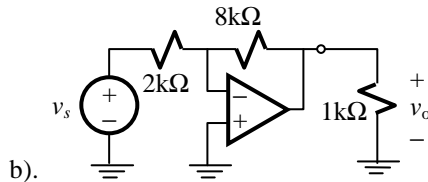
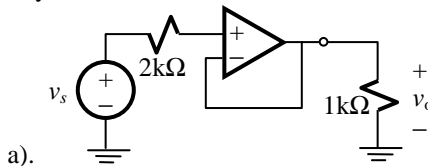
$$\int_0^t v_o dt = -\frac{L}{R} v_s \quad \text{sehingga} \quad v_o = -\frac{L}{R} \frac{dv_s}{dt}$$

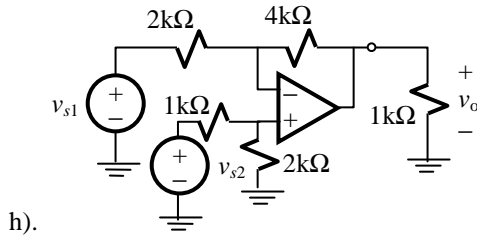
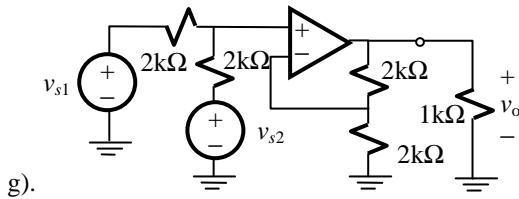
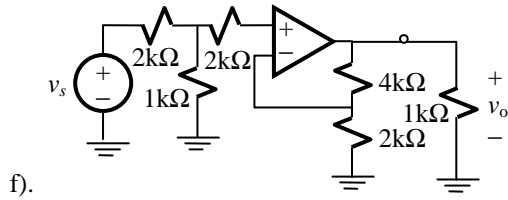
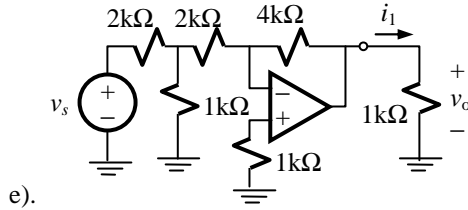
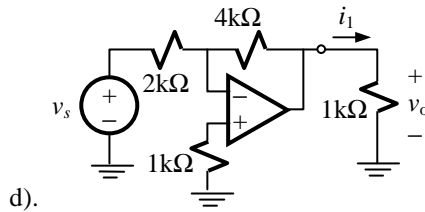
Soal-Soal

- Carilah tegangan v_o rangkaian di samping ini, jika $v_s = 380\cos 314t$ V, dioda ideal.

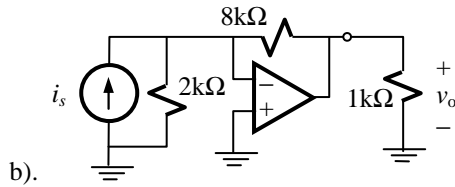
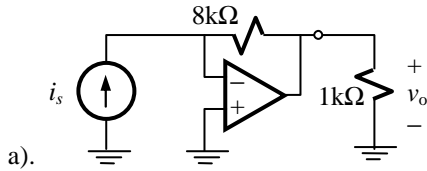


- Pada sebuah resistor 10 k Ω diperlukan tegangan searah agar mengalir arus 20 mA. Tegangan searah diberikan dari penyearah setengah gelombang yang masukannya adalah tegangan bolak-balik 220 V, 50 Hz. Tentukan kapasitor filter yang harus diparalelkan dengan resistor agar riak gelombang tegangan tidak lebih dari 10%.
- Carilah hubungan antara tegangan keluaran v_o dan tegangan masukan v_s pada rangkaian-rangkaian berikut ini dan gambarkan diagram bloknya.

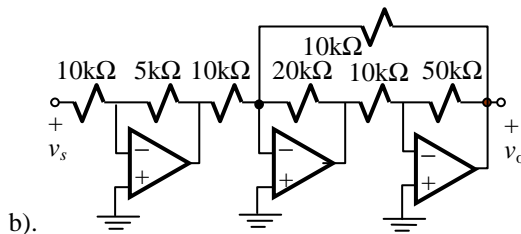
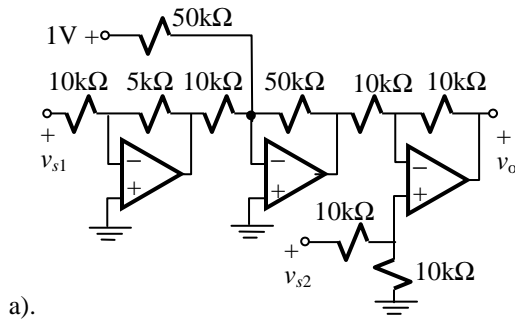




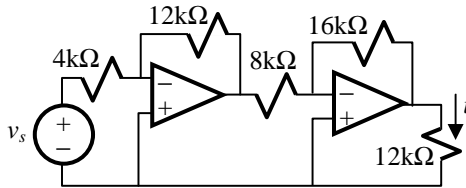
4. Carilah hubungan antara v_o dan i_s rangkaian-rangkaian berikut.



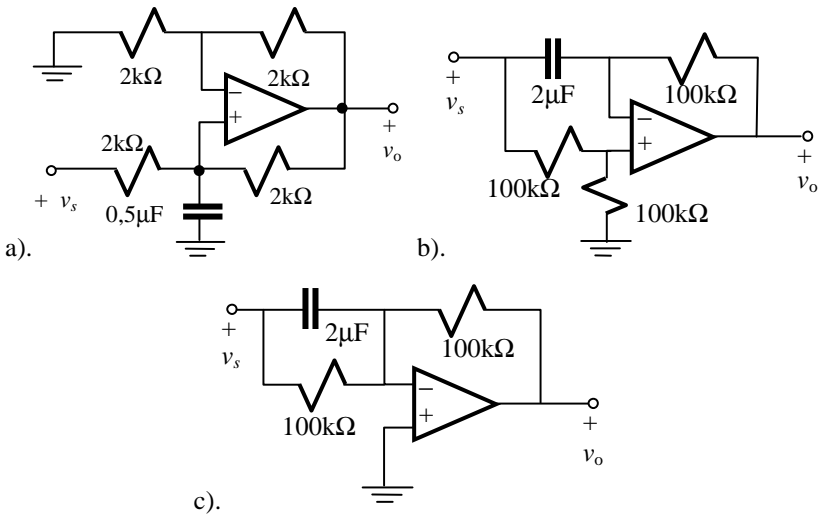
5 Gambarkan diagram blok dari rangkaian berikut ini dan dengan diagram blok tersebut tentukan tegangan keluaran v_o .



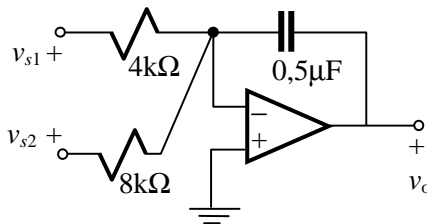
6. Carilah arus i pada rangkaian berikut ini jika $v_s = 4\sin 3000t$ V.



7. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut dinyatakan dalam v_s dan gambarkan diagram bloknya.



8. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut dinyatakan dalam v_{s1} dan v_{s2} .



BAB 12 Fasor, Impedansi, dan Kaidah Rangkaian

Dalam teknik energi listrik, tenaga listrik dibangkitkan, ditransmisikan, serta dimanfaatkan dalam bentuk sinyal sinus dengan frekuensi 50 atau 60 Hz. Dalam teknik telekomunikasi, sinyal sinus dimanfaatkan dalam selang frekuensi yang lebih lebar, mulai dari beberapa Hz sampai jutaan Hz. Sejalan dengan itu, kita memerlukan suatu cara analisis khusus untuk menanganinya persoalan rangkaian listrik yang melibatkan sinyal sinus dalam keadaan mantap, yang kita sebut analisis arus bolak-balik keadaan mantap.

Analisis rangkaian dengan sinyal sinus telah pernah kita lakukan dengan menyatakan sinyal sinus sebagai fungsi waktu atau dengan kata lain kita melakukan analisis di *kawasan waktu*. Mulai bab ini kita akan melakukan *analisis di kawasan fasor*. Dalam analisis ini, sinyal sinus kita nyatakan dalam bentuk *fasor*. Dengan sinyal sinus dinyatakan dalam fasor, pernyataan-pernyataan elemen rangkaian pun menjadi khusus pula. Kita katakan bahwa rangkaian yang biasa kita nyatakan dalam waktu, kita transformasikan menjadi rangkaian dalam fasor. Setelah ditransformasikan, kita melakukan analisis di mana semua besaran dan karakteristik elemen dinyatakan dalam fasor. Dengan bekerja dalam fasor, kita terhindar dari persamaan rangkaian yang dikawasan waktu berbentuk persamaan integro-diferensial.

Pernyataan sinyal sinus ke dalam bentuk fasor dilakukan melalui formulasi bilangan kompleks. Untuk mengingat kembali mengenai bilangan kompleks ini, ulasan singkat mengenai bilangan kompleks diberikan pada Lampiran III.

Bab ini akan kita awali dengan pembahasan pengertian fasor dan operasi fasor, impedansi, dan dilanjutkan dengan pembahasan tentang kaidah-kaidah rangkaian di kawasan fasor.

Setelah mempelajari bab ini, kita akan

- mampu menyatakan sinyal sinus ke dalam bentuk fasor.
- memahami konsep impedansi di kawasan fasor.
- memahami bagaimana aplikasi hukum-hukum dan kaidah-kaidah rangkaian di kawasan fasor.

12.1. Fasor Dan Impedansi

12.1.1. Pernyataan Fasor dari Sinyal Sinus dan Operasi Fasor

Kita mengenal pernyataan suatu bilangan kompleks yang berbentuk

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (12.1)$$

Dengan menggunakan hubungan ini maka *sinyal sinus* dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial kompleks, yaitu

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{jx} \quad \text{dan} \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{jx} \quad (12.2)$$

dengan Re dan Im masing-masing menunjukkan bahwa yang dimaksudkan adalah bagian riil dan bagian imajiner dari bilangan kompleks e^{jx} . *Jika kita tetapkan bahwa hanya bagian riil dari bilangan kompleks e^{jx} saja yang kita ambil untuk menyatakan sinyal sinus* maka sinyal $y = A \cos(\omega t + \theta)$ dapat kita tulis sebagai

$$y = A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re} A e^{j(\omega t + \theta)} = \operatorname{Re} A e^{j\theta} e^{j\omega t} = A e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad (12.3)$$

tanpa harus menuliskan keterangan Re lagi.

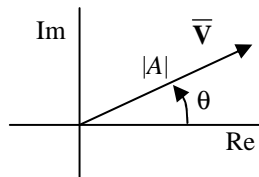
Jika kita bekerja pada suatu frekuensi ω tertentu untuk seluruh sistem, maka faktor $e^{j\omega t}$ pada pernyataan fungsi sinus (12.3) tidak perlu dituliskan lagi. Kita dapat menyatakan fungsi sinus cukup dengan mengambil *besar* dan *sudut fasa*-nya saja. Jadi

$$\text{sinyal sinus } v = A \cos(\omega t + \theta) \text{ dinyatakan dengan } \bar{V} = A e^{j\theta} \quad (12.4)$$

Pernyataan sinyal sinus dengan bilangan kompleks ini kita sebut *fasor* (dalam buku ini ditulis dengan huruf besar dan tebal). Jadi dengan notasi fasor, kita hanya memperhatikan amplitudo dan sudut fasanya saja dengan pengertian bahwa frekuensinya sudah tertentu. Karena kita hanya memperhatikan amplitudo dan sudut fasa saja, maka fasor dapat kita tuliskan dengan menyebutkan *besarnya* dan *sudut fasanya*. Jadi penulisan fasor dalam bentuk yang kita sebut bentuk polar adalah

$$\bar{V} = A e^{j\theta} \text{ ditulis sebagai } \bar{V} = A \angle \theta \quad (12.5)$$

Fasor $\bar{V} = A \angle \theta$ dapat kita gambarkan dalam bidang kompleks, seperti terlihat pada Gb.12.1.



Gb.12.1. Fasor.

Panjang fasor adalah nilai mutlak dari amplitudo A . Penulisan fasor dalam bentuk polar, dapat diubah ke bentuk sudut-siku, yaitu :

$$\overline{\mathbf{V}} = A \angle \theta = A (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (12.6)$$

Sebaliknya, dari pernyataan dalam bentuk sudut-siku dapat diubah ke bentuk polar

$$\overline{\mathbf{V}} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (12.7)$$

Transformasi timbal balik antara pernyataan dalam bentuk sudut-siku dan bentuk polar, memudahkan kita dalam melakukan operasi-operasi fasor yang akan kita lihat berikut ini.

12.1.2. Operasi Fasor

Perkalian Fasor. Perkalian fasor mudah dilakukan bila fasor dituliskan dalam bentuk polar.

$$\begin{aligned} \text{Jika } \overline{\mathbf{A}} &= \overline{A} \angle \theta_1 \quad \text{dan} \quad \overline{\mathbf{B}} = B \angle \theta_2 \quad \text{maka} \\ \overline{\mathbf{C}} &= \overline{\mathbf{AB}} = AB \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (12.8)$$

Hal ini mudah difahami, karena jika kita menuliskan

$$\overline{\mathbf{A}} = A e^{j\theta_1} \quad \text{dan} \quad \overline{\mathbf{B}} = B e^{j\theta_2}$$

$$\text{maka } \overline{\mathbf{C}} = A e^{j\theta_1} B e^{j\theta_2} = AB e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = AB \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Pembagian Fasor. Pembagian fasor mudah dilakukan bila fasor dituliskan dalam bentuk polar.

$$\begin{aligned} \text{Jika } \overline{\mathbf{A}} &= A \angle \theta_1 \quad \text{dan} \quad \overline{\mathbf{B}} = B \angle \theta_2 \quad \text{maka} \\ \overline{\mathbf{D}} &= \frac{\overline{\mathbf{A}}}{\overline{\mathbf{B}}} = \frac{A \angle \theta_1}{B \angle \theta_2} = \frac{A}{B} \angle (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (12.9)$$

Hal ini juga mudah difahami. Jika kita menuliskan

$$\bar{\mathbf{A}} = Ae^{j\theta_1} \quad \text{dan} \quad \bar{\mathbf{B}} = Be^{j\theta_2}$$

$$\text{maka} \quad \bar{\mathbf{D}} = \frac{Ae^{j\theta_1}}{Be^{j\theta_2}} = \frac{A}{B} e^{j\theta_1} e^{-j\theta_2} = \frac{A}{B} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{A}{B} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Penjumlahan dan Pengurangan Fasor. Operasi penjumlahan ataupun pengurangan lebih mudah dilakukan jika kita menuliskan fasor dalam bentuk sudut-siku.

$$\text{Jika} \quad \bar{\mathbf{A}} = a_1 + jb_1 \quad \text{dan} \quad \bar{\mathbf{B}} = a_2 + jb_2$$

$$\begin{aligned} \text{maka} \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} &= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \\ &= \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \right) \end{aligned} \quad (12.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}} &= (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) \\ &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Jika} \quad \bar{\mathbf{A}} = A \angle \theta_1 \quad \text{dan} \quad \bar{\mathbf{B}} = B \angle \theta_2 \quad \text{maka}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} = (A \cos \theta_1 + B \cos \theta_2) + j(A \sin \theta_1 + B \sin \theta_2) \quad (12.11)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}} = (A \cos \theta_1 - B \cos \theta_2) + j(A \sin \theta_1 - B \sin \theta_2)$$

Fasor Negatif dan Fasor Konjugat. Jika dituliskan dalam bentuk sudut-siku, nilai negatif fasor adalah negatif dari masing-masing komponen riil dan imajiner.

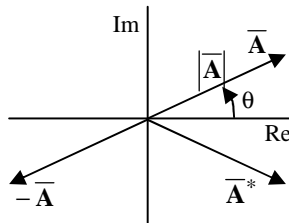
$$\text{Jika} \quad \bar{\mathbf{A}} = a_1 + jb_1 \quad \text{maka}$$

$$-\bar{\mathbf{A}} = -a_1 - jb_1$$

Fasor konjugat dari $\bar{\mathbf{A}}$ ditulis $\bar{\mathbf{A}}^*$.

$$\text{Jika} \quad \bar{\mathbf{A}} = a_1 + jb_1 \quad \text{maka}$$

$$\bar{\mathbf{A}}^* = a_1 - jb_1$$



Gb.12.2. Fasor dan negatifnya serta konjugatnya

Dalam bentuk polar,

$$\begin{aligned} \text{Jika } \bar{\mathbf{A}} &= A \angle \theta \\ \text{maka } -\bar{\mathbf{A}} &= A \angle (\theta + 180^\circ) \\ &= A \angle (\theta - 180^\circ) \text{ dan } \bar{\mathbf{A}}^* = A \angle -\theta \end{aligned} \quad (12.12)$$

Fasor Dengan Sudut Fasa 90° dan 0°. Bentuk sudut-siku dari fasor dengan sudut 90° dan 0° adalah

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= A \angle 90^\circ = jA ; \\ \bar{\mathbf{B}} &= B \angle -90^\circ = -jB ; \\ \bar{\mathbf{C}} &= C \angle 0^\circ = C \end{aligned} \quad (12.13)$$

CONTOH-12.1: Ubahlah pernyataan sinyal sinus berikut ini ke dalam fasor dengan bentuk polar maupun bentuk sudut-siku dan lakukanlah operasi-operasi fasor yang diminta.

$$\begin{aligned} \text{a). } v_1(t) &= 10 \cos(500t - 45^\circ) & \text{b). } v_2(t) &= 15 \cos(500t + 30^\circ) \\ \text{c). } i_1(t) &= -4 \cos 1000t & \text{d). } i_2(t) &= 3 \cos(1000t - 90^\circ) \\ \text{e). } \bar{\mathbf{I}}_3 &= \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 & \text{f). } S_1 &= \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{I}}_1^* ; S_2 = \bar{\mathbf{V}}_2 \bar{\mathbf{I}}_2^* \\ \text{g). } Z_1 &= \frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\bar{\mathbf{I}}_1} ; Z_2 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_2}{\bar{\mathbf{I}}_2} \end{aligned}$$

Solusi :

a). Pernyataan fasor sinyal sinus ini dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_1 &= 10 \angle -45^\circ \text{ atau} \\ \bar{\mathbf{V}}_1 &= 10 \cos(-45^\circ) + j10 \sin(-45^\circ) = 7,07 - j7,07 \end{aligned}$$

b). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_2 &= 15 \angle 30^\circ \text{ atau} \\ \bar{\mathbf{V}}_2 &= 15 \cos(30^\circ) + j15 \sin(30^\circ) = 12,99 + j7,5 \end{aligned}$$

c). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = -4 \angle 0^\circ \text{ atau } \bar{\mathbf{I}}_1 = -4 \cos(0^\circ) - j4 \sin(0^\circ) = -4$$

- d). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$\bar{\mathbf{I}}_2 = 3\angle -90^\circ \text{ atau } \bar{\mathbf{I}}_2 = 3\cos(-90^\circ) + j3\sin(-90^\circ) = -j3$$

- e). Fasor hanya dapat dijumlahkan jika frekuensinya sama. Karena kedua arus dalam soal e) ini berfrekuensi sama maka fasornya dapat kita jumlahkan $\bar{\mathbf{I}}_3 = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 = -4 - j3$. Hasil penjumlahan ini dapat kita ubah kembali dalam bentuk polar menjadi

$$\bar{\mathbf{I}}_3 = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-4}\right) = 5\angle 216,9^\circ$$

- f). $S_1 = \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{I}}_1^* = (10\angle -45^\circ) \times (-4\angle 0^\circ) = -40\angle -45^\circ$

$$S_2 = \bar{\mathbf{V}}_2 \bar{\mathbf{I}}_2^* = (15\angle 30^\circ) \times (3\angle 90^\circ) = 45\angle 120^\circ$$

- g). $Z_1 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\bar{\mathbf{I}}_1} = \frac{10\angle -45^\circ}{-4\angle 0^\circ} = -2.5\angle -45^\circ$;

$$Z_2 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_2}{\bar{\mathbf{I}}_2} = \frac{15\angle 30^\circ}{3\angle 90^\circ} = 5\angle -60^\circ$$

CONTOH-12.2: Ubahlah pernyataan fasor dari sinyal sinus berikut ini ke pernyataan sinus di kawasan waktu.

- a). $\bar{\mathbf{V}}_1 = 150\angle -45^\circ$ V, pada frekuensi siklus 50 Hz
 b). $\bar{\mathbf{V}}_2 = 30 + j40$ V, pada frekuensi sudut $\omega = 1000$ rad/detik.
 c). $\bar{\mathbf{I}} = 15 + j5 + 10\angle 180^\circ$ mA, pada $\omega = 1000$ rad/detik.

Solusi :

- a). Sinyal ini mempunyai amplitudo 150 V, dan sudut fasa -45° . Frekuensi siklusnya 50 Hz yang berarti frekuensi sudutnya $\omega = 2\pi \times 50 = 314$ rad/detik. Jadi di kawasan waktu sinyal ini adalah $v_1(t) = 150\cos(314t - 45^\circ)$ V

b). Amplitudo sinyal ini adalah $V_m = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ V}$ dan sudut fasanya $\theta = \tan^{-1} \frac{40}{30} = 53,1^\circ$. Karena $\omega = 1000 \text{ rad/detik}$, maka pernyataan sinyal ini di kawasan waktu adalah $v_2(t) = 50 \cos(1000t + 53,1^\circ)$

c). Sinyal ini dinyatakan dalam fasor dan merupakan jumlah dari dua sinyal, satu dalam bentuk sudut siku dan yang lain dalam bentuk polar. Jika dinyatakan dalam bentuk sudut siku, sinyal ini menjadi

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{I}} &= 15 + j5 + 10 \cos 180^\circ + j10 \sin 180^\circ \\ &= 15 + j5 - 10 + j0 = 5 + j5 \text{ mA}\end{aligned}$$

Amplitudo dan sudut fasanya adalah

$$I_m = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07 \text{ mA} \quad ; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{5}{5} = 45^\circ$$

Karena diketahui $\omega = 1000 \text{ rad/detik}$, maka

$$i(t) = 7,07 \cos(1000t + 45^\circ)$$

12.2. Resistansi, Reaktansi, Impedansi

Dengan fungsi sinus dinyatakan dalam fasor, maka kita akan mendapatkan hubungan-hubungan tegangan dan arus pada elemen-elemen pasif sebagai berikut.

Resistor. Jika arus pada resistor adalah

$$i_R(t) = I_{Rm} \cos(\omega t + \theta) = I_{Rm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka tegangannya adalah

$$v_R(t) = R i_R(t) = R I_{Rm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

Jika dinyatakan dalam fasor maka

$$\bar{\mathbf{V}}_R = R \bar{\mathbf{I}}_R \quad (12.14)$$

Hubungan arus dan tegangan resistor tetap seperti yang telah kita kenal selama ini, dengan faktor proporsionalitas R yang kita sebut *resistansi*.

Induktor. Untuk induktor, jika arus induktor adalah

$$i_L(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \theta) = I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka tegangan induktor adalah

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d(I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)})}{dt} = j\omega L (I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)})$$

Dalam bentuk fasor,

$$\begin{aligned} \bar{V}_L &= j\omega L \bar{I}_L = jX_L \bar{I}_L = Z_L \bar{I}_L \\ \text{dengan: } X_L &= \omega L \text{ dan } Z_L = j\omega L \end{aligned} \quad (12.15)$$

Jadi dengan pernyataan sinyal dalam fasor, hubungan tegangan dan arus induktor tidak lagi berbentuk hubungan diferensial, melainkan berbentuk linier dengan faktor proporsionalitas sebesar $Z_L = jX_L$; X_L kita sebut *reaktansi induktif*, Z_L kita sebut *impedansi induktor*

Kapasitor. Untuk kapasitor, jika tegangan kapasitor adalah

$$v_C(t) = V_{Cm} \cos(\omega t + \theta) = V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka arus kapasitor adalah

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{d(V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)})}{dt} = j\omega C (V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)})$$

yang dalam bentuk fasor dapat kita tuliskan sebagai

$$\begin{aligned} \bar{I}_C &= j\omega C \bar{V}_C \text{ atau} \\ \bar{V}_C &= \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_C = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}_C = jX_C \bar{I}_C = Z_C \bar{I}_C \\ \text{dengan: } |X_C| &= \frac{1}{\omega C} \text{ dan } Z_C = -\frac{j}{\omega C} \end{aligned} \quad (12.16)$$

Seperti yang kita peroleh pada induktor, hubungan tegangan dan arus kapasitor tidak lagi berupa hubungan integral, melainkan

berupa hubungan linier dengan faktor proporsionalitas sebesar $Z_C = jX_C$; X_C kita sebut *reaktansi kapasitif*, Z_C kita sebut *impedansi kapasitor*.

12.3. Kaidah-Kaidah Rangkaian Impedansi

12.3.1. Hubungan Seri dan Kaidah Pembagi Tegangan

Tegangan total pada R dan L yang terhubung seri dengan $i(t) = I_m e^{j(\omega t + \theta)}$ adalah

$$\begin{aligned} v_{RL}(t) &= v_R(t) + v_L(t) = RI_m e^{j(\omega t + \theta)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \theta)} \\ &= (R + j\omega L) I_m e^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

Dalam bentuk fasor,

$$\bar{V}_{RL \text{ seri}} = (R + j\omega L) \bar{I} \quad (12.17)$$

Perbandingan antara tegangan dan arus pada resistor dan induktor yang terhubung seri disebut *impedansi* dari hubungan seri ini, yaitu

$$Z_{RL \text{ seri}} = R + j\omega L \quad (12.18)$$

Dengan cara yang sama kita dapat memperoleh impedansi hubungan seri RC dan LC sebagai

$$\bar{V}_{RC \text{ seri}} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I} \quad ; \quad (12.19)$$

$$Z_{RC \text{ seri}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$$

$$\bar{V}_{LC \text{ seri}} = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I} \quad ; \quad (12.20)$$

$$Z_{LC \text{ seri}} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Hubungan seri tidak terbatas hanya dua elemen tetapi bisa lebih, sehingga terbentuklah hubungan seri beberapa impedansi. Secara umum impedansi total dari beberapa impedansi yang terhubung seri adalah

$$\begin{aligned}\bar{V}_{total \text{ seri}} &= Z_{total \text{ seri}} \bar{I} \\ Z_{total \text{ seri}} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n\end{aligned}\quad (12.21)$$

Dalam hubungan seri dari beberapa impedansi, tegangan pada impedansi ke k adalah $\bar{V}_k = \bar{I} Z_k$; sedangkan $\bar{I} Z_{total \text{ seri}} = \bar{V}_{total \text{ seri}}$. Dengan demikian maka berlaku kaidah pembagi tegangan

$$\bar{V}_k = \frac{Z_k}{Z_{total \text{ seri}}} \times \bar{V}_{total} \quad (12.22)$$

12.3.2. Hubungan Paralel dan Kaidah Pembagi Arus

Dua atau lebih impedansi yang terhubung paralel akan bertegangan sama. Jika tegangan ini adalah \bar{V} maka arus pada impedansi ke k adalah

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{V}}{Z_k} = Y_k \bar{V} \quad (12.23)$$

dengan $Y_k = 1/Z_k$ disebut *admitansi*.

Arus total dalam hubungan paralel adalah

$$\bar{I}_{total} = \sum_{k=1}^n \bar{I}_k = \sum_{k=1}^n Y_k \bar{V} = Y_{total} \bar{V} \quad (12.24)$$

dengan

$$Y_{total} = \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (12.25)$$

Dari (12.23) dan (12.24) diturunkan kaidah pembagi arus

$$\bar{I}_k = Y_k \bar{V} = \frac{Y_k}{Y_{total}} \bar{I}_{total} \quad (12.26)$$

12.3.3. Impedansi Secara Umum

Secara umum impedansi dapat kita tuliskan

$$Z = R(\omega) + jX(\omega) \quad (12.27)$$

Bagian riil adalah *resistansi* dan bagian imajiner adalah *reaktansi*. Kedua bagian ini mungkin merupakan fungsi dari frekuensi ω . Reaktansi yang bernilai positif merupakan *reaktansi induktif*, sedang yang bernilai negatif merupakan *reaktansi kapasitif*. Sebagai contoh, impedansi dari induktor yang terhubung seri dengan kapasitor yang terparalel dengan resistor adalah

$$\begin{aligned} Z_{L+R//C} &= j\omega L + \frac{R(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)} \\ &= \frac{R}{(\omega RC)^2 + 1} + j \left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{(\omega RC)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bagian riil maupun bagian imajiner merupakan fungsi dari frekuensi ω . Jadi baik resistansi maupun reaktansi dari impedansi secara umum merupakan fungsi frekuensi.

Perhatian : Walaupun impedansi merupakan pernyataan yang berbentuk kompleks, akan tetapi *impedansi bukanlah fasor*. Impedansi dan fasor merupakan dua pengertian dari dua konsep yang berbeda.

- *Fasor adalah pernyataan dari sinyal sinus*
- *Impedansi adalah pernyataan elemen.*

Walaupun impedansi bukan fasor, namun karena keduanya berupa pernyataan kompleks, maka operasi-operasi fasor dapat diterapkan pada keduanya. Sebagai contoh kita ambil hubungan seri RL :

$$Z_{RL \text{ seri}} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = Z_1 \angle \lambda_1$$

Jika fasor tegangan $\bar{V}_s = V_1 \angle \theta_1$ diterapkan pada hubungan seri RL ini, maka arus yang mengalir adalah

$$\bar{I}_{RL} = \frac{\bar{V}_s}{Z_{RL \text{ seri}}} = \frac{V_1 \angle \theta_1}{Z_1 \angle \lambda_1} = \frac{V_1}{Z_1} \angle (\theta_1 - \lambda_1) \quad (12.28)$$

Secara singkat, impedansi elemen dan hubungan arus-tegangan elemen adalah sebagai berikut.

$$Z_R = R; \quad Z_L = j\omega L; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\bar{V}_R = R\bar{I}_R; \quad \bar{V}_L = j\omega L\bar{I}_L; \quad \bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}_C \quad (12.29)$$

Secara singkat dapat kita katakan bahwa : dengan menyatakan sinyal sinus ke dalam bentuk fasor, maka perbandingan antara tegangan elemen dan arus elemen merupakan suatu besaran kompleks yang kita sebut impedansi di kawasan fasor. Dengan menyatakan elemen dalam impedansinya maka hubungan antara tegangan dan arus elemen menjadi mirip dengan relasi hukum Ohm di kawasan waktu. Kaidah-kaidah rangkaian di kawasan waktu berlaku juga di kawasan fasor.

CONTOH-12.3: Arus yang melalui induktor 0,5 H adalah $i_L(t)=0,4\cos(1000t)$ A. Tentukanlah: a) impedansi induktor; b) Fasor tegangan pada induktor; c) bentuk gelombang tegangan pada induktor.

Solusi :

- a). Impedansi induktor adalah $Z_L = j\omega L$. Dalam contoh ini $\omega = 1000$, jadi

$$Z_L = j \times 1000 \times 0,5 = j500 \, \Omega$$

- b). Fasor tegangan induktor adalah fasor arus kali impedansinya. Karena arus dinyatakan di kawasan waktu, kita ubah dulu pernyataan arus ini ke kawasan fasor menjadi $\bar{I}_L = 0,4\angle 0^\circ$ A . Tegangan induktor adalah

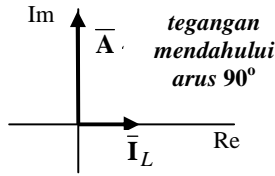
$$\begin{aligned} \bar{V}_L &= Z_L \bar{I}_L = (j500) \times 0,4\angle 0^\circ \\ &= 500\angle 90^\circ \times 0,4\angle 0^\circ = 200\angle 90^\circ \, \text{V} \end{aligned}$$

- c). Bentuk gelombang tegangan pada induktor yang dimaksudkan di sini adalah pernyataan di kawasan waktu dari tegangan induktor. Dari hasil b) dengan mudah kita nyatakan

$$v_L(t) = 200\cos(1000t + 90^\circ) \, \text{V}$$

Pemahaman:

Fasor tegangan dan fasor arus pada induktor berbeda fasa sebesar 90° . Tegangan mendahului arus dengan sudut 90° .



CONTOH-12.4: Arus yang melalui kapasitor sebesar 50 pF adalah $i_C(t) = 0,5 \cos(10^6 t) \text{ mA}$. Tentukanlah: a) impedansi kapasitor; b) fasor tegangan pada kapasitor; c) bentuk gelombang tegangan pada kapasitor.

Solusi :

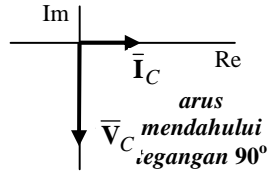
$$\text{a). } Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{10^6 \times (50 \times 10^{-12})} = -j20 \text{ k}\Omega$$

$$\text{b). } \bar{V}_C = Z_C \bar{I}_C = (20 \times 10^3 \angle -90^\circ) \times (0,5 \times 10^{-3} \angle 0^\circ) \\ = 10 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\text{c). } v_C(t) = 10 \cos(10^6 t - 90^\circ) \text{ V.}$$

Pemahaman:

Fasor tegangan dan fasor arus pada induktor berbeda fasa sebesar 90° . Tegangan mendahului arus dengan sudut 90° .



CONTOH-12.5: Suatu beban diberi tegangan

$$v(t) = 120 \cos(314t + 10^\circ) \text{ V.}$$

Arus yang mengalir adalah $i(t) = 5 \cos(314t + 40^\circ) \text{ A}$. Carilah impedansi beban tersebut.

Solusi :

Tegangan dan arus dalam fasor adalah

$$\bar{V} = 120 \angle 10^\circ \text{ V} \quad \text{dan} \quad \bar{I} = 5 \angle 40^\circ \text{ A}$$

Impedansi beban adalah:

$$Z_B = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{120\angle 10^\circ}{5\angle 40^\circ} = 24\angle -30^\circ \Omega$$

$$= 24 \cos(-30) + j24 \sin(-30) = 20,8 - j12 \Omega$$

Pemahaman :

Kita mengetahui bahwa impedansi induktor adalah $Z_L = j\omega L$ dan impedansi kapasitor adalah $Z_C = -j/\omega C$. Dari sini kita lihat bahwa sesuatu impedansi yang komponen imajineranya positif akan bersifat *induktif* sedangkan jika komponen imajineranya negatif akan bersifat *kapasitif*.

Dalam contoh-12.5. ini impedansi beban mempunyai komponen imajiner negatif. Jadi beban bersifat kapasitif. Pada beban kapasitif ini sudut fasa arus lebih besar dari sudut fasa tegangan. Kita katakan bahwa *arus mendahului tegangan* atau *arus leading terhadap tegangannya*. Gambar fasor arus dan tegangan pada beban adalah seperti di samping ini.



CONTOH-12.6: Suatu beban diberi tegangan

$$v(t) = 120\cos(314t+20^\circ) \text{ V}$$

Arus yang mengalir adalah $i(t) = 5\cos(314t-40^\circ) \text{ A}$. Carilah impedansi beban tersebut.

Solusi :

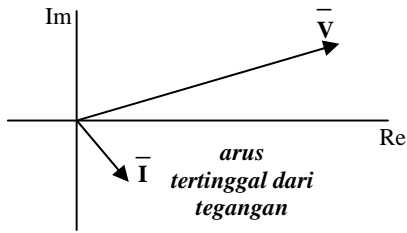
$$Z_B = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{120\angle 20^\circ}{5\angle -40^\circ} = 24\angle 60^\circ \Omega$$

$$= 24 \cos(60^\circ) + j24 \sin(60^\circ) = 12 + j20,8 \Omega$$

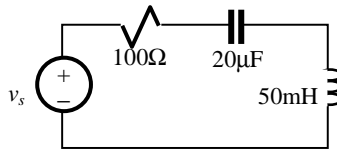
Pemahaman :

Dalam contoh ini komponen imajiner impedansi beban bernilai positif. Beban bersifat induktif. Pada beban yang bersifat induktif sudut fasa arus lebih kecil dari sudut fasa tegangan. Fasor arus *ketinggalan* dari tegangan atau *arus lagging*.

terhadap tegangan.
Fasor tegangan dan
fasor arus dalam
contoh ini
digambarkan seperti di
samping ini.



CONTOH-12.7: Tegangan
sumber pada rangkaian di
samping ini adalah
 $v_s(t)=250\cos 500t$ V.



- Tentukan fasor arus pada rangkaian.
- Tentukan fasor tegangan di tiap elemen.
- Gambarkan fasor tegangan sumber dan elemen.
- Nyatakan bentuk gelombang arus dan tegangan elemen.

Solusi :

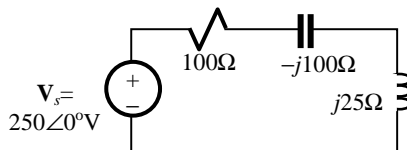
Untuk bekerja di kawasan fasor, rangkaian ini kita transformasikan menjadi rangkaian impedansi dan sumbernya dinyatakan dalam fasor. Impedansi elemen dan tegangan sumber menjadi

$$Z_R = 100\Omega ; Z_C = -\frac{j}{500 \times 20 \times 10^{-6}} = -j100\Omega ;$$

$$Z_L = j500 \times 50 \times 10^{-3} = j25\Omega$$

$$\bar{V}_s = 250\angle 0^\circ.$$

Rangkaian di atas menjadi seperti berikut



- a). Impedansi total rangkaian adalah

$$\begin{aligned} Z_{tot} &= 100 - j100 + j25 = 100 - j75 \, \Omega \\ &= \sqrt{(100)^2 + (75)^2} \angle \tan^{-1} \frac{-75}{100} = 125 \angle -36,87^\circ \, \Omega \end{aligned}$$

Arus pada rangkaian adalah

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_s}{Z_{tot}} = \frac{250 \angle 0^\circ}{125 \angle -36,87^\circ} = 2 \angle 36,87^\circ \, \text{A}$$

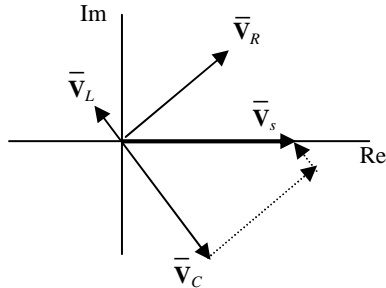
- b). Dengan menggunakan kaidah pembagi tegangan, tegangan di tiap elemen dapat dengan mudah dihitung.

$$\bar{\mathbf{V}}_R = \frac{Z_R}{Z_{tot}} \bar{\mathbf{V}}_s = \frac{100}{125 \angle -36,87^\circ} 250 \angle 0^\circ = 200 \angle 36,87^\circ \, \text{V}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_C = \frac{Z_C}{Z_{tot}} \bar{\mathbf{V}}_s = \frac{100 \angle -90^\circ}{125 \angle -36,87^\circ} 250 \angle 0^\circ = 200 \angle -53,13^\circ \, \text{V}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_L = \frac{Z_L}{Z_{tot}} \bar{\mathbf{V}}_s = \frac{25 \angle 90^\circ}{125 \angle -36,87^\circ} 250 \angle 0^\circ = 50 \angle 126,87^\circ \, \text{V}$$

- c). Gambar fasor tegangan sumber dan tegangan-tegangan elemen adalah seperti di samping ini.



Perhatikanlah bahwa fasor-fasor tegangan ini memenuhi HTK

$$\bar{\mathbf{V}}_s = \bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{V}}_R + \bar{\mathbf{V}}_L$$

- d). Bentuk gelombang arus dan tegangan elemen adalah

$$i(t) = 2 \cos(500t + 36,87^\circ) \, \text{A}$$

$$v_R(t) = 200 \cos(500t + 36,87^\circ) \, \text{V}$$

$$v_C(t) = 200 \cos(500t - 53,13^\circ) \, \text{V}$$

$$v_L(t) = 50 \cos(500t + 126,87^\circ) \, \text{V}$$

Pemahaman :

Tegangan di setiap elemen dapat pula dicari dengan mengalikan arus dan impedansinya.

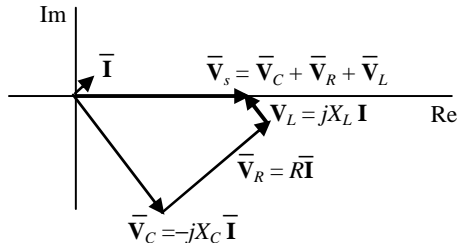
$$\bar{V}_R = Z_R \bar{I} = 100 \times 2 \angle 36,87^\circ = 200 \angle 36,87^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_C = Z_C \bar{I} = 100 \angle -90^\circ \times 2 \angle 36,87^\circ = 200 \angle -53,13^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_L = Z_L \bar{I} = 25 \angle 90^\circ \times 2 \angle 36,87^\circ = 50 \angle 126,87^\circ \text{ V}$$

Sesuai dengan HTK, $\bar{V}_s = \bar{V}_C + \bar{V}_R + \bar{V}_L$

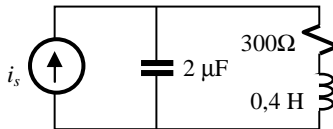
Diagram fasornya adalah seperti di samping ini.



Perhatikanlah bahwa

- fasor $\bar{V}_R = R\bar{I}$ sejajar \bar{I}
- fasor $\bar{V}_C = -jX_C\bar{I}$ tegak lurus pada \bar{I} , pergeseran sudut fasa -90° .
- fasor $\bar{V}_L = jX_L\bar{I}$ tegak lurus pada fasor \bar{I} dengan pergeseran sudut fasa $+90^\circ$.

CONTOH-12.8: Arus sumber pada rangkaian di bawah ini adalah $i_s(t) = 50 \cos 1000t$ mA.



- a). Tentukan fasor tegangan kapasitor.
- b). Tentukan fasor arus di tiap cabang.
- c). Gambarkan fasor arus sumber dan arus cabang dan tegangan kapasitor.
- d). Gambarkan fasor tegangan kapasitor, tegangan resistor dan induktor.

Solusi :

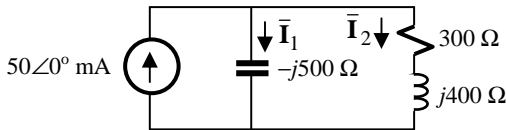
Dengan $\omega = 1000$, maka impedansi elemen dan fasor arus sumber adalah

$$Z_R = 300 \Omega ;$$

$$Z_C = -\frac{j}{1000 \times 2 \times 10^{-6}} = -j500 \Omega ;$$

$$Z_L = j1000 \times 0,4 = j400 \Omega ; \bar{I}_s = 50 \angle 0^\circ.$$

Transformasi rangkaian ke kawasan fasor adalah seperti di bawah ini:



a). Admitansi dari kedua cabang yang diparalel masing-masing adalah

$$Y_C = \frac{1}{-j500} = j2 \times 10^{-3} \text{ S} ;$$

$$Y_{RL} = \frac{1}{300 + j400} = \frac{1}{500 \angle \tan^{-1}(4/3)} \\ = 12 \times 10^{-4} - j16 \times 10^{-4} \text{ S}$$

Admitansi total :

$$Y_{tot} = Y_C + Y_{RL} = j2 \times 10^{-3} + 12 \times 10^{-4} - j16 \times 10^{-4} \text{ S} \\ = 12 \times 10^{-4} + j4 \times 10^{-4} = 12,65 \times 10^{-4} \angle 18,4^\circ \text{ S}$$

Tegangan pada kapasitor (yang sama dengan tegangan pada R dan L seri) adalah

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{I}_s}{Y_{tot}} = \frac{50 \times 10^{-3} \angle 0^\circ}{12,65 \times 10^{-4} \angle 18,4} = 39,5 \angle -18,4^\circ \text{ V}$$

b). Arus di tiap cabang adalah

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_C}{Z_C} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{-j500} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{500 \angle -90^\circ} = 79 \angle 61,6^\circ \text{ mA}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_2 &= \frac{\bar{V}_{RL}}{Z_{RL}} = \frac{\bar{V}_C}{Z_{RL}} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{300 + j400} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{500 \angle 53,1^\circ} \\ &= 79 \angle -71,5^\circ \text{ mA}\end{aligned}$$

- c). Gambar fasor arus sumber dan arus cabang adalah seperti di samping ini :

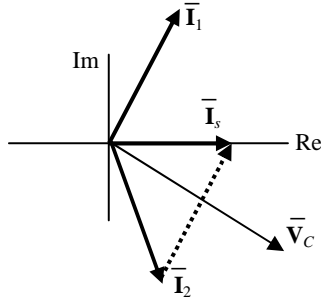
Perhatikan bahwa:

$$\bar{I}_s = \bar{I}_2 + \bar{I}_1 ;$$

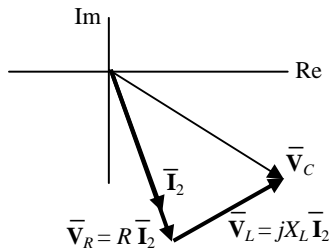
\bar{I}_1 90° mendahului

\bar{V}_C ;

\bar{I}_2 tertinggal dari \bar{V}_C .



- d). Gambar fasor tegangan kapasitor, resistor dan induktor adalah seperti di bawah ini :



Soal-Soal

1. Nyatakanlah sinyal-sinyal sinus berikut ini kedalam fasor dan gambarkanlah diagram fasornya

- a). $v_1 = 100 \cos \omega t$ b). $v_2 = 75 \cos(\omega t - 90^\circ)$
 c). $v_3 = 50 \cos(\omega t + 45^\circ)$ d). $v_4 = v_1 + v_2$
 e). $v_5 = v_1 - v_3$ f). $v_6 = v_1 + v_3$

2. Nyatakanlah fasor-fasor berikut ini kedalam sinyal di kawasan waktu, jika frekuensi adalah 300 rad/s

- a). $\bar{V}_1 = 60 \angle 30^\circ$ b). $\bar{V}_2 = 30 \angle -60^\circ$
 c). $\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ d). $\bar{V}_4 = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$

3. Tuliskanlah fasor-fasor pada soal 2 ke dalam bentuk sudut siku $\mathbf{V} = a + jb$.

4. Tuliskanlah fasor-fasor berikut ke dalam bentuk polar $\mathbf{V} = A \angle \theta$.

- a). $\bar{V}_1 = 3 + j6$ b). $\bar{V}_2 = 4 - j4$
 c). $\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ d). $\bar{V}_4 = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$

5. Jika $\mathbf{V} = 3 + j4$ dan $\mathbf{I} = 2 + j2$, berapakah

- a). $S = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{I}}^*$; b). $Z = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\bar{\mathbf{I}}}$

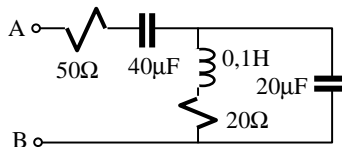
Tuliskan S maupun Z dalam bentuk polar maupun bentuk sudut siku.

6. Sebuah resistor 50Ω dihubungkan seri dengan induktor 20 mH .

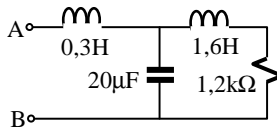
- a). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1000 rad/s.
 b). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 4000 rad/s.
 c). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1 kHz.

7. Sebuah resistor 50Ω dihubungkan seri dengan kapasitor $1 \mu\text{F}$. (a) Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1000 rad/s; (b) Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 4000 rad/s; (c) Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1 kHz.

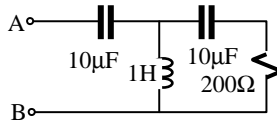
8. Sebuah resistor $50\ \Omega$ dihubungkan paralel dengan kapasitor $200\ \text{nF}$.
 - a). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah $1000\ \text{rad/s}$.
 - b). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah $4000\ \text{rad/s}$.
 - c). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah $1\ \text{kHz}$.
9. Sebuah resistor $50\ \Omega$ dihubungkan paralel dengan induktor $50\ \text{mH}$.
 - a). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah $1000\ \text{rad/s}$.
 - b). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah $4000\ \text{rad/s}$.
 - c). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah $1\ \text{kHz}$.
10. Pada hubungan seri antara resistor $50\ \Omega$ dengan induktor $50\ \text{mH}$ diterapkan tegangan $10\cos 1000t\ \text{V}$. Berapakah arus yang mengalir ? Gambarkan diagram fasornya.
11. Pada hubungan paralel antara resistor $1\ \text{k}\Omega$ dengan kapasitor $0,2\ \mu\text{F}$ diterapkan tegangan $40\cos 1000t\ \text{V}$. Berapakah arus yang mengalir di masing-masing elemen ? Gambarkan diagram fasornya.
12. Pada hubungan seri antara resistor $400\ \Omega$ dengan induktor $2\ \text{H}$, diterapkan tegangan $380\cos 300t\ \text{V}$. Berapakah tegangan di masing-masing elemen ? Gambarkan diagram fasornya.
13. Pada rangkaian berikut, hitunglah impedansi yang terlihat dari terminal A-B, jika frekuensi adalah $1000\ \text{rad/s}$.



14. Pada rangkaian berikut, hitunglah impedansi yang terlihat dari terminal A-B, jika frekuensi adalah 1000 rad/s.



15. Pada rangkaian berikut, hitunglah impedansi yang terlihat dari terminal A-B, jika frekuensi adalah 50Hz.



BAB 13 Teorema dan Metoda Analisis di Kawasan Fasor

Setelah mempelajari bab ini, kita akan

- memahami aplikasi teorema rangkaian dan metoda analisis rangkaian di kawasan fasor.
- mampu melakukan analisis rangkaian di kawasan fasor.
- memahami bahwa pada rangkaian dengan induktor dan kapasitor terdapat suatu nilai frekuensi yang akan menyebabkan terjadinya resonansi.
- mampu mencari frekuensi resonansi, menentukan faktor kualitas, menentukan lebar pita resonansi.

13.1. Teorema Rangkaian di Kawasan Fasor

13.1.1. Prinsip Proporsionalitas

Prinsip proporsionalitas menyatakan bahwa fasor keluaran sebanding dengan fasor masukan, yang secara matematis dapat dinyatakan dengan

$$\bar{Y} = K\bar{X} \quad (13.1)$$

\bar{Y} adalah fasor keluaran, \bar{X} adalah fasor masukan, dan K adalah konstanta proporsionalitas. Dalam kawasan fasor, K pada umumnya merupakan bilangan kompleks. Lihat misalnya solusi b) dari contoh 13.7.

13.1.2. Prinsip Superposisi

Kita harus berhati-hati dalam menerapkan prinsip superposisi di kawasan fasor. Fasor merupakan representasi sinyal sinus dengan frekuensi tertentu. Oleh karena itu prinsip superposisi hanya berlaku jika seluruh sistem yang kita tinjau mempunyai *frekuensi sama*. Jika memang demikian halnya, maka tanggapan rangkaian yang mengandung beberapa masukan dapat kita cari dengan memandang masing-masing masukan secara terpisah. Tanggapan keseluruhan adalah jumlah dari tanggapan terhadap masing-masing masukan.

Jika masukan-masukan mempunyai frekuensi yang berbeda, kita tidak dapat serta-merta menerapkan prinsip superposisi. Kita ingat bahwa impedansi tergantung dari frekuensi; oleh karena itu walaupun nilai-nilai elemen sama, nilai impedansi akan berbeda jika

frekuensi berbeda. Jadi jika kita ingin mencari tanggapan rangkaian terhadap masing-masing masukan, kita harus mencari nilai impedansi rangkaian untuk masing-masing masukan. Tanggapan rangkaian dalam bentuk fasor dari masing-masing masukan tidak dapat langsung dijumlahkan melainkan harus kita transformasikan dulu ke kawasan t , dan barulah hasil di kawasan t untuk masing-masing masukan ini dijumlahkan untuk memperoleh tanggapan keseluruhan. Secara singkat dikatakan, *prinsip superposisi berlaku di kawasan waktu untuk setiap rangkaian linier*, tetapi *berlaku di kawasan fasor hanya apabila masukan-masukan mempunyai frekuensi sama*. Agar lebih jelas kita akan melihat tiga kasus berikut.

Kasus-1: Sebuah rangkaian mengandung dua sumber yang mempunyai frekuensi sama. Rangkaian ini kita pecah menjadi dua rangkaian, masing-masing mengandung satu sumber. Masing-masing rangkaian kita transformasikan menjadi rangkaian fasor dan kemudian kita melakukan analisis di kawasan fasor.

Hasil yang kita peroleh dari dua kali analisis tersebut tentulah merupakan besaran-besaran fasor. Kedua hasil itu dapat langsung kita jumlahkan untuk memperoleh hasil total, tanpa mentransformasikan lebih dulu ke kawasan t . Mengapa? Karena seluruh sistem mempunyai frekuensi sama. Jadi *apabila seluruh sistem berfrekuensi sama prinsip superposisi dapat diterapkan dalam analisis fasor*.

Kasus-2: Sebuah rangkaian mengandung dua sumber yang frekuensinya tidak sama. Kita memisahkan lebih dulu rangkaian tersebut menjadi dua rangkaian yang masing-masing mengandung hanya satu sumber. Setelah dipisahkan, masing-masing rangkaian ditransformasikan menjadi rangkaian fasor kemudian dilakukan analisis di kawasan fasor. Hal ini dapat dilakukan karena *masing-masing rangkaian mempunyai frekuensi sendiri yang sama di seluruh rangkaian*. Hasil analisis dari kedua rangkaian ini tentulah berbentuk fasor akan tetapi mereka tidak dapat langsung dijumlahkan *karena frekuensinya berbeda*. Oleh karena itu masing-masing hasil kita transformasikan kembali ke kawasan t , dan hasil transformasi inilah yang dapat kita jumlahkan untuk memperoleh hasil total. Jadi *prinsip superposisi berlaku di kawasan fasor hanya apabila masukan-masukan mempunyai frekuensi sama*.

Kasus-3: Sebuah rangkaian mengandung *tiga sumber*, dua diantaranya mempunyai frekuensi sama dan sumber yang ke-tiga frekuensinya berbeda. Jika rangkaian ini kita pecah menjadi tiga rangkaian yang masing-masing mengandung hanya satu sumber untuk dianalisis di kawasan fasor, maka hasil fasor untuk dua sumber yang frekuensinya sama dapat kita jumlahkan langsung dalam bentuk fasor. Akan tetapi kita tidak dapat menjumlahkannya dengan hasil analisis rangkaian ke-tiga yang frekuensinya berbeda. Oleh karena itu hasil yang diperoleh harus ditransformasi ke kawasan t lebih dulu sebelum penjumlahan dilakukan.

13.1.3. Rangkaian Ekuivalen Thévenin dan Norton

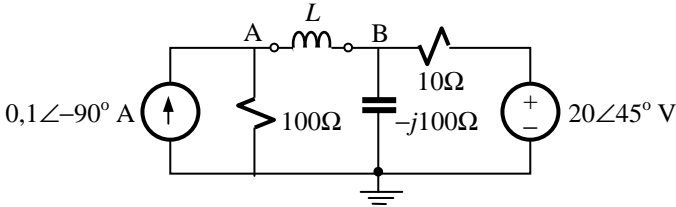
Konsep umum mengenai teorema Thévenin dan Norton di bidang fasor, sama dengan apa yang kita pelajari untuk rangkaian di kawasan waktu. Perbedaan yang perlu kita perhatikan adalah bahwa sinyal-sinyal dinyatakan dalam fasor dengan impedansi dan admitansi yang berupa bilangan kompleks.

Tegangan ekuivalen Thévenin adalah tegangan hubungan terbuka pada terminal beban. Arus ekuivalen Norton adalah arus hubung singkat pada terminal beban. Semua peubah ini dinyatakan dalam fasor. Relasi peubah ini dengan impedansi ekuivalen Thévenin, Z_T , dan admitansi ekuivalen Norton, Y_N , adalah seperti berikut.

$$\bar{\mathbf{V}}_T = Z_T \bar{\mathbf{I}}_N \quad ; \quad \bar{\mathbf{I}}_N = Y_N \bar{\mathbf{V}}_T \quad ; \quad Y_N = \frac{1}{Z_T} \quad (13.2)$$

Hubungan (13.2) memberikan ketentuan untuk transformasi sumber di kawasan fasor. Seperti yang telah kita lihat pada rangkaian di kawasan waktu, transformasi sumber dapat menyederhanakan perhitungan-perhitungan dalam analisis rangkaian.

CONTOH-13.1: Dari rangkaian di bawah ini, carilah rangkaian ekuivalen Thévenin yang dilihat oleh induktor L .



Solusi:

Jika induktor dilepaskan maka untuk simpul A dan B berlaku

$$\bar{V}_A = 100 \times 0,1 \angle -90^\circ = 10 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_B &= \frac{-j100}{10 - j100} \times 20 \angle 45^\circ = 0,995 \angle -5,7^\circ \times 20 \angle 45^\circ \\ &= 19,9 \angle 39,3^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Tegangan Thévenin :

$$\begin{aligned} \bar{V}_T &= \bar{V}_A - \bar{V}_B = 10 \angle -90^\circ - 19,9 \angle 39,3^\circ \\ &= -j10 - (15,4 + j12,6) = -15,6 - j22,6 \text{ V} \end{aligned}$$

Impedansi Thévenin Z_{Th} , dihitung dengan melihat impedansi dari terminal AB dengan semua sumber dimatikan.

$$Z_T = 100 + \frac{10 \times (-j100)}{10 - j100} = 109,9 - j0,99 \Omega$$

13.2. Metoda-Metoda Analisis Dasar

Metoda-metoda analisis yang telah kita pelajari untuk rangkaian di kawasan waktu, dapat kita terapkan untuk rangkaian di kawasan fasor dengan mengingat bahwa peubah sinyal dinyatakan dalam fasor dan elemen-elemen dinyatakan dalam impedansi atau admitansinya yang pada umumnya berupa bilangan kompleks.

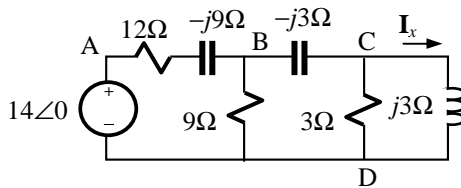
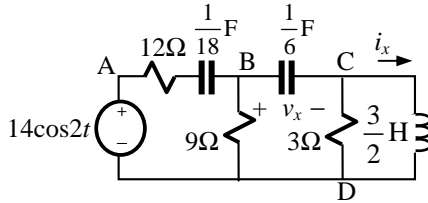
13.2.1. Metoda Keluaran Satu Satuan

Metoda ini dapat kita aplikasikan pada rangkaian berbentuk tangga, seperti contoh berikut.

CONTOH-13.2: Carilah i_x pada rangkaian di samping ini.

Solusi:

Untuk bekerja di kawasan fasor, rangkaian ini kita transformasikan sehingga berbentuk rangkaian impedansi seperti terlihat pada gambar berikut. Dari sinilah kita mulai bekerja.



Misalkan $I_x = 1\angle 0^\circ$ A.

$$\bar{V}_C = j3 \text{ V}; \bar{I}_4 = \frac{\bar{V}_C}{3} = j1 \text{ A};$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_x + \bar{I}_4 = (1 + j1) \text{ A};$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_C + (-j3)\bar{I}_3 = j3 - j3(1 + j1) = 3 \text{ V}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_B}{9} = \frac{1}{3} \text{ A} \Rightarrow \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \left(\frac{4}{3} + j1\right) \text{ A}$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \left(\frac{4}{3} + j1\right)(12 - j9) = 28 \text{ V}$$

$$K = \frac{\bar{I}_x}{\bar{V}_A} = \frac{1}{28} \rightarrow \bar{I}_x = \frac{1}{28} \bar{V}_A = \frac{14\angle 0^\circ}{28} = 0,5\angle 0^\circ$$

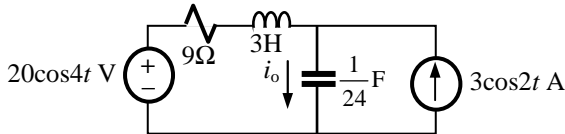
$$\rightarrow i_x = 0,5 \cos 2t$$

13.2.2. Metoda Superposisi

Metoda superposisi sangat bermanfaat untuk menganalisis rangkaian yang mengandung lebih dari dua masukan, terutama jika kita ingin mengetahui bagaimana kontribusi dari masing-masing masukan terhadap tanggapan keseluruhan. Sebagaimana telah disebutkan di sub-bab sebelumnya, kita harus berhati-hati dalam menerapkan

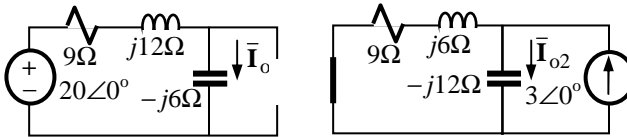
metoda superposisi di kawasan fasor. Prinsip superposisi dapat diterapkan langsung di kawasan fasor hanya jika masukan-masukan mempunyai frekuensi sama. Jika tidak, kontribusi dari masing-masing masukan harus kita transformasikan ke kawasan waktu lebih dahulu, baru kemudian dapat kita jumlahkan.

CONTOH-13.3: Carilah i_o pada rangkaian berikut ini.



Solusi:

Rangkaian ini mengandung dua sumber tegangan dan sumber arus yang mempunyai frekuensi berbeda. Oleh karena itu transformasi rangkaian ke kawasan fasor untuk masing-masing sumber juga berbeda, seperti terlihat pada gambar berikut.



Dari masing-masing rangkaian fasor ini, kita mencari tanggapan rangkaian di kawasan fasor kemudian ditransformasikan ke kawasan t . Hasil di kawasan t inilah yang dapat dijumlahkan.

Jika sumber arus dimatikan, kita mempunyai rangkaian di kawasan fasor seperti pada gambar sebelah kiri, dengan frekuensi $\omega = 4$. Untuk rangkaian ini, aplikasi HTK memberikan

$$\bar{I}_{o1} = \frac{20\angle 0^\circ}{8 + j12 - j6} = \frac{20\angle 0^\circ}{8 + j6} = \frac{20\angle 0^\circ}{10\angle 36,9^\circ} = 2\angle -36,9^\circ \text{ A}$$

Jika sumber tegangan dimatikan, kita mempunyai rangkaian seperti pada gambar sebelah kanan, dengan frekuensi $\omega = 2$. Kaidah pembagi arus memberikan :

$$\begin{aligned}\bar{I}_{o2} &= \frac{1/(-j12)}{\frac{1}{-j12} + \frac{1}{8+j6}} \times 3\angle 0^\circ = \frac{\frac{-j12(8+j6)}{8+j6-j12}}{\frac{8+j6}{8-j6}} \times 3\angle 0^\circ \\ &= \frac{10\angle 36,9^\circ}{10\angle -36,9^\circ} \times 3\angle 0^\circ = 3\angle 73,8^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

\bar{I}_{o1} dan \bar{I}_{o2} tidak dapat dijumlahkan karena fasor ini diperoleh dari sumber dengan frekuensinya yang tidak sama. Oleh karena itu kita harus mengembalikannya ke kawasan waktu sebelum dijumlahkan. Dengan cara itu kita peroleh

$$\begin{aligned}i_{o1} &= 2 \cos(4t - 36,9^\circ) \text{ A} \quad \text{dan} \quad i_{o2} = 3 \cos(2t + 73,8^\circ) \text{ A} \\ \text{sehingga} \quad i_o &= i_{o1} + i_{o2} \\ &= 2 \cos(4t - 36,9^\circ) + 3 \cos(2t + 73,8^\circ) \text{ A}\end{aligned}$$

13.2.3. Metoda Rangkaian Ekivalen Thévenin

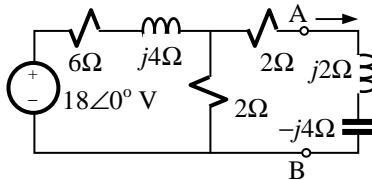
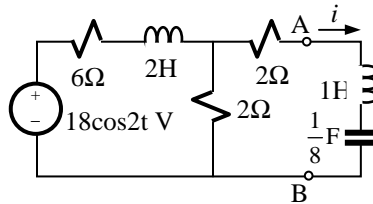
Contoh berikut ini menunjukkan bagaimana metoda rangkaian ekivalen Thévenin kita gunakan di kawasan fasor.

CONTOH-13.4: Carilah i pada rangkaian berikut ini.

Solusi :

Rangkaian ini setelah ditransformasi ke kawasan fasor menjadi seperti berikut.

Fasor tegangan terminal AB yang terbuka memberikan tegangan Thévenin. Sesuai kaidah pembagi tegangan, tegangan terminal AB yang terbuka memberikan

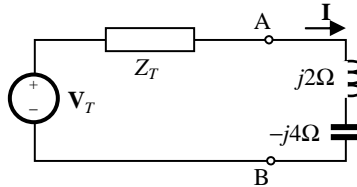


$$\bar{V}_T = \bar{V}_{ht} = \frac{2}{2+6+j4} \times 18\angle 0^\circ = \frac{9}{2+j1} \text{ V}$$

sedangkan impedansi Thévenin adalah (yang terlihat dari terminal AB yang terbuka) adalah

$$Z_T = 2 + \frac{2(6 + j4)}{2 + 6 + j4} = \frac{16 + j8 + 12 + j8}{8 + j4} = \frac{7 + j4}{2 + j1} \Omega$$

Rangkaian ekivalen Thévenin serta beban di terminal AB setelah disambungkan lagi adalah seperti di samping ini:



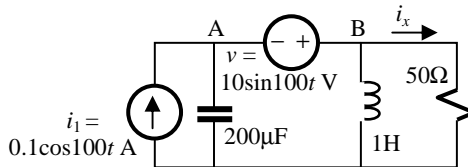
Dari rangkaian ini kita hitung:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{V}_T}{Z_T + j2 - j4} = \frac{9}{(2 + j1)} \times \frac{(2 + j1)}{(7 + j4) - j2(2 + j1)} \\ &= 1 \angle 0^\circ \text{ A} \\ \Rightarrow i &= 1 \cos 2t \text{ A} \end{aligned}$$

13.2.4. Metoda Reduksi Rangkaian

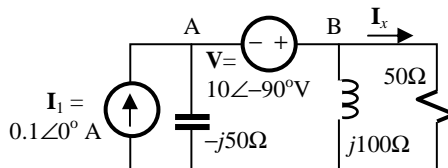
Contoh persoalan berikut ini memperlihatkan penggunaan metoda reduksi rangkaian.

CONTOH-13.5: Carilah i_x pada rangkaian berikut:



Solusi :

Rangkaian ini mengandung sumber tegangan dan sumber arus yang berfrekuensi sama, yaitu $\omega = 100$. Akan tetapi sumber tegangannya dinyatakan dalam sinus sedangkan sumber arusnya dalam cosinus. Kita perlu mengubahnya dalam bentuk standar, yaitu bentuk cosinus, dengan kesamaan



$$\sin x = \cos(90-x) = \cos(x-90)$$

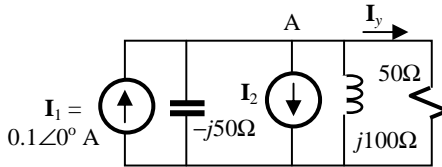
Transformasi rangkaian ke kawasan fasor menjadi seperti pada gambar di samping ini.

Untuk menghitung \bar{I}_x kita dapat menggunakan metoda superposisi; akan tetapi di sini kita akan menggunakan transformasi sumber.

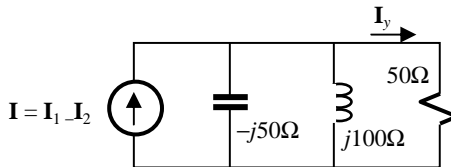
Dalam rangkaian ini sumber tegangan tersambung seri dengan resistor 50Ω yang diparalel dengan induktor $j100 \Omega$. Sumber ini dapat kita ganti dengan sumber arus ekivalen I_2 , yang besarnya adalah

$$\bar{I}_2 = \bar{V} \left(\frac{1}{j100} + \frac{1}{50} \right) = (-j10) \frac{(50 + j100)}{j5000} = -0,1 - j0,2 \text{ A}$$

sehingga rangkaian akan menjadi seperti di samping ini. Perhatikan bahwa dengan transformasi sumber ini kita



menghilangkan simpul B. Arus \bar{I}_y yang sekarang mengalir melalui resistor 50Ω , bukanlah arus \bar{I}_x yang kita cari; sebab jika \bar{I}_y dikalikan 50Ω , kita mendapatkan tegangan simpul A, dan bukan tegangan simpul B tempat \bar{I}_x keluar.



Sumber \bar{I}_1 dan \bar{I}_2 terhubung paralel,

sehingga dapat digantikan oleh satu sumber arus saja yaitu \bar{I} , seperti terlihat pada gambar berikut, dengan

$$\bar{I} = \bar{I}_1 - \bar{I}_2 = 0,1 - (-0,1 - j0,2) = 0,2 + j0,2 \text{ A}$$

Untuk menghitung arus I_y kita memanfaatkan kaidah pembagi arus.

$$\bar{\mathbf{I}}_y = \frac{\frac{1}{50}(0,2 + j0,2)}{\frac{1}{50} + \frac{1}{j100} + \frac{1}{-j50}} = \frac{0,2 + j0,2}{1 + j0,5} \text{ A}$$

$$\rightarrow \bar{\mathbf{V}}_A = 50 \times \bar{\mathbf{I}}_y = \frac{10 + j10}{1 + j0,5} \text{ V}$$

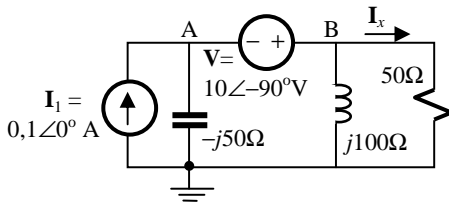
$$\bar{\mathbf{V}}_B = \bar{\mathbf{V}}_A + \bar{\mathbf{V}} = \frac{10 + j10}{1 + j0,5} - j10 = \frac{15}{1 + j0,5} = 13,4 \angle -26,6^\circ \text{ V}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_x = \frac{\bar{\mathbf{V}}_B}{50} = 0,27 \angle -26,6^\circ \text{ A} \rightarrow i_x = 0,27 \cos(100t - 26,6^\circ) \text{ A.}$$

13.3. Metoda-Metoda Analisis Umum

13.3.1. Metoda Tegangan Simpul. Aplikasi metoda ini, kita lihat pada contoh berikut ini.

CONTOH-13.6: Gunakan metoda tegangan simpul untuk menyelesaikan persoalan pada contoh-13.5.



Solusi :

Untuk menyelesaikan persoalan ini rangkaian fasor dari contoh-13.5 digambar lagi seperti berikut:

Simpul referensi kita tentukan seperti terlihat pada gambar tersebut. Simpul A, B, dan sumber tegangan menjadi simpul-super karena A dan B keduanya bukan simpul referensi. Persamaan tegangan simpul dapat kita peroleh dengan cara yang sama seperti untuk rangkaian di kawasan waktu, akan tetapi di sini kita bekerja di kawasan fasor dengan impedansi-impedansi.

$$\text{A : } -\bar{\mathbf{I}}_1 + \frac{\bar{\mathbf{V}}_A}{-j50} + \frac{\bar{\mathbf{V}}_B}{j100} + \frac{\bar{\mathbf{V}}_B}{50} = 0$$

$$\text{B : } \bar{\mathbf{V}}_A - \bar{\mathbf{V}}_B = -\bar{\mathbf{V}} = 10 \angle 90^\circ = j10$$

Untuk persamaan yang sederhana ini tentu dapat kita selesaikan dengan metoda substitusi biasa. Namun di sini kita akan menuliskannya dalam bentuk matriks, dengan memasukkan nilai \bar{I}_1 dan \bar{V} .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{-j50} & \frac{1}{j100} + \frac{1}{50} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_A \\ \bar{V}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \angle 0^\circ \\ 10 \angle 90^\circ \end{bmatrix}$$

Untuk menyederhanakan bilangan, baris pertama dari matriks ini kita kalikan 100, dan menuliskan fasor dalam bentuk sudut-siku.

$$\begin{bmatrix} j2 & 2-j1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_A \\ \bar{V}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ j10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{eliminasi Gauss : } \begin{bmatrix} j2 & 2-j1 \\ 0 & -2-j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_A \\ \bar{V}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Dari sini kita peroleh

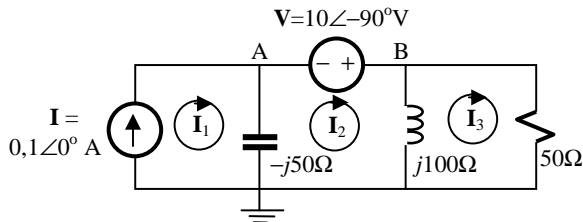
$$\bar{V}_B = \frac{-30}{-2-j1} = \frac{-30(-2+j1)}{5} = 12-j6 = 13,4 \angle -26,6^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_A = j10 + \bar{V}_B = j10 + 12 - j6 = 12 + j4 = 12,6 \angle 18,4^\circ \text{ V}$$

13.3.2. Metoda Arus Mesh

Penggunaan metoda ini di kawasan fasor juga akan kita lihat melalui sebuah contoh.

CONTOH-13.7: Tentukanlah arus di semua cabang rangkaian pada persoalan contoh 13.6. dengan menggunakan metoda arus mesh.



Solusi :

Rangkaian adalah seperti berikut

Persamaan fasor arus mesh dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ j50 & -j50 + j100 & -j100 \\ 0 & -j100 & 50 + j100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \\ \bar{\mathbf{I}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -j10 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ j5 & j5 & -j10 \\ 0 & -j2 & 1 + j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \\ \bar{\mathbf{I}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -j1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j5 & -j10 \\ 0 & 0 & 5 - j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \\ \bar{\mathbf{I}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -j1.5 \\ -j3 \end{bmatrix}$$

Dari sini kita dapatkan

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = 0.1 \angle 0^\circ \text{ A}; \bar{\mathbf{I}}_3 = \frac{-j3}{5 - j10} = \frac{3 \angle -90^\circ}{5\sqrt{5} \angle -63.4^\circ} = 0.27 \angle -26.6^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_2 &= \frac{-j1.5 + j10\bar{\mathbf{I}}_3}{j5} = -0.3 + 2 \frac{-j3}{5 - j10} = \frac{-1.5 - j3}{5 - j10} \\ &= \frac{3.35 \angle -116.6^\circ}{5\sqrt{5} \angle -63.4^\circ} = 0.3 \angle -53.2^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

13.4. Rangkaian Resonansi

13.4.1. Resonansi Seri

Impedansi dari rangkaian seri RLC adalah:

$$Z_{RLC \text{ seri}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (13.3)$$

Reaktansi dari impedansi ini mengandung bagian induktif ($X_L = j\omega L$) maupun kapasitif ($X_C = 1/j\omega C$), yang keduanya merupakan fungsi

dari frekuensi . Bagian induktif berbanding lurus dengan frekuensi sementara bagian kapasitifnya berbanding terbalik. Pada suatu nilai frekuensi tertentu, nilai reaktansi total menjadi nol, yaitu pada saat

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0 \quad \text{atau} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.4)$$

Pada saat itulah dikatakan bahwa rangkaian beresonansi, dan ω_0 disebut *frekuensi resonansi*. Pada waktu terjadi resonansi, jelas bahwa impedansi rangkaian ini hanyalah R ; reaktansi induktif sama dengan reaktansi kapasitif sehingga saling meniadakan. Dalam keadaan beresonansi, arus yang mengalir dalam rangkaian hanya ditentukan oleh R ; jika tegangan sumber adalah \bar{V}_s , maka

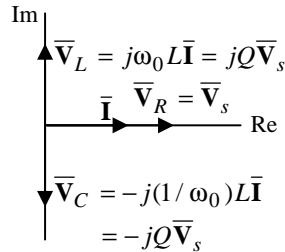
$\bar{I} = \bar{V}_s / R$. Diagram fasor tegangan dan arus terlihat seperti Gb.13.1.

Beberapa parameter digunakan untuk menyatapkan resonansi secara lebih detil. Salah satunya adalah *faktor kualitas*, Q , yang didefinisikan sebagai *perbandingan antara reaktansi induktif pada saat resonansi dengan resistansinya*. Karena pada saat resonansi $|X_L| = |X_C|$, maka

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad (13.5)$$

Jelaslah bahwa, walaupun definisi Q menyebut “pada saat resonansi”, Q semata-mata tergantung dari parameter rangkaian. Faktor kualitas berbanding terbalik dengan rasio redaman $Q = 1/2\zeta$.

Parameter lain adalah *lebar pita resonansi* yang didefinisikan sebagai selang frekuensi dimana impedansi tidak berbeda jauh dari nilai impedansi pada saat resonansi. Selang ini biasanya diambil selang frekuensi yang memberikan nilai $Z = R - jR$ dan $Z = R + jR$. Jika batas frekuensi rendah dan tingginya adalah ω_1 dan ω_2 , maka



Gb.13.1. Diagram fasor pada saat resonansi.

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) = -R \text{ dan } \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right) = R \text{ atau}$$

$$\omega_1^2 LC + \omega_1 RC - 1 = 0 \text{ dan } \omega_2^2 LC - \omega_2 RC - 1 = 0$$

Karena $LC = 1/\omega_0^2$ dan $RC = 1/\omega_0 Q$, maka persamaan di atas menjadi

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right) - 1 = 0 \text{ dan } \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 - \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right) - 1 = 0 \quad (13.6)$$

Masing-masing persamaan pada (13.6) mempunyai dua akar. Namun hanya akar yang mempunyai arti fisis yang kita pakai, yaitu yang bernilai positif. Dengan pengertian itu maka

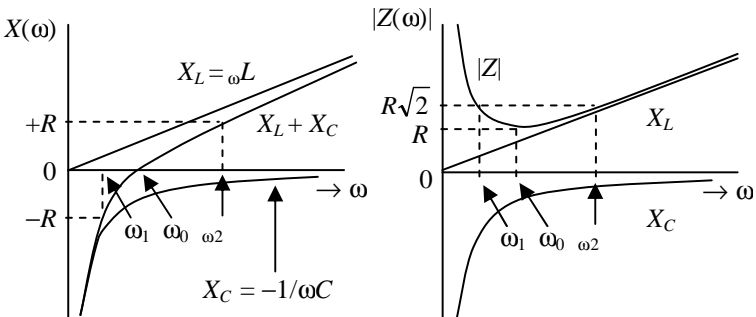
$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \right) \text{ dan}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \right) \quad (13.7)$$

Lebar pita resonansi adalah

$$BW_{res} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (13.8)$$

ω_1 dan ω_2 disebut frekuensi *cut-off* untuk resonansi. Perubahan reaktansi dan impedansi terhadap frekuensi serta parameter-parameter resonansi dijelaskan pada Gb.13.2.



Gb.13.2. X_L , X_C , $|Z|$, ω resonansi, ω cut-off.

13.4.2. Resonansi Paralel

Admitansi rangkaian paralel RLC adalah

$$Y_{RLC \text{ paralel}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (13.9)$$

Bagian riil dari admitansi disebut *konduktansi* dan bagian imajinernya kita sebut *suseptansi*. Suseptansi dari rangkaian paralel RLC merupakan fungsi dari frekuensi. Seperti halnya reaktansi pada rangkaian seri RLC , ada satu nilai frekuensi yang membuat suseptansi pada (13.38) menjadi nol, yang kita sebut frekuensi resonansi, ω_0 .

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0 \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.10)$$

Persamaan (13.10) ini sama dengan (13.4). Jadi frekuensi resonansi rangkaian paralel RLC sama dengan rangkaian serinya. Sesungguhnya admitansi rangkaian paralel dapat kita peroleh dari impedansi rangkaian seri dengan penggantian :

$$R \leftrightarrow G ; L \leftrightarrow C ; C \leftrightarrow L$$

Faktor kualitas :

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{R}{\sqrt{L/C}} \quad (13.11)$$

Frekuensi cutoff:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \text{ dan} \\ \omega_2 &= \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (13.12)$$

$$\text{Lebar pita resonansi adalah: } BW_{res} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (13.13)$$

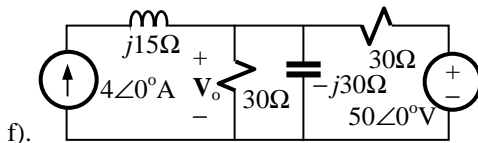
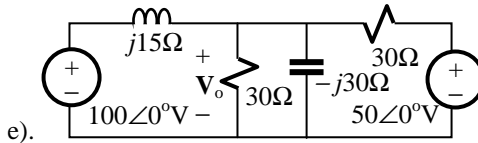
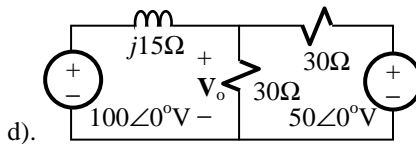
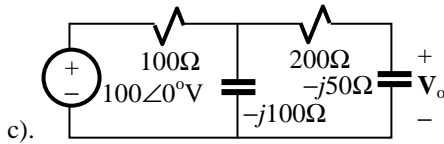
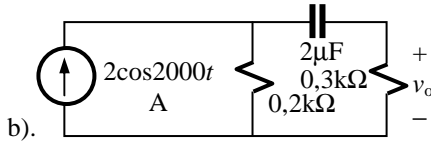
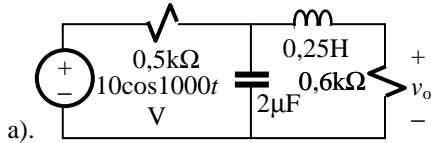
$$\text{Frekuensi tengah : } \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (13.14)$$

Jika arus total dinyatakan dalam fasor \mathbf{I}_s , maka pada saat resonansi masing-masing adalah :

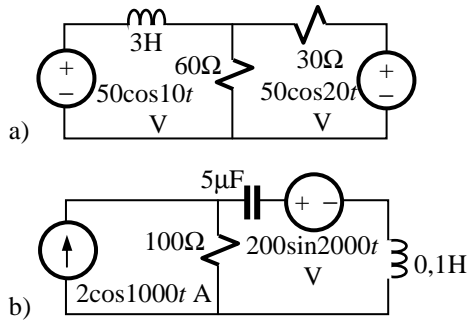
$$\bar{\mathbf{I}}_L = -jQ \bar{\mathbf{I}}_s \quad \bar{\mathbf{I}}_C = jQ \bar{\mathbf{I}}_s \quad (13.15)$$

Soal-Soal

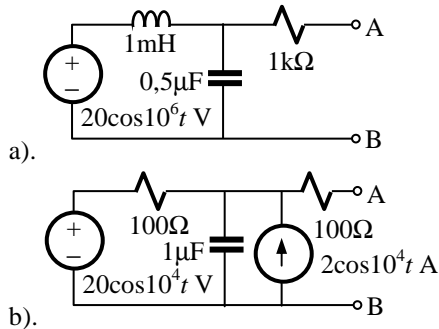
1. Hitunglah tegangan keluaran v_o pada rangkaian-rangkaian berikut ini.



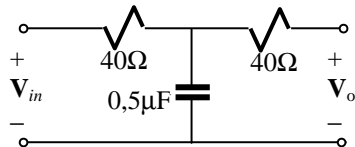
2. Hitunglah tegangan pada resistor $60\ \Omega$ pada rangkaian a) dan tegangan pada resistor $100\ \Omega$ pada rangkaian b) berikut ini.



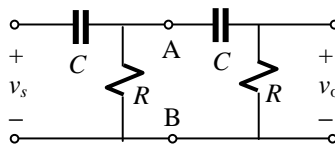
3. Carilah rangkaian ekivalen Thévenin di terminal A-B untuk menentukan impedansi yang harus dipasang pada terminal ini agar terjadi transfer daya maksimum dari sumber ke beban'.



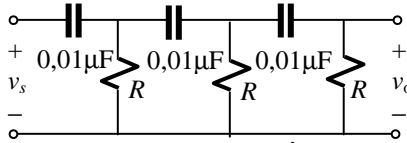
4. Rangkaian berikut ini adalah rangkaian T. Carilah hubungan antara V_o dan V_{in} jika frekuensi operasi adalah 2400 Hz.



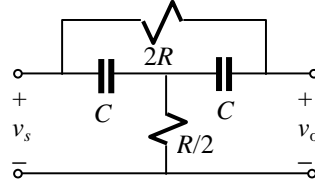
5. Tegangan di terminal masukan pada rangkaian berikut ini adalah $v_s = A \sin \omega t$ V. Tegangan keluaran dapat dinyatakan sebagai $v_o = \beta \sin(\omega t + \phi)$ V. Berapakah β dan ϕ jika $\omega RC = 1$.



6. Tentukan nilai R pada rangkaian berikut ini sehingga pada frekuensi 1 kHz terjadi perbedaan fasa 180° antara v_o dan v_s .



7. Tegangan di terminal masukan pada rangkaian berikut ini adalah $v_s = A \sin \omega t$ V. Bagaimanakah bentuk tegangan keluaran v_o ? Bagaimanakah jika $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$, dan $\omega = 1/RC$?



8. Suatu rangkaian RLC seri dengan $R = 10 \, \Omega$, $L = 0,5 \, \text{mH}$, dan $C = 200 \, \mu\text{F}$. Berapakah frekuensi resonansi rangkaian ini? Berapa faktor kualitasnya? Berapa lebar pita resonansinya? Berapakah nilai impedansi pada batas frekuensi (*cutoff frequency*) atas dan bawahnya? Berapa nilai ke-dua batas frekuensi tersebut?
9. Pada suatu rangkaian RLC seri $L = 0,5 \, \text{mH}$, dan $C = 200 \, \text{nF}$. Impedansi rangkaian ini pada batas frekuensi atasnya adalah $Z = 20 + j20 \, \Omega$. Berapakah frekuensi resonansi rangkaian ini? Berapa faktor kualitasnya? Berapa lebar pita resonansinya? Berapa nilai batas frekuensi tersebut?
10. Sebuah rangkaian resonansi seri RLC dirancang untuk beresonansi pada 50 Mrad/s, dengan lebar pita resonansi 8 Mrad/s. Impedansi pada waktu resonansi adalah $24 \, \Omega$. Tentukan faktor kualitasnya, nilai L dan C , batas frekuensi atas dan bawah.
11. Sebuah rangkaian resonansi paralel RLC beresonansi pada 100 krad/s dan lebar pita resonansinya 5 krad/s. Dalam keadaan resonansi, impedansinya bernilai 8 k Ω . Tentukan L , C , faktor kualitas, batas frekuensi atas dan bawah.
12. Sebuah kapasitor variabel diparalel dengan resistor 100 Ω . Rangkaian paralel ini kemudian diseri dengan induktor 10 mH. Dengan frekuensi 5000 rad/s, pada nilai kapasitor berapakah impedansi rangkaian ini menjadi resistif? Berapakah impedansi tersebut?
13. Sebuah resistor 50 Ω dihubungkan seri dengan induktor 10 mH. Rangkaian seri ini diparalel dengan kapasitor 10 μF . Pada frekuensi berapakah impedansi totalnya menjadi resistif. Berapakah nilainya?
14. Sebuah induktor 20 mH mempunyai resistansi internal 20 Ω . Berapakah nilai kapasitor yang harus diseri dengan induktor tersebut agar terjadi resonansi pada frekuensi 10 krad/s? Hitung faktor kualitas rangkaian ini.

BAB 14 Analisis Daya

Dengan mempelajari analisis daya di bab ini, kita akan

- memahami pengertian daya nyata, daya reaktif, daya kompleks, serta faktor daya;
- mampu melakukan perhitungan alih daya ke beban serta faktor daya beban;
- mampu menentukan kondisi untuk tercapainya alih daya maksimum.

14.1. Umum

Dalam analisis rangkaian arus bolak-balik keadaan mantap pada bab sebelumnya, kita lebih memusatkan perhatian pada besaran arus dan tegangan, belum mempersoalkan daya. Di bab inilah kita akan membahas tentang daya.

Analisis daya pada sistem arus bolak-balik, tertuju pada pemecahan tiga macam persoalan yaitu:

- a. Mencari tanggapan rangkaian dengan rangkaian beban dan sumber yang diketahui. Persoalan semacam inilah yang kita bahas pada sub-bab sebelumnya, dengan penekanan pada perhitungan tegangan dan arus. Persoalan ini masih akan kita lihat lagi, dengan penekanan pada persoalan dayanya.
- b. Mencari kondisi rangkaian beban agar terjadi alih daya maksimum apabila rangkaian sumber diketahui. Persoalan ini banyak kita jumpai dalam sistem pemroses sinyal, yang merupakan suatu rangkaian dengan sumber yang terbatas kemampuannya. Pada rangkaian seperti ini kita harus berusaha melakukan penyesuaian-penyesuaian pada rangkaian beban agar alih daya ke beban menjadi maksimum. Dengan kata lain kita berusaha agar daya yang tersedia digunakan sebaik-baiknya.
- c. Mencari rangkaian sumber agar kebutuhan daya pada beban terpenuhi dan sumber bekerja sesuai dengan kemampuannya. Persoalan ini kita jumpai dalam sistem tenaga listrik yang bertujuan memasok kebutuhan energi listrik pada suatu tingkat

tegangan tertentu. Rangkaian seksi beban tidak mudah disesuaikan terhadap sisi sumber bahkan sebaliknya sisi sumber yang harus disesuaikan terhadap kebutuhan beban. Permintaan daya selalu berubah dari waktu ke waktu, sesuai keperluan konsumen, yang berarti bahwa pasokan di sisi sumber harus disesuaikan pula dari waktu ke waktu.

Sebelum membahas persoalan-persoalan tersebut di atas, kita akan membahas lebih dulu mengenai daya itu sendiri. Selama ini kita mengenal pernyataan daya di kawasan t sebagai hasil kali antara tegangan dan arus. Oleh karena dalam analisis rangkaian arus bolak-balik kita bekerja di kawasan *fasor*, maka kita memerlukan pengertian mengenai pernyataan daya di kawasan fasor, yang akan kita kenal sebagai *daya kompleks*.

14.2. Tinjauan Daya di Kawasan waktu : Daya Rata-Rata dan Daya Reaktif

14.2.1. Daya Rata-Rata

Misalkan tegangan dan arus pada terminal suatu beban adalah

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \text{dan} \quad i = I_m \cos \omega t \quad (14.1)$$

Persamaan (14.1) ini merupakan pernyataan umum dari tegangan dan arus yang berbentuk sinus, dengan mengambil referensi sudut fasa nol untuk arus dan perbedaan fasa antara arus dan tegangan sebesar θ .

Daya sesaat yang dialihkan melalui terminal ini ke beban adalah

$$\begin{aligned} p &= vi = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos \omega t \\ &= V_m I_m \{\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta\} \cos \omega t \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta + \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \cos 2\omega t - \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (14.2)$$

Persamaan (14.2) memperlihatkan bahwa daya sesaat terdiri dari dua komponen, yaitu :

- Komponen searah, ditunjukkan oleh suku pertama ruas kanan (14.2) yang bernilai konstan. Komponen ini ditentukan oleh nilai maksimum dari tegangan dan arus serta beda sudut fasanya.

- Komponen bolak-balik, ditunjukkan oleh suku kedua dan ketiga yang berbentuk sinyal sinus dengan frekuensi 2ω .

Jika kita menghitung nilai rata-rata daya dari (14.2) dalam selang antara 0 sampai 2π , akan kita peroleh

$$p_{rr} = P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p d\omega t = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \quad (14.3)$$

yang tidak lain adalah komponen searah dari (14.2) karena nilai rata-rata dari suku kedua dan ke-tiga adalah nol.

14.2.2. Daya Reaktif

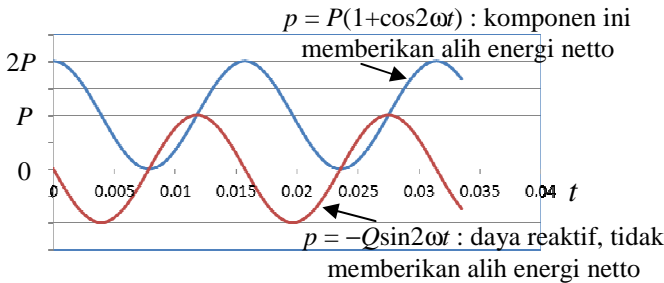
Pada persamaan (14.2) amplitudo suku ke-dua sama dengan daya rata-rata sehingga suku pertama dan ke-dua dapat kita gabung dan (14.2) menjadi

$$\begin{aligned} p &= \left[\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \right] (1 + \cos 2\omega t) - \left[\frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \right] \cos 2\omega t \\ &= P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t \quad \text{dengan} \quad Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \end{aligned} \quad (14.4)$$

Nilai suku pertama (14.4) *selalu positif* atau *selalu negatif*, tergantung dari nilai P tetapi tidak pernah berubah tanda karena faktor $(1 + \cos 2\omega t)$ selalu lebih besar dari 0 (minimal 0). Sedangkan suku kedua berbentuk sinus yang berubah nilai dari positif ke negatif dan sebaliknya secara periodik. Kalau kita melakukan integrasi p dalam satu perioda untuk mendapatkan alih energi, maka akan kita dapatkan bahwa hanya suku pertama yang memberikan suatu nilai netto; sedangkan suku kedua memberikan nilai alih energi nol.

$$w = \int_0^T p dt = \int_0^T P(1 + \cos 2\omega t) dt - \int_0^T (Q \sin 2\omega t) dt = PT - 0 \quad (14.5)$$

Jadi daya sesaat seperti ditunjukkan oleh (14.4) mengandung dua komponen daya. Komponen daya yang pertama memberikan alih energi netto yang besarnya sama dengan alih energi yang diberikan oleh daya rata-rata. Komponen daya yang kedua tidak memberikan alih energi netto, dan disebut *daya reaktif*. Perhatikan Gb.14.1.



Gb.14.1. Komponen-komponen Daya

14.3. Tinjauan Daya di Kawasan Fasor: Daya Kompleks, Faktor Daya

Dalam analisis rangkaian di kawasan fasor, kita perlu mencari hubungan antara komponen-komponen daya yang kita bahas di atas dengan besaran-besaran fasor. Dalam pembahasan mengenai fasor yang telah kita lakukan, *besarnya fasor* menyatakan *nilai puncak* dari sinyal sinus. Akan tetapi dalam analisis rangkaian arus bolak-balik, yang pada umumnya melibatkan analisis daya, pernyataan fasor tegangan dan fasor arus lebih baik dinyatakan dalam nilai *rms*-nya, sehingga pernyataan fasor tegangan dan arus adalah

$$\bar{V} = V_{rms} e^{j\theta_v} \quad \text{dan} \quad \bar{I} = I_{rms} e^{j\theta_i} \quad (14.6)$$

Dengan pernyataan ini, keterkaitan antara besaran fasor dengan daya rata-rata menjadi lebih sederhana. Besarnya daya rata-rata menjadi

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \theta = V_{rms} I_{rms} \cos \theta \quad (14.7)$$

dengan $\theta = \theta_v - \theta_i$, yaitu perbedaan sudut fasa antara fasor tegangan dan fasor arus; dan besarnya daya reaktif menjadi

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sin \theta = V_{rms} I_{rms} \sin \theta \quad (14.8)$$

14.3.1. Daya Kompleks

Selanjutnya, dengan menggunakan fasor *rms*, kita mendefinisikan *daya kompleks* sebagai

$$S = \bar{V} \bar{I}^* \quad (14.9)$$

yang merupakan *perkalian fasor tegangan dengan konjugat dari fasor arus*. Dengan menggunakan definisi ini dan persamaan (14.6), maka daya kompleks pada terminal beban menjadi

$$\begin{aligned} S &= \bar{V} \bar{I}^* = V_{rms} e^{j\theta_v} I_{rms} e^{-j\theta_i} \\ &= V_{rms} I_{rms} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = V_{rms} I_{rms} e^{j\theta} \end{aligned} \quad (14.10)$$

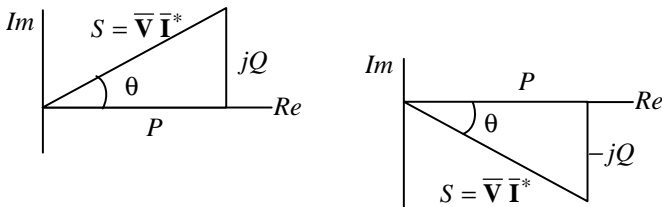
Pernyataan S bentuk polar (14.10) dapat kita tuliskan dalam bentuk sudut siku

$$\begin{aligned} S &= V_{rms} I_{rms} e^{j\theta} = [V_{rms} I_{rms}] \cos \theta + j[V_{rms} I_{rms}] \sin \theta \\ &= P + jQ \end{aligned} \quad (14.11)$$

Jadi, bagian riil dari daya kompleks S adalah daya rata-rata atau kemudian disebut juga *daya nyata*, sedangkan bagian imajinerinya adalah *daya reaktif*. Perlu kita fahami bahwa *daya kompleks bukanlah fasor*, namun ia merupakan besaran kompleks. Pengertian daya kompleks ini sangat bermanfaat jika tegangan dan arus dinyatakan dalam fasor.

14.3.2. Segitiga Daya

Dengan pengertian daya kompleks, kita dapat menggambarkan *segitiga daya*, seperti terlihat pada Gb.14.2.



Gb.14.2. Segitiga Daya.

Pada gambar ini P adalah positif, artinya *alih daya terjadi dari arah sumber ke beban* atau *beban menyerap daya*. Segitiga daya ini bisa

terletak di kuadran pertama atau kuadran keempat, tergantung apakah Q positif atau negatif.

Besar daya kompleks S adalah

$$|S| = V_{rms} I_{rms} \quad (14.12)$$

yang kita sebut juga sebagai *daya tampak* dan mempunyai satuan volt-ampere (VA).

Hubungan antara daya kompleks dan daya rata-rata serta daya reaktif adalah

$$\begin{aligned} S &= P + jQ \\ P &= |S| \cos \theta = V_{rms} I_{rms} \cos \theta \\ Q &= |S| \sin \theta = V_{rms} I_{rms} \sin \theta \end{aligned} \quad (14.13)$$

Daya rata-rata P mempunyai satuan watt (W), sedangkan daya reaktif Q mempunyai satuan volt-ampere-reaktif (VAR).

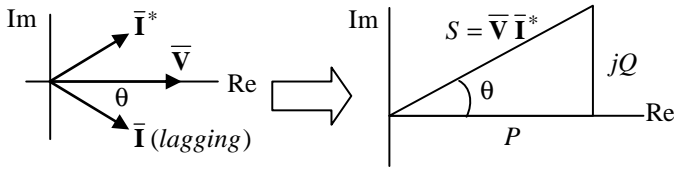
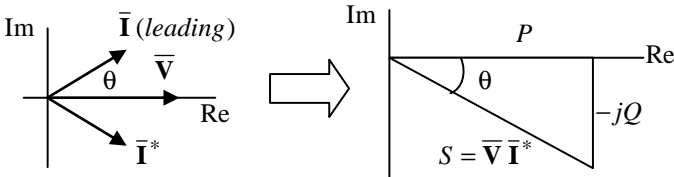
14.3.3. Faktor Daya

Beda sudut fasa antara fasor tegangan dan arus adalah θ , dan $\cos \theta$ disebut *faktor daya*.

$$\text{faktor daya} = \cos \theta = \frac{P}{|S|} \quad (14.14)$$

Sudut θ mempunyai rentang nilai antara -90° sampai $+90^\circ$. Tetapi karena faktor daya adalah $\cos \theta$, maka nilainya *selalu positif*. Walaupun demikian faktor daya ini bisa *lagging* atau *leading*. Faktor daya disebut *lagging* jika segitiga daya berada di kwadran pertama yang berarti bahwa daya reaktif Q bernilai positif. Hal ini terjadi jika fasor arus berada di *belakang* fasor tegangan atau arus *lagging* terhadap tegangan. Beban-bekan industri dan juga perumahan pada umumnya mempunyai faktor daya *lagging*, jadi daya reaktif bernilai positif. Perhatikan Gb.14.3.

Apabila fasor arus *mendahului* fasor tegangan atau arus *leading* terhadap tegangan maka faktor daya disebut *leading*. Dalam hal ini segitiga daya berada di kwadran ke-empat karena daya reaktif Q bernilai negatif. Keadaan ini terjadi apabila beban bersifat kapasitif. Perhatikan pula Gb.14.3.


 Faktor daya *lagging*

 Faktor daya *leading*

Gb.14.3. Fasor Tegangan dan Arus dan Segitiga Daya.

14.4. Daya Kompleks dan Impedansi Beban

Impedansi beban adalah perbandingan antara tegangan beban dan arus beban. Jika tegangan beban adalah \bar{V} , arus beban \bar{I} , dan impedansi beban adalah Z_B , maka

$$Z_B = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad \text{atau} \quad \bar{V} = Z_B \bar{I} \quad (14.15)$$

Dengan hubungan ini maka daya kompleks yang dialihkan ke beban dapat diuraikan sebagai

$$\begin{aligned} S &= \bar{V} \bar{I}^* = Z_B \bar{I} \bar{I}^* = Z_B |\bar{I}|^2 \\ &= (R_B + jX_B) I_{rms}^2 = R_B I_{rms}^2 + jX_B I_{rms}^2 \end{aligned} \quad (14.16)$$

dengan R_B dan X_B masing-masing adalah resistansi dan reaktansi beban. Persamaan (14.16) dapat kita uraikan menjadi

$$S = P + jQ = R_B I_{rms}^2 + jX_B I_{rms}^2 \quad (14.17)$$

Dari (14.17) kita dapat mengambil kesimpulan bahwa

$$P = R_B I_{rms}^2 \quad \text{dan} \quad Q = X_B I_{rms}^2 \quad (14.18)$$

Persamaan pertama (14.18) menunjukkan bahwa daya rata-rata terkait dengan resistansi beban. Nilai P yang positif menunjukkan bahwa seluruh daya rata-rata diserap oleh resistansi beban atau dengan kata lain resistansi bebanlah yang menyerap daya rata-rata.

Persamaan kedua (14.18) menunjukkan bahwa daya reaktif terkait dengan reaktansi beban. Jika daya reaktif Q bernilai positif, maka reaktansi beban juga bernilai positif, yang berarti beban bersifat induktif. Jika Q negatif berarti beban negatif dan ini berarti bahwa beban bersifat kapasitif.

Jika beban berupa resistor murni, maka tidak terdapat perbedaan sudut fasa antara tegangan dan arus beban. Seluruh daya yang dialihkan ke beban adalah daya rata-rata. Untuk keadaan ini,

$$\begin{aligned} S_R &= \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{I}}^* = Z_B \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{I}}^* = (R_B + j0) |\bar{\mathbf{I}}|^2 \\ &= (R_B) |\bar{\mathbf{I}}|^2 = (R_B) I_{rms}^2 \end{aligned} \quad (14.19)$$

Jika beban berupa kapasitor, perbedaan sudut fasa antara tegangan dan arus beban adalah -90° dan daya yang dialihkan ke beban hanya berupa daya reaktif yang negatif. Untuk keadaan ini,

$$\begin{aligned} S_C &= \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{I}}^* = Z_B \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{I}}^* = (0 + jX_C) |\bar{\mathbf{I}}|^2 \\ &= (jX_C) |\bar{\mathbf{I}}|^2 = (jX_C) I_{rms}^2 = \left(-j \frac{1}{\omega C} \right) I_{rms}^2 \end{aligned} \quad (14.20)$$

Jika beban berupa induktor, perbedaan sudut fasa antara tegangan dan arus beban adalah $+90^\circ$ dan daya yang dialihkan ke beban hanya berupa daya reaktif yang positif. Untuk keadaan ini,

$$\begin{aligned} S_L &= \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{I}}^* = Z_B \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{I}}^* = (0 + jX_L) |\bar{\mathbf{I}}|^2 = (jX_L) |\bar{\mathbf{I}}|^2 \\ &= (jX_L) I_{rms}^2 = (j\omega L) I_{rms}^2 \end{aligned} \quad (14.21)$$

Persamaan (14.20) dan (14.21) menunjukkan bahwa daya yang diserap oleh kapasitor maupun induktor merupakan daya reaktif akan tetapi berlawanan tanda. Kapasitor menyerap daya reaktif negatif sedangkan induktor menyerap daya reaktif positif. Jika

suatu beban mengandung baik kapasitor maupun induktor, maka daya reaktif yang diserap beban ini adalah jumlah dari dua daya reaktif yang dalam keadaan tertentu akan saling meniadakan. Hal ini akan kita lihat dalam sub-bab mengenai rangkaian resonansi.

Jika suatu beban bersifat terlalu induktif, artinya terlalu banyak menyerap daya reaktif positif, kebutuhan daya reaktif tersebut dapat dikurangi dengan memasang kapasitor paralel dengan beban. Kapasitor yang diparalelkan itu akan menyerap daya reaktif negatif, sehingga daya reaktif total akan berkurang. Inilah yang dilakukan orang untuk memperbaiki faktor daya beban yang juga akan kita lihat kemudian.

CONTOH-14.1: Pada terminal hubung AB antara seksi sumber dan seksi beban dari suatu rangkaian listrik terdapat tegangan dan arus sebesar

$$\bar{V} = 480\angle +75^\circ \text{ V(rms)} \quad \text{dan} \quad \bar{I} = 8,75\angle +105^\circ \text{ A(rms)}$$

Tentukan daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif, faktor daya, serta impedansi beban.

Solusi :

Daya kompleks adalah

$$\begin{aligned} S &= \bar{V} \bar{I}^* = 480\angle +75^\circ \times 8,75\angle -105^\circ = 4200\angle -30^\circ \\ &= 4200 \cos 30^\circ - j4200 \sin 30^\circ = 3640 - j2100 \text{ VA} \end{aligned}$$

Daya rata-rata dan daya reaktif masing-masing adalah

$$P = 3640 \text{ W} \quad \text{dan} \quad Q = 2100 \text{ VAR}$$

Daya rata-rata ini positif, jadi beban menyerap daya.

Daya reaktif bernilai negatif, jadi faktor daya leading.

$$\text{faktor daya} = \cos(-30) = 0,866$$

Bahwa faktor daya ini leading sebenarnya telah terlihat dari pernyataan fasor arus dan tegangan. Sudut fasa arus, yaitu 105° , lebih besar dari sudut fasa tegangan yang 75° ; jadi arus mendahului tegangan.

Resistansi beban adalah

$$R_B = \frac{P}{I_{rms}^2} = \frac{3640}{(8,75)^2} = 47,5 \, \Omega$$

Reaktansi beban adalah

$$X_B = \frac{Q}{I_{rms}^2} = \frac{-2100}{(8,75)^2} = -27,4 \, \Omega$$

Jadi impedansi beban adalah

$$Z_B = (47,5 - j27,4) \, \Omega$$

Impedansi beban ini bersifat kapasitif. Nilai kapasitansi beban dapat kita cari jika kita mengetahui berapa nilai frekuensi kerja dari sistem ini. Misalkan frekuensinya adalah 50 Hz, maka

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = -27,4 \, \Omega \rightarrow C = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 27,4} = 116 \, \mu\text{F}$$

14.5. Alih Daya

Teorema Tellegen menyatakan bahwa jika v_k mengikuti hukum tegangan Kirchhoff (HTK) dan i_k mengikuti hukum arus Kirchhoff (HAK), maka

$$\sum_{k=1}^N v_k \times i_k = 0$$

Teorema ini menyatakan bahwa di setiap rangkaian listrik harus ada keseimbangan yang tepat antara daya yang diserap oleh elemen pasif dan daya yang diberikan oleh elemen aktif. Hal ini sesuai dengan prinsip konservasi energi.

Dalam analisis di kawasan fasor, kita mengenal daya rata-rata, daya reaktif dan daya kompleks. Sementara itu kita juga mengetahui bahwa kapasitor dan induktor merupakan elemen pasif yang mampu menyerap dan mampu memberikan daya. Bagaimanakah keseimbangan daya antara semua elemen yang ada dalam rangkaian di kawasan fasor ?

Dalam pembahasan alih daya antara sumber dan beban, kita melihat bahwa daya rata-rata P terkait dengan resistansi beban, sedangkan daya reaktif Q terkait dengan reaktansi beban. Jika kita mempersempit tinjauan kita, tidak ke suatu beban besar tetapi hanya

ke satu elemen, kita harus mendapatkan hal yang serupa yaitu bahwa daya rata-rata pada elemen berkaitan dengan resistansi elemen, sedangkan daya reaktif pada elemen berkaitan dengan reaktansi elemen. Ini berarti bahwa resistor hanya menyerap daya rata-rata, sedangkan kapasitor dan induktor hanya menyerap daya reaktif.

Catatan: Kita menggunakan istilah “menyerap daya” untuk kapasitor dan induktor sesuai dengan konvensi pasif yang kita anut; daya yang diserap ini boleh positif ataupun negatif. Jika daya positif berarti elemen sedang menyerap daya, jika daya negatif berarti elemen sedang memberikan daya.

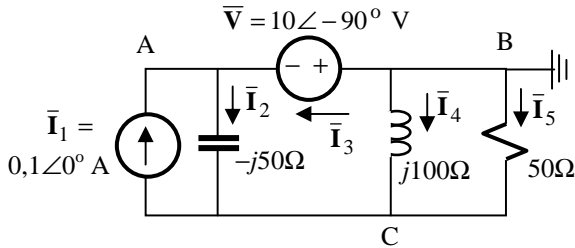
Jadi daya rata-rata yang diberikan oleh sumber akan diserap oleh resistor-resistor sedangkan daya reaktif yang diberikan oleh sumber diserap oleh kapasitor dan induktor. Penyerapan daya oleh kapasitor dan induktor ini bisa saja tidak serempak; artinya pada suatu saat tertentu sebagian elemen sedang menyerap sementara yang lain sedang memberikan daya.

Jelaslah sekarang, kemana mengalirnya daya rata-rata dan kemana pula mengalirnya daya reaktif. Oleh karena itu daya rata-rata dan daya reaktif dapat digabungkan kedalam pengertian daya kompleks, dan muncullah *prinsip konservasi daya kompleks (principle of conservation of complex power)*, yang berbunyi

Dalam rangkaian linier arus bolak-balik keadaan mantap, jumlah daya kompleks yang diberikan oleh sumber bebas, sama dengan jumlah daya kompleks yang diserap oleh elemen-elemen dalam rangkaian.

Prinsip konservasi daya kompleks dalam analisis di kawasan fasor ini mengingatkan kita pada teorema Tellegen yang berlaku di kawasan waktu.

CONTOH-14.2: (a) Carilah daya kompleks yang diberikan oleh masing-masing sumber serta daya totalnya pada rangkaian berikut ini. (b) Tentukan pula daya yang diserap oleh resistor, kapasitor dan induktor.


Solusi :

Dengan mengambil simpul B sebagai simpul referensi, simpul A menjadi terikat dan tinggalah simpul C yang perlu kita cari tegangannya.

$$\bar{V}_C \left[\frac{1}{50} + \frac{1}{j100} + \frac{1}{-j50} \right] - \bar{V}_A \left[\frac{1}{-j50} \right] + 0,1\angle 0^\circ = 0 \text{ atau}$$

$$\bar{V}_C [2 + j1] - \bar{V}_A [j2] = -10\angle 0^\circ$$

Karena $\bar{V}_A = -\bar{V} = -10\angle -90^\circ = 10\angle 90^\circ \text{ V}$, maka

$$\bar{V}_C [2 + j1] - 2 \times 10\angle (90^\circ + 90^\circ) = -10\angle 0^\circ$$

$$\Rightarrow \bar{V}_C = \frac{-30}{2 + j1} = -12 + j6 \text{ V}$$

Daya kompleks yang “diserap” oleh sumber arus adalah

$$S_i = (\bar{V}_C - \bar{V}_A) \bar{I}_1^* = [-12 + j6 - j10] \times 0,1\angle 0^\circ = -1,2 - j0,4 \text{ VA}$$

Untuk menghitung daya kompleks yang diberikan oleh sumber tegangan kita harus menghitung arus yang melalui sumber ini yaitu \bar{I}_3 .

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_2 - \bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_A - \bar{V}_C}{-j50} = \frac{10\angle 90^\circ - (-12 + j6)}{-j50} = \frac{j10 + 12 - j6}{-j50}$$

$$= -0,08 + j0,24 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \bar{I}_3 = \bar{I}_2 - \bar{I}_1 = -0,08 + j0,24 - 0,1\angle 0^\circ = -0,18 + j0,24 \text{ A}$$

Daya kompleks yang “diserap” oleh sumber tegangan adalah

$$\begin{aligned} S_v &= \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{I}}_3^* = 10 \angle -90^\circ \times (-0,18 - j0,24) \\ &= -j10 \times (-0,18 - j0,24) = -2,4 + j1,8 \text{ VA} \end{aligned}$$

Daya kompleks total yang “*diserap*” oleh kedua sumber adalah

$$S_{tot} = S_i + S_v = -1,2 - j0,4 - 2,4 + j1,8 = -3,6 + j1,4 \text{ VA}$$

Daya kompleks total ini mengandung komponen rata-rata sebesar 3,6 W ; dan sebagaimana telah kita bahas, daya rata-rata ini harus diserap oleh resistor yang ada pada rangkaian ini yaitu resistor 50 Ω . Kita dapat memastikan hal ini dengan menghitung arus yang melalui resistor, yaitu $\bar{\mathbf{I}}_5$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_5 &= \frac{-\bar{\mathbf{V}}_C}{50} = \frac{12 - j6}{50} = 0,24 - j0,12 = 0,268 \angle 26,6^\circ \text{ A} \\ \Rightarrow P_R &= R I_{rms}^2 = R |\bar{\mathbf{I}}_5|^2 = 50 \times (0,268)^2 = 3,6 \text{ W} \end{aligned}$$

Daya reaktif yang diserap oleh kapasitor adalah

$$Q_C = X_C I_{2rms}^2 = (-50) |\bar{\mathbf{I}}_2|^2 = -50(0,08^2 + 0,24^2) = -3,2 \text{ VAR}$$

Arus yang melalui induktor adalah

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_4 &= -\bar{\mathbf{I}}_3 - \bar{\mathbf{I}}_5 = -(-0,18 + j0,24 + 0,24 - j0,12) \\ &= -0,06 - j0,12 \text{ A} \end{aligned}$$

dan daya reaktif yang diserap induktor adalah

$$Q_L = X_L |\bar{\mathbf{I}}_4|^2 = 100(0,06^2 + 0,12^2) = 1,8 \text{ VAR}$$

Total daya kompleks yang diserap oleh resistor, kapasitor, dan induktor adalah

$$S_{tot \text{ beban}} = P_R + jQ_C + jQ_L = 3,6 - j3,2 + j1,8 = 3,6 - j1,4 \text{ VA}$$

Nilai ini sesuai dengan daya yang *diberikan* oleh kedua sumber, yaitu

$$S_{tot \text{ dari sumber}} = -S_{tot} = -(-3,6 + j1,4) \text{ VA}$$

Dengan ini terbukti pula konservasi daya kompleks yang dikemukakan di depan.

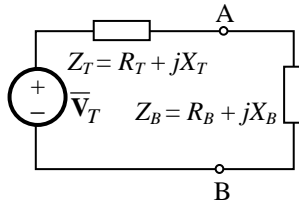
14.6. Alih Daya Maksimum

Telah disebutkan di depan bahwa persoalan alih daya maksimum banyak dijumpai dalam sistem komunikasi. Kita berusaha untuk mengalihkan daya sebanyak mungkin dari sumber ke beban. Hal ini tidak berarti bahwa efisiensi alih daya menjadi tinggi, bahkan sebaliknya.

14.6.1. Alih Daya Maksimum - Cara Penyesuaian Impedansi

Pada cara ini kita menggunakan rangkaian ekuivalen Thévenin untuk seksi sumber sedangkan rangkaian beban kita sesuaikan sedemikian rupa sehingga terjadi kesesuaian antara impedansi beban dan impedansi Thévenin.

Rangkaian ekuivalen Thévenin untuk rangkaian arus bolak-balik terdiri dari sumber tegangan Thévenin \bar{V}_T (dalam bentuk fasor) yang disertai dengan impedansi $Z_T = R_T + jX_T$. Sementara itu seksi beban dinyatakan oleh impedansi beban $Z_B = R_B + jX_B$ dengan R_B dan X_B yang harus kita sesuaikan untuk memperoleh alih daya maksimum. Lihat Gb.14.4.



Gb.16.4. Sumber dan beban.

Daya rata-rata yang dialihkan melalui terminal hubung AB (daya pada beban) adalah

$$P_B = |\bar{\mathbf{I}}|^2 R_B \quad (14.22)$$

Karena Z_T dan Z_B terhubung seri, arus \mathbf{I} dapat dengan mudah kita peroleh yaitu

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{V}_T}{Z_T + Z_B} = \frac{\bar{V}_T}{(R_T + R_B) + j(X_T + X_B)}$$

$$|\bar{\mathbf{I}}| = \frac{|\bar{V}_T|}{|(R_T + R_B) + j(X_T + X_B)|} = \frac{|\bar{V}_T|}{\sqrt{(R_T + R_B)^2 + (X_T + X_B)^2}}$$

sehingga daya pada beban adalah

$$P_B = |\bar{\mathbf{I}}|^2 R_B = \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2 R_B}{(R_T + R_B)^2 + (X_T + X_B)^2} \quad (14.23)$$

Jika kita anggap bahwa resistansi beban konstan, maka apabila kita ingin agar P_B menjadi tinggi, kita harus mengusahakan agar $X_B = -X_T$ pada persamaan (14.23). Hal ini selalu mungkin kita lakukan karena reaktansi dapat dibuat bernilai negatif ataupun positif. Dengan menyesuaikan reaktansi beban, maka kita dapat membuat impedansi beban merupakan konjugat dari impedansi Thévenin.

Dengan penyesuaian impedansi beban demikian ini kita dapat memperoleh alih daya yang tinggi. Langkah ini akan membuat impedansi keseluruhan yang dilihat oleh sumber tegangan Thévenin tinggallah resistansi $(R_T + R_B)$ saja.

Dengan membuat $X_B = -X_T$, maka besarnya daya rata-rata pada beban adalah

$$P_B = \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2 R_B}{(R_T + R_B)^2} \quad (14.24)$$

Inilah daya pada beban paling tinggi yang dapat diperoleh jika R_B bernilai konstan. Jika R_B dapat diubah nilainya, maka dengan menerapkan persyaratan untuk alih daya maksimum pada rangkaian resistif yang telah pernah kita bahas yaitu bahwa resistansi beban harus sama dengan resistansi Thévenin, maka persyaratan agar terjadi alih daya maksimum pada rangkaian arus bolak-balik haruslah

$$R_B = R_T \quad \text{dan} \quad X_B = -X_T \quad (14.25)$$

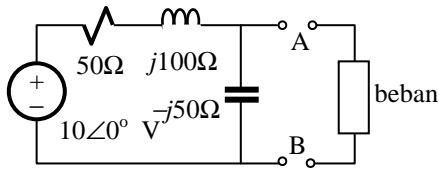
Jika kondisi ini dicapai maka besarnya daya maksimum yang dialihkan adalah

$$P_{BMAX} = \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2 R_B}{(2R_B)^2} = \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2}{4R_B} \quad (14.26)$$

Perhatikanlah bahwa formula untuk terjadinya alih daya maksimum ini diperoleh dengan kondisi sumber yang tetap sedangkan impedansi beban disesuaikan untuk memperoleh kondisi yang kita sebut sebagai *kesesuaian konjugat*.

CONTOH-14.3:

Terminal AB pada rangkaian berikut ini merupakan terminal hubung untuk menyambungkan beban ke seksi sumber. Hitunglah berapa daya maksimum yang dapat diperoleh dari rangkaian seksi sumber ini.

**Solusi :**

Untuk memecahkan persoalan ini, kita mencari lebih dulu rangkaian ekuivalen Thévenin dari seksi sumber tersebut. Tegangan dan impedansi Thévenin adalah

$$\bar{V}_T = \frac{-j50}{50 + j100 - j50} \times 10\angle 0^\circ = \frac{-j1}{1 + j1} \times 10 = -5 - j5 \text{ V}$$

$$Z_T = \frac{-j50(50 + j100)}{-j50 + 50 + j100} = 25 - j75 \text{ } \Omega$$

Agar terjadi alih daya maksimum maka impedansi beban haruslah $Z_B = 25 + j75 \text{ } \Omega$. Daya maksimum yang dapat diperoleh dari terminal AB adalah

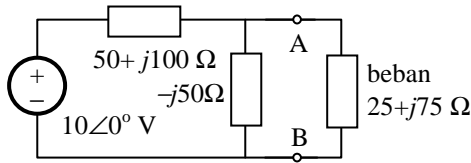
$$P_{MAX} = \frac{|\bar{V}_T|^2}{4R_B} = \frac{|-5 - j5|^2}{4 \times 25} = 0,5 \text{ W}$$

Pemahaman :

Arus yang melalui beban sama dengan arus yang diberikan oleh sumber ekuivalen Thévenin, yaitu

$$\bar{I}_B = \frac{\bar{V}_T}{Z_T + Z_B} = \frac{-5 - j5}{50} = -0,1 - j0,1 = \sqrt{0,02} \angle -135^\circ \text{ A}$$

Arus yang dikeluarkan oleh sumber sesungguhnya, dapat dihitung dari rangkaian aslinya jika Z_B dihubungkan ke terminal AB seperti tergambar di bawah ini.



Dari rangkaian inilah arus sumber harus kita hitung, yang akan memberikan

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{I}}_s &= \frac{10\angle 0^\circ}{50 + j100 + \frac{(-j50)(25 + j75)}{-j50 + 25 + j75}} \\ &= \frac{10}{50 + j100 + \frac{-j50 + 150}{1 + j1}} = 0,1\angle 0^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Daya yang diberikan oleh sumber adalah

$$S = \bar{\mathbf{V}}_s \bar{\mathbf{I}}_s^* = 10\angle 0^\circ \times 0,1\angle 0^\circ = 1 + j0 \text{ VA}$$

$$P_s = 50|\bar{\mathbf{I}}_s|^2 + 25|\bar{\mathbf{I}}_B|^2 = 50 \times (0,1)^2 + 25 \times (\sqrt{0,02})^2 = 1 \text{ W}$$

Daya rata-rata $P_s = 1 \text{ W}$ yang dikeluarkan oleh sumber ini diserap oleh resistor 50Ω di rangkaian sumber dan resistor 25Ω di rangkaian beban.

Untuk memungkinkan penyesuaian impedansi seksi beban kepada impedansi seksi sumber, seksi beban harus mengandung resistansi, kapasitansi ataupun induktansi yang dapat diubah nilainya. Oleh karena itu diperlukan resistor, kapasitor, dan induktor variabel di sisi beban.

14.6.2. Alih Daya Maksimum Dengan Sisipan Transformator

Penyesuaian impedansi beban terhadap impedansi sumber dapat dilakukan dengan menempatkan transformator antara sumber dan beban. Kita telah membahas transformator ideal, yang memberikan kesamaan-kesamaan

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{dan} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Di kawasan fasor, relasi tersebut menjadi

$$\frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\bar{\mathbf{V}}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{dan} \quad \frac{\bar{\mathbf{I}}_1}{\bar{\mathbf{I}}_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (14.27)$$

Konsekuensi dari (14.27) adalah bahwa impedansi yang terlihat di sisi primer adalah

$$Z_1 = \frac{\bar{\mathbf{V}}_1}{\bar{\mathbf{I}}_1} = \frac{(N_1/N_2)\bar{\mathbf{V}}_2}{(N_2/N_1)\bar{\mathbf{I}}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{\bar{\mathbf{V}}_2}{\bar{\mathbf{I}}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2 = a^2 Z_2 \quad (14.28)$$

Jika impedansi beban adalah $Z_B = R_B + jX_B$, maka dengan menempatkan transformator antara seksi sumber dan seksi beban seksi sumber akan melihat impedansi sebesar $Z_1 = R_1 + jX_1 = a^2(R_B + jX_B)$. Dengan sisipan transformator ini kita tidak dapat membuat penyesuaian hanya pada reaktansi X_1 melainkan penyesuaian pada impedansi Z_1 . Kita tidak melakukan perubahan apapun pada impedansi beban. Jika beban bersifat kapasitif ataupun induktif ia akan tetap sebagaimana adanya sehingga penyesuaian konjugat tidak dapat kita lakukan. Jika \mathbf{V}_T dan Z_T adalah tegangan dan impedansi Thévenin dari seksi sumber, dan Z_1 kita tuliskan sebagai $Z_1 = |Z_1| \cos \theta + j|Z_1| \sin \theta$, maka daya yang dialihkan ke beban melalui transformator adalah

$$P_B = \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2 |Z_1| \cos \theta}{(R_T + |Z_1| \cos \theta)^2 + (X_T + |Z_1| \sin \theta)^2} \quad (14.29)$$

Kita harus mencari nilai $|Z_1|$ agar P_B maksimum. Kita turunkan P_B terhadap $|Z_1|$ dan kita samakan dengan nol. Jika ini kita lakukan akan kita peroleh

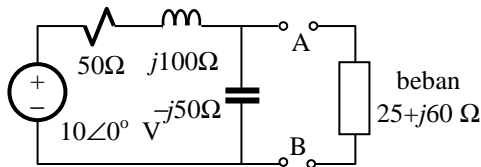
$$|Z_1| = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = |Z_T| \quad (14.30)$$

Dengan demikian maka $|Z_1| = a^2 |Z_B| = |Z_T|$ sehingga persyaratan untuk terjadinya alih daya maksimum adalah

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{|Z_T|}{|Z_B|}} \quad (14.31)$$

Alih daya maksimum yang kita peroleh dengan cara sisipan transformator ini lebih kecil dari alih daya maksimum yang kita peroleh dengan cara penyesuaian impedansi. Hal ini dapat dimaklumi karena dalam sisipan transformator tidak terjadi penyesuaian konjugat. Walaupun daya beban maksimum lebih kecil, kita tidak memerlukan elemen-elemen variabel pada beban; kita cukup menyediakan transformator dengan rasio transformasi a yang sesuai. Dalam cara ini yang kita peroleh bukanlah alih daya maksimum melainkan efisiensi maksimum dari alih daya.

CONTOH-14.4: Terminal AB pada rangkaian berikut ini merupakan terminal hubung untuk menyambungkan beban ke seksi sumber. Hitunglah rasio transformasi transformator yang harus disisipkan pada terminal AB agar alih daya terjadi dengan efisiensi maksimum dan hitunglah berapa daya yang dapat diperoleh beban pada kondisi ini.



Solusi :

Tegangan dan impedansi Thévenin telah dihitung pada contoh sebelumnya, yaitu

$$\bar{V}_T = -5 - j5 \text{ V} \quad \text{dan} \quad Z_T = 25 - j75 \Omega$$

Agar alih daya terjadi dengan efisiensi maksimum maka rasio transformasi dari transformator yang diperlukan adalah

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{|Z_T|}{|Z_B|}} = \sqrt{\frac{\sqrt{25^2 + 75^2}}{\sqrt{25^2 + 60^2}}} = 1,1028 \approx 1,1$$

Daya maksimum yang dapat diperoleh dari terminal AB adalah

$$\begin{aligned}
 P_B &= \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2 |Z_1| \cos \theta}{(R_T + |Z_1| \cos \theta)^2 + (X_T + |Z_1| \sin \theta)^2} \\
 &= \frac{|\bar{\mathbf{V}}_T|^2 a^2 R_B}{(R_T + a^2 R_B)^2 + (X_T + a^2 X_B)^2} \\
 &= \frac{50 \times 1,216 \times 25}{(25 + 1,216 \times 25)^2 + (-75 + 1,216 \times 60)^2} = 0,49 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Pemahaman:

Perhatikanlah bahwa resistansi beban dalam contoh ini sama dengan resistansi beban dalam contoh sebelumnya. Seandainya digunakan cara penyesuaian impedansi, reaktansi beban dapat dibuat menjadi $j75$ dan daya beban menjadi $0,5 \text{ W}$. Dengan cara sisipan transformator, daya yang dapat diserap beban sedikit lebih kecil dibanding dengan daya maksimum beban jika cara penyesuaian impedansi digunakan.

Bagaimanakah jika impedansi beban pada contoh ini bukan $(25 + j60) \Omega$ melainkan $(25 - j60) \Omega$? Dalam hal ini $|Z_B|$ tidak berubah sehingga nilai a tetap seperti yang telah dihitung yaitu $a = 1,1$ atau $a^2 = 1,21$. Daya yang diserap beban menjadi

$$P_B = \frac{50 \times 1,21 \times 25}{(25 + 1,21 \times 25)^2 + (-75 - 1,21 \times 60)^2} = 0,06 \text{ W}$$

Seandainya tidak disisipkan transformator, daya pada beban hampir sama besar yaitu

$$P_B = \frac{50 \times 25}{(25 + 25)^2 + (-75 - 60)^2} = 0,06 \text{ W}$$

Jadi dalam hal terakhir ini, di mana impedansi beban bersifat kapasitif sedangkan impedansi Thévenin juga kapasitif, penyisipan transformator tidaklah memperbaiki alih daya. Penyisipan transformator akan memperbaiki alih daya jika impedansi Thévenin dan impedansi beban memiliki sifat yang berlawanan; jika yang satu kapasitif yang lain haruslah induktif. Rasio transformasi dari transformator akan membuat impedansi

beban mendekati konjugat dari impedansi Thévenin, walaupun tidak dapat persis sama.

Soal-Soal

1. Hitunglah daya rata-rata, daya reaktif, dan faktor daya pada suatu piranti, jika tegangan dan arusnya adalah

$$a). v = 100\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$i = 2\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$$

$$b). \bar{V} = 100\angle 45^\circ \text{ V rms} ;$$

$$\bar{I} = 2\angle -30^\circ \text{ A rms}$$

2. Hitunglah faktor daya (lagging atau leading), jika diketahui daya kompleks

$$a). S = 1000 + j750 \text{ VA}$$

$$b). S = 800 - j600 \text{ VA}$$

$$c). S = -600 + j800 \text{ VA}$$

$$d). |S| = 10 \text{ kVA}, Q = -8 \text{ kVAR}, \cos\theta > 0.$$

$$e). |S| = 10 \text{ kVA}, P = 8 \text{ kW}, \cos\theta > 0.$$

3. Hitunglah daya rata-rata, daya reaktif, arus beban, serta impedansi beban jika pada tegangan 2400 V rms, beban menyerap daya kompleks 15 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*.
4. Hitunglah daya rata-rata, daya reaktif, arus beban, serta impedansi beban jika pada tegangan 2400 V rms, beban menyerap daya 10 kW pada faktor daya 0,8 *lagging*.
5. Pada tegangan 220 V rms, sebuah beban dialiri arus 22 A rms pada faktor daya 0,9 *lagging*. Hitunglah daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif, serta impedansi beban.
6. Sebuah resistor 100 Ω terhubung seri dengan induktor 100 mH. Hitunglah daya total yang diserap, faktor dayanya, daya yang diserap masing-masing elemen, jika dihubungkan pada sumber tegangan 220 V rms, 50 Hz.

7. Sebuah resistor $100\ \Omega$ terhubung paralel dengan kapasitor $50\ \mu\text{F}$. Hitunglah daya yang diserap beban serta faktor dayanya jika dihubungkan pada sumber tegangan $220\ \text{V rms}$, $50\ \text{Hz}$.
8. Sebuah beban berupa hubungan paralel antara sebuah resistor dan sebuah kapasitor. Pada tegangan $220\ \text{V rms}$, $50\ \text{Hz}$, beban ini menyerap daya kompleks $S = 550 - j152\ \text{VA}$. Berapakah nilai resistor dan kapasitor ?
9. Sebuah beban berupa resistor $40\ \Omega$ terhubung paralel dengan induktor yang reaktansinya $30\ \Omega$ pada frekuensi $50\ \text{Hz}$. Beban ini dicatu dari sebuah sumber tegangan $240\ \text{V rms}$, $50\ \text{Hz}$, melalui saluran yang memiliki impedansi $1 + j10\ \Omega$ per saluran. Hitunglah arus di saluran (rms), daya kompleks yang diserap beban, daya kompleks yang diserap saluran.
10. Pada soal nomer 9 berapakah faktor daya pada beban dan faktor daya di sisi sumber. Hitung pula tegangan pada beban.

BAB 15 Penyediaan Daya

Dengan mempelajari analisis daya di bab ini, kita akan

- memahami cara kerja transformator;
- mampu menggambarkan diagram fasor.
- mampu melakukan perhitungan-perhitungan pada transformator satu-fasa;
- mampu menghitung penyediaan daya pada sumber dan tegangan sumber untuk mencatu beban;
- mampu menentukan keperluan kapasitor dalam upaya perbaikan faktor daya.

15.1. Transformator

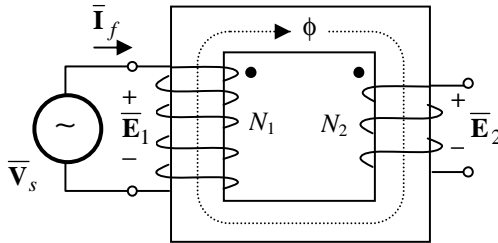
Transformator banyak digunakan dalam teknik elektro. Dalam sistem komunikasi, transformator digunakan pada rentang frekuensi audio sampai frekuensi radio dan video, untuk berbagai keperluan. Kita mengenal misalnya *input transformers*, *interstage transformers*, *output transformers* pada rangkaian radio dan televisi. Transformator juga dimanfaatkan dalam sistem komunikasi untuk penyesuaian impedansi agar tercapai transfer daya maksimum.

Dalam penyaluran daya listrik banyak digunakan transformator berkapasitas besar dan juga bertegangan tinggi. Dengan transformator tegangan tinggi ini penyaluran daya listrik dapat dilakukan dalam jarak jauh dan susut daya pada jaringan dapat ditekan. Di jaringan distribusi listrik banyak digunakan transformator penurun tegangan, dari tegangan menengah 20 kV menjadi 380 V untuk distribusi ke rumah-rumah dan kantor-kantor pada tegangan 220 V. Transformator daya tersebut pada umumnya merupakan transformator tiga-fasa. Dalam pembahasan ini kita akan melihat transformator satu-fasa lebih dulu.

Kita telah mempelajari transformator ideal pada waktu membahas rangkaian listrik. Berikut ini kita akan melihat transformator *tidak ideal* sebagai piranti pemroses daya. Akan tetapi kita hanya akan membahas hal-hal yang fundamental saja, karena transformator akan dipelajari secara lebih mendalam pada pelajaran mengenai mesin-mesin listrik.

15.1.1. Transformator Dua Belitan Tak Berbeban

Hubungan transformator dua belitan tidak berbeban terlihat pada Gb.15.1.



Gb.15.1. Transformator dua belitan.

Jika fluksi di rangkaian magnetiknya adalah

$$\phi = \Phi_{maks} \sin \omega t$$

maka fluksi ini akan menginduksikan tegangan di belitan primer sebesar

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \Phi_{maks} \omega \cos \omega t \quad (15.1)$$

atau dalam bentuk fasor

$$\bar{E}_1 = E_1 \angle 0^\circ = \frac{N_1 \omega \Phi_{maks}}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ ; \quad E_1 = \text{nilai efektif} \quad (15.2)$$

Karena $\omega = 2\pi f$ maka

$$E_1 = \frac{2\pi f N_1}{\sqrt{2}} \Phi_{maks} = 4.44 f N_1 \Phi_{maks} \quad (15.3)$$

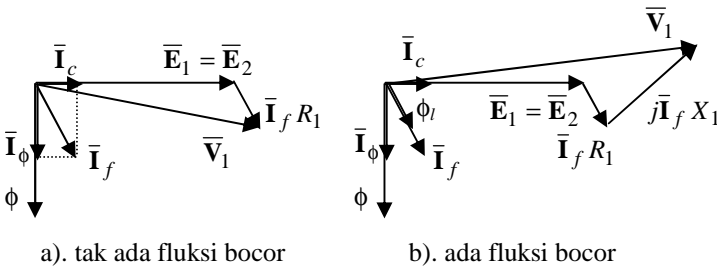
Di belitan sekunder, fluksi tersebut menginduksikan tegangan sebesar

$$E_2 = 4.44 f N_2 \Phi_{maks} \quad (15.4)$$

Dari (15.3) dan (15.4) kita peroleh

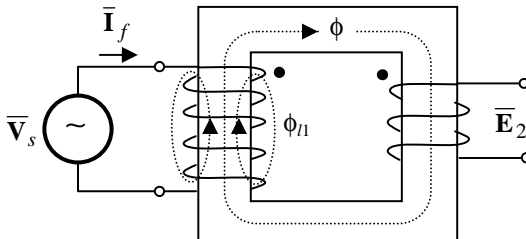
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \equiv a = \text{rasio transformasi} \quad (15.5)$$

Perhatikanlah bahwa \bar{E}_1 sefasa dengan \bar{E}_2 karena dibangkitkan (diinduksikan) oleh fluksi yang sama. Karena \bar{E}_1 mendahului ϕ dengan sudut 90° maka \bar{E}_2 juga mendahului ϕ dengan sudut 90° . Jika rasio transformasi $a = 1$, dan resistansi belitan primer adalah R_1 , diagram fasor tegangan dan arus adalah seperti ditunjukkan oleh Gb.15.2.a. Arus \bar{I}_f adalah arus magnetisasi, yang dapat dipandang sebagai terdiri dari dua komponen yaitu \bar{I}_ϕ (90° dibelakang \bar{E}_1) yang menimbulkan ϕ dan \bar{I}_c (sefasa dengan \bar{E}_1) yang mengatasi rugi-rugi inti. Resistansi belitan R_1 dalam diagram fasor ini muncul sebagai tegangan jatuh $\bar{I}_f R_1$.



Gb.15.2. Diagram fasor transformator tak berbeban

Fluksi Bocor. Fluksi di belitan primer transformator dibangkitkan oleh arus yang mengalir di belitan primer. Dalam kenyataan, tidak semua fluksi magnet yang dibangkitkan tersebut akan melingkupi baik belitan primer maupun sekunder. Selisih antara fluksi yang dibangkitkan oleh belitan



Gb.15.3. Transformator tak berbeban. Fluksi bocor belitan primer.

primer dengan *fluksi bersama* (fluksi yang melingkupi kedua belitan) disebut *fluksi bocor*. Fluksi bocor transformator tak berbeban ini hanya melingkupi belitan primer saja dan tidak seluruhnya berada dalam inti transformator tetapi juga melalui udara. (Lihat Gb.15.3). Oleh karena itu reluktansi yang dihadapi oleh fluksi bocor ini praktis adalah reluktansi udara. Dengan demikian fluksi bocor tidak mengalami gejala histerisis sehingga fluksi ini sefasa dengan arus magnetisasi. Hal ini ditunjukkan dalam diagram fasor Gb.15.2.b. Fluksi bocor, secara tersendiri akan membangkitkan tegangan induksi di belitan primer (seperti halnya ϕ menginduksikan \bar{E}_1). Tegangan induksi ini 90° mendahului ϕ_{l1} (seperti halnya \bar{E}_1 90° mendahului ϕ) dan dapat dinyatakan sebagai suatu *tegangan jatuh ekuivalen*, \bar{E}_{l1} , di rangkaian primer dan dinyatakan sebagai

$$\bar{E}_{l1} = jI_f X_1 \quad (15.6)$$

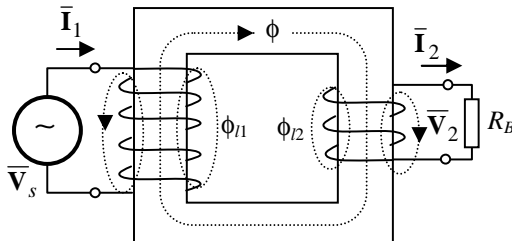
dengan X_1 disebut *reaktansi bocor* rangkaian primer. Hubungan tegangan dan arus di rangkaian primer menjadi

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 R_1 + \bar{E}_{l1} = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 R_1 + j\bar{I}_1 X_1 \quad (15.7)$$

Diagram fasor dengan memperhitungkan adanya fluksi bocor ini adalah Gb.15.2.b.

15.1.2. Transformator Berbeban

Rangkaian transformator berbeban resistif, R_B , diperlihatkan oleh Gb.15.4. Tegangan induksi \bar{E}_2 (yang telah timbul dalam keadaan tranformator tidak berbeban) akan menjadi sumber di rangkaian sekunder dan memberikan arus sekunder \bar{I}_2 . Arus \bar{I}_2 ini membangkitkan fluksi



Gb.15.4. Transformator berbeban.

berlawanan arah dengan fluksi bersama ϕ dan sebagian akan bocor (kita sebut *fluksi bocor sekunder*). Fluksi bocor ini, ϕ_{l2} , sefasa dengan $\bar{\mathbf{I}}_2$ dan menginduksikan tegangan $\bar{\mathbf{E}}_{l2}$ di belitan sekunder yang 90° mendahului ϕ_{l2} . Seperti halnya untuk belitan primer, tegangan $\bar{\mathbf{E}}_{l2}$ ini diganti dengan suatu besaran ekuivalen yaitu *tegangan jatuh ekuivalen* pada *reaktansi bocor sekunder* X_2 di rangkaian sekunder. Jika resistansi belitan sekunder adalah R_2 , maka untuk rangkaian sekunder kita peroleh hubungan

$$\bar{\mathbf{E}}_2 = \bar{\mathbf{V}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_2 R_2 + \bar{\mathbf{E}}_{l2} = \bar{\mathbf{V}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_2 R_2 + j\bar{\mathbf{I}}_2 X_2 \quad (15.8)$$

dengan $\bar{\mathbf{V}}_2$ adalah tegangan pada beban R_B .

Sesuai dengan hukum Lenz, arus sekunder membangkitkan fluksi yang melawan fluksi bersama. Oleh karena itu fluksi bersama akan cenderung mengecil. Hal ini akan menyebabkan tegangan induksi di belitan primer juga cenderung mengecil. Akan tetapi karena belitan primer terhubung ke sumber yang tegangannya tak berubah, maka arus primer akan naik. Jadi arus primer yang dalam keadaan transformator tidak berbeban hanyalah arus magnetisasi $\bar{\mathbf{I}}_f$, bertambah menjadi $\bar{\mathbf{I}}_1$ setelah transformator berbeban. Pertambahan arus ini haruslah sedemikian rupa sehingga fluksi bersama ϕ dipertahankan dan $\bar{\mathbf{E}}_1$ juga tetap seperti semula. Dengan demikian maka persamaan rangkaian primer (15.7) tetap terpenuhi.

Pertambahan arus primer dari $\bar{\mathbf{I}}_f$ menjadi $\bar{\mathbf{I}}_1$ adalah untuk mengimbangi fluksi lawan yang dibangkitkan oleh $\bar{\mathbf{I}}_2$ sehingga ϕ dipertahankan. Jadi haruslah

$$N_1(\bar{\mathbf{I}}_1 - \bar{\mathbf{I}}_f) - N_2(\bar{\mathbf{I}}_2) = 0 \quad (15.9)$$

Pertambahan arus primer $(\bar{\mathbf{I}}_1 - \bar{\mathbf{I}}_f)$ disebut arus penyeimbang yang akan mempertahankan ϕ . Makin besar arus sekunder, makin besar pula arus penyeimbang yang diperlukan yang berarti makin besar pula arus primer. Dengan cara inilah terjadinya transfer daya dari primer ke sekunder. Dari (15.9) kita peroleh arus magnetisasi

$$\bar{\mathbf{I}}_f = \bar{\mathbf{I}}_1 - \frac{N_2}{N_1}(\bar{\mathbf{I}}_2) = \bar{\mathbf{I}}_1 - \frac{\bar{\mathbf{I}}_2}{a} \quad (15.10)$$

15.1.3. Diagram Fasor

Dengan persamaan (15.7) dan (15.8) kita dapat menggambarkan secara lengkap diagram fasor dari suatu transformator. Penggambaran kita mulai dari belitan sekunder dengan langkah-langkah sebagai berikut.

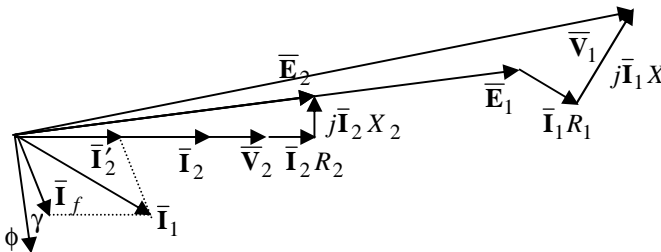
- Gambarkan \bar{V}_2 dan \bar{I}_2 . Untuk beban resistif, \bar{I}_2 sefasa dengan \bar{V}_2 . Selain itu kita dapat gambarkan $\bar{I}'_2 = \bar{I}_2 / a$ yaitu besarnya arus sekunder jika dilihat dari sisi primer.
- Dari \bar{V}_2 dan \bar{I}_2 kita dapat menggambarkan \bar{E}_2 sesuai dengan persamaan (15.8) yaitu

$$\bar{E}_2 = \bar{V}_2 + \bar{I}_2 R_2 + \bar{E}_{l2} = \bar{V}_2 + \bar{I}_2 R_2 + j\bar{I}_2 X_2$$

Sampai di sini kita telah menggambarkan diagram fasor rangkaian sekunder.

- Untuk rangkaian primer, karena \bar{E}_1 sefasa dengan \bar{E}_2 maka \bar{E}_1 dapat kita gambarkan yang besarnya $\bar{E}_1 = a\bar{E}_2$.
- Untuk menggambarkan arus magnetisasi \bar{I}_f kita gambarkan lebih dulu ϕ yang tertinggal 90° dari \bar{E}_1 . Kemudian kita gambarkan \bar{I}_f yang mendahului ϕ dengan sudut histerisis γ . Selanjutnya arus belitan primer adalah $\bar{I}_1 = \bar{I}_f + \bar{I}'_2$.
- Diagram fasor untuk rangkaian primer dapat kita lengkapi sesuai dengan persamaan (15.7), yaitu

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 R_1 + \bar{E}_{l1} = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 R_1 + j\bar{I}_1 X$$



Gb.15.5. Diagram fasor lengkap, transformator berbeban resistif ($a > 1$).

Dengan demikian lengkaplah diagram fasor transformator berbeban. Gb.15.5. adalah contoh diagram fasor yang dimaksud, yang dibuat dengan mengambil rasio transformasi $N_1/N_2 = a > 1$.

CONTOH-15.1: Belitan primer suatu transformator yang dibuat untuk tegangan 220 V(rms) mempunyai jumlah lilitan 160. Belitan ini dilengkapi dengan titik tengah (*center tap*). a). Berapa persenkah besar fluksi maksimum akan berkurang jika tegangan yang kita terapkan pada belitan primer adalah 110 V(rms)? b). Berapa persenkah pengurangan tersebut jika kita menerapkan tegangan 55 V (rms) pada setengah belitan primer? c). Berapa persenkah pengurangan tersebut jika kita menerapkan tegangan 110 V (rms) pada setengah belitan primer? d). Jika jumlah lilitan di belitan sekunder adalah 40, bagaimanakah tegangan sekunder dalam kasus-kasus tersebut di atas?

Solusi :

- a). Dengan mengabaikan resistansi belitan, fluksi maksimum Φ_m adalah

$$\Phi_m = \frac{E_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} = \frac{V_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} = \frac{220 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Jika tegangan 110 V diterapkan pada belitan primer, maka

$$\Phi'_m = \frac{V'_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} = \frac{110 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Penurunan fluksi maksimum adalah 50 %, $\Phi'_m = \Phi_m / 2$.

- b). Jika tegangan 55 V diterapkan pada setengah belitan primer,

$$\Phi''_m = \frac{V''_1 \sqrt{2}}{(1/2)N_1 \omega} = \frac{55 \sqrt{2}}{80 \omega} = \frac{110 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Penurunan fluksi maksimum adalah 50 %, $\Phi''_m = \Phi_m / 2$.

- c). Jika tegangan 110 V diterapkan pada setengah belitan maka

$$\Phi'''_m = \frac{V'''_1 \sqrt{2}}{(1/2)N_1 \omega} = \frac{110 \sqrt{2}}{80 \omega} = \frac{220 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Tidak terjadi penurunan fluksi maksimum, $\Phi'''_m = \Phi_m$.

- d). Dengan $N_1/N_2 = 160/40 = 4$ maka jika tegangan primer 220 V, tegangan sekunder adalah 55 V. Jika tegangan primer 110 V, tegangan sekundernya 27.5 V. Jika tegangan 55 V diterapkan pada setengah belitan primer, tegangan sekunder adalah 27.5 V. Jika tegangan 110 V diterapkan pada setengah belitan primer, tegangan sekunder adalah 55 V.

CONTOH-15.2: Sebuah transformator satu-fasa mempunyai belitan primer dengan 400 lilitan dan belitan sekunder 1000 lilitan. Luas penampang inti efektif adalah 60 cm^2 . Jika belitan primer dihubungkan ke sumber 500 V (rms) yang frekuensinya 50 Hz, tentukanlah kerapatan fluksi maksimum dalam inti serta tegangan di belitan sekunder.

Solusi :

Dengan mengabaikan resistansi belitan dan reaktansi bocor, maka

$$V_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 500 \rightarrow \Phi_m = \frac{500\sqrt{2}}{400 \times 2\pi \times 50} = 0.00563 \text{ weber}$$

$$\text{Kerapatan fluksi maksimum: } B_m = \frac{0.00563}{0.006} = 0.94 \text{ weber/m}^2$$

$$\text{Tegangan belitan sekunder adalah } V_2 = \frac{1000}{400} \times 500 = 1250 \text{ V}$$

CONTOH 15.3 : Dari sebuah transformator satu-fasa diinginkan suatu perbandingan tegangan primer / sekunder dalam keadaan tidak berbeban 6000/250 V. Jika frekuensi kerja adalah 50 Hz dan fluksi dalam inti transformator dibatasi sekitar 0.06 weber, tentukan jumlah lilitan primer dan sekunder.

Solusi :

Pembatasan fluksi di sini adalah fluksi maksimum. Dengan mengabaikan resistansi belitan dan reaktansi bocor,

$$V_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 6000 \rightarrow N_1 = \frac{6000\sqrt{2}}{2\pi \times 50 \times 0.06} = 450$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{250}{6000} \times 450 = 18.75$$

Pembulatan jumlah lilitan harus dilakukan. Dengan melakukan pembulatan ke atas, batas fluksi maksimum Φ_m tidak akan terlampaui. Jadi dapat kita tetapkan

$$\Rightarrow N_2 = 20 \text{ lilitan} \Rightarrow N_1 = \frac{6000}{250} \times 20 = 480 \text{ lilitan}$$

15.1.4. Rangkaian Ekvivalen

Transformator adalah piranti listrik. Dalam analisis, piranti-piranti listrik biasanya dimodelkan dengan suatu rangkaian listrik ekvivalen yang sesuai. Secara umum, rangkaian ekvivalen hanyalah penafsiran secara rangkaian listrik dari suatu persamaan matematik yang menggambarkan perilaku suatu piranti. Untuk transformator, ada tiga persamaan yang menggambarkan perilakunya, yaitu persamaan (15.7), (15.8), dan (15.10), yang kita tulis lagi sebagai satu set persamaan (15.11).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{V}}_1 &= \bar{\mathbf{E}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_1 R_1 + j\bar{\mathbf{I}}_1 X_1 \\ \bar{\mathbf{E}}_2 &= \bar{\mathbf{V}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_2 R_2 + j\bar{\mathbf{I}}_2 X_2\end{aligned}\quad (15.11)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \bar{\mathbf{I}}_f + \bar{\mathbf{I}}_2' \quad \text{dengan} \quad \bar{\mathbf{I}}_2' = \frac{N_2}{N_1} \bar{\mathbf{I}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{I}}_2}{a}$$

Dengan hubungan $\bar{\mathbf{E}}_1 = a\bar{\mathbf{E}}_2$ dan $\bar{\mathbf{I}}_2' = \bar{\mathbf{I}}_2 / a$ maka persamaan kedua dari (15.11) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathbf{E}}_1}{a} &= \bar{\mathbf{V}}_2 + a\bar{\mathbf{I}}_2' R_2 + ja\bar{\mathbf{I}}_2' X_2 \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}_1 &= a\bar{\mathbf{V}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_2' (a^2 R_2) + j\bar{\mathbf{I}}_2' (a^2 X_2) \\ &= \bar{\mathbf{V}}_2' + \bar{\mathbf{I}}_2' R_2' + j\bar{\mathbf{I}}_2' X_2'\end{aligned}\quad (15.12)$$

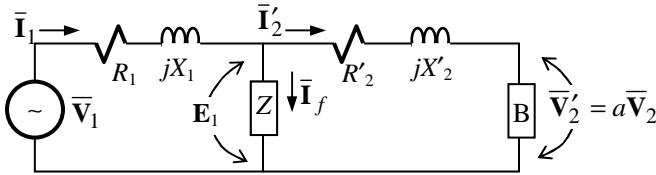
$$\text{dengan} \quad V_2' = aV_2 \quad ; \quad R_2' = a^2 R_2 \quad ; \quad X_2' = a^2 X_2$$

Dengan (15.12) maka (15.11) menjadi

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{V}}_1 &= \bar{\mathbf{E}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_1 R_1 + j\bar{\mathbf{I}}_1 X_1 \\ \bar{\mathbf{E}}_1 &= a\bar{\mathbf{V}}_2 + \bar{\mathbf{I}}_2' R_2' + j\bar{\mathbf{I}}_2' X_2' \\ \bar{\mathbf{I}}_1 &= \bar{\mathbf{I}}_f + \bar{\mathbf{I}}_2'\end{aligned}\quad (15.13)$$

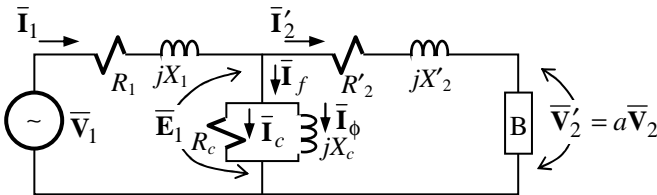
$\bar{\mathbf{I}}_2'$, R_2' , dan X_2' adalah arus, resistansi, dan reaktansi sekunder yang dilihat oleh sisi primer. Dari persamaan (15.13) dibangunlah

rangkaian ekivalen transformator seperti terlihat pada Gb.15.6. di bawah ini.



Gb.15.6. Rangkaian ekivalen diturunkan dari persamaan (15.13).

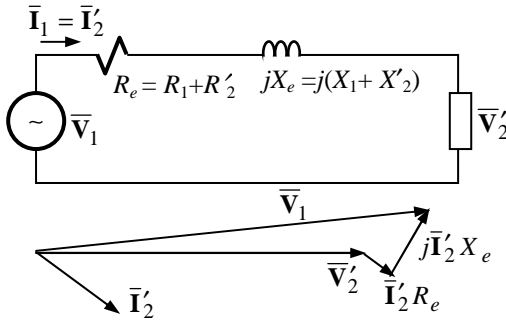
Kita telah melihat bahwa pada diagram fasor Gb.15.5. arus magnetisasi dapat dipandang sebagai terdiri dari dua komponen, yaitu \bar{I}_c dan \bar{I}_ϕ . \bar{I}_c sefasa dengan \bar{E}_1 sedangkan \bar{I}_ϕ 90° dibelakang \bar{E}_1 . Dengan demikian maka impedansi Z pada rangkaian ekivalen Gb.15.6. dapat dinyatakan sebagai hubungan paralel antara suatu resistansi R_c dan impedansi induktif jX_ϕ sehingga rangkaian ekivalen transformator secara lebih detil menjadi seperti Gb.15.7.



Gb.15.7. Rangkaian ekivalen transformator lebih detil.

15.1.5. Rangkaian Ekivalen Yang Disederhanakan

Pada transformator yang digunakan pada tegangan bolak-balik yang konstan dengan frekuensi yang konstan pula (seperti misalnya transformator pada sistem tenaga listrik), besarnya arus magnetisasi hanya sekitar 2 sampai 5 persen dari arus beban penuh transformator. Keadaan ini bisa dicapai karena inti transformator dibangun dari material dengan permeabilitas magnetik yang tinggi. Oleh karena itu, jika I_f diabaikan terhadap I_1 kesalahan yang terjadi dapat dianggap cukup kecil. Pengabaian ini akan membuat rangkaian ekivalen menjadi lebih sederhana seperti terlihat pada Gb.15.8.



Gb.15.8. Rangkaian ekivalen yang disederhanakan dan diagram fasornya.

15.1.6. Impedansi Masukan

Resistansi beban B adalah $R_B = V_2/I_2$. Dilihat dari sisi primer resistansi tersebut menjadi

$$R'_B = \frac{V'_2}{I'_2} = \frac{aV_2}{I_2/a} = a^2 \frac{V_2}{I_2} = a^2 R_B \quad (15.14)$$

Dengan melihat rangkaian ekivalen yang disederhanakan Gb.15.10, impedansi masukan adalah

$$Z_{in} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = R_e + a^2 R_B + jX_e \quad (15.15)$$

15.2. Penyediaan Daya dan Perbaikan Faktor Daya

Pada pembahasan mengenai alih daya maksimum dikatakan bahwa persoalan tersebut sering dijumpai pada sistem pemroses sinyal. Pembahasan mengenai aliran daya berikut ini merupakan persoalan yang dijumpai pada sistem tenaga listrik. Dalam sistem tenaga listrik, beban tidak mudah untuk disesuaikan dengan sumber karena beban tergantung dari keperluan konsumen yang sangat bervariasi. Daya yang diperlukan konsumen selalu berubah dari waktu ke waktu, yang kita kenal sebagai *kurva beban*. Walaupun demikian perubahan kebutuhan daya itu masih jauh lebih lambat jika dibandingkan dengan perubahan tegangan yang berfrekuensi 50 Hz (atau 60 Hz di Amerika). Oleh karena itu analisis aliran daya dapat dilakukan dalam keadaan mantap dengan menggunakan konsep

fasor. Dalam analisis ini, kita harus mencari kondisi sumber agar dapat memenuhi permintaan beban. Dalam memenuhi kebutuhan beban itu, kondisi kerja sumber belum tentu baik; misalnya faktor daya terlalu rendah. Oleh karena itu kita harus melakukan usaha untuk memperbaiki faktor daya tersebut. Perbaikan faktor daya ini dilakukan dengan menambahkan kapasitor paralel dengan beban (yang pada umumnya bersifat induktif) sehingga daya reaktif yang harus diberikan oleh sumber menurun tetapi daya nyata yang diperlukan beban tetap terpenuhi. Untuk menjelaskan persoalan ini kita akan langsung melihat pada suatu contoh.

CONTOH-15.4: Dua buah beban dihubungkan paralel. Beban pertama memerlukan daya 10 kW pada faktor daya 0,8 lagging. Beban kedua memerlukan 8 kW pada faktor daya 0,75 lagging. Tegangan yang diberikan oleh sumber adalah 380 V rms. Jika impedansi saluran dapat diabaikan, berapakah daya kompleks yang harus disediakan oleh sumber ?

Solusi :

Daya kompleks yang diperlukan oleh masing-masing beban adalah

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = P_1 + j|S_1| \sin \theta_1 = P_1 + j \frac{P_1}{\cos \theta_1} \sin \theta_1$$

$$= P_1 + jP_1 \tan \theta_1$$

$$= 10 + j10 \tan(\cos^{-1} 0,8) = 10 + j7,5 \text{ kVA}$$

$$S_2 = P_2 + jP_2 \tan \theta_2 = 8 + j8 \tan(\cos^{-1} 0,75) = 8 + j7 \text{ kVA}$$

Daya total beban adalah

$$S_{12} = S_1 + S_2 = 10 + j7,5 + 8 + j7 = 18 + j14,5 \text{ kVA}$$

Jika kita gambarkan segitiga dayanya, daya kompleks ini akan berada di kuadran pertama karena daya reaktif sebesar 14,5 kVAR bernilai positif. Jadi beban total ini bersifat induktif, dengan faktor daya *lagging*.

Dengan tidak memperhitungkan daya untuk mengatasi rugi-rugi di saluran, maka daya kompleks total yang harus

disediakan oleh sumber sama dengan kebutuhan total beban, yaitu

$$S_s = S_{12} = 18 + j14,5 \text{ kVA} ;$$

$$\cos \theta = \cos \left(\tan^{-1} \frac{Q_s}{P_s} \right) = 0,78 \text{ lagging}$$

CONTOH-15.5: Dalam contoh 15.4. di atas, hasil perhitungan menunjukkan bahwa daya kompleks yang diberikan oleh sumber serta faktor dayanya adalah

$$S_s = 18 + j14,5 \text{ kVA} ; \quad \cos \theta = 0,78 \text{ lagging}$$

Tentukanlah kapasitor yang harus diparalelkan dengan beban untuk memperbaiki faktor daya menjadi 0.95 *lagging*, jika diketahui bahwa sumber beroperasi pada frekuensi 50 Hz.

Solusi :

Dengan menghubungkan kapasitor paralel dengan beban, akan terjadi *penambahan beban daya reaktif*. Karena kapasitor menyerap daya reaktif negatif, maka tambahan beban oleh kapasitor ini akan memperkecil daya reaktif total beban. Perhatikanlah bahwa beban semula tidak berubah; yang berubah adalah beban total setelah ada penambahan kapasitor. Jadi beban total yang semula adalah

$$S_{12} = S_s = 18 + j14,5 \text{ kVA}$$

setelah ditambahkan kapasitor akan menjadi

$$S_{12C} = S_{12} + jQ_C = 18 + j(14,5 + Q_C) \text{ kVA}$$

dengan Q_C adalah daya reaktif yang diserap kapasitor.

Beban total baru S_{12C} ini harus mempunyai faktor daya 0,95 *lagging*. Jadi haruslah

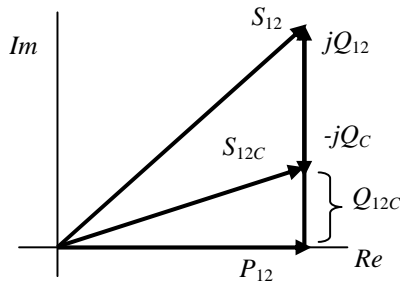
$$S_{12C} = 18 + j(14,5 + Q_C) = 18 + j18 \tan(\cos^{-1} 0,95)$$

Dari persamaan ini kita dapat mencari Q_C , yaitu

$$14,5 + Q_C = 18 \tan(\cos^{-1} 0,95) \quad \text{atau}$$

$$Q_C = 18 \tan(\cos^{-1} 0,95) - 14,5 = 5,92 - 14,5 = -8,58 \text{ kVAR}$$

Perhatikanlah gambar segitiga daya di bawah ini.



$$S_{12} = P_{12} + jQ_{12} = \text{daya total semula}$$

$$Q_C = \text{daya reaktif kapasitor (negatif)}$$

$$S_{12C} = P_{12} + jQ_{12C}$$

$$= \text{daya total setelah penambahan kapasitor}$$

Kebutuhan daya total setelah penambahan kapasitor menjadi

$$S_{12C} = 18 + j(14,5 + Q_C) = 18 + j5,92 \text{ kVA}$$

Nilai kapasitor yang diperlukan dapat dicari karena tegangan kerja maupun frekuensi kerjanya diketahui. Arus yang melalui kapasitor adalah

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}_C}{jX_C} = j\omega C \bar{V}_C$$

Daya reaktif kapasitor dapat ditulis sebagai

$$Q_C = |\bar{I}_C|^2 X_C = |j\omega C \bar{V}_C|^2 \left(\frac{-1}{\omega C} \right) = |\bar{V}_C|^2 (-\omega C)$$

Dengan $Q_C = -8,58 \text{ kVAR}$, $V_{Crms} = 380 \text{ V}$, dan $f = 50 \text{ Hz}$, maka

$$-8580 = 380^2 (-2\pi \times 50 C) \text{ atau } C = \frac{8580}{100\pi \times 380^2} = 190 \text{ } \mu\text{F}$$

CONTOH-15.6: Pada contoh 15.5 impedansi saluran antara sumber dan beban diabaikan. Jika impedansi ini tidak dapat diabaikan, dan besarnya untuk setiap kawat adalah $Z_k = (0,2 + j1) \Omega$, tentukanlah daya kompleks dan tegangan kerja sumber. Perhatikan bahwa saluran terdiri dari dua kawat.

Solusi :

Dengan adanya impedansi saluran, daya kompleks yang dikeluarkan oleh sumber harus lebih besar dari keperluan beban karena sumber harus mengatasi susut daya yang terjadi pada saluran. Dengan adanya perbedaan daya kompleks yang dikeluarkan oleh sumber dan daya kompleks yang sampai ke beban, maka tegangan sumber dan tegangan beban juga berbeda. Daya yang harus sampai ke beban (setelah penambahan kapasitor) adalah

$$S_{12C} = 18 + j5,92 \text{ kVA}$$

Dengan menggunakan tegangan beban sebagai referensi, arus beban dapat dihitung, yaitu

$$\bar{I}_B^* = \frac{S_{12C}}{\bar{V}_B} = \frac{(18 + j5,92) \times 1000}{380 \angle 0^\circ} = 47,37 + j15,58 \text{ A}$$

$$\bar{I}_B = 47,37 - j15,58 \text{ A} = 49,87 \angle -18,2^\circ \text{ A.}$$

Arus beban ini mengalir melalui saluran yang terdiri dari dua kawat. Daya yang diserap oleh impedansi pada saluran adalah

$$\begin{aligned} S_k &= 2 \times Z_k \times |\bar{I}_B|^2 = 2 \times (0,2 + j1) \times 49,87^2 \\ &= 0,99 + j4,97 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Total daya yang harus dikeluarkan oleh sumber adalah

$$\begin{aligned} S_s &= S_{12C} + S_k = 18 + j5,92 + 0,99 + j4,97 \\ &= 18,99 + j10,89 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Tegangan kerja sumber haruslah

$$\begin{aligned} \bar{V}_s &= \frac{S_s}{\bar{I}_s^*} = \frac{S_s}{\bar{I}_B^*} = \frac{(18,99 + j10,89) \times 1000}{49,87 \angle 18,2^\circ} = \frac{21891 \angle 29,8^\circ}{49,87 \angle 18,2^\circ} \\ &= 439 \angle 11,6^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

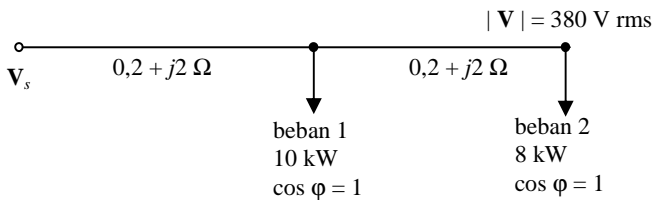
15.3. Diagram Satu Garis

Diagram satu garis untuk menyatakan rangkaian penyaluran energi arus searah yang telah kita pelajari sebelumnya, dapat kita perluas untuk rangkaian penyaluran energi arus bolak-balik. Pada sistem satu-fasa, impedansi saluran balik ditambahkan pada impedansi saluran kirim untuk digambarkan dalam diagram satu garis.

CONTOH-15.7: Dua buah beban dicatu dari satu sumber. Beban pertama memerlukan daya 10 kW pada faktor daya 1, dicatu melalui saluran yang impedansinya $0,1 + j1 \Omega$. Dari lokasi beban pertama, saluran diteruskan untuk mencatu beban kedua memerlukan 8 kW pada faktor daya 1, dengan saluran yang impedansinya $0,1 + j1 \Omega$. Tegangan kerja beban kedua harus 380 V rms. (a) Gambarkan diagram satu garis sistem ini, (b) tentukan daya yang diberikan sumber dan tegangan sumber.

Solusi :

a). Diagram satu garis sistem ini adalah seperti gambar di bawah ini



b). Beban 1 dan beban 2 masing-masing adalah

$$S_1 = 10 + j0 \text{ kVA} ; S_2 = 8 + j0 \text{ kVA}$$

Arus untuk beban 2, dengan mengambil tegangannya sebagai referensi, adalah

$$\bar{I}_2^* = \frac{8000 + j0}{380 \angle 0^\circ} = 21 \angle 0^\circ \text{ A} \rightarrow \bar{I}_2 = 21 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Daya yang diserap saluran antara beban 1 dan beban 2 adalah

$$\begin{aligned} S_{sal2} &= (0,2 + j2) \times |\bar{I}_2|^2 = (0,2 + j2) \times 21^2 \\ &= 0,09 + j0,9 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Daya beban-2 ditambah daya saluran-2 adalah

$$S_{tot2} = S_{sal2} + S_2 = 8,09 + j0,9 \text{ kVA}$$

Tegangan di beban 1 adalah

$$\bar{V}_1 = \frac{S_{tot2}}{\bar{I}_2^*} = \frac{8090 + j900}{21 \angle 0^\circ} = 385,2 + j42,9 \text{ V} = 387,6 \angle 6,4^\circ \text{ V}$$

Arus untuk beban-1 adalah

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \frac{S_1}{\bar{\mathbf{V}}_1^*} = \frac{10000 + j0}{387,6 \angle -6,4^\circ} = 25,8 \angle 6,4^\circ \text{ A}$$

Arus sumber sama dengan arus di saluran antara sumber dan beban 1, yaitu

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{I}}_s &= \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2 = 25,8 \angle 6,4^\circ + 21 \angle 0^\circ \\ &= 46,64 + j2,88 = 46,73 \angle 3,5^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Daya yang diserap saluran antara sumber dan beban 1 adalah

$$\begin{aligned}S_{sal1} &= (0,2 + j2) \times |\bar{\mathbf{I}}_s|^2 = (0,2 + j2) \times 46,73^2 \\ &= 0,44 + j4,37 \text{ kVA}\end{aligned}$$

Daya yang diberikan oleh sumber adalah

$$\begin{aligned}S_s &= S_{sal1} + S_1 + S_{sal2} + S_2 \\ &= 0,44 + j4,37 + 10 + 8,09 + j0,9 = 18,53 + j5,27 \text{ kVA}\end{aligned}$$

Tegangan sumber adalah

$$\bar{\mathbf{V}}_s = \frac{S_s}{\bar{\mathbf{I}}_s^*} = \frac{18530 + j5270}{46,73 \angle -3,5^\circ} = \frac{19265 \angle 15,9^\circ}{46,73 \angle -3,5^\circ} = 412 \angle 19,4^\circ \text{ V}$$

Soal-Soal

1. Sebuah beban menyerap daya 2,5 kVA pada faktor daya 0,9 *lagging*. Beban ini dicatu melalui kabel dari sebuah sumber yang bekerja pada tegangan 2400 V rms. Di sisi sumber tercatat bahwa daya yang keluar adalah 2,65 kVA dengan faktor daya 0,88 *lagging*. Hitunglah arus saluran, impedansi saluran dan impedansi beban. Hitung pula pada tegangan berapa beban beroperasi.
2. Pada sumber tegangan 220 V rms, 50 Hz, dihubungkan dua buah beban (paralel). Beban pertama menyerap daya 10 kVA pada faktor daya 0,9 *lagging*. Beban kedua menyerap daya rata-rata 8 kW dan daya reaktif 6 kVAR. Jika impedansi saluran dapat diabaikan, berapakah daya total yang diberikan sumber serta faktor dayanya ?

3. Pada sumber satu-fasa 220 V rms, terhubung dua macam beban. Beban pertama adalah sebuah pemanas 500 W. Beban ke-dua adalah motor pompa 0,5 HP yang bekerja pada faktor daya 0,8 *lagging*. Hitunglah: (a) daya kompleks (total); (b) faktor daya (total); (c) arus yang keluar dari sumber (rms).
4. Di satu lokasi terdapat dua beban, masing-masing menyerap daya 20 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*, dan 25 kVA pada faktor daya 0,9 *lagging*. Kedua beban bekerja pada tegangan 2400 V rms dan dicatu dari sumber melalui saluran yang impedansinya $0,5 + j2 \Omega$ per saluran. Hitunglah arus pada saluran, daya kompleks yang harus disediakan sumber untuk kedua beban, faktor daya di sisi sumber. Hitung pula tegangan sumber agar kebutuhan tegangan beban dapat dipenuhi.
5. Satu sumber mencatu dua beban di dua lokasi berbeda. Beban pertama 30 kVA dengan faktor 0,8 *lagging* dicatu dari sumber melalui saluran dengan impedansi $1 + j4 \Omega$ per saluran. Dari lokasi beban pertama ini, saluran disambung untuk mencatu beban kedua yang menyerap daya 15 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*. Impedansi saluran antara beban pertama dan beban kedua adalah $0,5 + j2 \Omega$ per saluran. Jika beban kedua harus beroperasi pada tegangan 2400 V rms, berapakah tegangan sumber dan berapa daya yang harus disediakan oleh sumber ?
6. Sekelompok beban beroperasi pada tegangan $|V| = 220$ V rms dan menyerap daya 40 kVA dengan faktor daya 0,8 *lagging*. Beban ini dicatu dari sumber tegangan menengah melalui sebuah transformator penurun tegangan yang mempunyai rasio 20:1 dan dapat dianggap ideal. Sumber dihubungkan ke sisi primer transformator melalui saluran yang impedansinya $0,4 + j2 \Omega$ per saluran. Hitunglah arus di sisi primer transformator, tegangan sumber, dan daya yang diberikan oleh sumber.
7. Sebuah motor mengambil arus 20 A pada faktor daya 0,7 *lagging*, dari sumber 220 V, 50 Hz. Tentukan nilai kapasitor yang harus diparalelkan untuk memperbaiki faktor daya menjadi 0,9 *lagging*.

BAB 16 Pengenalan Pada Sistem Tiga-fasa

Pembahasan sistem tiga-fasa ini akan membuat kita

- memahami hubungan sumber dan beban dalam sistem tiga-fasa seimbang.
- mampu menentukan hubungan fasor arus dan fasor tegangan pada sistem tiga-fasa seimbang.
- mampu melakukan analisis daya pada sistem tiga-fasa.

Sampai tahap ini kita telah membahas rangkaian arus bolak-balik sistem satu-fasa. Dengan arus bolak-balik inilah energi dalam jumlah besar dapat ditransmisikan. Namun demikian pembangkitan dan penyaluran tenaga listrik pada umumnya tidak dilakukan dengan menggunakan sistem satu-fasa, melainkan dengan sistem tiga-fasa. Transmisi daya dilakukan pada tegangan tinggi yang dapat diperoleh dengan menggunakan transformator penaik tegangan. Di ujung saluran, tegangan diturunkan lagi sesuai dengan kebutuhan beban.

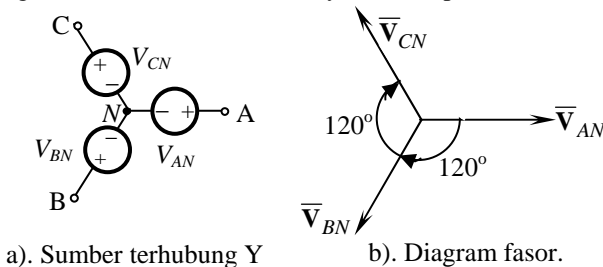
Pemilihan sistem tiga-fasa untuk pembangkitan dan penyaluran energi listrik juga didasari oleh kelebihan unjuk kerja maupun kelebihan ekonomis yang dapat diperoleh dari sistem ini. Penyaluran daya dengan menggunakan sistem tiga-fasa kurang berfluktuasi dibandingkan terhadap sistem satu-fasa. Selain dari pada itu, untuk penyaluran daya tertentu pada tegangan tertentu akan memerlukan arus lebih kecil sehingga dimensi saluran yang diperlukan akan lebih kecil pula. Konversi elektris-mekanis juga lebih mudah dilakukan pada sistem tiga-fasa dengan menggunakan motor tiga-fasa.

Berikut ini kita akan membahas sistem tiga-fasa yang sangat luas digunakan pada pembangkitan dan penyaluran energi listrik. Namun kita tidak akan membahas tentang bagaimana pembangkitan dilakukan ataupun piranti apa yang digunakan; hal-hal ini dapat kita pelajari pada pelajaran di tingkat yang lebih tinggi. Di sini kita akan mempelajari bagaimana hubungan-hubungan elemen serta analisis rangkaian tiga-fasa, dan juga terbatas hanya pada pembebanan yang seimbang.

16.1. Sumber Tiga-fasa dan Sambungan ke Beban

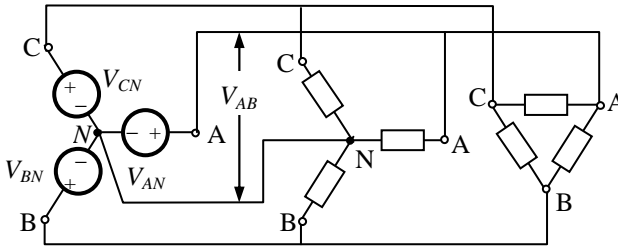
Suatu sumber tiga-fasa membangkitkan tegangan tiga-fasa, yang dapat digambarkan sebagai *tiga sumber tegangan* yang terhubung Y (bintang) seperti terlihat pada Gb.16.1.a. Dalam kenyataannya, tiga sumber tegangan ini dibangkitkan oleh *satu piranti*. Titik hubung antara ketiga tegangan itu disebut titik netral, N . Antara satu tegangan dengan tegangan yang lain berbeda fasa 120° . Jika kita mengambil tegangan V_{AN} sebagai referensi, maka kita dapat menggambarkan diagram fasor tegangan dari sistem tiga-fasa ini seperti terlihat pada Gb.16.1.b. Urutan fasa dalam gambar ini disebut *urutan positif*. Bila fasor tegangan \bar{V}_{BN} dan \bar{V}_{CN} dipertukarkan, kita akan memperoleh urutan fasa negatif.

Sumber tiga-fasa pada umumnya dihubungkan Y karena jika dihubungkan Δ akan terbentuk suatu rangkaian tertutup yang apabila ketiga tegangan tidak tepat berjumlah nol akan terjadi arus sirkulasi yang merugikan. Sumber tegangan tiga-fasa ini dihubungkan ke beban tiga-fasa yang terdiri dari tiga impedansi yang dapat terhubung Y ataupun Δ seperti terlihat pada Gb.16.2. Dalam kenyataan, beban tiga-fasa dapat berupa satu piranti tiga-fasa, misalnya motor tiga-fasa, ataupun tiga piranti satu-fasa yang dihubungkan secara Y atau Δ , misalnya resistor pemanas.



Gb.16.1. Sumber tiga-fasa.

Dalam analisis rangkaian tiga-fasa, kita mengenal enam macam tegangan yaitu tiga tegangan fasa-netral dan tiga tegangan fasa-fasa. Pada Gb.16.1 dan Gb.16.2, tegangan V_{AN} , V_{BN} , dan V_{CN} , adalah tegangan-tegangan fasa-netral, masing-masing dari fasa A, B, dan C. Tegangan fasa-fasa adalah tegangan yang diukur antara fasa dengan fasa, misalnya antara fasa A dan B, B dan C, C dan A, seperti terlihat pada Gb.16.2



Gb.16.2. Sumber dan beban tiga-fasa.

Jika kita mengambil tegangan fasa-netral V_{AN} sebagai tegangan referensi, maka hubungan antara fasor-fasor tegangan tersebut adalah:

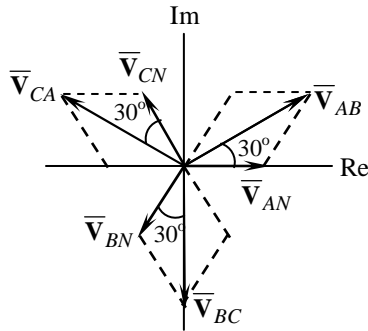
$$\begin{aligned}\bar{V}_{AN} &= V_{fn} \angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BN} &= V_{fn} \angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CN} &= V_{fn} \angle -240^\circ\end{aligned}\quad (16.1)$$

Tegangan antara fasa dengan fasa kita sebut tegangan fasa-fasa yaitu V_{AB} , V_{BC} , dan V_{CA} yang fasor-fasornya adalah

$$\begin{aligned}\bar{V}_{AB} &= \bar{V}_{AN} + \bar{V}_{NB} = \bar{V}_{AN} - \bar{V}_{BN} \\ \bar{V}_{BC} &= \bar{V}_{BN} + \bar{V}_{NC} = \bar{V}_{BN} - \bar{V}_{CN} \\ \bar{V}_{CA} &= \bar{V}_{CN} + \bar{V}_{NA} = \bar{V}_{CN} - \bar{V}_{AN}\end{aligned}\quad (16.2)$$

Hubungan antara tegangan fasa-netral dan fasa-fasa adalah (Gb.16.3)

$$\begin{aligned}\bar{V}_{AB} &= \bar{V}_{AN} - \bar{V}_{BN} = V_{fn} \angle 0^\circ - V_{fn} \angle -120^\circ \\ &= V_{fn}(1 + j0) - V_{fn} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = V_{fn} \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= V_{fn} \sqrt{3} \angle 30^\circ\end{aligned}\quad (16.3)$$



Gb.16.3. Fasor-fasor tegangan.

Dengan cara yang sama seperti cara untuk mendapat relasi (16.3), kita memperoleh relasi

$$\bar{V}_{BC} = V_{fn} \sqrt{3} \angle -90^\circ \quad (16.4)$$

$$\bar{V}_{CA} = V_{fn} \sqrt{3} \angle -210^\circ$$

Jadi amplitudo tegangan fasa-fasa adalah $\sqrt{3}$ kali lebih besar dari amplitudo tegangan fasa-netral

$$V_{ff} = V_{fn} \sqrt{3} \quad (16.5)$$

sedangkan sudut fasanya berbeda 30° .

CONTOH-16.1: Jika tegangan fasa-netral adalah $V_{AN} = 220 \angle 30^\circ$ V, berapakah tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa yang lain ?

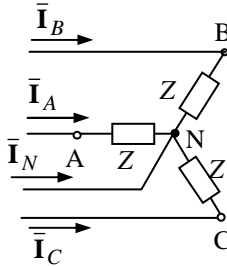
Solusi :

$$\bar{V}_{AN} = 220 \angle 30^\circ \text{ V} ; \quad \bar{V}_{AB} = 380 \angle +60^\circ \text{ V} ;$$

$$\bar{V}_{BN} = 220 \angle -90^\circ \text{ V} ; \quad \bar{V}_{BC} = 380 \angle -60^\circ \text{ V} ;$$

$$\bar{V}_{CN} = 220 \angle -210^\circ \text{ V} \quad \bar{V}_{BC} = 380 \angle -190^\circ \text{ V}$$

Beban Terhubung Y. Gb.16.4. memperlihatkan beban seimbang yang terhubung Y. Arus saluran = arus fasa.



Gb.16.4. Beban terhubung Y.

Impedansi masing-masing fasa adalah Z . Dari gambar ini jelas terlihat bahwa arus yang mengalir di saluran sama dengan arus yang mengalir di masing-masing fasa. Jadi

$$\bar{I}_A = \frac{\bar{V}_{AN}}{Z}; \bar{I}_B = \frac{\bar{V}_{BN}}{Z}; \bar{I}_C = \frac{\bar{V}_{CN}}{Z} \quad (16.6)$$

Dalam persamaan (16.6) \bar{V}_{AN} , \bar{V}_{BN} , dan \bar{V}_{CN} adalah tegangan-tegangan fasa yang berbeda fasa 120° satu terhadap lainnya. Karena tegangan ini dibagi oleh Z yang sama untuk mendapatkan arus fasa, jelaslah bahwa masing-masing arus fasa akan tergeser dengan sudut yang sama dari tegangan yang bersangkutan.

Jika kita tetap menggunakan \bar{V}_{AN} sebagai referensi maka

$$\begin{aligned} \bar{I}_A &= \frac{\bar{V}_{AN}}{Z} = \frac{V_{fn} \angle 0^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{fn}}{|Z|} \angle -\theta = I_f \angle -\theta \\ \bar{I}_B &= \frac{\bar{V}_{BN}}{Z} = \frac{V_{fn} \angle -120^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{fn}}{|Z|} \angle (-120^\circ - \theta) = I_f \angle (-\theta - 120^\circ) \\ \bar{I}_C &= \frac{\bar{V}_{CN}}{Z} = \frac{V_{fn} \angle -240^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{fn}}{|Z|} \angle (-240^\circ - \theta) = I_f \angle (-\theta - 240^\circ) \end{aligned} \quad (16.7)$$

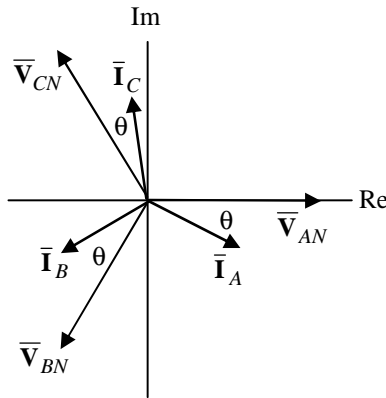
Persamaan (16.7) memperlihatkan bahwa arus-arus fasa mempunyai amplitudo sama, dan satu sama lain berbeda fasa 120° . Diagram fasor tegangan dan arus diperlihatkan pada Gb.16.5.

Jumlah arus-arus fasa ini adalah

$$\bar{\mathbf{I}}_A + \bar{\mathbf{I}}_B + \bar{\mathbf{I}}_C = 0 \quad (16.8)$$

Jika kita aplikasikan HAK untuk titik netral pada Gb.16.4., maka

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_N + \bar{\mathbf{I}}_A + \bar{\mathbf{I}}_B + \bar{\mathbf{I}}_C &= 0 \\ \text{sehingga} \\ \bar{\mathbf{I}}_N &= -(\bar{\mathbf{I}}_A + \bar{\mathbf{I}}_B + \bar{\mathbf{I}}_C) = 0 \end{aligned} \quad (16.9)$$



Gb.16.5. Fasor tegangan dan arus beban terhubung Y.

Jadi dalam keadaan beban seimbang, arus netral sama dengan nol.

Daya kompleks yang diserap oleh beban 3 fasa adalah jumlah dari daya yang diserap oleh masing-masing fasa, yaitu:

$$\begin{aligned} S_{3f} &= \bar{\mathbf{V}}_{AN} \bar{\mathbf{I}}_A^* + \bar{\mathbf{V}}_{BN} \bar{\mathbf{I}}_B^* + \bar{\mathbf{V}}_{CN} \bar{\mathbf{I}}_C^* \\ &= (V_{fn}) \angle 0^\circ (I_f \angle \theta) + (V_{fn}) \angle -120^\circ (I_f \angle 120^\circ + \theta) \\ &\quad + (V_{fn}) \angle -240^\circ (I_f \angle 240^\circ + \theta) \\ &= 3V_{fn} I_f \angle \theta = 3V_{fn} I_A \angle \theta \end{aligned} \quad (16.10)$$

Karena hubungan antara tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa adalah $V_{ff} = V_{fn} \sqrt{3}$, maka kita dapat menyatakan daya kompleks dalam tegangan fasa-fasa, yaitu

$$S_{3f} = V_{ff} I_A \sqrt{3} \angle \theta \quad (16.11)$$

Daya nyata dan daya reaktif adalah

$$\begin{aligned} P_{3f} &= V_{ff} I_A \sqrt{3} \cos \theta = |S_{3f}| \cos \theta \\ Q_{3f} &= V_{ff} I_A \sqrt{3} \sin \theta = |S_{3f}| \sin \theta \end{aligned} \quad (16.12)$$

CONTOH-16.2: Sebuah beban terhubung Y mempunyai impedansi di setiap fasa sebesar $Z = 4 + j3 \, \Omega$. Beban ini dicatu oleh sumber tiga-fasa dengan tegangan fasa-fasa $V_{ff} = 380 \, \text{V (rms)}$. Dengan menggunakan \mathbf{V}_{AN} sebagai fasor tegangan referensi, tentukanlah (a) arus saluran dan (b) daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif.

Solusi :

a). Perhatikanlah bahwa yang diketahui adalah besarnya tegangan fasa-fasa, tanpa diketahui sudut fasanya. Oleh karena itu kita harus menentukan tegangan referensi lebih dulu. Dalam soal ini, kita diminta untuk menggunakan tegangan fasa-netral \mathbf{V}_{AN} sebagai tegangan referensi. *Besarnya* tegangan fasa-netral adalah

$$V_{fn} = \frac{V_{ff}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \, \text{V}$$

Tegangan-tegangan fasa-netral menjadi

$$\bar{\mathbf{V}}_{AN} = 220 \angle 0^\circ \, \text{V (sebagai referensi)} ;$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{BN} = 220 \angle -120^\circ \, \text{V} ;$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{CN} = 220 \angle -240^\circ \, \text{V}$$

Karena beban terhubung Y, arus saluran sama dengan arus fasa

$$\bar{\mathbf{I}}_A = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AN}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5 \angle 36,8^\circ} = 44 \angle -36,8^\circ \, \text{A}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_B = 44 \angle (-36,8^\circ - 120^\circ) = 44 \angle -156,8^\circ \, \text{A}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_C = 44 \angle -276,8^\circ \, \text{A}$$

b). Daya kompleks tiga-fasa, adalah

$$S_{3f} = 3 \times \bar{V}_{AN} \bar{I}_A^* = 3 \times 220 \angle 0^\circ \times 44 \angle 36,8^\circ = 29 \angle 36,8^\circ \text{ kVA}$$

$$\text{Daya rata-rata: } P_{3f} = 29 \cos 36,8^\circ = 23,2 \text{ kW}$$

$$\text{Daya reaktif: } Q_{3f} = 29 \sin 36,8^\circ = 17,4 \text{ kVAR}$$

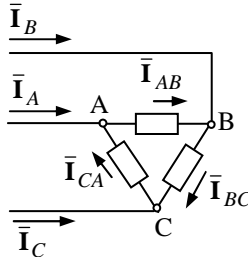
Kita coba memastikan apakah benar P dan Q masing-masing adalah daya yang diserap oleh resistansi dan reaktansi beban, dengan mengalirkan resistansi dengan pangkat dua *besar arus* :

$$P_{3f} = 3 \times 4 \times 44^2 = 23,2 \text{ kW dan}$$

$$Q_{3f} = 3 \times 3 \times 44^2 = 17,4 \text{ kVAR}$$

Ternyata hasilnya sesuai dengan hasil sebelumnya.

Beban Terhubung Δ . Jika beban terhubung Δ (Gb.16.6), arus saluran tidak sama dengan arus fasa, akan tetapi tegangan fasa-fasa terpasang pada impedansi tiap fasa.



Gb.16.6. Beban terhubung Δ . Arus saluran \neq Arus fasa

Jika kita hanya ingin menghitung arus saluran, kita dapat memanfaatkan transformasi hubungan Y- Δ , sehingga beban yang terhubung Δ menjadi terhubung Y dengan

$$Z_Y = \frac{Z}{3} \quad (16.13)$$

dengan catatan bahwa bebannya seimbang. Setelah ditransformasikan menjadi hubungan Y arus-arus saluran serta daya total dapat kita hitung.

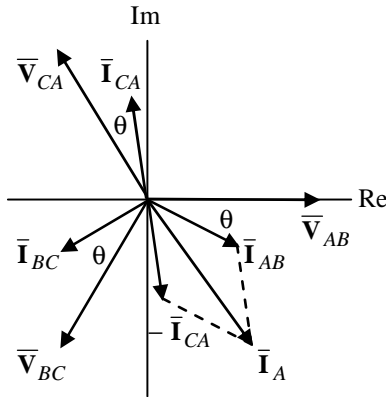
Jika kita perlu menghitung arus maupun daya di tiap fasa dalam keadaan beban tetap terhubung Δ , kita memerlukan formulasi hubungan antara arus-arus fasa \bar{I}_{AB} , \bar{I}_{BC} , \bar{I}_{CA} dengan tegangan-tegangan fasa \bar{V}_{AB} , \bar{V}_{BC} , dan \bar{V}_{CA} . Dari Gb.16.6. terlihat bahwa

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{Z}; \quad \bar{I}_{BC} = \frac{\bar{V}_{BC}}{Z}; \quad \bar{I}_{CA} = \frac{\bar{V}_{CA}}{Z} \quad (6.14)$$

Dari gambar ini pula kita memperoleh hubungan

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA}; \quad \bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}; \quad \bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} \quad (16.15)$$

Diagram fasor tegangan dan arus untuk beban yang terhubung Δ ini, dengan mengambil \bar{V}_{AB} sebagai referensi, terlihat pada Gb.16.7.



Gb.16.7. Fasor tegangan dan arus; beban terhubung Δ .

Dengan memperhatikan gambar ini maka (16.14) menjadi

$$\begin{aligned} \bar{I}_{AB} &= \frac{\bar{V}_{AB}}{Z} = \frac{V_{ff} \angle 0^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{ff}}{|Z|} \angle -\theta \\ \bar{I}_{BC} &= \bar{I}_{AB} \angle -\theta - 120^\circ; \\ \bar{I}_{CA} &= \bar{I}_{AB} \angle -\theta - 240^\circ \end{aligned} \quad (16.16)$$

Gb.16.7. memperlihatkan bahwa sudut yang dibentuk oleh fasor \mathbf{I}_{AB} dan $-\mathbf{I}_{CA}$ adalah 60° . Dengan demikian maka

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{I}}_A &= I_{AB} \sqrt{3} \angle (-\theta - 30^\circ) = I_f \sqrt{3} \angle (-\theta - 30^\circ) \\ \bar{\mathbf{I}}_B &= I_{BC} \sqrt{3} \angle (-\theta - 150^\circ) = I_f \sqrt{3} \angle (-\theta - 150^\circ) \\ \bar{\mathbf{I}}_C &= I_{CA} \sqrt{3} \angle (-\theta - 270^\circ) = I_f \sqrt{3} \angle (-\theta - 270^\circ)\end{aligned}\quad (16.17)$$

Daya kompleks tiga-fasa adalah

$$S_{3f} = 3 \times \bar{\mathbf{V}}_{AB} \bar{\mathbf{I}}_{AB}^* = 3 \times V_{ff} \angle 0^\circ \times I_f \angle \theta = V_{ff} I_A \sqrt{3} \angle \theta \quad (16.18)$$

Daya nyata dan daya reaktif adalah

$$\begin{aligned}P_{3f} &= V_{ff} I_A \sqrt{3} \cos \theta = |S_{3f}| \cos \theta \\ Q_{3f} &= V_{ff} I_A \sqrt{3} \sin \theta = |S_{3f}| \sin \theta\end{aligned}\quad (16.19)$$

Daya Kompleks Beban Secara Umum. Jika kita perhatikan formulasi daya kompleks untuk beban terhubung Y dan yaitu (16.11) dan beban terhubung Δ yaitu (16.18), keduanya memberikan formula yang sama yaitu

$$S_{3f} = V_{ff} I_A \sqrt{3} \angle \theta$$

Jadi tanpa melihat bagaimana hubungan beban, daya kompleks yang diberikan ke beban adalah

$$|S_{3f}| = V_{ff} I_A \sqrt{3} \quad (16.20)$$

CONTOH-16.3: Sebuah beban terhubung Δ mempunyai impedansi di setiap fasa sebesar $Z = 4 + j3 \, \Omega$. Beban ini dicatu oleh sumber tiga-fasa dengan tegangan fasa-fasa $V_{ff} = 80 \, \text{V (rms)}$. Dengan menggunakan \mathbf{V}_{AN} sebagai fasor tegangan referensi, tentukanlah:

- a). tegangan fasa-fasa dan arus saluran; b). daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif.

Solusi :

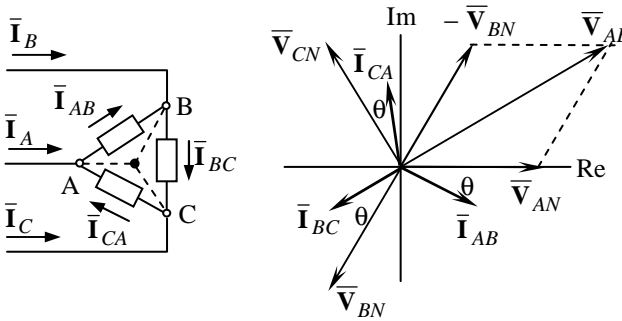
- a). Dalam soal ini kita diminta untuk menggunakan tegangan \mathbf{V}_{AN} sebagai referensi. Titik netral pada hubungan Δ

merupakan titik fiktif; namun perlu kita ingat bahwa sumber mempunyai titik netral yang nyata. Untuk memudahkan mencari hubungan fasor-fasor tegangan, kita menggambarkan hubungan beban sesuai dengan tegangan referensi yang diambil yaitu \bar{V}_{AN} .

Dengan mengambil \bar{V}_{AN} sebagai referensi maka tegangan fasa-netral adalah

$$\bar{V}_{AN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ; \quad \bar{V}_{BN} = 220 \angle -120^\circ;$$

$$\bar{V}_{CN} = 220 \angle -240^\circ$$



Tegangan fasa-fasa adalah

$$\bar{V}_{AB} = V_{AN} \sqrt{3} \angle (\theta_{AN} + 30^\circ) = 380 \angle 30^\circ$$

$$\bar{V}_{BC} = 380 \angle -90^\circ$$

$$\bar{V}_{CA} = 380 \angle -210^\circ$$

Arus-arus fasa adalah

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{Z} = \frac{380 \angle 30^\circ}{4 + j3} = \frac{380 \angle 30^\circ}{5 \angle 36,8^\circ} = 76 \angle -6,8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{BC} = 76 \angle -6,8^\circ - 120^\circ = 76 \angle -126,8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{CA} = 76 \angle -6,8^\circ - 240^\circ = 76 \angle -246,8^\circ \text{ A}$$

dan arus-arus saluran adalah

$$\bar{\mathbf{I}}_A = I_{AB}\sqrt{3}\angle(-6,8^\circ - 30^\circ) = 76\sqrt{3}\angle -36,8^\circ = 131,6\angle -36,8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_B = 131,6\angle(-36,8^\circ - 120^\circ) = 131,6\angle -156,8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_C = 131,6\angle(-36,8^\circ - 240^\circ) = 131,6\angle -276,8^\circ \text{ A}$$

b). Daya kompleks 3 fasa adalah

$$\begin{aligned} S_{3f} &= 3\bar{\mathbf{V}}_{AB}\bar{\mathbf{I}}_{AB}^* = 3 \times 380\angle 30^\circ \times 76\angle +6,8^\circ \\ &= 86,64\angle 36,8^\circ = 69,3 + j52 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Jika kita mengkaji ulang nilai P_{3f} dan Q_{3f} , dengan menghitung daya yang diserap resistansi dan reaktansi beban, akan kita peroleh:

$$P_{3f} = 3 \times R \times |\bar{\mathbf{I}}_{AB}|^2 = 3 \times 4 \times (76)^2 = 69,3 \text{ kW}$$

$$Q_{3f} = 3 \times X \times |\bar{\mathbf{I}}_{AB}|^2 = 3 \times 3 \times (76)^2 = 52 \text{ kVAR}$$

Jika kita bandingkanlah *besarnya* arus saluran, arus fasa, dan daya tiga-fasa yang diserap beban pada hubungan Y dan Δ pada dua contoh 16.2 dan 16.3 kita peroleh gambaran seperti dalam tabel berikut.

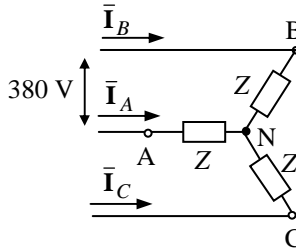
	Hubungan Y	Hubungan Δ
Arus saluran \mathbf{I}_s	$ \mathbf{I}_A = 44 \text{ A}$	$ \mathbf{I}_A = 131,6 \text{ A}$
Arus per fasa \mathbf{I}_f	$ \mathbf{I}_A = 44 \text{ A}$	$ \mathbf{I}_{AB} = 76 \text{ A}$
Daya total $ \mathbf{S}_{3f} $	29 kVA	86,64 kVA

Dari tabel ini terlihat bahwa pada hubungan Y arus fasa maupun arus saluran serta daya lebih rendah dari arus dan daya pada hubungan Δ . Inilah prinsip starter Y- Δ untuk motor asinkron. Motor di-*start* pada hubungan Y kemudian hubungan diubah ke Δ setelah motor berjalan. Dengan demikian arus pada waktu *start* tidak terlalu tinggi.

CONTOH-16.4: Sebuah beban seimbang terhubung Y. Arus di fasa A adalah $\mathbf{I}_A = 100\angle -30^\circ \text{ A rms}$, dan tegangan jala-jala $\mathbf{V}_{AB} = 380\angle 30^\circ \text{ V rms}$. Tentukanlah impedansi per fasa.

Solusi :

Hubungan beban adalah seperti gambar berikut.



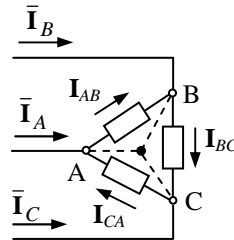
Tegangan fasa-netral adalah

$$\bar{V}_{AN} = \frac{V_{AB}}{\sqrt{3}} \angle(\theta_v - 30^\circ) = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle(30^\circ - 30^\circ) = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Impedansi per fasa adalah

$$Z = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{I}_A} = \frac{220 \angle 0^\circ}{100 \angle -30^\circ} = 2,2 \angle 30^\circ = 1,9 + j1,1 \ \Omega$$

CONTOH-16.5: Sebuah beban seimbang terhubung Δ . Arus di saluran fasa A adalah $I_A = 100 \angle -30^\circ$ A rms, dan tegangan jala-jala $V_{AB} = 380 \angle 30^\circ$ V rms. Tentukanlah impedansi per fasa.



Solusi :

Karena beban terhubung Δ , arus fasa tidak sama dengan arus saluran. Untuk menghitung impedansi di fasa AB, kita harus menentukan lebih dulu arus di fasa ini

$$\bar{I}_{AB} = \frac{I_A}{\sqrt{3}} \angle(\theta_i + 30^\circ) = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle(-30^\circ + 30^\circ) = 57,7 \angle 0^\circ$$

Impedansi per fasa

$$Z = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{I}_{AB}} = \frac{380 \angle 30^\circ}{57,7 \angle 0^\circ} = 6,6 \angle 30^\circ = 5,7 + j3,3 \ \Omega$$

16.2. Analisis Daya Pada Sistem Tiga-fasa

Pada dasarnya analisis daya sistem tiga-fasa tidak berbeda dengan sistem satu-fasa. Kita akan melihat dalam contoh-contoh berikut ini.

CONTOH-16.6: Sebuah beban tiga-fasa seimbang terhubung Y, menyerap daya 50 kVA pada faktor daya 0,9 lagging. Jika tegangan fasa-fasa pada saluran adalah $V_{LL} = 480$ V rms, hitunglah: a). besarnya arus saluran; b). resistansi dan reaktansi beban per fasa.

Solusi :

a). Dalam soal ini kita hanya diminta untuk menghitung *besarnya* arus saluran tanpa mempersoalkan sudut fasanya. Dengan diketahuinya tegangan fasa-fasa daya, arus ini dapat dihitung melalui hubungan daya, yaitu

$$S_{3f} = 3\bar{V}_{fn}\bar{\mathbf{I}}_f^* = 3 \times V_{fn} \angle \theta_v \times I_f \angle -\theta_i = 3V_{fn}I_f \angle (\theta_v - \theta_i)$$

$$\Rightarrow |S_{3f}| = 3V_{fn}I_f = V_{ff}I_f\sqrt{3}$$

Daya tiga-fasa inilah yang diketahui yaitu $|S_{3f}| = 50$ kVA. Tegangan fasa-fasa juga diketahui, $V_{ff} = 480$ V. Karena beban terhubung Y, maka arus saluran sama dengan arus fasa, jadi

$$I_s = I_f = \frac{|S_{3f}|}{V_{ff}\sqrt{3}} = \frac{50000}{480\sqrt{3}} = 60 \text{ A}$$

b). Karena faktor daya juga diketahui, maka dengan mudah kita dapat menghitung daya rata-rata P dan daya reaktif Q . Kemudian dari nilai yang didapat ini kita menghitung resistansi dan reaktansi beban

$$P = |S_{3f}| \cos \phi = 50 \times 0,9 = 45 \text{ kW} ;$$

$$Q = |S_{3f}| \sin \phi = 50 \times 0,436 = 21,8 \text{ kVAR}$$

$$\Rightarrow S_{3f} = 45 + j21,8 \text{ kVA}$$

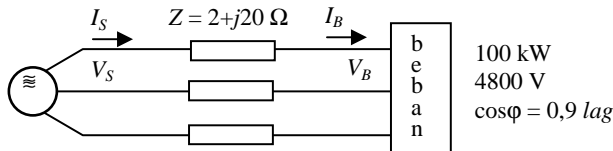
$$\Rightarrow S_{per \text{ fasa}} = \frac{S_{3f}}{3} = 15 + j7,3 \text{ kVA}$$

Dari daya per fasa dan arus fasa, kita peroleh impedansi, resistansi, dan reaktansi

$$Z = \frac{S_{\text{per fasa}}}{|I_f|^2} = \frac{(15 + j7,3) \times 1000}{(60)^2} = 4,16 + j2,03$$

$$\Rightarrow R = 4,16 \, \Omega ; X = 2,03 \, \Omega.$$

CONTOH-16.7: Sebuah beban 100 kW dengan faktor daya 0,8 lagging, dihubungkan ke jala-jala tiga-fasa dengan tegangan fasa-fasa 4800 V rms. Impedansi saluran antara sumber dan beban per fasa adalah $2 + j20 \, \Omega$. Berapakah daya kompleks yang harus dikeluarkan oleh sumber dan pada tegangan berapa sumber harus bekerja ?



Solusi :

Dalam persoalan ini, beban 100 kW dihubungkan pada jala-jala 4800 V, artinya tegangan beban harus 4800 V. Karena saluran antara sumber dan beban mempunyai impedansi, maka sumber tidak hanya memberikan daya ke beban saja, tetapi juga harus mengeluarkan daya untuk mengatasi rugi-rugi di saluran. Sementara itu, arus yang dikeluarkan oleh sumber harus sama dengan arus yang melalui saluran dan sama pula dengan arus yang masuk ke beban, baik beban terhubung Y ataupun Δ .

Daya beban :

$$P_B = 100 \text{ kW} = |S_B| \cos \phi \rightarrow |S_B| = \frac{100}{0,8} = 125 \text{ kVA}$$

$$Q_B = |S_B| \sin \phi = 125 \times 0,6 = 75 \text{ kVAR}$$

$$\Rightarrow S_B = P_B + jQ_B = 100 + j75 \text{ kVA}$$

Besarnya arus yang mengalir ke beban dapat dicari karena tegangan beban diharuskan 4800 V :

$$P_B = V_B I_B \cos \varphi \sqrt{3} \rightarrow I_B = \frac{100}{4800 \times 0,8 \times \sqrt{3}} = 15 \text{ A}$$

Daya kompleks yang diserap saluran adalah tiga kali (karena ada tiga kawat saluran) tegangan jatuh di saluran kali arus saluran konjugat, atau tiga kali impedansi saluran kali pangkat dua besarnya arus :

$$S_{sal} = 3 \bar{V}_{sal} \bar{I}_{sal}^* = 3 Z \bar{I}_{sal} \bar{I}_{sal}^* = 3 Z \left| \bar{I}_{sal} \right|^2 = 3 Z I_{sal}^2$$

Jadi

$$\begin{aligned} S_{sal} &= 3 \times (2 + j20) \times 15^2 = 1350 + j13500 \text{ VA} \\ &= 1,35 + j13,5 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Daya total yang harus dikeluarkan oleh sumber adalah

$$\begin{aligned} S_S &= S_B + S_{sal} = 100 + j75 + 1,35 + j13,5 = 101,35 + j88,5 \text{ kVA} \\ |S_S| &= \sqrt{101,35^2 + 88,5^2} = 134,5 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Dari daya total yang harus dikeluarkan oleh sumber ini kita dapat menghitung tegangan sumber karena arus yang keluar dari sumber harus sama dengan arus yang melalui saluran.

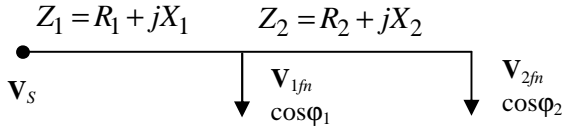
$$\begin{aligned} |S_S| &= V_S I_S \sqrt{3} = V_S I_B \sqrt{3} \\ \Rightarrow V_S &= \frac{|S_S|}{I_B \sqrt{3}} = \frac{134,5 \times 1000}{15 \sqrt{3}} = 5180 \text{ V rms} \end{aligned}$$

16.3. Diagram Satu Garis

Diagram satu garis juga digunakan untuk menggambarkan rangkaian tiga-fasa dengan model satu-fasa. Dalam model satu-fasa ini, tegangan yang diambil adalah tegangan fasa-netral dan arusnya adalah arus fasa.

CONTOH-16.8: Dua buah beban dihubungkan ke sumber seperti digambarkan dalam diagram berikut ini. Saluran antara sumber dan beban pertama memiliki impedansi $Z_1 = R_1 + jX_1 \Omega$, dan antara beban pertama dan kedua $Z_2 = R_2 + jX_2 \Omega$. Tegangan, daya, dan faktor daya masing-masing beban dicantumkan dalam

gambar (faktor daya *lagging*). Gambarkan secara skematis (tanpa skala) diagram fasor tegangan, dengan menggunakan tegangan di beban ke-dua, V_{2fn} , sebagai referensi, sedemikian sehingga diperoleh fasor tegangan sumber V_s .



Solusi:

Dengan tegangan beban ke-dua digunakan sebagai referensi, maka

$$\bar{V}_2 = V_2 \angle 0^\circ, \quad \bar{I}_2 = I_2 \angle -\phi_2^\circ$$

Arus di saluran yang menuju beban ke-dua adalah:

$$\bar{I}_{l2} = \bar{I}_2$$

Tegangan jatuh di saluran yang menuju beban ke-dua adalah

$$\Delta \bar{V}_2 = Z_2 \bar{I}_{l2} = (R_2 + jX_2) \bar{I}_{l2}$$

Tegangan di beban pertama V_1 menjadi:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 + \Delta \bar{V}_2$$

Arus beban pertama I_1 adalah ϕ_1 di belakang V_1 .

Arus di saluran yang menuju beban pertama adalah:

$$\bar{I}_{l1} = \bar{I}_{l2} + \bar{I}_1$$

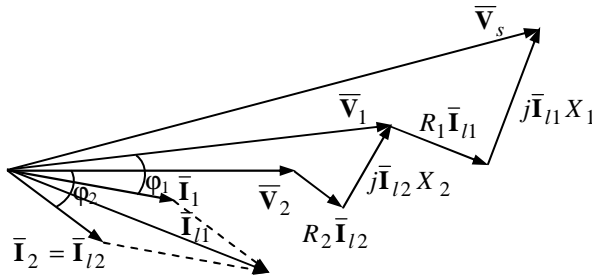
Tegangan jatuh di saluran pertama adalah:

$$\Delta \bar{V}_1 = (R_1 + jX_1) \bar{I}_{l1}$$

Tegangan sumber adalah:

$$\bar{V}_s = \bar{V}_1 + \Delta \bar{V}_1$$

Diagram fasor tegangan adalah sebagai berikut:



Soal-Soal

1. Jika tegangan fasa-netral pada suatu rangkaian tiga-fasa ABC yang terhubung Y adalah 220 V rms, tuliskan fasor-fasor tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa dengan mengambil tegangan fasa-netral \bar{V}_{AN} sebagai fasor referensi. Urutan fasa adalah positif. Gambarkan pula diagram fasor tegangan-tegangan tersebut.
2. Jika tegangan fasa-fasa dalam suatu rangkaian tiga-fasa ABC yang terhubung Y adalah 380 V rms, tuliskan fasor-fasor tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa dengan mengambil tegangan fasa-fasa \bar{V}_{AB} sebagai fasor referensi. Urutan fasa adalah positif. Gambarkan pula diagram fasor tegangan-tegangan tersebut.
3. Jika arus fasa dalam suatu rangkaian tiga-fasa ABC yang terhubung Δ adalah 22 A rms, tuliskan fasor-fasor arus fasa dan arus fasa saluran dengan mengambil arus fasa \bar{I}_{AB} sebagai fasor referensi. Urutan fasa adalah positif. Gambarkan pula diagram fasor arus-arus tersebut.
4. Suatu beban tiga-fasa seimbang terhubung Y mempunyai impedansi per fasa $8 + j6 \, \Omega$, dihubungkan pada jaringan tiga-fasa ABC yang bertegangan fasa-fasa 380 V rms. Urutan fasa positif. Hitung arus saluran dan gambarkan diagram fasor arus saluran dengan mengambil tegangan fasa-netral \bar{V}_{AN} sebagai referensi. Berapakah daya kompleks total yang diserap beban ?

5. Suatu beban tiga-fasa seimbang terhubung Δ mempunyai impedansi per fasa $20\angle 30^\circ \Omega$, dihubungkan pada jaringan tiga-fasa yang bertegangan fasa-fasa 380 V rms. Urutan fasa positif. Hitung arus saluran dan gambarkan diagram fasor arus saluran dengan mengambil tegangan fasa-fasa \mathbf{V}_{AB} sebagai referensi. Berapakah daya kompleks total yang diserap beban ?
6. Suatu saluran tiga-fasa ABC mencatu sebuah beban yang terhubung Y. Arus saluran adalah $\mathbf{I}_A = 22\angle -30^\circ$ A rms sedangkan tegangan fasa-fasa $\mathbf{V}_{AB} = 380\angle 30^\circ$ V rms. Anggaplah urutan fasa positif. Hitunglah impedansi per fasa beban. Hitung daya kompleks (3 fasa) yang diserap beban dan faktor dayanya.
7. Sebuah beban tiga-fasa terhubung Y menyerap daya 5 kVA dengan faktor daya 0,9 *lagging* dari saluran tiga-fasa 380 V rms (fasa-fasa). Hitung arus fasa dan hitung resistansi serta reaktansi per fasa beban.
8. Sebuah beban tiga-fasa terhubung Δ menyerap daya 5 kVA dengan faktor daya 0,9 *lagging* dari saluran tiga-fasa 380 V rms (fasa-fasa). Hitung arus fasa, arus saluran, dan hitung resistansi serta reaktansi per fasa beban.
9. Dua buah beban tiga-fasa dihubungkan paralel pada saluran tiga-fasa bertegangan 380 V rms (fasa-fasa). Beban pertama terhubung Y menyerap daya 25 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*. Beban kedua terhubung Δ mempunyai impedansi per fasa $40 + j0 \Omega$. Hitung arus saluran, daya total serta faktor dayanya.
10. Dua beban pada soal 3 terletak di satu lokasi. Beban-beban tersebut dicatu dari sumber dengan menggunakan saluran yang impedansi per fasanya $0,6 + j4 \Omega$. Berapa daya yang diserap saluran ? Berapa daya yang harus disediakan oleh sumber ? Pada tegangan berapa sumber harus beroperasi agar tegangan pada beban dipertahankan 380 V rms (fasa-fasa).
11. Sebuah generator tiga-fasa membangkitkan tegangan fasa-netral 2400 V rms. Impedansi internal generator ini adalah $j2 \Omega$ per fasa. Generator ini mencatu beban melalui saluran tiga-fasa yang mempunyai impedansi $1 + j5 \Omega$ per fasa. Beban yang dicatu terhubung Y dengan impedansi per fasa $80 + j60 \Omega$. Gambarkan diagram rangkaian ini. Hitunglah : (a) arus di saluran; (b)

- tegangan di terminal beban; (c) daya kompleks yang diberikan oleh generator dan yang diserap oleh beban; (d) efisiensi saluran.
12. Sebuah beban tiga-fasa mempunyai impedansi per fasa $9 + j21 \Omega$, ber-operasi pada tegangan fasa-fasa 380 Vrms. Beban ini dicatu dari sumber melalui saluran yang impedansinya $2 + j4 \Omega$ per fasa. Hitunglah daya yang diberikan oleh sumber dan daya yang diserap beban jika: (a) beban dihu-bungkan Y; (b) beban dihubungkan Δ .
 13. Sebuah pabrik dicatu dari jaringan tiga-fasa , 380 V rms (f-f), 50 Hz. Beban terdiri dari 10 buah motor induksi, masing-masing 10 HP dengan efisiensi 85% pada beban penuh dan faktor daya 0,85 *lagging*, dan 800 buah lampu pijar masing-masing 50 W, 220 V. Dengan menganggap semua beban seimbang, dan seluruh motor beroperasi dan seluruh lampu menyala, hitunglah daya dan faktor daya total seluruh beban.
 14. Sebuah beban tiga-fasa menyerap daya kompleks sebesar $S = 16 + j12$ kVA dan beroperasi pada tegangan fasa-fasa 440 V rms. (a) Tentukan besarnya arus saluran. (b) Jika impedansi saluran (antara sumber dan beban) adalah $Z_s = 0,6 + j4 \Omega$ per fasa, berapakah daya yang diserap saluran ? (c) Berapakah tegangan sumber ?

Resistor

Rangkaian pemroses energi maupun pemroses sinyal memerlukan resistor yang sedapat mungkin “*murni*”. Gejala adanya induktansi maupun kapasitansi pada piranti ini harus diusahakan sekecil mungkin. Resistor juga harus mempunyai koefisien temperatur yang rendah agar dalam operasinya perubahan nilai resistansi sebagai akibat kenaikan temperatur masih dalam batas-batas yang dapat diterima. Nilai resistansi yang diperlukan dalam rangkaian listrik bisa tinggi bahkan sangat tinggi, terutama dalam rangkaian elektronika, antara 10^3 sampai $10^8 \Omega$. Sementara itu material yang sesuai untuk membangun resistor mempunyai resistivitas ρ kurang dari $10^{-6} \Omega\text{m}$. Oleh karena itu dikembangkan konstruksi serta cara-cara pembuatan resistor yang dapat memenuhi persyaratan-persyaratan teknis (termasuk dimensi) serta pertimbangan-pertimbangan ekonomis.

I.1. Konstruksi

Lapisan Tipis (*Thin Films*). Di atas permukaan suatu bahan pendukung (substrat) dibuat lapisan tipis bahan resistif melalui proses evaporasi (penguapan) ataupun *sputtering* dalam vakum. Bahan-bahan metal seperti aluminium, perak, emas, dan Ni-Cr dapat dengan mudah diuapkan dalam vakum untuk membentuk lapisan tipis di atas permukaan substrat. Ketebalan lapisan yang diperoleh adalah sekitar 10 nm. Setelah lapisan tipis ini terbentuk, dilakukan “pengupasan” lapisan menurut pola-pola tertentu untuk memperoleh lebar dan panjang lapisan yang diinginkan sesuai dengan nilai resistansi yang diperlukan. Proses “pengupasan” dapat dilakukan dengan beberapa cara, misalnya dengan *air jet* yang mengandung partikel-partikel abrasif, atau penguapan dengan berkas sinar laser atau berkas elektron. Sering juga digunakan proses photolithography.

Lapisan Tebal (*Thick Film*). Tebal lapisan bahan resistif aktif di sini adalah antara 10 – 15 μm , dibuat dengan teknik *sablon*. Pola-pola alur resistor dibuat lebih dahulu pada *screen* yang kemudian diletakkan tetap sekitar 1 – 3 mm di atas permukaan substrat. Cat

dengan kekentalan tertentu, yang merupakan bahan resistor, diletakkan di atas screen kemudian disapukan merata menggunakan penyapu dari karet-keras dengan tekanan yang cukup agar screen menyentuh permukaan substrat. Jika penyapuan dihentikan screen akan kembali pada posisi semula dan terbentuklah pola-pola cat di atas substrat. Kekentalan cat harus dibuat sedemikian rupa sehingga pada waktu screen terangkat, cat yang berada di atas substrat meluber ke tempat yang semula tertutup oleh benang / kawat screen. Dengan demikian ketebalan lapisan tidak terlalu bervariasi.

Cat bahan resistor diperoleh melalui pencampuran tepung bahan konduktif (biasanya oksida misalnya PdO , RuO_2 , dengan konduktivitas $10^6 - 10^6 \text{ Sm}^{-1}$) dengan tepung silikat (boro-silikat timbal) serta campuran bahan organik. Setelah pola-pola resistor terbentuk di atas permukaan substrat, dilakukan pemanasan secara terkendali pada temperatur antara $100 - 150^\circ\text{C}$ sehingga larutan organik menguap. Sisa-sisa bahan organik yang masih tersisa dihilangkan dengan pemanasan pada temperatur $200 - 400^\circ\text{C}$. Yang tertinggal adalah campuran silikat dan komponen resistif aktif yang akan melekat dengan baik pada permukaan substrat melalui pemanasan pada temperatur 800°C .

Gulungan Kawat. Untuk memperoleh kemampuan arus yang lebih tinggi, dibuat resistor dari gulungan kawat. Untuk mengurangi efek induktansi pada gulungan kawat ini dilakukan cara penggulangan tertentu, misalnya penggulangan *bifilar*.

Resistor Dalam Rangkaian Terintegrasi. Selain konstruksi tersebut di atas, kita mengenal resistor-resistor dalam rangkaian terintegrasi.

I.2. Nilai-Nilai Standar

Resistor dibuat menurut suatu nilai standard dengan toleransi seperti terlihat pada Tabel-I.1. Tabel-I.2 memuat macam resistor dan rentang dayanya. Tabel-I.3 memuat macam potensiometer dan rentang dayanya.

Tabel-I.1: Nilai-Nilai Standar Resistor					
Nilai	Toleransi \pm %	Nilai	Toleransi \pm %	Nilai	Toleransi \pm %
10	5; 10; 20	22	5; 10; 20	47	5; 10; 20
11	5	24	5	51	5
12	5; 10	27	5; 10	56	5; 10
13	5	30	5	62	5
15	5; 10; 20	33	5; 10; 20	68	5; 10; 20
16	5	36	5	75	5
18	5; 10	39	5; 10	82	5; 10
20	5	43	5	91	5

Tabel-I.2: Macam Resistor & Rentang Dayanya		
Type & Nilai Numerik	Toleransi \pm %	Daya [W]
Komposit: 1 Ω - 20 M Ω	5; 10; 20	1/8; 1/4; 1/2; 1; 2
Karbon: 1 Ω - 20 M Ω	1; 2; 5	1/2 ÷ 2
Lapisan Logam: 10 Ω - 10 M Ω	0.01 ÷ 1	1/20 ÷ 1/4.
Gulungan Kawat: 0.1 Ω - 200 k Ω	0.1 ÷ 2	1; 2; 5; 10; 25

Tabel-I.3: Potensiometer		
Type & Nilai Numerik	Toleransi \pm %	Daya [W]
Komposit: 50 Ω - 5 M Ω	10	2
Lapisan Logam: 50 Ω - 10 k Ω	2,5	0,5 ÷ 1
Kawat gulung: 10 Ω - 100 k Ω	2,5	1 ÷ 1000

Halaman Kosong

Kapasitor

Dalam rangkaian listrik kapasitor dapat melakukan berbagai fungsi, misalnya kopling kapasitif, pemisahan tegangan bolak-balik dan tegangan searah, *filtering* (penapisan) dan penyimpanan energi. Kapasitor melewatkan arus bolak-balik tetapi menahan arus searah sehingga ia dapat mengkopel arus bolak-balik antara satu bagian rangkaian dengan bagian lainnya sementara arus searah di kedua bagian tersebut dipisahkan. Nilai kapasitor juga dapat dipilih sedemikian rupa guna memilah frekuensi yang berbeda. Sebagai penyimpan muatan ia dapat dimanfaatkan misalnya pada lampu kilat kamera.

II.1. Efisiensi Volume

Efisiensi volume merupakan ukuran kapasitansi yang mungkin diperoleh untuk suatu ukuran (dimensi) tertentu. Untuk kapasitor pelat paralel dengan luas A dan jarak elektroda d (yang berarti juga tebal dielektrik = d), serta permitivitas relatif dielektrik adalah ϵ_r , maka kapasitansi adalah

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (\text{II.1})$$

dan efisiensi volume adalah C/volume

$$\frac{C}{\text{volume}} = \frac{C}{Ad} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{d^2} \quad (\text{II.2})$$

Jadi efisiensi volume berbanding lurus dengan permitivitas relatif ϵ_r dan berbanding terbalik dengan kuadrat tebal dielektriknya. Hal ini berarti bahwa makin tinggi permitivitas relatif dan makin tipis bahan dielektriknya akan makin tinggi efisiensi volumenya. Akan tetapi dielektrik tidak dapat dibuat terlalu tipis karena bahan dielektrik mempunyai kekuatan menahan tegangan tertentu yang jika dilampaui akan terjadi tembus listrik.

Jika kuat medan tembus dielektrik adalah E_b sedangkan kapasitor dirancang untuk tegangan kerja V_k , maka dengan faktor keamanan η kita akan membuat

$$\eta V_k = E_b d \quad (\text{II.3})$$

Dari (II.2) dan (II.3) kita dapat menentukan kerapatan energi dalam dielektrik yang diperkenankan, yaitu

$$\left(\frac{1}{2} CV_k^2\right) / \text{volume} = \left(\frac{1}{2} CV_k^2\right) / \frac{Cd^2}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V_k^2}{2d^2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E_b^2}{2\eta^2} \quad (\text{II.4})$$

Persamaan (II.4) menunjukkan bahwa dalam memilih dielektrik untuk kapasitor tegangan tinggi faktor $\epsilon_r E_b^2$ perlu diperhatikan.

Muatan yang dapat tersimpan dalam kapasitor adalah $q = CV_k$. Efisiensi penyimpanan muatan adalah q / volume menjadi

$$\frac{q}{\text{volume}} = \frac{C}{\text{volume}} V_k \quad (\text{II.5})$$

Jadi efisiensi penyimpanan muatan sama dengan efisiensi volume kali tegangan kerjanya.

II.2. Resistansi Arus Searah

Kapasitor nyata (bukan ideal) mengandung resistansi arus searah yang besarnya

$$R_c = \frac{\rho d}{A} \quad \text{dengan } \rho \text{ adalah resistivitas dielektrik.} \quad (\text{II.6})$$

Suatu kapasitor yang bermuatan Q_0 akan melepaskan muatannya melalui resistansi ini sesuai dengan relasi

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{dengan } \tau = R_c C \quad (\text{II.7})$$

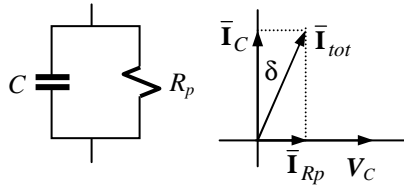
Konstanta waktu τ ini tidak tergantung dari dimensi kapasitor tetapi ditentukan hanya oleh dielektriknya. Hal ini dapat kita lihat jika kita masukkan (II.6) dan (II.1) kita dapatkan

$$\tau = R_c C = \frac{\rho d}{A} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \rho \epsilon_r \epsilon_0 \quad (\text{II.8})$$

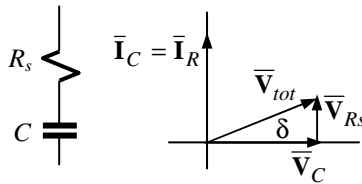
Resistansi R_c di atas adalah resistansi dari volume dielektrik. Untuk kapasitor tegangan tinggi ($> 1\text{kV}$), kita harus memperhatikan pula adanya resistansi permukaan antara elektroda.

II.3. Rangkaian Ekuivalen Pada Tegangan Bolak-Balik

Jika tegangan bolak-balik diterapkan pada kapasitor ideal, tidak terjadi *desipasi* energi. Dalam kenyataan, kapasitor mengandung resistansi baik resistansi kawat terminasi, elektroda, maupun resistansi dielektriknya sendiri. Yang paling dominan adalah resistansi dielektrik. Adanya resistansi ini menyebabkan terjadinya desipasi energi, yang dinyatakan sebagai “*faktor desipasi*” atau $\tan \delta$. Untuk menyatakan adanya rugi-rugi ini, suatu kapasitor dinyatakan dengan rangkaian ekivalen yang terdiri dari kapasitor ideal paralel dengan sebuah resistor R_p seperti pada Gb.II.1. atau kapasitor ideal seri dengan resistor R_s seperti Gb.II.2.



Gb.II.1. Rangkaian ekivalen kapasitor dengan resistor paralel.



Gb.II.2. Rangkaian ekivalen kapasitor dengan resistor seri.

Nilai R_p dan R_s untuk kedua rangkaian ekivalen ini masing-masing adalah

$$R_p = \frac{V_C}{I_{R_p}} = \frac{V_C}{I_C \tan \delta} = \frac{1}{\omega C \tan \delta} \quad (\text{II.9})$$

$$R_s = \frac{V_{R_s}}{I_{R_s}} = \frac{V_C \tan \delta}{I_C} = \frac{\tan \delta}{\omega C} \quad (\text{II.10})$$

Rangkaian ekivalen dengan resistor seri lebih mudah digunakan dalam aplikasi praktis karena dalam rangkaian ekivalen ini resistor seri dilalui arus yang sama dengan arus kapasitor. Resistor seri yang digunakan untuk menyatakan adanya gejala resistansi pada kapasitor ini sering disebut *e.s.r.* (*equivalent series resistance*). Untuk frekuensi tinggi, selain resistansi kita perlu memperhitungkan pula

adanya gejala induktansi L pada sambungan-sambungan kawat serta elektroda. Dalam hal terakhir ini rangkaian ekivalen kapasitor berupa rangkaian seri resistor R_s , iduktor L_s dan kapasitor ideal C , yang pada frekuensi tinggi tertentu bisa terjadi resonansi.

II.4. Desipasi Daya Pada Kapasitor

Dari diagram fasor Gb.II.1. dapat diformulasikan daya yang didesipasi berupa panas, yaitu sebesar

$$P = \mathbf{V}_C \mathbf{I}_{Rp} = \mathbf{V}_C \mathbf{I}_C \tan \delta = V_C I_C \tan \delta \quad (\text{II.11})$$

atau dari Gb.II.2.

$$P = \mathbf{V}_{Rs} \mathbf{I}_C = \mathbf{V}_C \mathbf{I}_C \tan \delta = V_C I_C \tan \delta \quad (\text{II.12})$$

V_C dan I_C dalam kedua persamaan ini adalah nilai efektif tegangan dan arus. Oleh karena $\mathbf{I}_C = j\omega C \mathbf{V}_C$ atau $I_C = \omega C V_C$ maka persamaan (II.11) ataupun (II.12) dapat dituliskan sebagai

$$P = V_C (\omega C V_C) \tan \delta = V_C^2 \omega C \tan \delta \quad (\text{II.13})$$

Jika tegangan kapasitor dinyatakan sebagai fungsi sinus $v_C = V_{maks} \sin \omega t$, nilai efektif tegangan adalah $V_C = \frac{V_{maks}}{\sqrt{2}}$ dan persamaan (II.13) dapat pula ditulis sebagai

$$P = \frac{1}{2} V_{maks}^2 \omega C \tan \delta \quad (\text{II.14})$$

Kerapatan daya yang didesipasi adalah

$$\begin{aligned} \frac{P}{\text{volume}} &= \frac{1}{2} \frac{V_{maks}^2 \omega C \tan \delta}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \frac{V_{maks}^2 \omega (\epsilon_r \epsilon_0 A / d) \tan \delta}{A \times d} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{maks}^2 \omega \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta}{d^2} \\ &= \frac{1}{2} E_{maks}^2 \omega \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{AC} &= \omega \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta \text{ disebut } \textit{konduktivitas dielektrik.} \\ (\epsilon_r \tan \delta) &\text{ disebut } \textit{faktor rugi-rugi dielektrik} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

II.5. Permittivitas Kompleks

Rugi daya pada kapasitor sesungguhnya adalah rugi daya pada dielektriknya, atau dengan kata lain faktor rugi-rugi $\tan\delta$ adalah sifat dari dielektriknya. Untuk mencakup adanya rugi-rugi dielektrik ini, dikenalkan pengertian permitivitas relatif kompleks dari dielektrik, yaitu

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' \quad (\text{II.17})$$

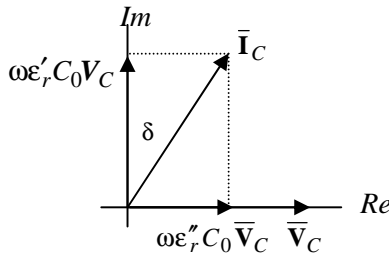
dengan ϵ_r' adalah bagian riil dan ϵ_r'' adalah bagian imajiner dari permitivitas. Dengan pengertian ini maka arus kapasitor adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= j\omega C \mathbf{V}_C = j\omega \epsilon_r^* \epsilon_0 \frac{A}{d} \mathbf{V}_C \\ &= j\omega (\epsilon_r' - j\epsilon_r'') \epsilon_0 \frac{A}{d} \mathbf{V}_C = j\omega \epsilon_r' C_0 \mathbf{V}_C + \omega \epsilon_r'' C_0 \mathbf{V}_C \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

dengan C_0 adalah kapasitansi dalam vakum yang mempunyai

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = 1 - j0.$$

Arus kapasitor dalam rumusan (II.16) terdiri dari dua komponen. Komponen pertama adalah arus kapasitor tanpa rugi-rugi, dan komponen kedua adalah arus yang sefasa dengan tegangan. Diagram fasor arus ini terlihat pada Gb.II.3.



Gb.II.3. Diagram fasor arus kapasitor.

Pada Gb.II.3. jelas terlihat bahwa

$$\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} = \tan \delta \quad (\text{II.19})$$

Dari Gb.II.3. terlihat pula bahwa desipasi daya pada kapasitor adalah

$$P = \omega \epsilon_r'' C_0 V_C^2 \quad (\text{II.20})$$

Dengan memasukkan (II.17) ke (II.18) dapat kita peroleh

$$P = \omega \epsilon_r' C_0 V_C^2 \tan \delta = \omega C V_C^2 \tan \delta \quad (\text{II.21})$$

Kerapatan daya yang didesipasi

$$\begin{aligned} \frac{P}{\text{volume}} &= \frac{\omega \epsilon_r' C_0 V_C^2 \tan \delta}{A \times d} = \frac{\omega \epsilon_r' \epsilon_0 (A/d) V_{maks}^2 \tan \delta}{2 \times A \times d} \\ &= \frac{1}{2} E_{maks} \omega \epsilon_r' \epsilon_0 \tan \delta \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

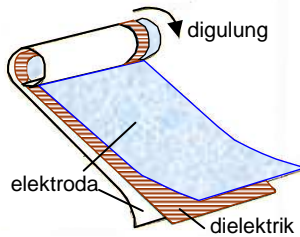
Persamaan ini identik dengan persamaan (II.15).

II.6. Macam-Macam Konstruksi Kapasitor

Macam-macam kapasitor yang utama adalah sebagai berikut.

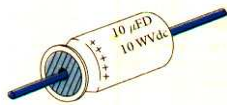
Kapasitor Pita Polimer. Pada dasarnya kapasitor ini dibangun dari pita polimer sebagai dielektrik yang diletakkan antara dua pita aluminium (*aluminium foil*) sebagai elektroda dan digulung untuk memperoleh luas elektroda yang diinginkan. Gulungan ini kemudian dimasukkan ke dalam tabung aluminium atau dilindungi dengan *epoxy resin*. Konstruksi lain adalah menggunakan lapisan aluminium yang diendapkan (melalui proses penguapan) langsung di permukaan pita polimer sebagai elektroda. Tebal pita polimer hanya beberapa mikron sedangkan tebal lapisan elektroda yang diendapkan di permukaan polimer adalah sekitar $0.025 \mu\text{m}$; dengan demikian efisiensi volume menjadi tinggi.

Polimer yang biasa digunakan adalah *polystyrene*, *polypropylene*, *polyester*, *polycarbonate*. Kapasitor jenis ini banyak dipakai. Kapasitor dengan dielektrik *polystyrene* mempunyai faktor kerugian ($\tan \delta$) yang sangat rendah ($< 10^{-3}$). Kapasitansi yang bisa dicapai pada konstruksi ini adalah antara $10^{-5} - 10^2 \mu\text{F}$. Kertas dengan impregnasi juga sering digunakan juga sebagai dielektrik.



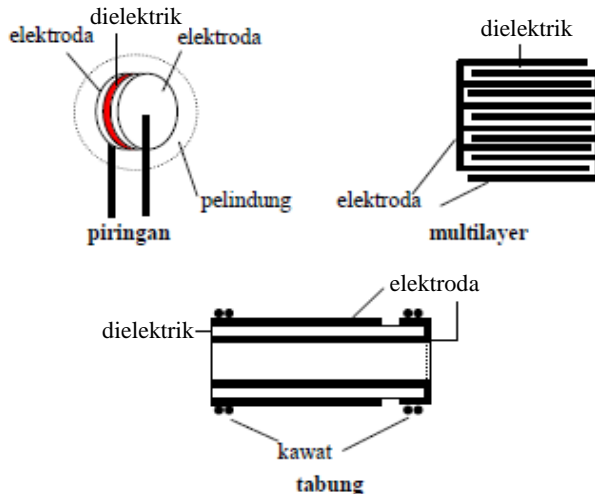
Gb.II.4. Kapasitor pita polimer.

Kapasitor Elektrolit Aluminium. Kapasitor ini dibangun dari dua pita aluminium yang sangat murni dengan ketebalan sekitar $50\ \mu\text{m}$ sebagai elektroda, dan diantara keduanya diletakkan kertas berpori, kemudian digulung membentuk silinder. Salah satu elektroda (yaitu anoda) mempunyai lapisan alumina dengan tebal sekitar $0.1\ \mu\text{m}$, yang dibentuk secara anodik. Gulungan ini dimasukkan ke dalam tabung silinder kemudian kertas berporinya di-impregnasi dengan suatu elektrolit (misalnya amonium pentaborat). Dengan demikian tersusunlah kapasitor yang terdiri dari anoda pita aluminium, lapisan alumina sebagai dielektrik, serta elektrolit dan pita aluminium yang lain sebagai katoda. Dalam penggunaan anoda harus tetap berpotensi positif. Kapasitor ini dibuat dalam rentang nilai antara 10^{-1} sampai $10^4\ \mu\text{F}$.



Gb.II.5. Kapasitor elektrolit.

Kapasitor Keramik. Kapasitor keramik dibuat untuk penggunaan pada tegangan dan daya rendah maupun tegangan dan daya tinggi. Untuk tegangan rendah kita mengenal konstruksi piringan, konstruksi tabung, dan konstruksi multilayer.



Gb.II.6. Kapasitor Keramik

Kapasitor Mika. Konstruksi yang umum terdiri dari beberapa lempeng mika dengan ketebalan antara 0.25 sampai 50 μm sebagai dielektrik dengan lapisan perak sebagai elektroda yang disusun dan diklem membentuk satu susunan kapasitor terhubung paralel. Susunan ini kemudian dibungkus dengan thermosetting resin untuk melindunginya dari kelembaban. Kapasitor jenis ini dibuat dalam rentang 10^{-5} sampai 10^{-1} μF .

II.7. Nilai Standar

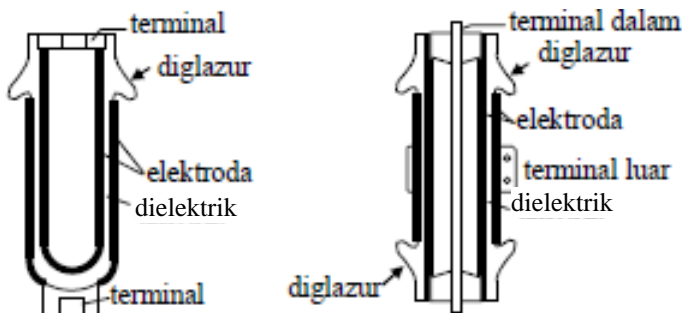
Nilai standar kapasitor tegangan rendah dan toleransinya sama seperti resistor yang diberikan dalam tabel I.1. Tabel II.1. memuat macam kapasitor dan rating tegangannya.

Tabel II.1. Kapasitor

Dielektrik	Rentang nilai	Toleransi $\pm \%$	Teg. Kerja [V =]
Gelas	$1 \div 10^4$ pF	5	100÷1250
Mika	$1 \div 10^5$ pF	1; 2; 5	50÷500
Kertas	10 pF÷10 μF	10	50÷400
Plastik	1 pF ÷ 1 μF	2; 5; 10	50÷600
Keramik	$10 \div 10^6$ pF	5; 10; 20	50÷1600

II.8. Kapasitor Tegangan Tinggi

Konstruksi-konstruksi untuk tegangan rendah tidak dapat digunakan untuk tegangan tinggi karena mempunyai kelemahan yaitu kedua elektrodanya tetap paralel sampai di bagian pinggirnya. Pada konstruksi yang demikian ini, walaupun kuat medan listrik di bagian tengah masih normal, di bagian pinggir elektroda dapat terjadi kuat medan yang lebih tinggi (bisa sampai dua kali lipat kuat medan rata-rata) . Selama kuat medan rata-rata kecil dibandingkan dengan kuat medan tembus dielektrik, hal ini tidak menjadi masalah besar. Akan tetapi untuk kondensator tegangan tinggi hal ini harus mendapat perhatian khusus. Tembus permukaan bisa terjadi jika dielektrik kapasitor yang mempunyai permitivitas tinggi berbatasan dengan dielektrik sekitarnya yang permitivitasnya lebih rendah, misalnya udara. Untuk mengatasi situasi ini, pinggiran elektroda dibuat melengkung sedemikian rupa sehingga jarak rambat permukaan dielektrik di daerah pinggir menjadi panjang. Selain itu permukaan dielektrik kapasitor juga perlu di glazur. Konstruksi yang sering dijumpai untuk kapasitor tegangan tinggi adalah konstruksi pot dan konstruksi silinder.



Gb.II.7. Kapasitor tegangan tinggi.

Daftar Notasi

v atau $v(t)$: tegangan sebagai fungsi waktu.
V	: tegangan dengan nilai tertentu, tegangan searah.
V_{rr}	: tegangan, nilai rata-rata.
V_{rms}	: tegangan, nilai efektif.
V_{maks}	: tegangan, nilai maksimum, nilai puncak.
\overline{V}	: fasor tegangan dalam analisis di kawasan fasor.
$ \overline{V} $: nilai mutlak fasor tegangan.
$V(s)$: tegangan fungsi s dalam analisis di kawasan s .
i atau $i(t)$: arus sebagai fungsi waktu.
I	: arus dengan nilai tertentu, arus searah.
I_{rr}	: arus, nilai rata-rata.
I_{rms}	: arus, nilai efektif.
I_{maks}	: arus, nilai maksimum, nilai puncak.
\overline{I}	: fasor arus dalam analisis di kawasan fasor.
$ \overline{I} $: nilai mutlak fasor arus.
$I(s)$: arus fungsi s dalam analisis di kawasan s .
p atau $p(t)$: daya sebagai fungsi waktu.
p_{rr}	: daya, nilai rata-rata.
S	: daya kompleks.
$ S $: daya kompleks, nilai mutlak.
P	: daya nyata.
Q	: daya reaktif.
q atau $q(t)$: muatan, fungsi waktu.
w	: energi.
R	: resistor; resistansi.
L	: induktor; induktansi.
C	: kapasitor; kapasitansi.
Z	: impedansi.
Y	: admitansi.
$T_V(s)$: fungsi alih tegangan.
$T_I(s)$: fungsi alih arus.
$T_Y(s)$: admitansi alih.
$T_Z(s)$: impedansi alih.
μ	: <i>gain</i> tegangan.
β	: <i>gain</i> arus.
r	: resistansi alih, <i>transresistance</i> .
g	: konduktansi; konduktansi alih, <i>transconductance</i> .

Daftar Pustaka

1. P. C. Sen, “*Power Electronics*” McGraw-Hill, 3rd Reprint, 1990, ISBN 0-07-451899-2.
2. Ralph J. Smith & Richard C. Dorf : “*Circuits, Devices and Systems*” ; John Wiley & Son Inc, 5th ed, 1992.
3. David E. Johnson, Johnny R. Johnson, John L. Hilburn : “*Electric Circuit Analysis*” ; Prentice-Hall Inc, 2nd ed, 1992.
4. Vincent Del Toro : “*Electric Power Systems*”, Prentice-Hall International, Inc., 1992.
5. Roland E. Thomas, Albert J. Rosa : “*The Analysis And Design of Linier Circuits*”, . Prentice-Hall Inc, 1994.
6. Douglas K Lindner : “*Introduction to Signals and Systems*”, McGraw-Hill, 1999.
7. Sudaryatno Sudirham, “*Analisis Rangkaian Listrik*”, Penerbit ITB 2002.
8. Sudaryatno Sudirham, “*Pengembangan Metoda Unit Output Untuk Perhitungan Susut Energi Pada Penyulang Tegangan Menengah*”, Monograf, 2005, *limited publication*.
9. Sudaryatno Sudirham, “*Pengantar Rangkaian Listrik*”, Catatan Kuliah El 1001, Penerbit ITB, 2007.
10. Sudaryatno Sudirham, “*Analisis Harmonisa Dalam Permasalahan Kualitas Daya*”, Catatan Kuliah El 6004, 2008.

Biodata Penulis

Nama: Sudaryatno Sudirham

Lahir: 26 Juli 1943, di Blora.

Istri: Ning Utari

Anak: Aрга Aridarma, Aria Ajidarma.

Pendidikan & Pekerjaan:

1971 : Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung.

1982 : DEA, l'ENSEIHT, INPT, Perancis.

1985 : Doktor, l'ENSEIHT, INPT, Perancis.

1972 - 2008 : Dosen Teknik Elektro, ITB.

Training & Pengalaman lain:

1974 : TERC, UNSW, Australia; 1975 - 1978 : Berca Indonesia PT,

Jakarta; 1979 : Electricité de France, Perancis; 1981 : Cour d'Ete,

Grenoble, Perancis; 1991 : Tokyo Intitute of Technology, Tokyo,

Jepang; 2005 : Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand;

2005 - 2009 : Tenaga Ahli, Dewan Komisaris PT PLN (Persero);

2006 - 2011 : Komisaris PT EU – ITB.

Indeks

- a
alih daya 276
alih daya maksimum 133
alih daya maksimum 280, 283
amplitudo 38
anak-tangga 17
aperiodik 37
arus 9
arus mesh 169, 259
- b
batere 193, 196
bentuk gelombang dasar 17
besaran listrik 9
- c
CCCS 89, 90
CCVS 89, 90
- d
daya 10, 320
daya kompleks 270, 271, 316
daya rata-rata 268
daya reaktif 269
deretan pulsa 51
diagram blok 217
diagram fasor 294
diagram satu garis 186, 303, 322
diferensiator 220
dioda 92, 201
distribusi daya 189
- e
eksponensial 18
eksponensial dua sisi 33
eksponensial ganda 27
energi 10
- f
faktor daya 272, 299
fasor 228, 229, 230
filter 203
Fourier 46, 48
- g
gelombang penuh 50, 94, 202
gelombang persegi 28
- h
hubungan Δ 314
hubungan bertingkat 214
hubungan Y 311
hukum Kirchhoff 111, 112, 113
hukum Ohm 109
hukum rangkaian 6
- i
impedansi 233, 236, 273
impedansi masukan 299
impuls 26
induktansi bersama 69
induktansi ekuivalen 124
induktor 65, 66, 234
integrator 219
- k
kaidah rangkaian 6
kapasitansi ekuivalen 123
kapasitor 60, 61, 62, 234
kausal 37
komposit 25
konvensi pasif 12
konvensi titik 72
kubik 32
- l
lebar pita 46
- m
metoda analisis 7
muatan 10
- n
nilai efektif 38
nilai puncak 38
nilai rata-rata 38
nilai sesaat 38
non-kausal 37

o
Op Amp 99, 100, 101, 206
parabolik 32

p
pembagi arus 127, 236
pembagi tegangan 127, 235
pemotong gelombang 95
penguat inversi 207
penguat non-inversi 103, 207
pengukuran resistansi 183
pengurang 212
penjumlah 209
pensaklaran 97
periodik 37
peubah sinyal 11
proporsionalitas 128, 249

r
ramp 26
rangkaiannya ekuivalen 297, 298
rangkaiannya ekuivalen Thévenin 251, 255
rangkaiannya penyangga 102, 206
reduksi rangkaiannya 144, 256
referensi sinyal 11
resistansi ekuivalen 122
kabel 184
resistor 57, 58, 59, 233
resonansi 260, 263

s
saklar 75
saluran udara 185
segitiga daya 271

setengah gelombang 50, 92, 201
signum 33
sinus 19
sinus teredam 27
sinyal persegi 51
sinyal segitiga 51
sinyal waktu diskrit 11
sinyal waktu kontinyu 11
spektrum sinyal 41
struktur dasar 4
sumber praktis 86
sumber arus bebas 84
sumber ekuivalen 124
sumber tak-bebas 89
sumber tegangan bebas 83
superposisi 129, 147, 249, 253

t
tegangan 10
tegangan simpul 160, 258
teorema Millman 130
teorema substitusi 135
teorema Tellegen 136
teorema Thévenin 130
teorema Norton 131
tiga-fasa 307, 308
transformasi Y- Δ 125
transformator 76, 289

u
unit output 146, 252

v
VCCS 89, 90
VCVS 89, 90