Решение задач на КПД цикла

КПД теплового двигателя, рабочий цикл которого задан графически, можно найти несколькими способами. Перечислим формулы и факты, которые надо знать для решения задач этого раздела.

1). $\eta = \dfrac{A_o}{Q_H}$, где A_o - работа газа за цикл, а Q_H - количество теплоты, получаемое газом (рабочим телом) от нагревателя.

2). A_o (работа газа за цикл) представляет собой разность работы газа и модуля работы над газом, т.е. «полную работу». Обычно находится как площадь внутри графика цикла в координатах *p(V)*, поэтому формулой 1 пользуются тогда, когда график цикла в координатах *p(V)* представляет собой простую геометрическую фигуру, для которой легко найти площадь. A_o **положительна при обходе цикла по часовой стрелке**!

3). Q_H (количество теплоты, получаемое от нагревателя) – это количество теплоты, получаемое газом в процессах цикла. Поэтому для использования формулы необходим анализ, в каких именно процессах цикла количество теплоты положительно.

4). $\eta = \dfrac{Q_H - |Q_X|}{Q_H} = 1 - \dfrac{|Q_X|}{Q_H}$, где Q_X - количество теплоты, отдаваемое газом холодильнику. Формула используется в тех случаях, когда найти количество теплоты, отданное холодильнику, найти проще, чем работу газа за цикл.

5). Q_X (количество теплоты, отдаваемое холодильнику) – это количество теплоты, отдаваемое газом в процессах цикла. Поэтому для использования формулы снова необходим анализ процессов цикла. Q_X равно сумме количеств теплоты в тех процессах, в количество теплоты отрицательно.

6). Поскольку процессы, по которым работает тепловой двигатель, циклично, то после прохождения одного цикла вы возвращаетесь в ту же точку, с которой начали обход. Внутренняя энергия - это функция состояния, поэтому при возвращении в первоначальное состояние внутренняя энергия принимает то же значение. Поэтому **изменение внутренней энергии за цикл равно нулю**. Этим фактом можно также пользоваться при решении задач.

7). Максимальный КПД тепловой машины, имеющей заданные минимальную (температуру холодильника T_X) и максимальную (температуру нагревателя T_H) температуры – это КПД идеальной тепловой машины Карно. Находится КПД машины Карно по формуле:

$$\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}.$$

Кроме знания этих фактов необходимо также уметь применять первое начало термодинамики к различным процессам, знать формулы для внутренней энергии и работы идеального газа, уметь анализировать различные процессы в различных координатах.

<u>Задача 1</u>. ([1], № 10.257)

Условие.

С одним молем идеального газа совершают циклический процесс *1–2–3–4–1,* изображенный на *T– p* - диаграмме (рис. 10.41). Определить работу, совершенную газом за цикл, если температуры в состояниях *1* и *3* равны соответственно T_1 и T_3, а температуры в состояниях *2* и *4* одинаковы.

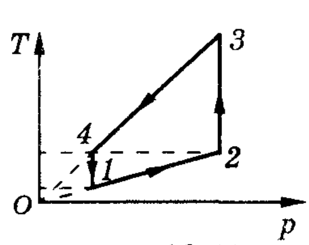
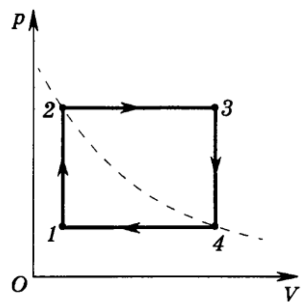


Рис. 10.41

Добавим еще одно задание: найти КПД цикла. В ходе этого *процесса найдем и работу.*

Решение.

Перечертим график цикла в координатах *p(V)*. Для этого проанализируем процессы, сразу записывая для них первое начало термодинамики.



$1 \to 2$: $V = \text{const}$, $p\uparrow \Rightarrow T\uparrow$ $\quad Q = \Delta U + \cancel{A} = \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T > 0$ (так как T↑).

$2 \to 3$: $p = \text{const}$, $V\uparrow \Rightarrow T\uparrow$ $\quad Q = \Delta U + A, \Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T > 0$ (так как $T\uparrow$), $A > 0$ (так как $V\uparrow$) $\Rightarrow Q = \Delta U + A > 0$

$3 \to 4$: $V = \text{const}$, $p\downarrow \Rightarrow T\downarrow$ $\quad Q = \Delta U + \cancel{A} < 0$ (так как $T\downarrow$)

$4 \to 1$: $p = \text{const}$, $V\downarrow \Rightarrow T\downarrow$ $\quad Q = \Delta U + A,\ \Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T < 0$ (так как $T\downarrow$), $A = p\Delta V < 0$ (так как $V\downarrow$) $\Rightarrow Q = \Delta U + A < 0$.

Так как температуры $T_2 = T_4$, то точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. Температуры T_1 и T_3 известны.

Поскольку график цикла представляет собой прямоугольник, площадь которого легко найти, можно использовать как формулу 1, так и формулу 4. Попробуем оба метода. Все величины в формулах при нахождении КПД следует выражать через одни и те же параметры газа, чтобы сократить их, так как величина КПД - безразмерная.

И еще одно замечание: в ЕГЭ есть требование «описывать все вновь введенные величины». Это не относится к общепринятым обозначениям *Q, U, ΔU, A, T, p, V*. Однако, поскольку мы все эти величины используем с индексами, надо объяснить эксперту, что и как мы обозначаем. Например, это можно сделать так. *Индексы величин T, p, V обозначают номер одного из состояний газа на графике цикла, индексы из двух цифр у величин Q, ΔU, A обозначают соответствие этой величины переходу из одного состояния в другое, например,* Q_{12} *соответствует переходу из состояния 1 в состояние 2 в ходе процесса* $1 \to 2$.

<u>*Способ 1*</u> (по формуле 1).

$$\eta = \frac{A_o}{Q_H}$$

Найдем работу газа за цикл через площадь внутри цикла. Площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон. При этом горизонтальная сторона равна $V_4 - V_1$, а вертикальная – $(p_2 - p_1)$:

$$A_o = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1).$$

Полученное выражение надо выразить через температуры. Учтем, что $p_2 = p_3$, а $V_4 = V_3$. Тогда получится A_o выразить через T_1 и T_3:

$$A_o = (p_3 - p_1)(V_3 - V_1) = p_3V_3 - p_1V_3 - p_3V_1 + p_1V_1.$$

Воспользуемся уравнением состояния идеального газа, чтобы выразить первое и четвертое слагаемое через температуры:

$$p_3V_3 = \nu RT_3, \quad p_1V_1 = \nu RT_1.$$

Для выяснения значений второго и третьего слагаемых подставим условия, данные в задаче: $p_2 = p_3$, $p_4 = p_1$, $V_2 = V_1$, $V_4 = V_3$, $T_2 = T_4$:

$$p_3V_1 = p_2V_2 = \nu RT_2,$$

$$p_1V_3 = p_4V_4 = \nu RT_4 = \nu RT_2 = p_3V_1.$$

Выразим работу с учетом предыдущих выкладок:

$$A_o = p_3V_3 - p_1V_3 - p_3V_1 + p_1V_1 = p_3V_3 - 2p_2V_2 + p_1V_1 = \nu R\left(T_3 - 2T_2 + T_1\right).$$

Поскольку нам неизвестно T_2, попробуем воспользоваться уравнениями процессов, чтобы выразить T_2 через T_1 и T_3.

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4} \Rightarrow \frac{p_2}{T_3} = \frac{p_1}{T_2} \Rightarrow T_3 = T_2\frac{p_2}{p_1};$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2\frac{p_1}{p_2}$$

Перемножим получившиеся выражения, чтобы избавиться от давлений:

$$T_3 \cdot T_1 = T_2\frac{p_2}{p_1}\cdot T_2\frac{p_1}{p_2} = T_2^2 \Rightarrow T_2 = \sqrt{T_3 \cdot T_1}.$$

Тот же результат можно было получить, применив объединенный газовый закон:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3} = \frac{p_4V_4}{T_4} \Rightarrow \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_3V_1}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3} = \frac{p_1V_3}{T_2} \Rightarrow$$

$T_3 = T_2\dfrac{V_3}{V_1}$, $\quad T_1 = T_2\dfrac{V_1}{V_3}$. Так же перемножим, получим то же уравнение связи для температур.

Для работы тогда получаем:

$$\underline{A_o = \nu R\left(T_3 - 2\sqrt{T_3T_1} + T_1\right) = \nu R\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2}$$

Таким образом, на первый вопрос мы ответили.

Найдем Q_H. Из анализа процессов понятно, что

$Q_H = Q_{12} + Q_{23}$.

Дальше расчет можно вести также по-разному.

Способ 1.1.

Подсчитаем отдельно каждое из слагаемых:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1),\ Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2).$$

При записи расчетов не следует употреблять абстрактные $\frac{3}{2}\nu R\Delta T$ или $p\Delta V$, а следует писать конкретные характеристики состояний. Произведения p на V для разных состояний заменим через соответствующие температуры, пользуясь уравнением состояния идеального газа:

$$p_2(V_3 - V_2) = p_2V_3 - p_2V_2 = p_3V_3 - p_2V_2 = \nu R\left(T_3 - T_2\right).$$

В результате получаем:

$$Q_H = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \nu R\left(T_3 - T_2\right) = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2) =$$

$$= \frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1 + \frac{5}{2}\nu RT_3 - \frac{5}{2}\nu RT_2 = \frac{\nu R}{2}\left(5T_3 - 3T_1 - 2T_2\right) = \frac{\nu R}{2}\left(5T_3 - 3T_1 - 2\sqrt{T_1T_3}\right).$$

Способ 1.2.

Запишем еще раз выражение для Q_H:

$Q_H = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{23}$.

Преобразуем сумму изменений внутренней энергии:

$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} = U_2 - U_1 + U_3 - U_2 = U_3 - U_1 = \Delta U_{13}$.

Таким образом, вместо трех слагаемых у нас остается только два:

$$Q_H = \Delta U_{13} + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_3 - T_1\right) + p_2\left(V_3 - V_2\right) = \frac{3}{2}\nu R\left(T_3 - T_1\right) + \nu RT_3 - \nu RT_2 =$$

$$=\frac{\nu R}{2}\left(5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)$$

Найдем КПД:

$$\eta=\frac{A_o}{Q_H}=\frac{\nu R\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3}\right)^2}{\frac{\nu R}{2}\left(5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3}\right)^2}{\left(5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)}.$$

Можно найти КПД и по другой формуле:

$$\eta=1-\frac{|Q_X|}{Q_H}.$$

Для этого необходимо найти Q_X. Сделаем это опять двумя способами.

Способ 2.1.

$$Q_X=Q_{34}+Q_{41}=\Delta U_{34}+\left(A_{41}+\Delta U_{41}\right).$$

Можно сразу отметить, что для изобарного процесса $A=p\Delta V=\nu R\Delta T$, тогда:

$$Q_X=\Delta U_{34}+\left(A_{41}+\Delta U_{41}\right)=\frac{3}{2}\nu R\left(T_4-T_3\right)+\left(\frac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_4\right)+\nu R\left(T_1-T_4\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\nu R\left(T_2-T_3\right)+\frac{5}{2}\nu R\left(T_1-T_2\right)=\frac{3}{2}\nu RT_2-\frac{3}{2}\nu RT_3+\frac{5}{2}\nu RT_1-\frac{5}{2}\nu RT_2=$$

$$=-\frac{\nu R}{2}\left(3T_3-5T_1+2T_2\right)=-\frac{\nu R}{2}\left(3T_3-5T_1+2\sqrt{T_1T_3}\right).$$

Способ 2.2. Сложим изменения внутренней энергии, найдя общее изменение:

$$Q_X=\Delta U_{34}+A_{41}+\Delta U_{41}=A_{41}+\Delta U_{31}=p_1\left(V_1-V_4\right)+\frac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_3\right)=$$

$$=\nu R\left(T_1-T_4\right)+\frac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_3\right)=\nu RT_1-\nu RT_2+\frac{3}{2}\nu RT_1-\frac{3}{2}\nu RT_3=$$

$$=-\frac{\nu R}{2}\left(3T_3-5T_1+2T_2\right)=-\frac{\nu R}{2}\left(3T_3-5T_1+2\sqrt{T_1T_3}\right).$$

Осталось найти КПД:

$$\eta=\frac{Q_H-|Q_X|}{Q_H}=\frac{\frac{\nu R}{2}\left(5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)-\frac{\nu R}{2}\left(3T_3-5T_1+2\sqrt{T_1T_3}\right)}{\frac{\nu R}{2}\left(5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)}=\frac{2T_3+2T_1-4\sqrt{T_1T_3}}{5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3}\right)^2}{5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}}$$

Ответ: $\eta=\dfrac{2\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3}\right)^2}{5T_3-3T_1-2\sqrt{T_1T_3}}$.

Примечание: решение задачи не стоит «читать, как художественную книгу», а вооружившись ручкой надо проделывать все действия, которые в нем описываются.

Если решение этой задачи показалось слишком длинным, следует вспомнить, что каждое из действий не только было подробно объяснено, но были предложены разные варианты «развития событий». Если объяснения понятны, а один из способов в каждом действии выбран в качестве «удобного для себя», то результат может быть получен гораздо быстрей. Продемонстрируем это на примере следу.щей задачи.

Задача 2. ([1], № 10.265)

Условие.

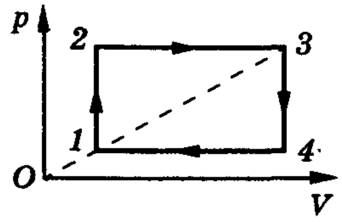


Рис. 10.48

Найти КПД цикла (рис. 10.48), если известно, что максимальная и минимальная температуры в цикле отличаются в 4 раза. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

Решение.

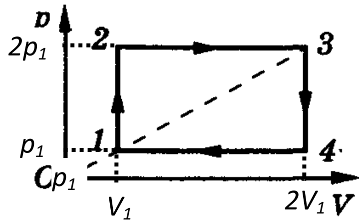
Понятно, что максимальная температура в цикле – это температура T_3 (именно для точки 3 произведение p на V будет самым большим), а минимальная – T_1. Итак, $T_3 = 4T_1$.

Так же ясно, что КПД проще находить с помощью формулы с работой за цикл, поскольку площадь прямоугольника найти легко. Мы увидели в предыдущей задаче, что выражать все величины через температуру достаточно сложно. Действительно, это лучше делать через давление и объем, величины которых есть на графике.

Пунктирная прямая на графике явно проведена не просто так. А из соотношения температур можно получить соотношения для p и V. Вспомним, что означает тот факт, что точки 1 и 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат:

$\dfrac{p_3}{p_1} = \dfrac{V_3}{V_1} = k$. Тогда $p_3 = kp_1;\quad V_3 = kV_1$.

Но тогда из уравнения $\dfrac{p_1V_1}{T_1} = \dfrac{p_3V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{p_1V_1}{T_1} = \dfrac{k^2 p_1V_1}{T_3}$.



Подставив выражения для значений давления и объема для точки 3 через параметры точки 1, мы получаем коэффициент k:

$T_3 = k^2T_1 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 2$.

Значит, $p_3 = 2p_1;\quad V_3 = 2V_1$. Лучше эти значения отметить прямо на графике.

В этом случае мы будем легко понимать, что $p_4 = p_1$, а $V_4 = 2V_1$.

Не будем анализировать процессы на предмет знака количества теплоты, так как в предыдущей задаче процессы были те же самыми. Найдем работу за цикл:

$$A_o = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = (2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = p_1V_1.$$

Найдем количество теплоты, полученное газом от нагревателя. При этом подсчитаем количества теплоты в каждом процессе отдельно:

$$Q_H = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + (\Delta U_{23} + A_{23}) = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \left(\frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2)\right).$$

Все произведения νRT заменяем через произведения pV (на основании уравнения состояния идеального газа) и подставляем значения давления и объема, выраженные через параметры точки 1 согласно графику:

$$Q_H = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + \left(\frac{3}{2}(p_3V_3 - p_2V_2) + p_2(V_3 - V_2)\right) = \frac{3}{2}(2p_1V_1 - p_1V_1) +$$

$$+\left(\frac{3}{2}(2p_1 \cdot 2V_1 - 2p_1V_1) + 2p_1(2V_1 - V_1)\right) = \frac{3}{2}p_1V_1 + 3p_1V_1 + 2p_1V_1 = \frac{13}{2}p_1V_1.$$

Остается вычислить КПД по формуле:

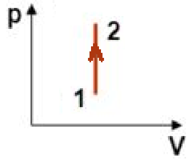
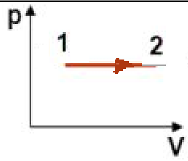
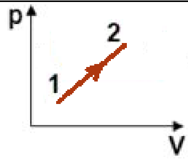
$$\eta = \frac{A_o}{Q_H} = \frac{p_1V_1}{13/2\, p_1V} = \frac{2}{13} \approx 0{,}15 = 15\%.$$

Ответ: 15%

Комментарии.

Пора подвести некоторые итоги. Нельзя ли по виду процесса в координатах *p(V)* определять сразу, отдает ли газ тепло или получает? Давайте рассмотрим характерные процессы с объяснением.

Процессы, в которых газ всегда **получает тепло**:

 V = const, $p\uparrow\Rightarrow T\uparrow$ $Q = \Delta U + \cancel{A} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T > 0$ (так как T↑)	 p = const, $V\uparrow\Rightarrow T\uparrow$ $Q = \Delta U + A$, $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T > 0$ (так как $T\uparrow$), $A > 0$ (так как $V\uparrow$) ⇒ $Q = \Delta U + A > 0$	 не является изопроцессом $p\uparrow\ V\uparrow\Rightarrow T\uparrow$ $Q = \Delta U + A$, $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T > 0$ (так как $T\uparrow$), $A > 0$ (так как $V\uparrow$ (площадь под прямой)) ⇒ $Q = \Delta U + A > 0$

В тех же процессах с противоположным направлением газ всегда **отдает тепло** (докажите это самостоятельно)

<u>Задача 3</u>.([1], № 10.263)

Условие.

На $p - V$-диаграмме показаны два замкнутых термодинамических цикла, проведенных с идеальным одноатомным газом: *1–2–3–4–1* и *1–5–6–4–1* (рис. 10.46). Определить отношение коэффициентов полезного действия этих циклов: η_1/η_2.

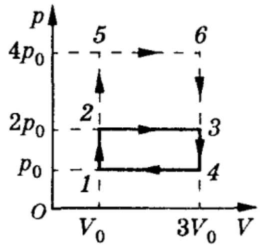


Рис. 10.46

Решение.

Работу данных циклов будем находить по графику. Рассмотрим цикл *1–2–3–4–1*.

$$A_o = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = (2p_o - p_o)(3V_o - V_o) = 2p_oV_o.$$

$$Q_H = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + A_{23} + \Delta U_{23}$$

Найдем каждое слагаемое:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(2p_oV_o - p_oV_o) = \frac{3}{2}p_oV_o,$$

$$A_{23} = p_2(V_4 - V_1) = 2p_o \cdot 2V_o = 4p_oV_o,$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}(\nu RT_3 - \nu RT_2) = \frac{3}{2}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{3}{2}(6p_oV_o - 2p_oV_o) = 6p_oV_o.$$

Тогда $Q_H = \frac{3}{2}p_oV_o + 4p_oV_o + 6p_oV_o = \frac{23}{2}p_oV_o$, а $\eta_1 = \dfrac{2p_oV_o}{\frac{23}{2}p_oV_o} = \dfrac{4}{23}$.

Аналогично находим КПД цикла *1–5–6–4–1:*

$$A_o = (p_5 - p_1)(V_4 - V_1) = (4p_o - p_o)(3V_o - V_o) = 6p_oV_o,$$

$$Q_H = Q_{15} + Q_{56} = \Delta U_{15} + A_{56} + \Delta U_{56}:$$

$$\Delta U_{15} = \frac{3}{2}\nu R(T_5 - T_1) = \frac{3}{2}(\nu RT_5 - \nu RT_1) = \frac{3}{2}(p_5V_5 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(4p_oV_o - p_oV_o) = \frac{9}{2}p_oV_o,$$

$$A_{56} = p_5(V_4 - V_1) = 4p_o \cdot 2V_o = 8p_oV_o,$$

$$\Delta U_{56} = \frac{3}{2}\nu R(T_6 - T_5) = \frac{3}{2}(\nu RT_6 - \nu RT_5) = \frac{3}{2}(p_6V_6 - p_5V_5) = \frac{3}{2}(12p_oV_o - 4p_oV_o) = 12p_oV_o,$$

Тогда $Q_H = \frac{9}{2} p_o V_o + 8 p_o V_o + 12 p_o V_o = \frac{49}{2} p_o V_o$, а $\eta_2 = \frac{6 p_o V_o}{\frac{49}{2} p_o V_o} = \frac{12}{49}$.

Находим отношение КПД: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{4}{23} \cdot \frac{49}{12} = \frac{49}{23 \cdot 3} = 0{,}71$.

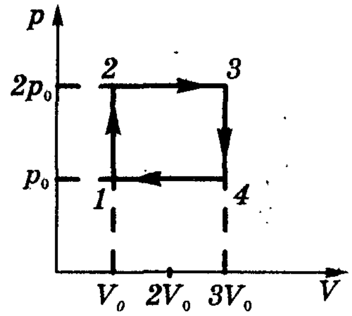
Ответ: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 0{,}71$

<u>Задача для самостоятельного решения</u> ([2], № 11.40)

Условие.

Одноатомный идеальный газ совершает показанный на рисунке цикл из двух изохор и двух изобар. Определите КПД цикла.

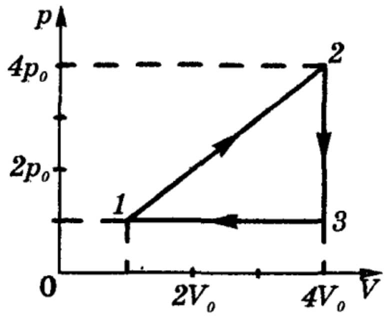
Ответ: $\eta = \frac{4}{23} \approx 17\%$



<u>Задача 4</u>. ([2], № 11.41)

Условие.

Рабочим телом тепловой машины является одноатомный идеальный газ. Определите КПД тепловой машины, график цикла которой показан на рисунке.



Решение.

Работу найдем как площадь внутри цикла:

$$A_o = \frac{1}{2}(p_2 - p_3)(V_3 - V_1) = \frac{1}{2}(4p_o - p_o)(4V_o - V_o) = \frac{9}{2} p_o V_o.$$

Газ получает тепло в процессе 1 – 2:

$$Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}.$$

Работу найдем как площадь трапеции под прямой графика:

$$A_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_3 - V_1) = \frac{1}{2}(p_o + 4p_o)(4V_o - V_o) = \frac{15}{2} p_o V_o.$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(\nu R T_2 - \nu R T_1) = \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2}(4p_o \cdot 4V_o - p_o V_o) = \frac{45}{2} p_o V_o.$$

$$\eta = \frac{\frac{9}{2} p_o V_o}{\frac{15}{2} p_o V_o + \frac{45}{2} p_o V_o} = \frac{9}{60} = 0{,}15.$$

Ответ: $\eta = 15\%$

<u>Задача для самостоятельного решения</u> ([1], № 10.268)

Условие.

Подсчитать КПД для цикла *1–2–*3*–1,* изображенного на диаграмме (рис. 10.51). Рабочее тело – идеальный двухатомный газ.

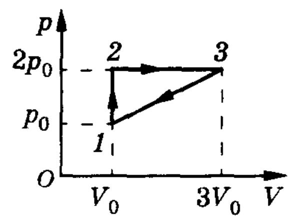


Рис. 10.51

Напоминание. Для двухатомного газа $\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T$.

Ответ: $\eta = \frac{2}{33} = 6\%$.

Замечание. Если решить задачу для одноатомного газа, то получится $\eta = \frac{2}{23} \approx 9\%$

<u>Задача для самостоятельного решения</u> ([1], № 10.274)

Условие.

Найти КПД изображенного на рисунке 10.57 цикла. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

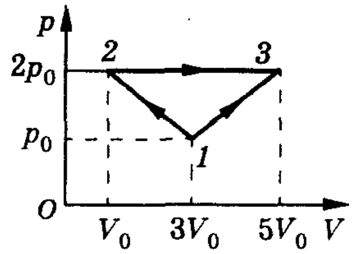


Рис. 10.57

Указание. Процесс вида $1 \to 2$ мы не указали среди процессов, в котором тепло всегда или получается или отдается. При данных, предлагаемых в условии, в этом процессе тепло будет отдаваться. Но это не всегда так. В линейной зависимости *p(V)* с «отрицательным наклоном тепло может на одном участке поглощаться, а на другом – отдаваться. Подробней об этой особенности в материале «КПД треугольного цикла».

Ответ: $\eta = 20\%$.

<u>Задача 5.</u> ([3], № 3.11)

Условие.

Кпд тепловой машины в цикле 1-2-3-1, состоящем из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1, равен η_1 (рис. 26). В цикле 1-3-4-1, состоящем из адиабаты 1-3, изотермы 3-4 и изохоры 4-1, КПД равен η_2. Чему равен кпд тепловой машины, работающей по циклу 1-2-3-4-1? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

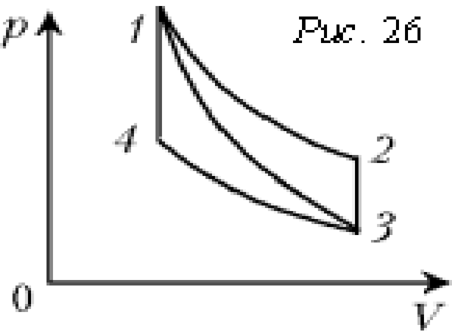


Рис. 26

Решение.

В этой задаче мы не можем находить работу за цикл из геометрии графика. Поэтому надо выделить, на каких участках газ получает тепло, а на каких – отдает.

Проанализируем процессы цикла 1-2-3-1:

$1 \to 2$: $T = \text{const}$, $V\uparrow \Rightarrow p\downarrow$ $\quad Q = \cancel{\Delta U} + A > 0$ (так как $V\uparrow$),

$2 \to 3$: $V = \text{const}$, $p\downarrow \Rightarrow T\downarrow$ $Q = \Delta U + \cancel{A} < 0$ (так как $T\downarrow$),

$3 \to 1$: $Q=0$.

Таким образом, КПД этого цикла может быть найден по формуле:

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_X|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|\Delta U_{23}|}{A_{12}}.$$

Проанализируем процессы цикла 1-3-4-1:

$1 \to 3$: $Q=0$,

$3 \to 4$: $T = \text{const}$, $V\downarrow \Rightarrow p\uparrow$ $\quad Q = \cancel{\Delta U} + A < 0$ (так как $V\downarrow$),

$4 \to 1$: $V = \text{const}$, $p\uparrow \Rightarrow T\uparrow$ $Q = \Delta U + \cancel{A} > 0$ (так как $T\uparrow$).

Таким образом, КПД этого цикла может быть найден по формуле:

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_X|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{41}} = 1 - \frac{|A_{34}|}{\Delta U_{41}}.$$

Мы еще не учли равенство температур на изотермах:

$$T_1 = T_2, \quad T_3 = T_4 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{41} = \Delta U_{32} = -\Delta U_{23}.$$

Подставив эти соображения в выражения для КПД, получим:

$$\eta_2 = 1 - \frac{|A_{34}|}{\Delta U_{32}}, \quad \eta_1 = 1 - \frac{\Delta U_{32}}{A_{12}}. \qquad (*)$$

Понятно, что надо каким-то образом связать между собой работы. A_{12} численно равна площади под кривой 1-2, а работа A_{34} – площади под кривой 4-3. Поскольку объем меняется в одних и тех же пределах, то разность этих площадей в точности равна площади внутри цикла 1-2-3-4-1. Поэтому для КПД этого цикла можно использовать формулу с работой цикла. В каких процессах газ получает тепло, мы уже знаем.

$$\eta = \frac{A_o}{Q_H} = \frac{A_{12} - |A_{34}|}{Q_{12} + Q_{41}}.$$

Выразим работы из формул (*).

$$|A_{34}| = \Delta U_{32}(1-\eta_2), \quad A_{12} = \frac{\Delta U_{32}}{1-\eta_1}.$$

Найдем Q_H:

$$Q_{12} + Q_{41} = A_{12} + \Delta U_{41} = A_{12} + \Delta U_{32}.$$

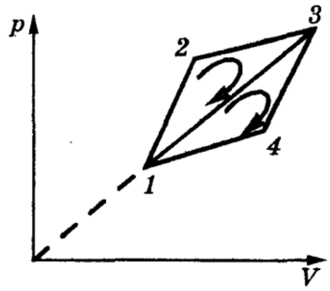
Окончательно получаем:

$$\eta = \frac{A_{12} - |A_{34}|}{A_{12} + \Delta U_{32}} = \frac{\dfrac{\Delta U_{32}}{1-\eta_1} - \Delta U_{32}(1-\eta_2)}{\dfrac{\Delta U_{32}}{1-\eta_1} + \Delta U_{32}} = \frac{\dfrac{1}{1-\eta_1} - (1-\eta_2)}{\dfrac{1}{1-\eta_1} + 1} = \frac{1-(1-\eta_2)(1-\eta_1)}{1+(1-\eta_1)} = \frac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}{2-\eta_1}$$

Ответ: $\eta = \dfrac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}{2-\eta_1}$

Задача для самостоятельного решения ([2], № 11.42)

Условие.



КПД цикла 1-2-3-1 (см. рисунок) равен η_1, а КПД цикла 1-3-4-1 равен η_2. Определите КПД η цикла 1-2-3-4-1.
Указание.
Надо выразить КПД каждого из циклов через количества теплоты и решить систему трех уравнений.
Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

Задача для самостоятельного решения ([1], № 10.273)

Условие.

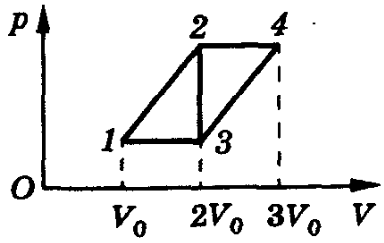


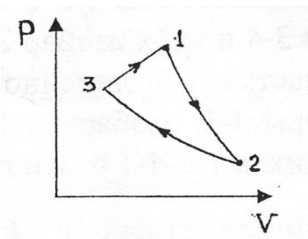
Рис. 10.56

Известно, что КПД η_1 цикла *1–2–3–1* (рис. 10.56) и КПД η_2 цикла 3*–2–4–2* связаны соотношением: $\eta_2 = 0{,}751\ \eta_1$. Найти, во сколько раз давление в изобарическом процессе *2–4* превышает давление в изобарическом процессе 3*–1*. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.

Ответ: $\dfrac{p_2}{p_3} = \dfrac{3\eta_2 - \eta_1}{5{,}5\eta_2 - 3{,}5\eta_1} = 2$.

Задача 6. (из экзамена МФТИ 2005 года)

Условие.



Идеальный газ используется как рабочее тело в тепловой машине, работающей по циклу 1-2-3-1, состоящему из адиабатического расширения 1-2, изотермического сжатия 2-3 и участка 3-1 линейной зависимости давления от объема (см. рисунок). За цикл машина совершает работу А, КПД цикла равен η. Найти работу, совершаемую газом в изотермическом процессе.

Решение.

Анализ процессов:

1→2 $Q_{12} = \Delta U_{12}+A_{12} = 0$ 2→3 $T = const,\ V\downarrow$ 3→1 $p = const$

$Q_{23} = A_{23} < 0$ $Q_{31} = \Delta U_{31}+A_{31} > 0$

$A = Q_н - |Q_х| = Q_{31} + Q_{23};$

$$\eta = \frac{A}{Q_{31}} \Rightarrow Q_{31} = \frac{A}{\eta}$$

$$A_T = A_{23} = Q_{23} = A - Q_{31} = A - \frac{A}{\eta} = A\left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right) < 0.$$

Ответ: $A_T = A\left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right)$.

<u>Задача для самостоятельного решения</u> ([1], № 10.277)

Условие:

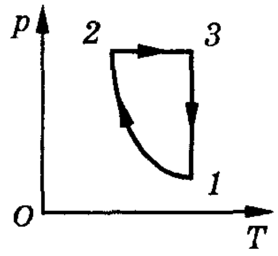


Рис. 10.60

Циклический процесс, изображенный на рисунке 10.60, состоит из адиабаты, изобары и изохоры. КПД процесса η = 60%. Чему равно отношение количества теплоты, полученного рабочим веществом в изобарическом процессе к количеству теплоты, отданному холодильнику в изохорическом процессе?

Ответ: $\frac{Q_p}{Q_V} = \frac{1}{1-\eta} = 2{,}5$.

<u>Задача для самостоятельного решения</u> ([1], № 10.278*)

Условие.

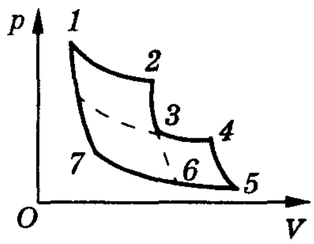


Рис. 10.61

Циклический процесс *1-2-3-4-5-6-7-1* состоит из трех изотерм и трех адиабат (рис. 10.61). Найти КПД этого цикла, если известно, что КПД цикла *1-2-3-6-7-1* η_1 = 40%, КПД цикла 3-*4*-5-6-3 η_2 = 25% и количество теплоты, полученное рабочим веществом в цикле *1-2-3-6-7-1,* в 2 раза больше количества теплоты, полученного в цикле 3-*4*-5-6-3.

Ответ: $\eta = \frac{1}{3}(2\eta_1 + \eta_2) = 35\%$

Литература

1. Турчина Н.В., Рудакова Л.И., Суров О.И. и др. 3800 задач для школьников и поступающих в вузы. Физика. – М.: Дрофа, 2000.
2. Гельфгат И.М., Генденштейн Л.Э., Кирик Л.А. 1001 задач по физике с ответами, указаниями, решениями. – М.: «Илекса», 2001.
3. Ш.Г. Зиятдинов. Газовые законы. Основы термодинамики. Газовые законы. Основы термодинамики. - Газета «Физика» Издательского Дома «Первое сентября», № 35/1998.