СОЗДАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ, РЕАЛИЗУЮЩЕГО РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Цель работы: Изучить принципы создания класса решения дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка

1. *Краткие сведения*

Основные определения

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) или системы таких уравнений на практике часто используются для построения математических моделей динамических процессов, т.е. процессов перехода физических систем из одного состояния в другое, бесконечно близкое. Примерами таких процессов могут служить явления, возникающие в электрических цепях, распространение радиоволн, явления химической кинетики, сопротивления материалов, движения материальных точек и многое другое. Точные методы решения ДУ позволяют выразить решение через элементарные или специальные функции. Однако классы уравнений, для которых разработаны точные методы решения, довольно узки и охватывают только малую часть возникающих в практике задач. В силу этого важное значение имеют приближенные численные методы решения, ориентированные на широкий класс, встречающихся в практике ДУ.

Дифференциальным называется уравнение, содержащее неизвестные функции y, независимые переменные x и производные неизвестных функций $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}$:
$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.
Если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной x, то ДУ является обыкновенным. Порядком ДУ называется наивысший из порядков производных, входящих в уравнение. ДУ называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции и ее производных. Совокупность уравнений, содержащих несколько неизвестных функций и их производных, образует систему ДУ.

Решить ДУ – значит найти его общий интеграл. Под последним понимается соотношение между независимой переменной, зависимой переменной и произвольными постоянными, число которых равно порядку ДУ. Это соотношение при всех допустимых значениях независимой переменной должно удовлетворять данному ДУ. Общий интеграл геометрически выражается семейством кривых. Для получения частного решения, необходимо определить произвольную постоянную, задавшись начальными условиями. В уравнениях $n-$ го порядка эти условия налагаются на переменную x и ее производные, а именно задаются значениями $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}$ при $x = x_0$:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \dot{y}\big|_{x=x_0} = \dot{y}_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (1)$$

Например, ДУ первого порядка $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ имеет решение $y = Ce^{x}$, где $C-$ произвольная постоянная. При различных значениях постоянной C получается семейство кривых (рис.1).

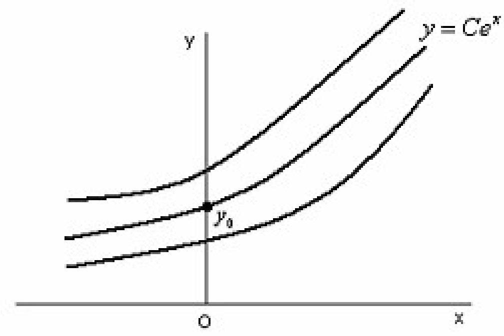

Рис.1. Семейство кривых решения ДУ

Выбор начального значения $y = y_0$ при $x = x_0$ (обычно $x_0 = 0$) позволяет выделить из этого семейства одну определенную кривую, т.е. найти частное решение.

ДУ считается разрешенным относительно старшей производной, если оно приведено к виду

$$y^{(n)} = f(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Задача определения решения уравнения (2) при начальных условиях (1) называется задачей Коши для ОДУ. Любое уравнение (2) $n-$ го порядка можно свести к системе n уравнений первого порядка заменой переменных. Для этого вводят новые переменные $\dot{y} = y_1,\ \ddot{y} = y_2,\ \dots,\ y^{(n-1)} = y_{n-1}$, в результате чего получают эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \quad \dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Указанный прием позволяет свести решение ДУ $n-$ го порядка к решению системы уравнений первого порядка. В свою очередь методы решения одного уравнения первого порядка распространяются на систему таких уравнений. В силу этого в дальнейшем рассмотрение численных методов будем проводить на примерах решения уравнения

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$

с начальными условиями $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Сущность данных методов состоит в следующем. На отрезке решения выбирается некоторое множество точек, называемое сеткой:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

В полученных точках вычисляются приближенные значения $y_1, y_2, \dots, y_n$ решения задачи Коши.

Метод Эйлера

Рассмотрим задачу (3), где $f(x, y)$ - функция, непрерывно дифференцируемая в прямоугольнике $D = \{x_0 \le x \le X,\ y_0 \le y \le Y\}$.

Выбрав достаточно малый шаг интегрирования h, построим систему равноотстоящих точек (узлов) $x_0, x_1, x_2, \dots$,

где $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $h = x_{k+1} - x_k$.

Проведем касательную в точке (x_0, y_0) графика решения $y = \varphi(x)$ ДУ (3) с угловым коэффициентом $k_0 = \dot{y}(x_0) = f(x_0, y_0)$. Уравнение этой касательной имеет вид:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \qquad (4)$$

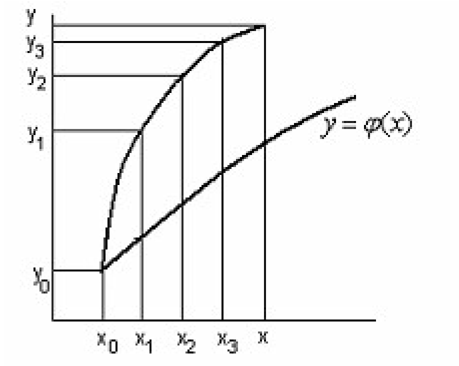

Рис.2. Интерпретация численных методов решения ДУ

За приближенное значение решения $\dot{y} = f(x, y)$ в точке x_1 возьмем ординату y_1 точки пересечения касательной (4) с прямой $x = x_1$ (рис.2), т.е. $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h$. (5)

Через точку (x_1, y_1) проведем прямую с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$ $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Находим точку пересечения прямой (5) с прямой $x = x_2$. Ее ордината $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1)h$.

Продолжая этот процесс, получаем приближенные значения решения
$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$. (6)

Значения y_k приближенного решения определяются с локальной точностью $0(h^2)$, т.е. приближенное решение задачи Коши (3) совпадает с точным в случае, когда оно является полиномом первого порядка от аргумента x.

Метод трапеций

Точность метода Эйлера для решения всех задач типа (3) недостаточна. Примером более точного метода является метод трапеций для задачи (3).

Пусть $h-$ шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения y_{k+1} решения задачи Коши в точке x_{k+1} методом трапеций заключается в выполнении следующих операций:

1) на каждом $k-$ м шаге определяем коэффициенты
$k_1 = hf(x_k, y_k); \quad k_2 = hf(x_k + h, y_k + k_1)$; (7)

2) значение y_{k+1} вычисляется по формуле
$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. (8)

Значения y_k приближенного решения определяются с локальной точностью $0(h^3)$, т.е.приближенное решение задачи Коши (3) совпадает с точным в случае, когда оно является полиномом степени не выше второй от аргумента x.

Метод Рунге-Кутта третьего порядка точности

Примером более точного, чем методы Эйлера и трапеций, метода является метод Рунге-Кутта третьего порядка точности.

Пусть $h-$ шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения y_{k+1} решения задачи Коши в точке x_{k+1} методом Рунге-Кутта третьего порядка точности заключается в выполнении следующих операций:

1) на каждом $k-$ м шаге определяем коэффициенты

$$k_1 = hf(x_k, y_k);$$
$$k_2 = hf(x_k + 0.5h, y_k + 0.5k_1)$$
$$k_3 = hf(x_k + h, y_k + 2k_2 + k_1) \quad ; \qquad (9)$$

2) значение y_{k+1} вычисляется по формуле

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad . \qquad (10)$$

Значения y_k приближенного решения определяются с локальной точностью $0(h^4)$, т.е.приближенное решение задачи Коши (3) совпадает с точным в случае, когда оно является полиномом степени не выше третьей от аргумента x .

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности

Этот метод является одним из широко используемых на практике одношаговых методов повышенной точности.

Пусть $h-$ шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения y_{k+1} решения задачи Коши в точке x_{k+1} методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности заключается в выполнении следующих операций:

1) на каждом $k-$ м шаге определяем коэффициенты

$$k_1 = hf(x_k, y_k);$$
$$k_2 = hf(x_k + 0.5h, y_k + 0.5k_1)$$
$$k_3 = hf(x_k + 0.5h, y_k + 0.5k_2)$$
$$k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3) \quad ; \qquad (11)$$

2) значение y_{k+1} вычисляется по формуле

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad . \qquad (12)$$

Значения y_k приближенного решения определяются с локальной точностью $0(h^5)$, т.е.приближенное решение задачи Коши (3) совпадает с точным в случае, когда оно является полиномом степени не выше четвертой от аргумента x .

2. *Постановка задачи*

Разработать класс решения ДУ первого порядка, а именно:

1. Разработать родительский класс решения ДУ первого порядка методом Эйлера, методом трапеций и методами Рунге-Кутта третьего и четвертого порядка.
2. Разработать класс-наследник, в котором предусмотреть накопление результатов вычислений в динамическом массиве.
3. Разработать класс-наследник, в котором предусмотреть накопление результатов вычислений в списке указателей.
4. Разработать класс-наследник, в котором предусмотреть накопление результатов вычислений в строковом списке.

Головная программа должна предоставлять возможность выбора метода решения дифференциального уравнения, графический вид полученного решения. Примерный вид приложения показан на рис.3.

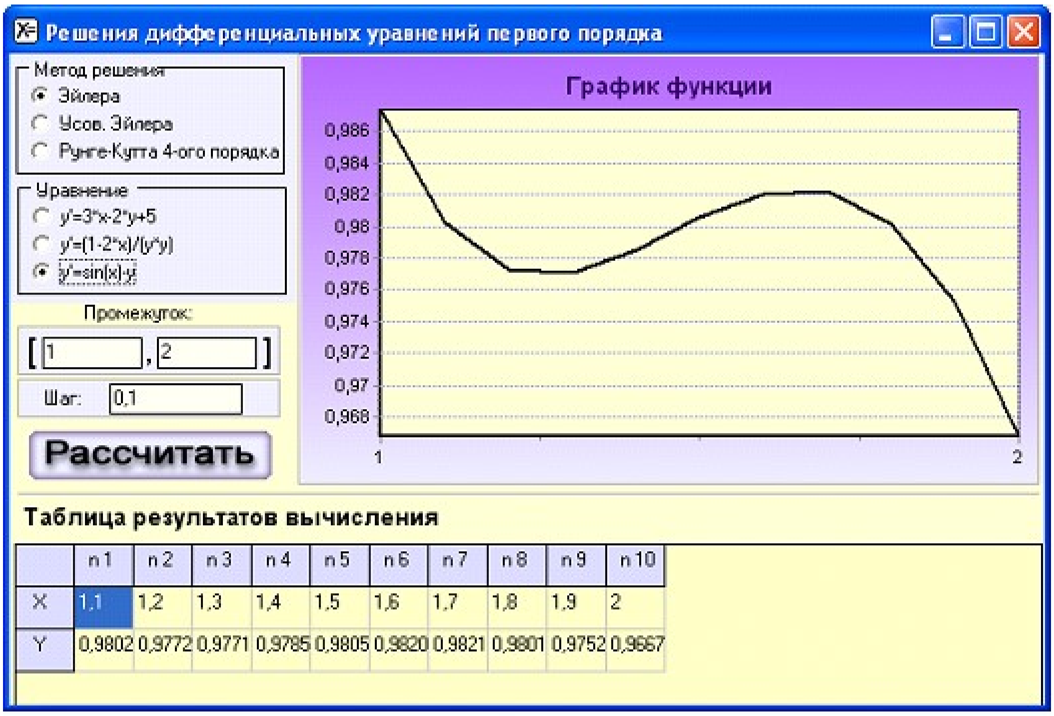

Рис.3. Решение ДУ первого порядка

3. *Задания*