РАЗРАБОТКА КЛАССА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: Изучить способы перекрытия методов родительских классов

1. *Краткие сведения*

Решение нелинейных уравнений

В практике научных и инженерных расчетов часто возникает необходимость решения уравнений вида

$f(x)=0$, (1)

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $a \le x \le b$.

Если функция представляет многочлен, то уравнение (1) называется алгебраическим. Если находится под знаком транстендентной функции (показательной, логарифмической, тригонометрической и т.п.), уравнение (1) называется транстендентным. Значение x^*, при котором выполняется условие $f(x^*)=0$, называется корнем уравнения (1).

В общем случае функции $f(x)$ не имеют аналитических формул для своих корней. Однако точное решение уравнения не является безусловно необходимым. Действительно, встречающиеся на практике уравнения часто содержат коэффициенты, величины которых имеют приближенные значения. В силу этого разработаны численные методы уравнений вида (1), которые позволяют определять приближенные значения корней с заданной степенью точности.

Процесс отыскания корня уравнения (1) состоит из двух этапов: 1) нахождение приближенного значения корня; 2) уточнение приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Первый этап реализуется различными способами, Приближенное значение корня может быть известно, например, из физического смысла задачи. При выделении области, в пределах которой находятся вещественные корни уравнения, можно воспользоваться следующим обстоятельством. Если на концах некоторого отрезка значение непрерывной функции $f(x)$ имеет разные знаки, то на этом отрезке уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень.

В инженерной практике распространен графический способ определения приближенных корней. В этом случае строится график функции $y=f(x)$, абсциссы точек пересечения которого с осью ox дадут приближенные значения корней, Иногда удается подобрать более простое уравнение, корни которого находятся вблизи корней исходного уравнения. Существует также ряд специальных аналитических методов приближенного нахождения корней многочленов.

Найденные приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим наиболее эффективные из них.

Метод деления отрезка попалам

Для этого метода существенно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и ограничена в заданном интервале [a,b], внутри которого ищется корень. Предполагается также, что значения функции на концах интервала $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, т.е. выполняется условие .

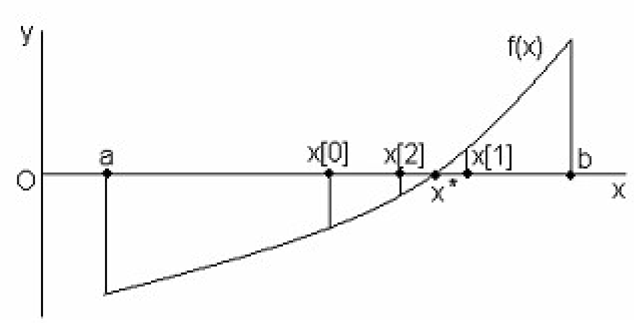

Рис.1. Геометрическая интерпретация метода деления отрезка попалам

Для нахождения корня уравнения $f(x)=0$ отрезок $[a,b]$ делят попалам, т.е. выбирают начальное приближение равным $x[0]=(a+b)/2$ (рис.1). Если $f(x[0])=0$, то $x[0]$ является корнем уравнения. В противном случае выбирают тот из отрезков $[a,x[0]]$ или $[x[0],b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки, ибо корень лежит на половине. Для случая, изображенного на рис.1, выбирают интервал $[x[0],b]$. Данный интервал вновь делят попалам и выбирают ту половину, на концах которой функция имеет противоположные знаки и т.д. Если требуется определить корень с точностью ξ, то деление попалам продолжают до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ξ. В этом случае середина последнего отрезка дает значение корня с требуемой точностью.

Рассмотренный метод прост и надежен, устойчив к ошибкам округления. Обладает достаточно быстрой сходимостью. За одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое. Метод удобно программируется. Основной недостаток его состоит в следующем. Если на отрезке $[a,b]$ имеется несколько корней, то заранее неизвестно, к какому из них сойдется процесс.

Метод последовательных приближений (метода итераций)

Уравнение (1) можно представить в форме

$x=\varphi(x)$.

Например, можно выделить x из уравнения (1), а остальное перенести в правую часть. Можно также выполнить следующее преобразование:

$x=x+cf(x)$,

Где c – произвольная постоянная. В этом случае $\varphi(x)=x+cf(x)$.

Задаются начальным приближением $x[0]$, а последующие приближения определяются итерационной процедурой вида

$x[k+1]=\varphi(x[k]),\quad k=0,1,2,\ldots$

Эта итерационная процедура сходится (см. рис.2), если на отрезке $[a,b]$, содержащем корень x^*, а также все его последовательные приближения $x[0], x[1], \ldots, x[k], \ldots$, выполнено условие $|\varphi'(x)|<1$. Сходимость будет тем быстрее, чем меньше по абсолютной величине значение производной $\varphi'(x)$.

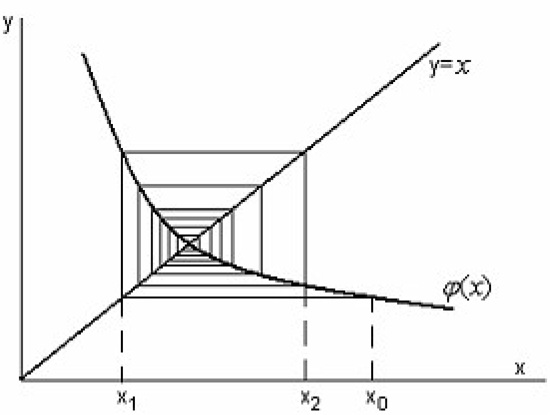

Рис.2. Геометрическая интерпретация метода итераций

Процесс продолжается до тех пор, пока относительная точность для двух последовательных приближений не станет меньше ξ – заданной погрешности:

$$\left|\frac{x[k+1]-x[k]}{x[k]}\right| < \xi .$$

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет один корень на отрезке $[a,b]$, причем первая и вторая производные $f'(x)$, $f''(x)$ определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на отрезке $[a,b]$.

Выбирают некоторое начальное приближение корня $x[0]$ на интервале $[a,b]$ и проводят касательную в точке $c_0(x[0], f(x[0]))$ к кривой $y=f(x)$ до пересечения с осью абсцисс (рис.3).

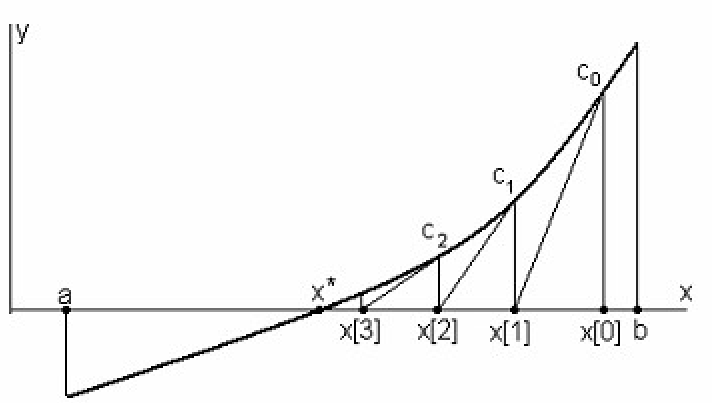

Рис.3. . Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Абсциссу $x[1]$ принимают за очередное приближение корня. Уравнение касательной в точке c_0 имеет вид

$$y = f(x[0]) + f'(x[o])(x - x[0]) .$$

Полагая $y=0$, находят абсциссу:

$$x[1] = x[0] - \frac{f(x[0])}{f'(x[0])} .$$

Далее проводят касательную через новую точку $c_1(x[1], f(x[1]))$ и находят точку ее пересечения с осью абсцисс:

$$x[2] = x[1] - \frac{f(x[1])}{f'(x[1])}.$$

Эту точку принимают за новое приближение корня. Аналогично находят последующие приближения:

$$x[k] = x[k-1] - \frac{f(x[k-1])}{f'(x[k-1])}.$$

Итерационный процесс прекращают при выполнении условий:

$$\delta \le \xi,\ |f(x[k])| \le 100\xi$$

$$\delta = \begin{cases} \left|\dfrac{x[k]-x[k-1]}{x[k]}\right| & \text{, если } |x[k]| < 1, \\ |x[k]-x[k-1]| & \text{, если } |x[k] \le 1| \end{cases}$$

где ξ - заданная погрешность вычислений.

2. Постановка задачи

Создать родительский класс решения нелинейного уравнения различными методами (методами деления отрезка пополам, методом итераций и методом Ньютона). В дочерних классах предусмотреть динамическое перекрытие нелинейных уравнений. Реализовать процедуры графической визуализации нахождения корня уравнения для каждого метода (см. рис.1).

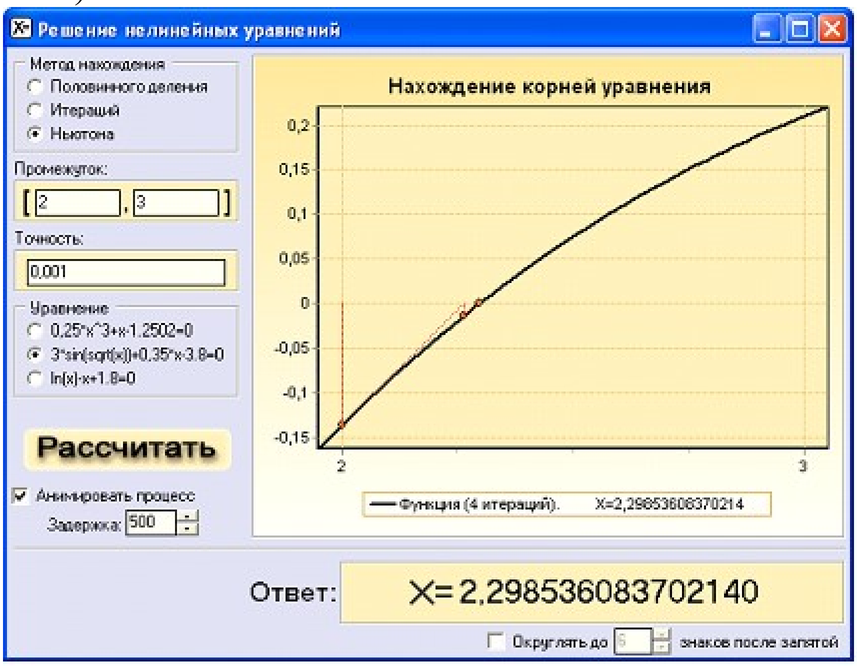

Рис.1. Нахождение корней нелинейных уравнений

3. Задания

Найти корень уравнения

№варианта	Уравнение	Примечание
1	$\ln x - 8 = 0$	
2	$0.5x^2 - 1 = 0$	
3	$x^2 + 2x - 3 = 0$	положительный
4	$3x^2 - 1 - \sin(x^3 + 1) = 0$	положительный
5	$x^2 + 7 - \frac{x^4 + 3}{x^2 + 4} = 0$	положительный
6	$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$	отрицательный
7	$arctg(x) - 6 = 0$	положительный
8	$e^x + \ln x - 10x = 0$	
9	$0.25x^3 + x - 1.25 = 0$	
10	$x^2 - 1 - e^x = 0$	положительный