**Лекция 1**

**Нелинейное программирование**

Теория теста:

1. Понятие системного анализа

Классы задач:

1. Задача оптимизации (max(min)z = f(x))
2. Ф(x) {<=, =, >=}b (i = 1,m)
3. X >= 0, x = (x1 …, xn)

Задача нелинейна, когда:

1. В задаче используется целевая функция (задача оптимизации). max(min)z = f(x)
2. В задаче присутствуют ограничения. Ф(x) {<=, =, >=}b (i = 1,m)
3. В задаче либо и то и другое.

В математических моделях нелинейных оптимизационных задач, называемых задачами нелинейного программирования, целевая функция и ограничения являются нелинейными функциями.

Модель остается нелинейной в двух случаях. Когда только целевая функция нелинейна, а ограничения – линейны. Или хотябы одно из ограничений нелинейно, а целевая функция линейна.

Вот в нелинейном программировании универсального метода решения задачи нету. Поэтому в этом разделе существует и большое число методов. Градиенты первого порядка, градиенты второго порядка, методы поиска и т.д.

Сейчас мы подбираемся к классической задаче нелинейного программирования. И сразу же познакомимся с методом Лагранжа.

Когда мы уже будем создавать модель…

Математическая модель нелинейной задачи (в общем виде):

Необходимо найти такой вектор n неизвестных, который доставляет максимум (или минимум) целевой функции и удовлетворяет системе ограничений.

Некоторые типы задач нелинейного программирования хорошо изучены и для них существуют методы определения глобального экстремума.

Классическая задача оптимизации – задача на условный экстремум.

Разбираем классическую задачу

1. Система ограничений содержит только уравнения
2. Отсутствуют условия неотрицательности переменных
3. Функции f(x), ф(x) непрерывны
4. Имеют частные производные по крайней мере второго порядка

Теперь переходим к методу Лагранжа

Задача нелинейного программирования классического типа относится к типу задач, для которых существует метод Лагранжа

Этапы решения по методу Лагранжа:

1. Вводят набор переменных l1, l2, l3, …, lm (l - лямбда) называемых множителями Лагранжа
2. Составляют функцию Лагранжа:

F = (x1, …, xn, l1, …, lm) = f (x1, …, xn) + {знак суммы. m сверху, i = 1 снизу} l1 (bi – фi(x1, …, xn))

1. Находят частные производные

дF/дxj(j = 1, n) и дF/дл (i = 1, m) {д – дельта, л - лямбда}

1. Рассматривают систему n+m уравнений

дF/дxj = дf/дxj = {знак суммы сверху m снизу j = 1} лi дфi/дxj = 0 (j = 1, n)

дF/длi = bi – фi = 0 (i = 1, n)

1. Эту систему уравнений решают и находят все стационарные точки
2. Из стационарных точек функции Лагранжа, взятых без координат л1, л2, …, лm выбирают такие, в которых функция f имеет условные экстремумы при наличии ограничений

Указание: Для нахождения экстремума можно воспользоваться достаточным условием экстремума на основе изучения знака второго дифференциала d^2F

Мы пришли к тому, что функция f(x1, x2) имеет в стационарной точке (x1, x2, л) условный максимум, если в ней d^2F < 0, и условный минимум, если d^2F > 0

Пример

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x1 изделий 1 способом затраты равны 4x1 + x1^2 руб., а при изготовлении x2 изделий 2 способом они составляют 8x^2 + x2^2 руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить так, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальны.

Решение

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

F = 4x1+x1^2+8x2+x2^2,

При условиях

X1 + x2 = 180,

X1, x2 >= 0

Решаем задачу методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа по формуле (1.5)

Получим

F(x1, x2, л) = 4x1 + x1^2 + 8x2^2 + x2^2 + л(180 – x1 – x2).

Найдем частные производные по x1, x2, л и приравниваем их к нулю согласно (1.6) получим:

Д^2F/дx1 = 4 + 2x1 – л = 0

Д^2F/дx2 = 8 + 2x2 – л = 0

ДF/дл = 180 – x1 – x2 = 0

Решив данную систему получим

X1 = 91, x2 = 89

Данная точка является подозрительной на экстремум

Используя частные производные второго порядка, установим характер точки.

Итак, д^2F/дx1^2 = 2

д^2F/дx2^2 = 2

д^2F/дx1дx2 = 0

Тогда

Д^2F = 2(dx1^2 + dx2^2) > 0

Следовательно, в точке с координатами (91;89) функция f имеет условный минимум, при этом fmin = 17278 руб.