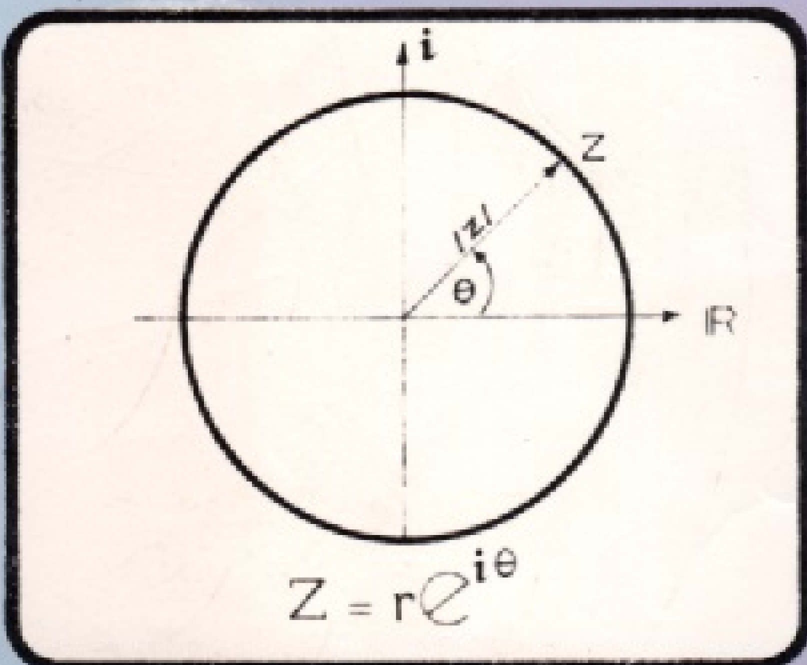
NUMEROS COMPLEJOS



MATRICES

POLINOMIOS

ECUACIONES POLINOMICAS

SISTEMA DE ECUACIONES

MOISES LAZARO C.

NUMEROS COMPLEJOS

POLINOMIOS

ECUACIONES POLINOMICAS

MATRICES - DETERMINANTES

ECUACIONES LINEALES

MOISES LAZARO CARRION

PUBLICACIONES MOSHERA

LIMA PERU

PUBLICACIONES MOSHERA

La presentación, redacción y disposición del libro : "Números Complejos" son propiedad del autor.
Impreso en la EDITORA - DISTRIBUIDORA - IMPRENTA "MOSHERA" S.R.L.
Jirón Tacna 2969 San Martín de Porres Lima-Perú.
Autor : Licenciado Moisés Lázaro Carrión
Especialidad : Matemáticas Puras, Educación, Maestría : Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.
Experiencia docente :
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash "Santiago Antunez de Mayolo"
Universidad Nacional del Callao.
Universidad Particular San Martín de Porres.
Universidad Ricardo Palma
Pontificia Universidad Católica del Perú.

Diagramación y dibujo : Julián Salazar J.
Carátula : Victor Guevara.
Distribución : Jr. Tacna 2969 - 2975 San Martín de Porres Lima-Perú

Primera Edición 1992.

Este libro está dedicado :

Al apoyo paciente y tesonero de mi esposa y al amor de mis hijos.

Prólogo

Este texto, titulado "Números Complejos", comprende cinco capítulos: números complejos, polinomios, ecuaciones polinómicas, matrices-determinantes y sistema de ecuaciones lineales. Ha sido escrito para cursos de MATEMATICAS BASICAS que se llevan en las carreras de Ciencias e Ingeniería.

Cada capítulo ha sido descrito en forma ordenada y detallada teniendo especial cuidado en la formalización de cada definición o cada teorema, haciéndola didáctica y de fácil comprensión. Cada tema abordado ha sido reforzado con abundantes ejemplos y problemas resueltos.

Recomiendo al lector que aplique correctamente las definiciones y postulados cada vez que se demuestre una propiedad o un teorema. Este mismo criterio se aplica al resolver un problema cualquiera, sólo de esta manera se estará garantizando la correlación lógica que debe tener cada paso que se da hasta su conclusión.

El objetivo, en el estudio de las matemáticas no es "mecanizarse", sino en saber aplicar correcta y lógicamente una determinada definición, propiedad o teorema a cada problema que se está resolviendo; sólo así el estudiante encontrará en las matemáticas una recreación amena y ágil en oposición a la mal difundida sentencia ¡QUÉ DIFÍCIL ES MATEMÁTICAS!

Presisamente, el presente libro ha sido preparado pensando en el estudiante, quien va encontrar una amena lectura en cada tema que irá abordando y con esforzada dedicación se irá convirtiendo en el descubridor de nuevos conceptos que irá reforzando su intuición y su riguroso razonamiento en áreas más profundas de las matemáticas.

Agradezco a mis colegas, que siempre me han apoyado en la gestión del presente libro.

Moisés Lazaro C.

Lima, Febrero de 1992

Contenido

Matrices, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Determinantes

1. SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

1.1 DEFINICION– El conjunto $\mathbb{C}$ de números de la forma $x+iy$, donde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$ se llama EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

NOTACION : $\mathbb{C} = \{ z = x+iy \ / \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i=\sqrt{-1} \}$

Al número complejo especial i se le llama LA UNIDAD IMAGINARIA.

1.2 PARTE REAL Y PARTE IMAGINARIA DE UN NUMERO COMPLEJO

Sea $z = x+iy$

– Al número real "x" se le llama PARTE REAL de Z y denotamos : $Re(Z)=x$

– Al número real "y" se le llama PARTE IMAGINARIA de Z y denotamos : $Im(Z)=y$

1.3 EJEMPLOS :

$z_1 = 2+3i$, $2 = Re(z_1)$, $3 = Im(z_1)$

$z_2 = -\frac{1}{2}i$

$= 0-\frac{1}{2}i$, $0 = Re(z_2)$, $-\frac{1}{2} = Im(z_2)$

$z_3 = 2/3$

$= 2/3 + 0i$, $\frac{2}{3} = Re(z_3)$, $0 = Im(z_3)$

1.4 ISOMORFISMO ENTRE LOS NUMEROS COMPLEJOS Y LOS PUNTOS DEL PLANO.

Hemos definido los números complejos de la forma : $x+iy$ donde $\begin{cases} x = Re(z) \in \mathbb{R} \\ y = Im(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ son de la forma : (x, y), donde $\begin{cases} x = 1^{ra} \text{ componente} \\ y = 2^{da} \text{ componente} \end{cases}$

A continuación vamos a definir con los números complejos "$x+iy$" y con los pares ordenados (x, y) la relación de igualdad y las operaciones de adición y multiplicación del siguiente modo :

CON NUMEROS COMPLEJOS	CON PARES ORDENADOS
1. Igualdad de Números Complejos $a+bi = c+di \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$	1. Igualdad de Pares ordenados $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$
2. Suma $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$	2. Suma $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

3 Producto

$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

4 El elemento neutro de la adición de números complejos es : $0+0i=0$, de tal modo que $(a+bi)+(0+0i)=a+bi$, $\forall\ (a+bi)\in\mathbb{C}$

5. El elemento neutro de la multiplicación de números complejos es $1=1+0i$, de tal modo que : $(a+bi).(1+0i)=(a+bi), \forall (a+bi)\in\mathbb{C}$

3. Producto

$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$

4. El elemento neutro de la adición de pares ordenados es $(0,0)$, de tal modo que: $(a,b)+(0,0)=(a,b), \forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$

5. El elemento neutro de la multiplicación será $(1,0)$ de tal modo que: $(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$

Con la relación de igualdad y con las operaciones definidas, tanto para los números complejos como para los pares ordenados, podemos observar que ambas formas son EQUIVALENTES. Es decir tratar los números complejos como : $x+iy$ o como par ordenado (x,y) serán equivalentes siempre que se respeten las definiciones arriba mencionadas.

A esta equivalencia se le denomina ISOMORFISMO.

Es decir : $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$

$$(a+bi) \longmapsto (a,b)$$

"A cada número complejo $a+bi$ le corresponde el par ordenado (a,b)"

Por la equivalencia existente entre los elementos de $\mathbb{C}$ y los elementos de $\mathbb{R}^2$, nos permite tratar a los números complejos, indiferentemente, con cualquiera de las formas mencionadas.

Para una mejor presentación y respetando un orden que debemos seguir, en el presente texto, trataremos a los números complejos como pares ordenados. Mas adelante nos será indiferente tratar a los números complejos con cualquiera de las formas.

2. SISTEMAS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS (como pares ordenados).

2.1 DEFINICION— El sistema de los números complejos $(\mathbb{C})$, es el conjunto de los pares ordenados (x,y) con $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, donde : la igualdad, la adición y la multiplicación de pares ordenados se definen del sigte modo : sean $z_1=(a_1,b_1)\in\mathbb{C} \wedge z_2=(a_2,b_2)\in\mathbb{C}$

a) IGUALDAD : $z_1=z_2 \iff a_1=a_2 \wedge b_1=b_2$

b) SUMA : $z_1+z_2=(a_1+a_2, b_1+b_2)$

c) PRODUCTO : $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)$

2.2 COMPONENTES DE UN NUMERO COMPLEJO $z=(a,b)$

Los números reales a,b se llaman componentes de (a,b)

- La 1ª componente, a, es la PARTE REAL de z y se denota : $a=Re(z)$.
- La 2ª componente, b, es la PARTE IMAGINARIA de z y se denota : $b=Im(z)$

Ejemplos : $z_1=(-3,-2)$, $-3=Re(z_1)$, $-2=Im(z_1)$

$z_2=(0,1/2)$, $0=Re(z_2)$, $1/2=Im(z_2)$

2.3 PROPIEDADES DE LA ADICION DE NUMEROS COMPLEJOS

$$+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(z_1,z_2) \longmapsto z_1+z_2=(a_1+a_2, b_1+b_2), \text{ donde } z_1=(a_1,b_1);\ z_2=(a_2,b_2).$$

A_1) si $[z_1\in\mathbb{C} \wedge z_2\in\mathbb{C}] \Rightarrow (z_1+z_2)\in\mathbb{C}$

A_2) $z_1+z_2=z_2+z_1$ Propiedad conmutativa

A_3) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ Asociativa

A_4) $\exists!\ \theta=(0,0)\in\mathbb{C}$, tal que, $z+\theta=\theta+z=z$, $\forall z\in\mathbb{C}$

A_5) $\forall z\in\mathbb{C}$, $\exists!\ -z$, tal que $z+(-z)=(-z)+z=(0,0)$

2.4 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

$$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(z_1,z_2) \longmapsto z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)$$

donde $z_1=(a_1,b_1)\in\mathbb{C}$

$z_2=(a_2,b_2)\in\mathbb{C}$

M_1) si $[z_1\in\mathbb{C} \wedge z_2\in\mathbb{C}] \Rightarrow z_1\cdot z_2\in\mathbb{C}$

M_2) $z_1\cdot z_2=z_2\, z_1$ conmutativa

M_3) $z_1.(z_2.z_3)=(z_1\cdot z_2).z_3$ asociativa

M_4) $\exists!\ W=(1,0)\in\mathbb{C}$, tal que $z.W=W.z=z$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$

M_5) $\forall\ z\neq(0,0)$, $\exists!\ z^{-1}=\frac{1}{z}\in\mathbb{C}$, tal que $z\cdot z^{-1}=z^{-1}z=W$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

D_1) $z(z_1+z_2)=z\,z_1+z\,z_2$, $\forall\ z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$

D_2) $(z_1+z_2)z=z_1z+z_2z$

DEMOSTRACION DE A_2

sean $z_1=(a_1,b_1)\in\mathbb{C}$, $z_2=(a_2,b_2)\in\mathbb{C}$, donde:

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a_1,b_1)+(a_2,b_2)\\ &= (a_1+a_2,\ b_1+b_2) && \text{DEF. de suma}\\ &= (a_2+a_1,\ b_2+b_1) && \text{Prop. conmutativa de núm. reales}\\ &= (a_2,b_2)+(a_1,b_1) && \text{Def. de suma}\\ &= z_2+z_1 \end{aligned}$$

DEMOSTRACION DE A_4

La existencia de $0=(0,0)$

Debo probar que 0 es un par ordenado de la forma $(0,0)$ tal que $z+0=0+z=z\ \forall z\in\mathbb{C}$

Veamos

1. Sea $z=(a,b)$ un número complejo cualquiera.
2. Sea $0=(m,n)$

Debo hallar $m=?$ y $n=?$

3. Como: $z+0=z$

$$(a,b)+(m,n)=(a,b)$$
$$(a+m,\ b+n)=(a,b)$$
$$\begin{cases}a+m=a\\ b+n=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=a-a=0\\ n=b-b=0\end{cases}$$

4. Por tanto: $0=(0,0)\in\mathbb{C}$.

La unicidad de 0

1) Cuando 0 es el neutro aditivo se cumple: $z=z+0=0+z$ para todo $z\in\mathbb{C}$

2) Supongamos que existe otro neutro $0'\in\mathbb{C}$ tal que $z=z+0'=0'+z$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

Debo probar que $0'=0$

Veamos:

3) Por 1) en particular se cumplirá para $z=0'\in\mathbb{C}$.

Luego: $0'=0'+0=0+0'$

4) Igualmente por 2) se cumplirá para $z=0$.

Es decir: $0=0+0'=0'+0$

5) Por 3) y 4):

$$0'=0'+0=0$$

DEMOSTRACION A_5

EXISTENCIA DE $-z$

Probar la existencia de $-z$ para todo $z\in\mathbb{C}$, implica que $-z$ es un par ordenado, cuya forma debemos averiguar y que cumpla la propiedad:

$z+(-z)=(-z)+z=0$

Veamos:

1) Suponer: $z+W=W+z=0$ $\begin{cases}z=(a,b)\\ W=(m,n)=?\end{cases}$

$$\Rightarrow (a,b)+(m,n)=(0,0)$$
$$(a+m,\ b+n)=(0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a+m=0\rightarrow m=-a\\ b+n=0\rightarrow n=-b\end{cases}$$

2) Luego W es el par ordenado $W=(-a,-b)$
$=-(a,b)$
$=-z$

3) Por lo tanto: Si $z=(a,b)$, su opuesto es $-z=-(a,b)$, tal que
$z+(-z)=(0,0)$.

unicidad de $-z$

1) Se tiene que $\forall z\in\mathbb{C}$, $\exists\ (-z)\in\mathbb{C}$, tal que,
$z+(-z)=(-z)+z=0$

2) Suponer que $\forall z\in\mathbb{C}$, existe otro $z^*\in\mathbb{C}$, tal que,
$z+z^*=z^*+z=0$

Debo probar que $z^*=-z$

Veamos

$$\begin{aligned} &\text{3) Por } A_4: && z^*=z^*+0 \qquad z^*\in\mathbb{C}\\ &\text{4) Por 1)}: && \ \ =z^*+(z+(-z))\\ & && \ \ =(z^*+z)+(-z)\\ &\text{5) Por 2)}: && \ \ =0+(-z)\\ &\text{6) Por } A_4: && \ \ =-z \end{aligned}$$

$$z^*=(-z)\ //$$

DEMOSTRACION DE M_2

sean $z_1=(a_1,b_1)\in\mathbb{C}$, $z_2=(a_2,b_2)\in\mathbb{C}$

Donde:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)\\ &= (a_2a_1-b_2b_1,\ b_2a_1+a_2b_1) && \text{prop. conmutativa de num. reales}\\ &= z_2\,z_1 \end{aligned}$$

DEMOSTRACION DE M_3

sean $z_1=(a_1,b_1)\in\mathbb{C}$, $z_2=(a_2,b_2)\in\mathbb{C}$, $z_3=(a_3,b_3)\in\mathbb{C}$

Donde:

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3) &= (a_1,b_1)\cdot(a_2a_3-b_2b_3,\ a_2b_3+b_2a_3)\\ &= \big(a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3),\ a_1(a_2b_3+b_2a_3)+\\ &\qquad b_1(a_2a_3-b_2b_3)\big)\\ &= (a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,\ a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+\\ &\qquad a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)\\ &= \big((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2-b_1a_2)b_3,\ (a_1a_2-b_1b_2)b_3+\\ &\qquad (a_1b_2+b_1a_2)a_3\big)\\ &= (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)\cdot(a_3,b_3)\\ &= (z_1z_2)z_3\ // \end{aligned}$$

DEMOSTRACION DE M_4

EXISTENCIA DE $W=(1,0)$

Debo probar que W es un par ordenado de la forma $(1,0)$, tal que $z.W=W.z=z\ \forall\ z\in\mathbb{C}$.

Veamos:

1. Sea $z=(a,b)$ y $W=(m,n)$, tal que, $z.W=z$

Debo hallar $\begin{cases}m=?\\ n=?\end{cases}$

2. Como $Z.W = Z$

$\Rightarrow (a,b)(m,n) = (a,b)$

$\Rightarrow (am-bn, an+bm) = (a,b)$

$$\begin{cases} am-bn = a \\ an+bm = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} am-bn = a \\ bm+an = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(m-1)-bn = 0 \\ b(m-1)+an = 0 \end{cases}$$

Este sistema homogéneo de 2 ecuaciones con dos incognitas tiene solución única, si $a^2+b^2 \neq 0$

3. Al resolver el sistema, se obtienen $\begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$

4. Luego, W es el par $W=(1,0)$

5. Si $Z=(0,0)$, se cumple:

$(0,0).W = (0,0)$, $\forall W \in \mathbb{C}$;

En particular, si $W=(1,0)$, entonces: $(0,0).(1,0) = (0,0)$ //

UNICIDAD DE $W=(1,0)$

1. Si $W=(1,0)$ es la identidad de la multiplicación, se cumple:

$Z.W = W.Z = Z$, $\forall Z \in \mathbb{C}$

2. Supongamos que existe otra identidad $W^* \in \mathbb{C}$, tal que:

$Z.W^* = W^*.Z = Z$ $\forall Z \in \mathbb{C}$

Debo probar: $W^* = W$.

Veamos:

3. Por 1. La propiedad $Z = W.Z = Z.W$ se cumple $\forall Z \in \mathbb{C}$.

En particular se cumplirá para $Z = W^*$

Luego: $W^* = W.W^*$

$= W$, Si en 2. hacemos $Z = W$.

4. Por 2. se tiene:

$Z.W^* = Z$, $\forall Z \in \mathbb{C}$

En particular para $Z=W$, se tendrá: $W.W^* = W$.

Esto justifica que:

$W^* = W$.

DEMOSTRACION DE M_5

EXISTENCIA DE Z^{-1}

Dado $Z=(a,b)\neq 0$ debo probar que Z^{-1} es un par ordenado expresado en términos de a y b tal que $Z Z^{-1} = W$ donde $W=(1,0)$.

Veamos:

1) Sea $Z^{-1} = (p,q)$, tal que,

$Z.Z^{-1} = W$

$\Rightarrow (a,b).(p,q) = (1,0)$

$(ap-bq, aq+bp) = (1,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ap-bq = 1 \\ aq+bp = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{por } b \\ \text{por } -a \end{matrix} \begin{cases} ap-bq = 1 \\ bp+aq = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots 1^*$$

$$\begin{cases} abp-b^2q = b \\ -abp-a^2q = 0 \end{cases}$$

$$-(a^2+b^2)q = b \Rightarrow q = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

En 1^*:

$$\begin{matrix} \text{por } a \\ \text{por } b \end{matrix} \begin{cases} ap-bq = 1 \\ bp+aq = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2p-abq = a \\ b^2p+abq = 0 \end{cases}$$

$$(a^2+b^2)p = a \Rightarrow p = \frac{a}{a^2+b^2}$$

2) Por tanto:

$$Z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

UNICIDAD DE Z^{-1}

1) Se tiene que $\forall Z \neq 0$, $\exists Z^{-1}$, tal que, $Z.Z^{-1} = Z^{-1}.Z = W$, $W=(1,0)$

2) Supongamos que existe otro inverso multiplicativo Z^*, tal que

$Z.Z^* = Z^*.Z = W$, $\forall Z \neq 0$, $Z \in \mathbb{C}$

Debo probar que $Z^* = Z^{-1}$

Veamos:

3) Por M4 : $Z^* = Z^*.W$ donde $W=(1,0)$ es el neutro multiplicativo.

4) Por 1. $= Z^*(Z.Z^{-1})$

5) Por M3 $= (Z^*Z).Z^{-1}$

6) Por 2. $= W . Z^{-1}$

7) Por M4 $= Z$, porque W es el neutro multiplicativo.

$\therefore \quad Z^* = Z^{-1}$

2.5 DEFINICIONES

1) El elemento NEUTRO ADITIVO en $\mathbb{C}$ es $\theta = (0,0)$

2) El elemento NEUTRO (identidad) multiplicativo en $\mathbb{C}$ es $W = (1,0)$

3) El INVERSO MULTIPLICATIVO de $Z = (a,b) \neq (0,0)$ es

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

4) El INVERSO ADITIVO de $Z = (a,b)$ es $-Z = -(a,b)$

2.6 EJEMPLO:

si $Z = (2,-3)$

$-Z = (-2,3) = -(2,-3)$

$$Z^{-1} = \left(\frac{2}{4+9}, \frac{3}{4+9}\right) = \left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)$$

DEMOSTRACION de la Propiedad DISTRIBUTIVA: $Z(Z_1+Z_2) = Z Z_1 + Z Z_2$.

(1) sean $Z = (a,b)$, $Z_1 = (a_1,b_1)$, $Z_2 = (a_2,b_2)$ elementos de $\mathbb{C}$

(2) $Z(Z_1+Z_2) = (a,b) \cdot \left((a_1,b_1) + (a_2,b_2)\right)$

$= (a,b) \cdot (a_1+a_2, b_1+b_2)$

$= \left(a(a_1+a_2) - b(b_1+b_2), a(b_1+b_2) + b(a_1+a_2)\right)$

$= (aa_1 + aa_2 - bb_1 - bb_2, ab_1 + ab_2 + ba_1 + ba_2)$

$$= \Big((aa_1 - bb_1) + (aa_2 - bb_2),\ (ab_1 + ba_1) + (ab_2 + ba_2) \Big)$$

$$= (aa_1 - bb_1,\ ab_1 + ba_1) + (aa_2 - bb_2,\ ab_2 + ba_2)$$

$$= \quad z z_1 \quad + \quad z z_2$$

2.7 LOS NUMEROS COMPLEJOS COMO UNA EXTENSION DE LOS NUMEROS REALES.

Designamos : $\mathbb{C} = \Big\{ (a,b) \,/\, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Big\}$ donde la igualdad, la adición y la multiplicación con elementos de $\mathbb{C}$ están bien definidos.
Consideremos el subconjunto $\mathbb{C}_o = \Big\{ (a,0) / a \in \mathbb{R} \Big\}$, donde la igualdad, la adición y la multiplicación con los elementos de $\mathbb{C}_o$, se definen del modo siguiente :

IGUALDAD : $(a,0) = (b,0) \Leftrightarrow a = b$

SUMA : $(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$

MULTIPLICACION : $(a,0) \cdot (b,0) = (ab, 0)$.

Esto prueba que podemos sumar o multiplicar dos números complejos de $\mathbb{C}_o$ sumando o multiplicando sólo las componentes reales. Lo que es lo mismo que sumar o multiplicar números reales.

Es decir, los números complejos de $\mathbb{C}_o$ se comportan del mismo modo que si fueran números reales.

Igualmente para la sustracción y la división se definen :

$$-(a,0) = (-a,0)$$

$$(a,0)^{-1} = (a^{-1}, 0)\ ;\ \text{si } a \neq 0.$$

Por tanto, No existe distinción entre los elementos de $\mathbb{C}_o$ y los números reales y afirmamos que : " $\mathbb{C}_o$ es isomorfo con $\mathbb{R}$ "

Por el isomorfismo existente entre $\mathbb{C}_o$ y $\mathbb{R}$, es que decimos que :

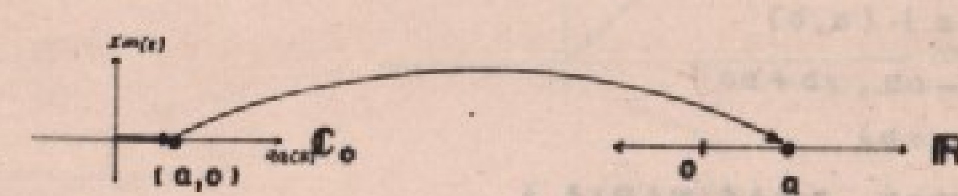
$$(x, 0) \equiv x$$

" se lee : el par $(x,0)$ es equivalente al número real x "

NOTA : No decimos que $(x,0)$ es igual a X, sino que son equivalentes. Es decir : $(x,0) \equiv x$.

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}$$

$$(a,o) \longmapsto a$$



SUMA	MULTIPLICACION
$f\Big((a,o)+(b,o)\Big) = a+b$	$f\Big((a,o)\cdot(b,o)\Big) = ab$
$f\Big((o,o)\Big) = 0$	$f\Big((1,0)\Big) = 1$
$f\Big((-a,o)\Big) = -a, \forall a \in \mathbb{R}$	$f\Big((a,o)^{-1}\Big) = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$

2.8 DEFINICION DE ISOMORFISMO

Decimos que $\mathbb{C}_o$ es isomorfo a $\mathbb{R}$, si existe una función f de $\mathbb{C}_o$ sobre $\mathbb{R}$, tal que, f es *inyectiva y subyectiva*.

Como f es una función de $\mathbb{C}_o$ sobre $\mathbb{R}$, definido del sigte modo :

$$f\Big((a,o)\Big) = a$$

Tenemos:

1) f es inyectiva.

Porque : si $f((a,o)) = f((b,o)) \Rightarrow (a,o) = (b,o)$, $\forall (a,o),(b,o) \in \mathbb{C}_o$
$\Rightarrow \ a = b \quad , \forall a,b \in \mathbb{R}$

2) f es sobre (o *subyectiva*)

Por que : $f(\mathbb{C}_o) = \mathbb{R}$

Dicho de otra manera : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists! (a,o) \in \mathbb{C}_o$, tal que, $f((a,o)) = a$

Sobre este tema no incidiremos mucho, corresponde al ALGEBRA su correspondiente estudio. Sólo nos abocaremos al estudio de los números complejos en lo que respecta a la suma, producto, norma, raíz, etc.

NOTA : Porque f es un isomorfismo entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$, nos permitiremos en hacer :

$$\boxed{(a,o) = a \ ,\ \forall a \in \mathbb{R}}$$

2.9 PROPOSICION – sea $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$

entonces $rz = (ra, rb)$.

DEMOSTRACION:

(1) $r \in \mathbb{R} \Rightarrow r = (r,o) \in \mathbb{C}$

(2) $rz = (r,o)\cdot(a,b)$

$= (ra - ob\ ,\ rb + oa)$

$= (ra\ ,\ rb)$

2.10 LA UNIDAD IMAGINARIA i

TEOREMA – Todo número complejo (a,b) puede expresarse en la forma $(a,b) = a + bi$, donde $i = (0,1)$ es la unidad imaginaria de $\mathbb{C}$.

PRUEBA

(1) $(a,b) = (a,o) + (o,b)$

$= (a,o) + b_{\bullet}(o,1)$

$= (a,o) + (b,o)\underbrace{(o,1)}_{i}$

$= a + bi$ pues $\begin{matrix}(a,o)=a\\(b,o)=b\end{matrix}$

(2) Donde $i = (0,1)$ es la UNIDAD IMAGINARIA de $\mathbb{C}$

2.11 NOMENCLATURA – A la representación $z = a + bi$ se le llamará FORMA CARTESIANA (o forma canónica) del número complejo $z = (a,b)$.

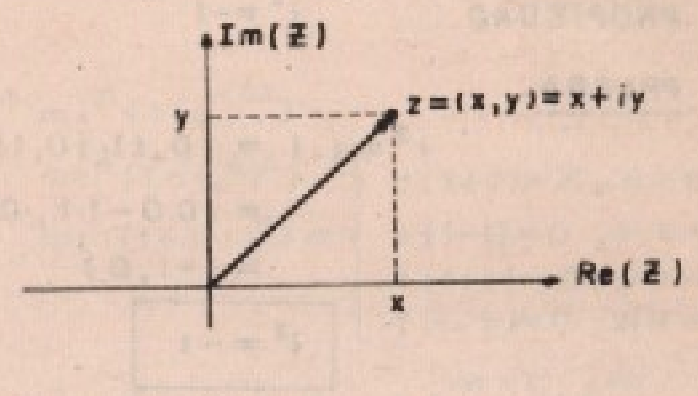
En consecuencia nos será indeferente tratar a los números complejos como pares ordenados $z = (a,b)$ o como $z = a + bi$.

2.11.1 REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Hemos definido el número complejo z como el par ordenado $z = (a,b)$, por tanto la representación geométrica del par ordenado (a,b) coincide con un punto del plano $\mathbb{R}^2$; con la diferencia que nos referiremos al plano complejo $\mathbb{C}$ y no al plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Al referirnos al plano complejo $\mathbb{C}$ (diagramas de ARGAND), el eje horizontal (eje X) será el eje de la componente real ($Re(z)$) y el eje vertical (eje Y) será el eje de la componente imaginaria ($Im(z)$).

Así tendremos:



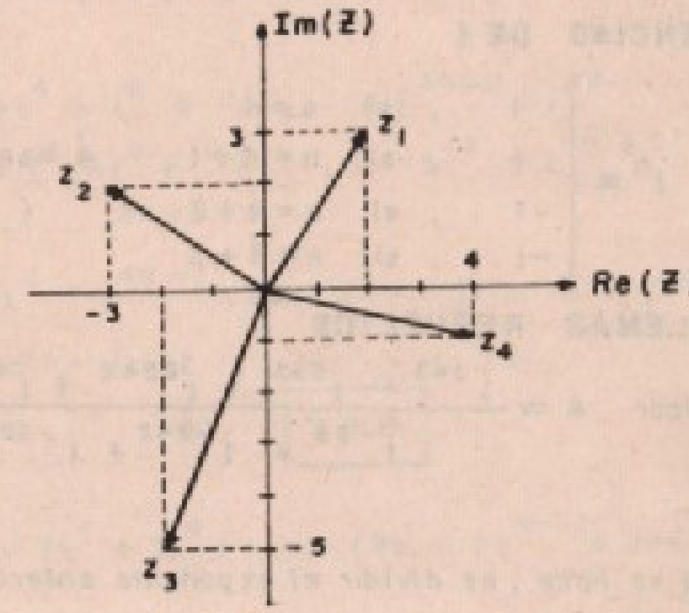
Ejemplos:

$z_1 = 2 + 3i = (2,3)$

$z_2 = -3 + 2i = (-3,2)$

$z_3 = -2 - 5i = (-2,-5)$

$z_4 = 4 - i = (4,-1)$

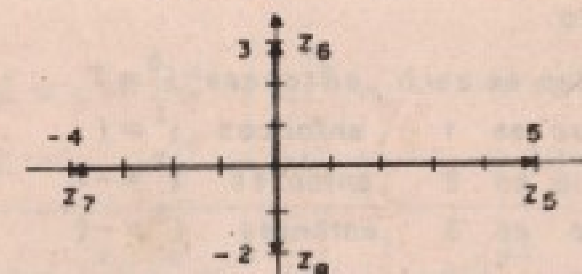


$z_5 = 5 = (5,0)$

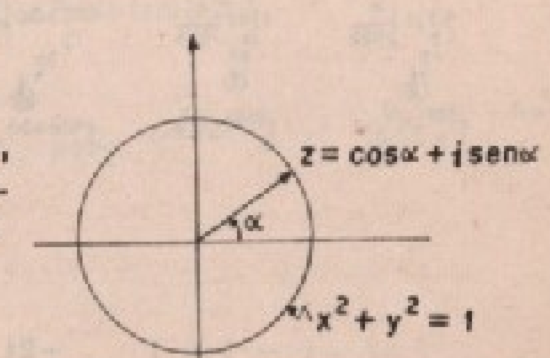
$z_6 = 3i = (0,3)$

$z_7 = -4 = (-4,0)$

$z_8 = -2i = (0,-2)$



CASO ESPECIAL: $z = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$, es un número complejo cuyo extremo coincide con un punto de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$



2.12 PROPIEDAD : $i^2 = -1$

PRUEBA :

$$\begin{aligned} i^2 = i \cdot i &= (0,1)\cdot(0,1) \\ &= (0.0 - 1.1\ ,\ 0.1 + 1.0) \\ &= (-1, 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

2.13 POTENCIAS DE i

$$i^n = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = \dot{4} \\ i & , \text{ si } n = \dot{4}+1 \\ -1 & , \text{ si } n = \dot{4}+2 \\ -i & , \text{ si } n = \dot{4}+3 \end{cases} \qquad \dot{4} = \text{se lee "múltiplo de 4"}$$

2.14 PROBLEMAS RESUELTOS

1 Simplificar $A = \dfrac{i^{343} + i^{5331} + i^{2542} + i^{412300}}{i^{-55} + i^{-242} + i^{-328}}$

SOLUCION :

Todo lo que se hace , es dividir el exponente entero "n" entre 4 y observar qué residuo queda.

Si el residuo es cero , entonces $i^0 = 1$

Si el residuo es 1 , entonces $i^1 = i$

Si el residuo es 2 , entonces $i^2 = -1$

Si el residuo es 3 , entonces $i^3 = -i$

En el problema, tenemos :

$343 \div 4$: cociente 85, residuo 3 $\Rightarrow i^{343} = i^3 = -i$

$5331 \div 4$: cociente 1332, residuo 3 $\Rightarrow i^{5331} = i^3 = -i$

$2542 \div 4$: cociente 635, residuo 2 $\Rightarrow i^{2542} = i^2 = -1$

$412300 \div 4$: cociente 103075, residuo 0 $\Rightarrow i^{412300} = i^0 = 1$

$55 \div 4$: cociente 13, residuo 3 $\Rightarrow i^{55} = i^3 = -i$

$242 \div 4$: cociente 60, residuo 2 $\Rightarrow i^{-242} = i^2 = -1$

$328 \div 4$: cociente 82, residuo 0 $\Rightarrow i^{-328} = i^0 = 1$

Luego $A = \dfrac{-i - i - 1 + 1}{-i - 1 + 1} = \dfrac{-2i}{-i} = 2$ //

2 Hallar todos los valores de $P = i^n + i^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

SOLUCION :

$$\begin{aligned} P = i^n + i^{-n} &= i^n(1 + i^{-2n}) \\ &= i^n(1 + (i^{-2})^n) \\ &= i^n(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 1(1+1) = 2 \ , \text{ si } n = \dot{4} \\ i(1-1) = 0 \ , \text{ si } n = \dot{4}+1 \\ -1(1+1) = -2 \ , \text{ si } n = \dot{4}+2 \\ -i(1-1) = 0 \ , \text{ si } n = \dot{4}+3 \end{cases} \end{aligned}$$

3 Calcular $S = i^2 + i^4 + i^6 + \cdots\cdots + i^{4n-2} + i^{4n}$

SOLUCION :

(1) $S = i^2 + i^4 + i^6 + \cdots\cdots + i^{4n-2} + i^{4n}$

(2) Por i^2 : $i^2 S = i^4 + i^6 + i^8 + \cdots\cdots + i^{4n} + i^{4n+2}$

(3) $S - i^2 S = i^2 - i^{4n+2}$

$S + S = i^2 - i^{4n+2}$, pues $i^2 = -1$

$2S = -1 - (-1)$

$2S = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = 0}$

4 Hallar $E = i^2 + 2i^4 + 3i^6 + \cdots\cdots + (2n-1)i^{4n-2} + 2ni^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

SOLUCION :

(1) $E = i^2 + 2i^4 + 3i^6 + \cdots\cdots + (2n-1)i^{4n-2} + 2ni^{4n}$

(2) Por i^2 : $i^2 E = i^4 + 2i^6 + \cdots\cdots + (2n-1)i^{4n} + 2ni^{4n+2}$

Restar (1)-(2): $E - i^2 E = \underbrace{i^2 + i^4 + i^6 + \cdots\cdots + i^{4n}}_{0 \text{ (Problema 3)}} - 2ni^{4n+2}$

$$\begin{aligned} E + E &= -2ni^{4n+2} \\ &= -2n(-1) \quad , \text{ pues } i^{4n+2} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

$2E = 2n$

$$\boxed{E = n}$$

(5) Sea $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^3 = 1$.

Calcular $A = (w^{1^{2^3}}+1)^{w^{4^{5^6}}} (w^{7^{8^9}}+1)^{w^{10^{11^{12}}}} (w^{13^{14^{15}}}+1)^{w^{16^{17^{18}}}}$ ..... 6n factores

SOLUCION :

(1) Para el presente problema se aplica la sigte proposición

PROPOSICION : si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $(a+b)^n = \dot{a} + b^n$

se lee "múltiplo de a"

Ejemplo : $7^n = (6+1)^n = \dot{6} + 1^n = \dot{3} + 1$

como vemos $7 = 6+1$
$= a+b$

Probemos con algunos valores de n :

si $n=1 \Rightarrow 7 = (6+1) = \dot{3}+1$, $\dot{3} = 2(3)$
$= 2(3)+1$

si $n=2 \Rightarrow 7^2 = (6+1)^2 = \dot{3}+1$, $\dot{3} = 16(3)$
$= 16(3)+1$

si $n=3 \Rightarrow 7^3 = (6+1)^3 = \dot{3}+1$, $\dot{3} = 114(3)+1$
$= 114(3)+1$

(2) Aplicando, el mismo concepto enunciado en la proposición, tendremos :

$$(\dot{3}+1)^{5^6} = \dot{3} + 1^{5^6} = \dot{3}+1$$

$$(\dot{3}+1)^{11^{12}} = \dot{3} + 1^{11^{12}} = \dot{3}+1$$

$$(\dot{3}+1)^{17^{18}} = \dot{3} + 1^{17^{18}} = \dot{3}+1$$

(3) Igualmente, tendremos :

$$4^{5^6} = (\dot{3}+1)^{5^6} = \dot{3}+1^{5^6} = \dot{3}+1 \quad , \text{ pues } 4 = 3+1 = \dot{3}+1$$

$$10^{11^{12}} = (\dot{3}+1)^{11^{12}} = \dot{3}+1^{11^{12}} = \dot{3}+1 \quad , \text{ pues } 10 = 9+1 = \dot{3}+1$$

$$16^{17^{18}} = (\dot{3}+1)^{17^{18}} = \dot{3}+1^{17^{18}} = \dot{3}+1 \quad , \text{ pues } 16 = 15+1 = \dot{3}+1$$

(4) Ahora, ya estamos preparados para desarrollar el problema dado.

$$w^{4^{5^6}} = w^{(\dot{3}+1)^{5^6}} = w^{\dot{3}+1} = w$$

$$w^{10^{11^{12}}} = w^{(\dot{3}+1)^{11^{12}}} = w^{\dot{3}+1} = w$$

$$w^{16^{17^{18}}} = w^{(\dot{3}+1)^{17^{18}}} = w^{\dot{3}+1} = w$$

porque : $\boxed{w^3 = 1 \text{ y } w^{\dot{3}} = 1}$

además : $w^{\dot{3}+1} = w^{\dot{3}}w = 1.w = w$

(5) Luego: $A = (w^{1^{2^3}}+1)^w (w^{7^{8^9}}+1)^w (w^{13^{14^{15}}}+1)^w$ .... 6n factores

(6) Pero :

$w^{1^{2^3}} = w$, pues $1^{2^3} = 1$

$w^{7^{8^9}} = w^{(\dot{3}+1)^{8^9}} = w^{\dot{3}+1} = w$

$w^{13^{14^{15}}} = w^{(\dot{3}+1)^{14^{15}}} = w^{\dot{3}+1} = w$

(7) Reemplazar (6) en (5) :

$A = (w+1)^w (w+1)^w (w+1)^w$ .... 6n factores
$= (w+1)^{6nw}$

(8) Como $w^3 = 1 \leftrightarrow w^3 - 1 = 0$

$\leftrightarrow (w-1)(w^2+w+1) = 0 \to \boxed{w=1} \vee w^2+w+1 = 0$

$\boxed{w+1 = -w^2}$

(9) Al sustituir (8) en (7) tendremos dos valores de A

a) $A = (1+1)^{-6nw} = 2^{6nw}$, si $w=1$

b) $A = (-w^2)^{6nw} = w^{12nw}$, si $w \neq 1$

SUSTRACCION DE NUMEROS COMPLEJOS

DEFINICIONES

2.15 DEFINICION– El número complejo $(a,-b) = a - bi$ se define como:
$(a,-b) = (a, +(-b)) = a + (-b)i$

2.16 DEFINICION– se llama NUMERO IMAGINARIO a todo número complejo de la forma $a + bi = (a,b)$ con $b \neq 0$.

NOTA: si $b=0$, entonces tendríamos el número real $a = (a,0)$

2.17 DEFINICION– se llama NUMERO IMAGINARIO PURO, al número complejo $bi = (0,b)$, con $b \neq 0$.

2.18 SUSTRACCION DE NUMEROS COMPLEJOS:

Dados los números complejos $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$, se define:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (a,b) + (-c,-d) \\ &= \big(a + (-c), b + (-d)\big) \\ &= (a-c, b-d) = (a-c) + (b-d)i \end{aligned}$$

EJEMPLOS:

a) $(3-i)-(5-2i) = (3-5)+(-i+2i) = -2+i$

b) $(5,-2)-(4,-5) = (5-4,-2+5) = (1,3) = 1+3i$

CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO Y DIVISION DE NÚMEROS COMPLEJOS.

2.19 DEFINICION– Sea $z = a+bi \equiv (a,b)$ un número complejo, se llama CONJUGADO de z al número complejo $\bar{z} = a - bi \equiv (a,-b)$

Ejemplos:

si $z_1 = 2+3i$ => $\bar{z}_1 = 2-3i$
$= (2,3)$ $= (2,-3)$

si $z_2 = -5-2i$ => $\bar{z}_2 = -5+2i$
$= (-5,-2)$ $= (-5,2)$

si $z_3 = 2i$ => $\bar{z}_3 = -2i$
$= (0,2)$ $= (0,-2)$

si $z_4 = -4$ => $\bar{z}_4 = -4$
$= (-4,0)$ $= (-4,0)$ ← La conjugada de todo número real es el mismo.

Como observamos, la conjugada de un número complejo se halla, sólo cambiando de signo a la PARTE IMAGINARIA.

2.20 PROPIEDAD: Si $z = (a,b) = a+bi$, entonces $z\bar{z} = a^2 + b^2$

PRUEBA: $z = (a,b)$ y $\bar{z} = (a,-b)$

Luego:
$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a,b)\cdot(a,-b) \\ &= \big(a.a - (b)(-b), a(-b) + (b)(a)\big) \\ &= (a^2+b^2, 0) = a^2 + b^2 \; // \end{aligned}$$

NOTA: si la operación de multiplicar números complejos se hace con la forma cartesiana, tendríamos:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \quad , \quad i^2 = -1 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

2.21 DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

Dado dos números complejos $z_1 = (a,b) = a + bi$ y $z_2 = (c,d) = c + di \neq 0$, definimos el cociente z_1 / z_2 como el número complejo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} \quad , \text{si } z_2 = (c,d) \Rightarrow z_2^{-1} = \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2} \right)$$

ya hemos definido en 2.3

$$= (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2} \right)$$

$$= \left(\frac{ac}{c^2+d^2} - \frac{b(-d)}{c^2+d^2}, \frac{a(-d)}{c^2+d^2} + \frac{bc}{c^2+d^2} \right)$$

$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

NOTA: Aprovechando la propiedad 2.20, la división $\frac{z_1}{z_2}$, se puede hacer del sigte modo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \, \bar{z}_2} = \frac{1}{z_2 \bar{z}_2} \; (z_1 \bar{z}_2)$$

$$= \frac{1}{c^2+d^2} \left[(a,b) \cdot (c,-d) \right]$$

$$= \frac{1}{c^2+d^2} \left(ac - b(-d), a(-d) + bc \right)$$

$$= \frac{1}{c^2+d^2} \left(ac + bd , bc - ad \right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

EJEMPLOS (Para los efectos prácticos se puede operar con gran facilidad, cuando los números complejos se expresan en su forma cartesiana)

1) sean $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 5 + 2i$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10-4i-15i+6i^2}{25+4} = \frac{(10-6)-19i}{29}$$

$$= \frac{4-19i}{29} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i$$

2) $$\frac{3-2i}{-1-i} = \frac{(3-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-3-3i+2i+\overset{-2}{2i^2}}{1+1} = \frac{-5-i}{2} = \frac{-5}{2} - \frac{1}{2} i$$

3) $$\frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\cos y + i \operatorname{sen} y} = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{(\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos y - i \operatorname{sen} y)}$$

$$= \frac{\cos x \cos y - i \cos x \operatorname{sen} y + i \operatorname{sen} x \cos y - \overset{-1}{i^2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y}$$

$$= (\cos x . \cos y + \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} y) + i (\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y)$$

$$= \cos(x-y) + i \operatorname{sen}(x-y)$$

2.22 MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS POR ESCALARES

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, se define $\alpha z = (\alpha a, \alpha b)$

TEOREMA. Para cada α, β en $\mathbb{R}$ y z, w en $\mathbb{C}$, se tienen:

1. αz es un número complejo.
2. $1 . z = z$
3. $(\alpha + \beta) z = \alpha z + \beta z$
4. $\alpha (z + w) = \alpha z + \alpha w$
5. $\alpha (\beta z) = (\alpha \beta) z$

2.23 OTROS TEOREMAS DEL SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Si z, w, u son números complejos:

1. si $z = w \Rightarrow z + u = w + u$
2. si $z = w \Rightarrow zu = wu$
3. si $z + u = w + u \Rightarrow z = w$
4. si $z.u = wu$ y $u \neq 0 \Rightarrow z = w$
5. $-z = (-1) z$
6. $(-z) + (-w) = -(z + w)$
7. $z(-w) = -(zw) = (-z) w$
8. $-(-z) = z$
9. si $z \neq 0 \Rightarrow (z^{-1})^{-1} = z$
10. si $z \neq 0$, $w \neq 0 \Rightarrow (zw)^{-1} = z^{-1} w^{-1}$
11. $zw = 0 \iff z = 0 \lor w = 0$
12. $z^2 = w^2 \iff z = w \lor z = -w$

2.24 POTENCIA DE UN NUMERO COMPLEJO

sea z un número complejo, definimos:

1) $z^0 = 1$, $\forall z \neq 0$

2) $z^1 = z$

3) $z^n = z^{n-1}.z$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

4) $z^{-n} = (z^{-1})^n$, si $z \neq 0$

PROBLEMA · Sea $z = x + iy$, tal que $z^{39} = 1$, $z \neq 1$

Hallar $Re(z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{37})$.

SOLUCION:

(1) De $z^{39} = 1 \Rightarrow z^{39} - 1 = 0$

$\Rightarrow (z-1)(z^{38} + z^{37} + z^{36} + \cdots + z + 1) = 0$

$\Rightarrow z^{38} + \underbrace{z^{37} + \cdots + z}_{} + 1 = 0$, pues $z \neq 1 \Leftrightarrow z - 1 \neq 0$

$\Rightarrow z^{37} + \cdots + z^2 + z = -1 - z^{38}$

(2) se pide $Re(z^{37} + \cdots + z^2 + z) = Re(-1 - z^{38}) = Re(-1 - z^{-1})$

(3) De $z^{39} = 1 \Rightarrow z^{38}.z = 1$

$\Rightarrow z^{38} = z^{-1} = \frac{1}{z}$

(4) Conociendo $z = x + iy$, se tiene: $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

$= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$

(5) Reemplazar en (2):

$$Re(-1 - z^{-1}) = Re\left(-1 - \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}i\right)$$

$$= -1 - \frac{x}{x^2+y^2} \quad //$$

PROBLEMA 2 – si $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z^n = 1$, $z \neq 1$

y $S = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$. Hallar $Re(S)$, $Im(S)$

SOLUCION:

(1) Tenemos: $S = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + (n-1)z^{n-2} + nz^{n-1}$

(2) Por z: $zS = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + (n-1)z^{n-1} + nz^n$

(3) Restar:

$$S - zS = \underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}}_{} - nz^n$$

(4) De $z^n = 1 \Leftrightarrow z^n - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1) = 0$, como $z \neq 1$

$\Rightarrow z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0 \cdots\cdots (4*)$

(5) Reemplazar (4*) en (3):

$$(1 - z)S = 0 - nz^n$$

$$\Rightarrow S = \frac{-nz^n}{1-z} = \frac{-n}{1-z}, \text{ pues } z^n = 1$$

(6) Ahora, debemos expresar $S = \frac{-n}{1-z}$, con $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, en forma cartesiana.

Veamos:

$$S = \frac{-n}{(1-\cos\theta) - i\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{-n}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} - i\,2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{-n}{-2i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$= \frac{-n\left[\cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]}{-2i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\underbrace{\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]\left[\cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]}_{\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = 1}}$$

$$S = \frac{n\left[\cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]}{2i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{(-i)n\left[\cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right]}{2i(-i)\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{-in\cos\frac{\theta}{2} - n\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}$$

$i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$

$$S = -i\,\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}} - \frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}$$

$$S = -i\,\frac{n}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2} - \frac{n}{2}$$

(7) Tenemos $\begin{cases} \mathrm{Re}(S) = -\frac{n}{2} \\ \mathrm{Im}(S) = -\frac{n}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2} \end{cases}$

2.25 PROPIEDADES DE LOS CONJUGADOS DE NUMEROS COMPLEJOS

Hemos definido que si $z = a+bi \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{z} = a-bi \in \mathbb{C}$

$= (a,b)$ $\qquad$ $= (a,-b)$

conjugado de z

PROPIEDADES

$C_1)$ $\bar{\bar{z}} = z$

$C_2)$ $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$C_3)$ $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

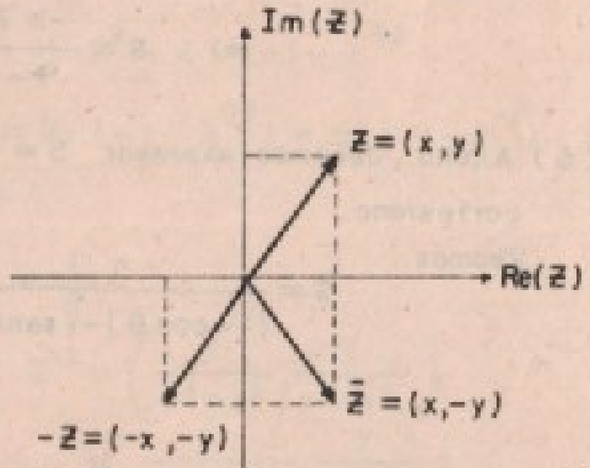
$C_4)$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, si $z_2 \neq 0$

$C_5)$ $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$C_6)$ $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

$C_7)$ $(\bar{z})^m = \overline{z^m}$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, $z \in \mathbb{C}$

REPRESENTACION GRAFICA DEL CONJUGADO Y DEL INVERSO ADITIVO



1) z y $\bar{z}$ son simétricos con respecto al eje real.
2) z y $-z$ son simétricos con respecto al origen.

DEMOSTRACION $C_1)$

sea $z = (a,b)$, donde $\bar{z} = (a,-b)$

$= a+bi$ $\qquad$ $= a-bi$

De $\bar{z} = (a,-b)$ se tiene: $\bar{\bar{z}} = (a,-(-b))$

$= (a,b) = z$ //

DEMOSTRACION $C_2)$

1) sean $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$

$= a+bi$ $\qquad$ $= c+di$

2) Sumar: $z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$

$$\Rightarrow \overline{z_1+z_2} = \big(a+c, -(b+d)\big)$$

$$= (a+c, -b-d)$$

$$= (a,-b) + (c,-d)$$

$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

DEMOSTRACION DE $C_3)$

1) sean $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ números complejos

2) donde: $z_1 z_2 = (ac-bd, ad+bc)$

3) $\overline{z_1 z_2} = \big(ac-bd, -(ad+bc)\big)$

$$= \big(ac-bd, -ad-bc\big) = \big(ac-(-b)(-d), a(-d)+(-b)c\big)$$

$$= (a,-b).(c,-d)$$

$$= \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

DEMOSTRACION DE $C_4)$

1) $z_1 = z_1 . 1$

$= z_1(z_2^{-1} . z_2)$, si $z_2 \neq 0$, cumple: $z_2^{-1}.z_2 = 1$

$= z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2} \cdot z_2\right)$

$$z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) \cdot z_2$$

2) Aplico la propiedad C_3:

$$\bar{z}_1 = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \bar{z}_2 \underset{\text{por } \bar{z}_2^{-1}}{\overset{\text{multiplicar}}{\Longrightarrow}} \bar{z}_1 . \bar{z}_2^{-1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \underbrace{(\bar{z}_2 . \bar{z}_2^{-1})}_{1}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}, \text{ pues } z_2 \neq 0$$

DEMOSTRACION DE C_7) $(\bar{z})^m = \overline{z^m}$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+, z \in \mathbb{C}$

1) si $m = 1$ $\Rightarrow$ $(\bar{z})^1 = \overline{z^1} = \bar{z}$, pues $z^1 = z$

2) supongamos que se cumple para $m-1$

$$(\bar{z})^{m-1} = \overline{z^{m-1}}$$

3) Probemos para m:

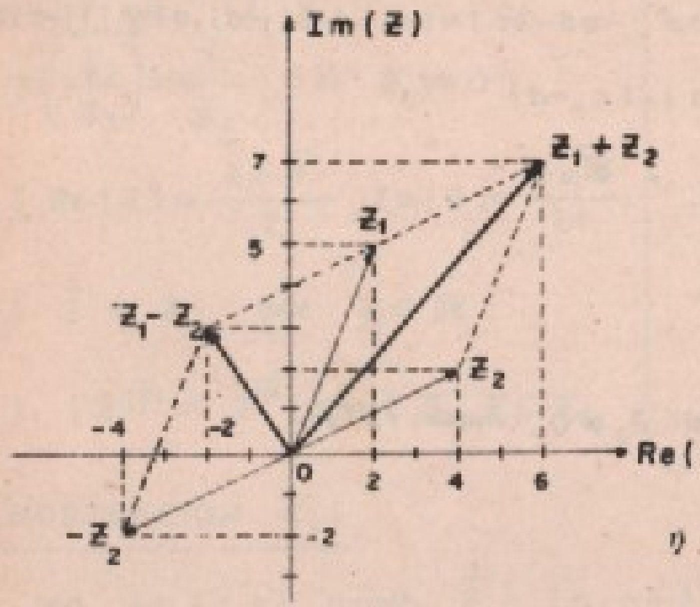
$$(\bar{z})^m = (\bar{z})^{m-1}\cdot(\bar{z})$$

$$= \overline{z^{m-1}} \cdot \bar{z} \quad \text{por 2)}$$

$$= \overline{Z^{m-1+1}}$$

$$= \overline{Z^m}, \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

2.26 REPRESENTACION GRAFICA DE LA SUMA Y SUSTRACCION DE NUMEROS COMPLEJOS:



Sean $z_1 = (2,5)$, $z_2 = (4,2)$

Tenemos:

$$z_1 + z_2 = (6,7)$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

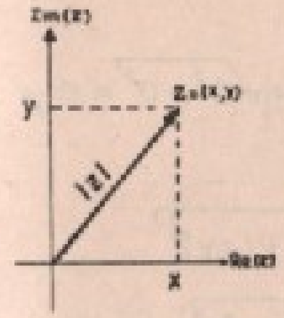
$$= (2,5) + (-4,-2)$$

$$= (-2,3)$$

1) La suma z_1+z_2 es la diagonal del paralelogramo formado por z_1 y z_2.

2) Igualmente $z_1+(-z_2)$ es la diagonal del paralelogramo formado por z_1 y $-z_2$.

2.27 MODULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO COMPLEJO



DEFINICION— El módulo o valor absoluto del número complejo $z = x+yi \equiv (x,y)$, es el número real positivo o cero $|z|$, definido por la relación: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Ejemplo 1 · si $z = -6+8i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-6)^2+(8)^2}$
$= 10$

Ejemplo 2 · si $z_1 = 3-2i$, $z_2 = -1+i$, entonces:

$$|z_1 - z_2| = |(3-2i)-(-1+i)| = |4-3i| = \sqrt{(4)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

Geométricamente: $|z|$ es la distancia del origen al punto $(x,y) = z$ que coincide con la longitud del vector (x,y).

2.28 PROPIEDADES DEL MODULO

Para todo z, z_1, z_2 pertenecientes a $\mathbb{C}$, se cumplen:

1. $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|rz| = |r||z|$, $\forall r \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
5. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
6. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
8. $Re(z) \leq |z|$, $Im(z) \leq |z|$

PRUEBA DE 1): $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Sea $z = x+yi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, pues $x^2+y^2 \geq 0$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

DEMOSTRAR QUE $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$

($\Rightarrow$) si $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$

Veamos: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, si $z = x+yi$

si $|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 0$

$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$

Luego $z = 0 + 0i = 0$ //

($\Leftarrow$) / si $z = 0 \Rightarrow |z| = 0$

Veamos: si $z = x + yi = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$ //

PRUEBA DE 2) sean $r \in \mathbb{R}$, $z = x + yi$

Tenemos: $|rz| = |r(x+yi)| = |(rx)+(ry)i| = \sqrt{(rx)^2+(ry)^2}$

$$= \sqrt{r^2(x^2+y^2)}$$

$$= \sqrt{r^2}\sqrt{x^2+y^2} \text{, pero: } \sqrt{r^2} = |r|$$

$$= |r|\,|z| \,//$$

PRUEBA DE 3) Sean $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, probar que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

sea $|z_1 z_2| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i|$

$$= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+y_1x_2)^2}$$

$$= \sqrt{\underline{x_1^2x_2^2} - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + \underline{\underline{y_1^2y_2^2}} + \underline{x_1^2y_2^2} + \cancel{2x_1y_2y_1x_2} + \underline{y_1^2x_2^2}}$$

$$= \sqrt{x_1^2(x_2^2+y_2^2) + y_1^2(y_2^2+x_2^2)}$$

$$= \sqrt{(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)} = \sqrt{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$= |z_1|\,|z_2|$$

Antes de probar la propiedad 4) probemos la sigte propiedad:

Probar que si $z = x + yi \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$

Prueba: si $z = x + yi \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$

$$\Rightarrow |z^{-1}| = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{|z|} = |z|^{-1} \,//$$

$$\Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1} \,//$$

PRUEBA DE 4) Sea $|z_1| = |z_1 . 1|$, pues $z_1 . 1 = z_1$

$$= |z_1 \cdot (z_2^{-1} z_2)| \text{, pues } z_2^{-1}z_2 = 1 \text{, si } z_2 \neq 0$$

$$|(z_1 \cdot z_2^{-1}) z_2| = \left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2\right| \quad , z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$$

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2| \quad \text{por la propiedad 3}$$

multiplicar ambos miembros por $|z_2|^{-1}$

$$\Rightarrow |z_1||z_2|^{-1} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \underbrace{|z_2||z_2|^{-1}}_{1} \text{, pues } |z_2^{-1}| = |z_2|^{-1} = \frac{1}{|z_2|}, \ |z_2||z_2|^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

PRUEBA DE 5) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, donde $z = x + yi$, $-z = -x - yi$, $\bar{z} = x - yi$

Veamos:

$$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{|z|} = \underbrace{\sqrt{(-x)^2+(-y)^2}}_{|-z|} = \underbrace{\sqrt{x^2+(-y)^2}}_{|\bar{z}|}, \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

PRUEBA DE 6) $z . \bar{z} = |z|^2$, si $z = x + yi$

Veamos: $z . \bar{z} = (x + yi)(x - yi)$

$$= x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = |z|^2 \,//$$

PRUEBA DE 7) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Veamos:

(1) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2})$ *aplicacion de la propiedad 6.*

$$= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= \underbrace{z_1\bar{z}_1} + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + \underbrace{z_2\bar{z}_2}$$

$$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 \quad \cdots\cdots (1*)$$

(2) Debo probar que:

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_1) \leq 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$$

Veamos :

I) sean $\begin{cases} z_1 = a+bi \Rightarrow \bar{z}_1 = a-bi \\ z_2 = c+di \Rightarrow \bar{z}_2 = c-di \end{cases}$

donde : $\left.\begin{array}{l} z_1\bar{z}_2 = (ac+bd)+(bc-ad)i \\ z_2\bar{z}_1 = (ac+bd)+(ad-bc)i \end{array}\right\rangle |z_1\bar{z}_2| = |z_2\bar{z}_1|$

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2(ac+bd) = 2\,Re(z_1\bar{z}_2) = 2\,Re(z_2\bar{z}_1)$$

II) Ahora debo probar que $2Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1||z_2|$, es decir se debe probar que :

$$\underbrace{Re(z_1\bar{z}_2)}_{} \leq |z_1||z_2|$$

$$ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2} \quad \text{, elevar al cuadrado}$$

$$\underline{a^2c^2} + 2abcd + \underline{\underline{b^2d^2}} \leq \underline{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \underline{\underline{b^2d^2}}$$

$$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq (ad-bc)^2 \leftarrow \text{ésta desigualdad se cumple } \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Por tanto , se cumple : $Re(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||z_2|$

(3) Volviendo al paso (1*) :

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \leq \underbrace{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|}_{(|z_1|+|z_2|)^2} ,$$

pues $Re(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||z_2|$

$$|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$$

(4) $\Rightarrow |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|_{//}$, porque $|z_1+z_2|$, $|z_1|$, $|z_2|$ son positivos.

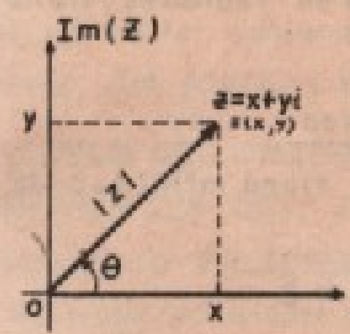
PRUEBA DE 8) Probar que : $Re(z) \leq |z|$, $Im(z) \leq |z|$

Veamos : sea $z = x+yi$, $x = Re(z)$, $y = Im(z)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

1.	$\forall x,y \in \mathbb{R}$, se cumple :	$x^2 \leq x^2+y^2$	V	$y^2 \leq x^2+y^2$
2.	$\Rightarrow$	$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$	V	$\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$
		$\|x\| \leq \|z\|$	V	$\|y\| \leq \|z\|$
3.	$\Rightarrow$	$x \leq \|x\| \leq \|z\|$	V	$y \leq \|y\| \leq \|z\|$
4.	$\Rightarrow$	$x \leq \|z\|$	V	$y \leq \|z\|$
5.		$\Rightarrow Re(z) \leq \|z\|$	V	$Im(z) \leq \|z\|$

3. ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO.

3.1 DEFINICION.– sea $z = x+yi$ un número complejo , diferente de cero , con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; cuyo gráfico coincide con el radio vector (x,y) y con módulo $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.



Un argumento de z es el ángulo θ , medido en radianes, formado por el semieje positivo $\overrightarrow{OX}$ y por el radio vector $\overrightarrow{Oz} = (x,y)$.

NOTACION $\Rightarrow$ $\boxed{\theta = arg(z)}$ ← argumento de z.

NOTA : Decimos un argumento de z y no el argumento de z , porque existen infinidad de argumentos para z .

3.2 FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Como $z = x+iy$ donde $\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

entonces:

$z = x + iy$

$= |z|\cos\theta + i\,|z|\,\mathrm{sen}\,\theta$

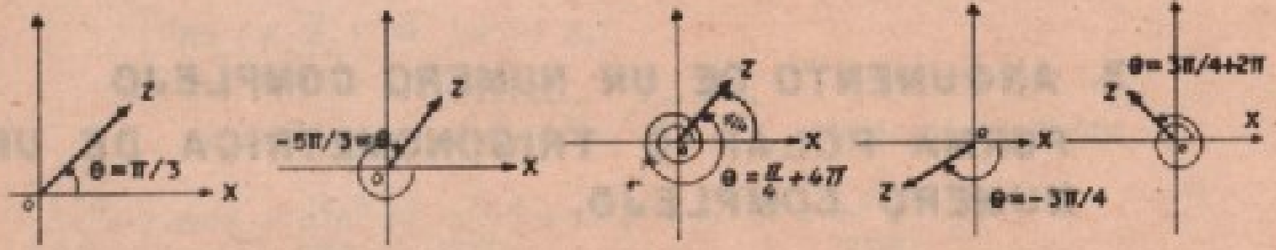
$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$ o $\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$ si $r = |z|$

FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA

Donde:
(r, θ) se llaman coordenadas polares.
"θ" es el ANGULO POLAR (amplitud o fase de z)
$(0,0)$ es el POLO.

3.3 ARGUMENTO PRINCIPAL DE z (o valor principal del argumento de z)

Los lados del $\arg(z) = \theta$ son el semieje positivo $\overrightarrow{OX}$ y el radio vector $\overrightarrow{OZ}$



Segun las ilustraciones que hemos dado para algunos argumentos, podemos decir que el $\arg(z)$ se puede medir desde $\overrightarrow{OX}$ hasta el radio vector $\overrightarrow{OZ}$ en sentido antihorario o sentido horario y se puede dar una vuelta, dos, tres, ..., n vueltas. Esto indica que el $\arg(z)$, medido en radianes, tiene infinito valores para cada z fijo.

En consecuencia, la FORMA POLAR DE z no es único.

Por ejemplo, el número complejo $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ tiene infinidad de formas polares.

Veamos: $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ → $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$; $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \pi/3$

$$z = 2[\cos \pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/3]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2K\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2K\pi\right)\right] \quad \forall K \in \mathbb{Z}$$

Pero, ¿qué valor del $\arg(z)$ tomamos como referencia para expresar el número complejo z en su forma polar?

Es el momento de definir el VALOR PRINCIPAL del argumento de z, para ello hay dos criterios:

1. El ARGUMENTO PRINCIPAL de $z = x + iy$, es el único valor de θ, tal que $\boxed{0 \leq \theta < 2\pi}$ $\wedge$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

2. El ARGUMENTO PRINCIPAL de $z = x + iy$, es el único valor de θ, tal que $\boxed{-\pi \leq \theta < \pi}$ $\wedge$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

NOTACION: $\mathrm{VP}\,\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) = \theta$ para ambos criterios.
VALOR PRINCIPAL de z

En el presente libro, trabajaremos con el primer criterio: $\boxed{0 \leq \underbrace{\mathrm{Arg}(z)}_{\theta} < 2\pi}$ donde θ se genera de $\overrightarrow{OX}$ hacia $\overrightarrow{OZ}$ en sentido antihorario.

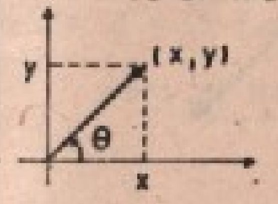
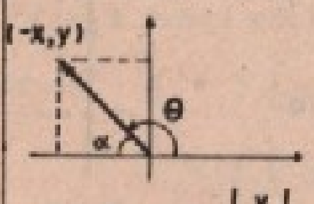
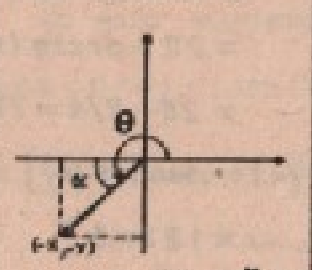
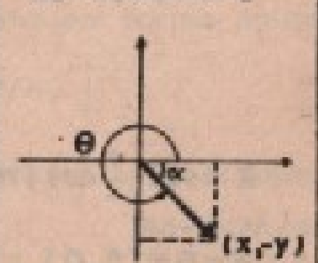
3.4 Un argumento cualquiera de z, será: $\boxed{\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2K\pi = \theta + 2K\pi} \ \boxed{\forall K \in \mathbb{Z}}$ donde $0 \leq \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$

3.5 CALCULO DEL ARGUMENTO PRINCIPAL EN LOS CUATRO CUADRANTES DEL PLANO COMPLEJO.

El ARGUMENTO PRINCIPAL de $z = x + iy$ se halla del sigte modo:

1º) Graficar el número complejo z.

2º) Hallar θ, segun el cuadrante en que se halle $z = x + iy$, teniendo en cuenta el sigte cuadro:

I-CUADRANTE	II-CUADRANTE	III-CUADRANTE	IV-CUADRANTE
			
$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$	$\theta = \pi - \mathrm{arctg}\left\|\frac{y}{-x}\right\| = \pi - \alpha$	$\theta = \pi + \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi + \alpha$	$\theta = 2\pi - \mathrm{arctg}\left\|\frac{x}{-y}\right\| = 2\pi - \alpha$

3.6 EJEMPLOS.

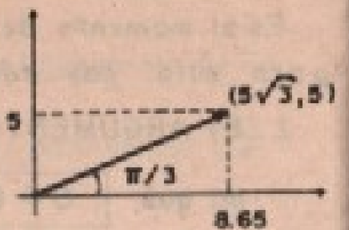
Hallar la forma polar de los sigtes números complejos:

1) $z=5\sqrt{3}+5i$, 2) $z=-2+2i$, 3) $z=-3-3\sqrt{3}i$, 4) $z=5-5i$

5) $z=5$, 6) $z=3i$, 7) $z=-3$, 8) $z=-i$

SOLUCION

1) $z=5\sqrt{3}+5i$: $r=|z|=|5(\sqrt{3}+i)|=5\sqrt{3+1}=10$; $\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{5\sqrt{3}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$

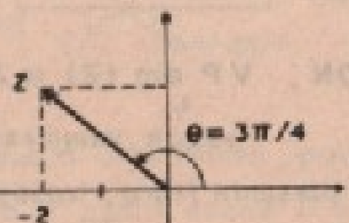


$z=10\left[\cos(\pi/3)+i\operatorname{sen}(\pi/3)\right]$

2) $z=-2+2i$: $r=|z|=|(-2,2)|=2|(-1,1)|=2\sqrt{1+1}=2\sqrt{2}$; $\theta=\pi-\operatorname{arctg}\left|\frac{2}{-2}\right|$

$=\pi-\operatorname{arctg}(1)$

$=\pi-\pi/4=3\pi/4$

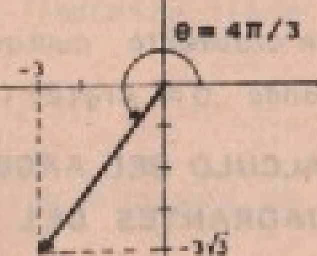


$z=2\sqrt{2}\left[\cos(3\pi/4)+i\operatorname{sen}(3\pi/4)\right]$

3) $z=-3-3\sqrt{3}i$: $r=|z|=\sqrt{9+9(3)}=6$; $\theta=\pi+\operatorname{arctg}\left|\frac{-3\sqrt{3}}{-3}\right|$

$=\pi+\operatorname{arctg}(\sqrt{3})$

$=\pi+\pi/3=4\pi/3$

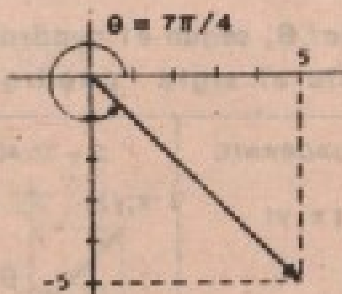


$z=6\left[\cos(4\pi/3)+i\operatorname{sen}(4\pi/3)\right]$

4) $z=5-5i$: $r=|z|=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$; $\theta=2\pi-\operatorname{arctg}\left|\frac{-5}{5}\right|$

$=2\pi-\operatorname{arctg}(1)$

$=2\pi-\pi/4=7\pi/4$

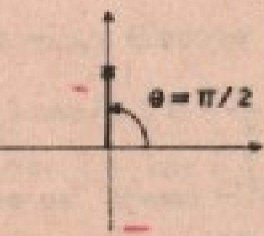


$z=5\sqrt{2}\left[\cos(7\pi/4)+i\operatorname{sen}(7\pi/4)\right]$

5) $z=5=(5,0)$: $r=|z|=5$; $\theta=0^\circ$

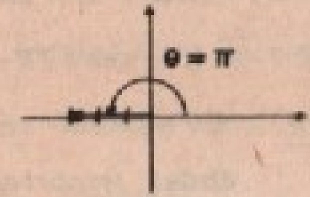
$z=5[\cos 0^\circ+i\operatorname{sen}0^\circ]$

6) $z=3i$: $r=|z|=3$; $\theta=\pi/2$



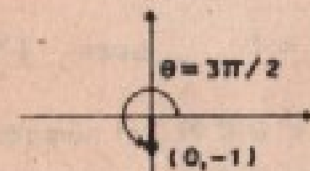
$z=3\left[\cos\pi/2+i\operatorname{sen}\pi/2\right]$

7) $z=-3=(-3,0)$: $r=|z|=3$; $\theta=\pi$



$z=3\left[\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi\right]$

8) $z=-i=(0,-1)$: $r=|z|=1$; $\theta=3\pi/2$



$z=\cos(3\pi/2)+i\operatorname{sen}(3\pi/2)$

3.7 CASOS ESPECIALES DE CONVERSION DE UN NUMERO COMPLEJO A SU FORMA POLAR.

si $z\neq 0$, entonces la forma polar de $z=x+yi$ es $z=r\underbrace{[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]}_{\operatorname{cis}\theta}$

$z=r.\operatorname{cis}\theta$

donde $\begin{cases} r\in\mathbb{R}^+ \\ \theta\in\mathbb{R}, \text{ medido en radianes.}\end{cases}$

$\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta=\operatorname{cis}\theta$

Como podemos observar, lo que identifica a un número complejo en su forma polar es un número real positivo r y el número complejo $(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ que se multiplican entre si.

EJEMPLOS:

1) $z=2\left[\cos\pi/3+i\operatorname{sen}\pi/3\right]$ es un número complejo en su forma polar.

2) $z=-3\left[\cos(\pi/4)+i\operatorname{sen}(\pi/4)\right]$ no está expresado en forma polar.

Pero, si hacemos: $z=3\left[-\cos(\pi/4)-i\operatorname{sen}(\pi/4)\right]$

$=3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right]$ ← está expresado en forma polar.

3) $z = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$ ← no es la forma polar

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ← es la forma polar

4) $z = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ "no está expresado en su forma polar. si hacemos:

$= \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)$ es la forma polar, pues $\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$= \cos(2\pi - \theta) + i\operatorname{sen}(2\pi - \theta)$ es tambien, la forma polar.

OBSERVACION: El número complejo $W = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, tiene dos propiedades importantes:

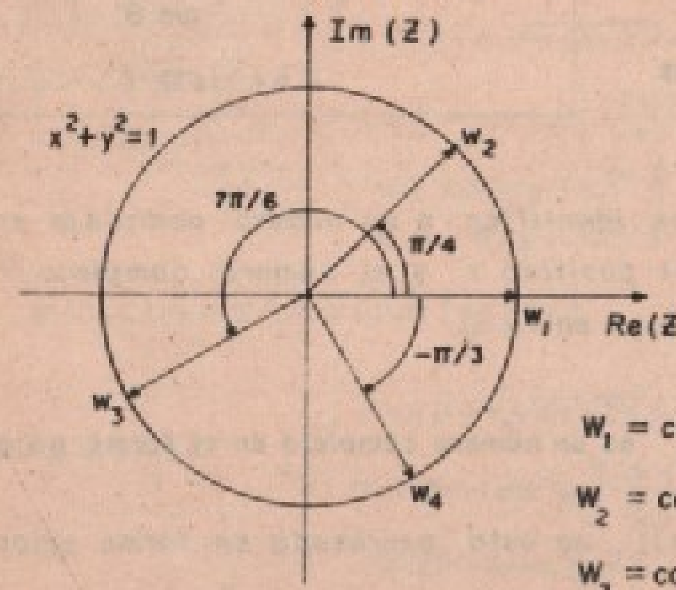
1º) $|W| = 1$, pues $|W| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$

2º) Para $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, el número complejo $W = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ se encuentra ubicado sobre la circunferencia unitaria de centro en el origen: $x^2 + y^2 = 1$.

Pues; si $W = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (x, y)$, entonces:

$|W| = |(x,y)| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Gráfico de $|W| = 1 \leftrightarrow \{W \in \mathbb{C} / |W| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{C} \ / \ x^2 + y^2 = 1\} = \mathscr{C}$



$W_1 = \cos 0^\circ + i\operatorname{sen} 0^\circ = (1, 0) \in \mathscr{C}$

$W_2 = \cos\pi/4 + i\operatorname{sen}\pi/4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathscr{C}$

$W_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in \mathscr{C}$

$W_4 = \cos(-\pi/3) + i\operatorname{sen}(-\pi/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathscr{C}$

OTROS EJEMPLOS

Identidades Trigonométricas que son usuales:

$1 - \cos A = 2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$	$\operatorname{sen} A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$	$-\operatorname{sen} A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right)$
$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$	$\cos A = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$	$\cos(A) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + A\right)$
$\operatorname{sen} A = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$	$\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$	$-\operatorname{sen}(A) = \operatorname{sen}(\pi + A)$
	$\cos(-A) = \cos A$	$-\cos(A) = \cos(\pi + A)$

Expresar en su forma polar los siguientes números complejos:

1. $z = 1 - \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$, si $0 < \theta < \pi/2$
2. $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - 1$, si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
3. $z = 1 + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
4. $z = i - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$, si $\pi < \theta < 3\pi/2$
5. $z = \dfrac{1}{W + 1}$, donde $W = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

SOLUCION:

El objetivo es formar números complejos de la forma $z = r[\cos(\#) + i\operatorname{sen}(\#)]$ donde "r" deberá ser un número real positivo expresado en forma trigonométrica y $(\#)$ es el argumento de z.

1. $z = 1 - \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$

$$= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i\,2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

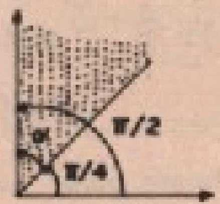
Aquí, tenemos: $|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ que debe ser positivo, teniendo como referencia $0 < \theta < \pi/2$.

Veamos: $0 < \theta < \pi/2$

por $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $0 < \frac{\theta}{2} < \pi/4$

$+\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} < \overbrace{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{\alpha} < \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) > 0$

y por tanto: $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) > 0$



$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Además, $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \arg(z)$

(2) $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - 1$

$= \cos\theta - 1 + i\operatorname{sen}\theta$

$= -(1-\cos\theta) + i\operatorname{sen}\theta$

$= -2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + i\,2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left[-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right]$

$= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$|z| = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} > 0$, pues: De $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ $\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

(3) $z = \underbrace{1 + \cos\theta} + i\operatorname{sen}\theta$

$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\,2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]$

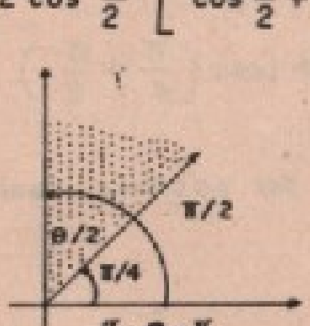
$|z| = 2\cos\frac{\theta}{2} > 0$, pues: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$

$\Rightarrow 2\cos\frac{\theta}{2} > 0$

$\arg(z) = \frac{\theta}{2}$



$\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

(4) $z = i - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$

$= -\cos\theta + i(1 - \operatorname{sen}\theta)$

$= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$

$= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) + i\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$

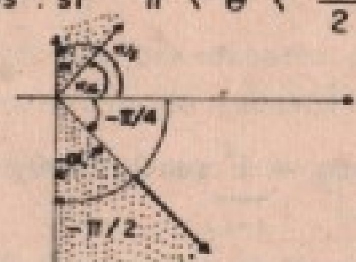
$= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$, pues $\begin{cases}\cos\alpha = \cos(-\alpha)\\ -\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(-\alpha)\end{cases}$

$z = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

En este caso: a) $|z| = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0$, si $\pi < \theta < 3\pi/2$

Veamos: si $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$



$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} < -\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \underbrace{-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}_{\alpha} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} > \underbrace{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}_{-\alpha} > -\frac{\pi}{2}$

Luego: $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) > 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) > 0$ //

b) $\arg(z) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} = \alpha$

(5) $z = \frac{1}{W+1}$, donde $W = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$, $0° \le \theta < 2\pi$

$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta + 1}$

$= \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]}$ ver problemo (3)

Donde $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} = \sec\frac{\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\sec\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]$, pues: $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} \quad i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

Si $z = \frac{1}{w+1}$, $w \neq -1$ y por tanto $\theta \neq \pi$. Como $0 \leq \theta < 2\pi \Rightarrow 0 \geq -\frac{\theta}{2} > -\pi$

$$Z = \frac{1}{2}\sec\left(\frac{-\theta}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad \begin{cases} |z| = \frac{1}{2}\sec\frac{-\theta}{2} > 0 \\ \arg(z) = -\frac{\theta}{2}, \quad -\pi < -\frac{\theta}{2} \leq 0^\circ, \ \theta \neq \pi \end{cases}$$

3.8 PROPIEDADES DE LA FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

De la forma polar : $Z = r[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$ nos interesa los propiedades del número complejo : $W = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$.

P_1) $|\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta| = 1$

P_2) $|W| = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$ representa una circunferencia de radio 1 y centro en el origen.

P_3) $(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)$

P_4) $\dfrac{1}{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$

P_5) $\dfrac{\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_2}{\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$.

P_6) $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

PRUEBA DE P_3)

$$(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \underbrace{i^2}_{(-1)}\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2$$

$$= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2) \,//$$

PRUEBA DE P_4)

$$\frac{1}{\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)} = \frac{\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$

PRUEBA DE P_5)

$$\frac{\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1}{\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\frac{1}{\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2}$$

$$= (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2), \text{ por propiedad } P_4$$

$$= (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\,\text{sen}(-\theta_2))$$

$$= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \cdots\cdots \text{ por } P_3$$

La Propiedad P_6) se probará en el punto 7.1

4. PRODUCTO Y COCIENTE DE NUMEROS COMPLEJOS CUANDO ESTAN EXPRESADOS EN SU FORMA POLAR (TRIGONOMETRICA).

4.1 TEOREMA

sean Z_1 y Z_2 dos números complejos cuyas formas polares son :

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$, donde $r_1 = |Z_1|$, $\theta_1 = \text{Arg}(Z_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, donde $r_2 = |Z_2|$, $\theta_2 = \text{Arg}(Z_2)$,

entonces :

I) $Z_1 Z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$, donde $\text{Arg}(Z_1 Z_2) = \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2)$

II) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$, donde $\text{Arg}\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg}(Z_2)$

4.2 Consecuencias con respecto a los argumentos del producto, del cociente y de la potencia de números complejos.

Con la notación : $\arg(Z) = \text{Arg}(Z) + 2K\pi$, $\forall K \in \mathbb{Z}$, se tiene.
└ argumento principal de Z

I. $\text{Arg}(Z_1 Z_2) = \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2)$

$\arg(Z_1 Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2) + 2K\pi$, $\forall K \in \mathbb{Z}$

II. $\text{Arg}\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg}(Z_2)$

$\arg\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) + 2K\pi$, $\forall K \in \mathbb{Z}$

III. $\text{Arg}(Z_1 Z_2 \cdots Z_n) = \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2) + \cdots\cdots + \text{Arg}(Z_n)$

$\arg(Z_1 Z_2 \cdots Z_n) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2) + \cdots\cdots + \arg(Z_n) + 2K\pi$

IV. $\text{Arg}(Z^n) = n\,\text{Arg}(Z)$

$\arg(Z^n) = n\arg(Z) + 2K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$.

4.3 EJEMPLOS

1) $5(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ).\,2(\cos 15^\circ + i\,\text{sen}\,15^\circ) = (5)(2)\left[\cos(45^\circ+15^\circ) + i\,\text{sen}(45^\circ+15^\circ)\right]$

$$= 10\left[\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ\right]$$

2) $\dfrac{8(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ)}{4(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)} = 2\left[\cos(90^\circ - 30^\circ) + i\,\text{sen}(90^\circ - 30^\circ)\right]$

$$= 2\left[\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ\right]$$

4.4 IGUALDAD DE DOS NUMEROS COMPLEJOS

Definición.- Dado dos números complejos $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$, definimos:

$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2K\pi$, para algún $K \in \mathbb{Z}$.

5. FORMA EXPONENCIAL DE UN NUMERO COMPLEJO

5.1 DEFINICION.- Para $z = x + iy$, se define e^z como: $\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)}$

Pues, $e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$

$$= e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$$

si $x = 0 \Rightarrow e^{iy} = e^0(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\,\text{sen}\,y}$$

5.2 DEFINICION.- se define la EXPONENCIAL COMPLEJA, al número complejo

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$
Fórmula de EULER

donde θ es un número real medido en radianes.

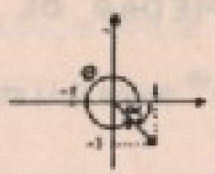
5.3 En términos de la EXPONENCIAL COMPLEJA, la forma polar de un número complejo $z = x + iy$ se puede expresar de la sigte forma:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \quad \begin{cases} r = |z| > 0 \\ \theta = \arg(z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5.5 Ejemplos:

1) si $z = 1 - i$ $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = 2\pi - \text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) \\ \quad = 2\pi - \text{arctg}(1) \\ \quad = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4 \end{cases}$



$z = 1 - i = (1,-1)$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\,e^{i7\pi/4}$

2) si $z = \dfrac{(3+3i)(\sqrt{3} - 3i)}{-1-\sqrt{3}\,i}$ donde $\begin{cases} z_1 = 3+3i = (3,3) \to |z_1| = 3\sqrt{2},\ \theta_1 = \text{arctg}(3/3) = \pi/4 \\ \quad = 3\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \\ z_2 = \sqrt{3} - 3i = (\sqrt{3},-3) \to |z_2| = 2\sqrt{3},\ \theta = 2\pi - \text{arctg}\left|\frac{-3}{\sqrt{3}}\right| = 2\pi - \frac{\pi}{3} = 5\pi/3 \\ \quad = 2\sqrt{3}\,e^{i5\pi/3} \\ z_3 = -1-\sqrt{3}i = (-1,-\sqrt{3}) \to |z_3| = \sqrt{1+3} = 2,\ \theta = \pi + \text{arctg}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = \pi + \frac{\pi}{3} = 4\pi/3 \\ \quad = 2e^{i4\pi/3} \end{cases}$

$$\Rightarrow z = \frac{\left[3\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\right]\left[2\sqrt{3}\,e^{i5\pi/3}\right]}{2e^{i4\pi/3}}$$

$$= 3\sqrt{6}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$= 3\sqrt{6}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

3) *Demostrar que* $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) = 2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\phi\right)}$

SOLUCION

Sean: $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = (1,\sqrt{3}) \to |z_1| = \sqrt{1+3} = 2,\ \theta_1 = \text{arctg}(\sqrt{3}) = \pi/3$

$\quad = 2e^{i\pi/3}$

$z_2 = 1 + i = (1,1) \to |z_2| = \sqrt{2},\ \theta_2 = \text{arctg}(1) = \pi/4$

$\quad = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$z_3 = \cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi$

$\quad = e^{i\phi}$

Luego: $z_1 z_2 z_3 = 2\sqrt{2}\,e^{i(\pi/3 + \pi/4 + \phi)} = 2\sqrt{2}\,e^{i(7\pi/12 + \phi)}$

4) Calcular $A = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^5(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^7}{2(1-i)^6(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)^8}$

Solución

Sean: $z_1 = 1 - i\sqrt{3} = (1,-\sqrt{3}) \to |z_1| = \sqrt{1+3} = 2,\ \theta = 2\pi - \text{arctg}|-\sqrt{3}| = 2\pi - \text{arctg}\sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\quad = 2e^{i5\pi/3}$

$z_2 = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = e^{i\theta}$

$z_3 = 1 - i = (1,-1) \to |z_3| = \sqrt{2},\ \theta_3 = 2\pi - \text{arctg}|-1| = 2\pi - \frac{\pi}{4} = 7\pi/4$

$\quad = \sqrt{2}\,e^{i(7\pi/4)}$

$z_4 = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta = e^{-i\theta}$

Luego: $A = \dfrac{\left[2e^{i5\pi/3}\right]^5\left[e^{i\theta}\right]^7}{2\left[\sqrt{2}\,e^{i7\pi/4}\right]^6\left[e^{-i\theta}\right]^8}$

$$= \frac{2^5\,e^{i25\pi/3}\,e^{i7\theta}}{2.2^3\,e^{i42\pi/4}\,e^{-i8\theta}}$$

$$= 2\,e^{i\left(\frac{13}{6}\pi + 15\theta\right)}$$

5.6 PROPIEDAD DE LA EXPONENCIAL COMPLEJA

PROPIEDADES DE $e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$	PROPIEDADES DE e^{z}
$P_1)\ \lvert e^{i\theta}\rvert=1$	$Q_1)\ e^{z}\neq 0\ ,\ \forall\, z\in\mathbb{C}$
$P_2)\ e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$	$Q_2)$ si $z=x+iy \Rightarrow \lvert e^{z}\rvert=e^{x},\ y=\text{Arg}(z)$
$P_3)\ \dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$	$Q_3)\ e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$
$P_4)\ \dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$	$Q_4)\ e^{-z}=\dfrac{1}{e^{z}}$
$P_5)\ \left[e^{i\theta}\right]^{n}=e^{i(n\theta)},\forall n\in\mathbb{Z}$	$Q_5)\ \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$
$P_6)\ e^{i\theta_1}=e^{i\theta_2}\Leftrightarrow \theta_1=\theta_2+2K\pi,\forall\in\mathbb{Z}$	$Q_6)\ e^{z}=1 \Leftrightarrow z=2K\pi i\ ,K\in\mathbb{Z}$.

5.7 COROLARIO

Sean $z_1=r_1\,e^{i\theta_1}$ y $z_2=r_2\,e^{i\theta_2}$ las formas exponenciales de los números complejos z_1 y z_2 se cumplen :

I. $\quad z_1 z_2=r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

II. $\quad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

PRUEBA DE Q_2)

$$\lvert e^{z}\rvert=\lvert e^{x+iy}\rvert=\lvert e^{x}\,e^{iy}\rvert=\lvert e^{x}\rvert\underbrace{\lvert e^{iy}\rvert}_{1}=\lvert e^{x}\rvert=e^{x}\ ;\qquad e^{x}>0\ ,\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

PRUEBA DE Q_3)

sean $z_1=x_1+iy_1\ ,\ z_2=x_2+iy_2$

Luego : $e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\,\text{sen}\,y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\,\text{sen}\,y_2)$

$$=e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1+i\,\text{sen}\,y_1)(\cos y_2+i\,\text{sen}\,y_2)$$

$$=e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\,\text{sen}(y_1+y_2)\right]=e^{z_1+z_2}$$

PRUEBA DE Q_6) $\quad e^{z}=1 \Leftrightarrow z=2K\pi i,\forall\, K\in\mathbb{Z}$

$(\Rightarrow)$ si $e^{z}=1 \Rightarrow z=2K\pi i$

Veamos :

(1) sea $z=x+iy$

Luego : $\quad \underbrace{e^{z}=1}$

$$e^{x}(\cos y+i\,\text{sen}\,y)=1$$

$$\Rightarrow\ e^{x}\cos y+i\,e^{x}\,\text{sen}\,y=1+0i$$

(2) $\Rightarrow \begin{cases} e^{x}\cos y=1 \\ e^{x}\,\text{sen}\,y=0 \ \rightarrow\ \text{sen}\,y=0\ ,\ \text{pues } e^{x}>0 \end{cases}$

$$\rightarrow\ y=0^{\circ}+2K\pi$$

$$\boxed{y=2K\pi}\ \cdots\cdots (2*)$$

(3) Por otro lado : De $e^{z}=1 \Rightarrow \lvert e^{z}\rvert=\lvert 1\rvert$

$$e^{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

(4) (3) en (2) : $\underbrace{e^{x}}\ \cos y=1$

$$\Rightarrow\ 1.\cos y=1 \Rightarrow \cos y=1 \Rightarrow y=0^{\circ}+2K\pi$$

$$\boxed{y=2K\pi}\quad (4*)$$

(5) Por (3) se tiene $x=0$ \
Por (2*) y (4*) se tiene: $y=2K\pi$ $\Big\}\Rightarrow\ z=x+iy$

$$=0+i2K\pi$$

$$=2K\pi i\ ,\forall\, K\in\mathbb{Z}\ //$$

6. LUGAR GEOMETRICO

INTRODUCCION. Del número complejo : $z=x+iy$, tenemos:

$$x=Re(z)$$
$$y=Im(z)$$
$$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta=Arg(z)$$

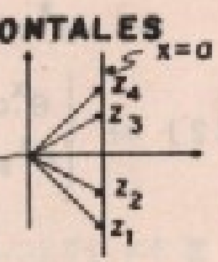
Teniendo en cuenta estas definiciones, ahora nos interesa estudiar las diferentes formas gráficas que resultan de algunas relaciones númericas entre módulos, argumentos, Re (Z), Im (Z), etc.

Así, obtendremos: rectas, ángulos, circunferencias, parábolas, elipses, hipérbolas, planos, semiplanos; etc.

Veamos:

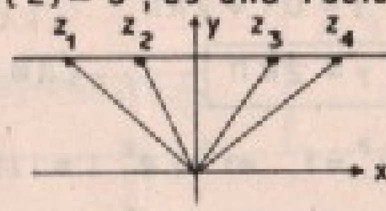
sea $Z = x + iy$

6.1 GRAFICO RELATIVO A RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES



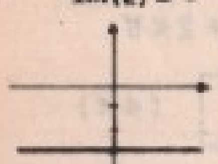
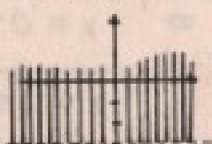
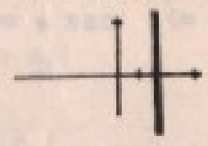
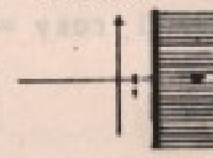
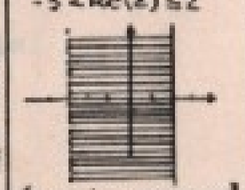
① El gráfico de $Re(Z) = a$, es una recta vertical.

② El gráfico de $Im(Z) = b$, es una recta horizontal.



③ El gráfico de $Re(Z) < a$, $Re(Z) > a$, $a < Re(Z) < b$, son semiplanos.

Ejemplos:

$Im(Z) = -3$	$Im(Z) \geq -3$	$Re(Z) = 2$	$Re(Z) \geq 2$	$-3 < Re(Z) \leq 2$
				
$\{z \in \mathbb{C} / Im(z) = -3\}$	$\{z \in \mathbb{C} / Im(z) \geq -3\}$	$\{z \in \mathbb{C} / Re(z) = 2\}$	$\{z \in \mathbb{C} / Re(z) \geq 2\}$	$\{z \in \mathbb{C} / -3 < Re(z) \leq 2\}$

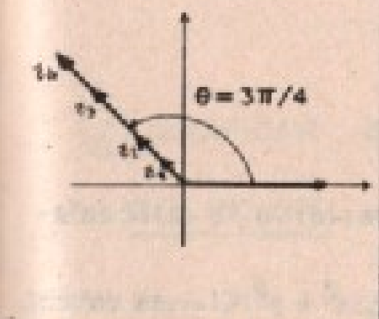
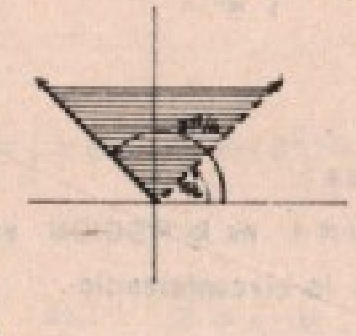
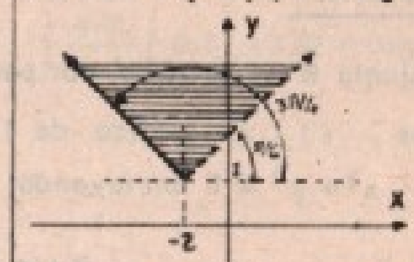
6.2 GRAFICO RELATIVO AL ARGUMENTO

① El gráfico de $Arg(Z) = \theta$ es el conjunto de números complejos que tiene el argumento de θ.

② El gráfico de $\theta_1 < Arg(Z) < \theta_2$ es un semiplano comprendido entre los argumentos θ_1 y θ_2 y cuyo vértice del ángulo es el origen de coordenadas.

③ El gráfico de $\theta_1 < Arg(Z - Z_0) < \theta_2$ es idéntico a lo anterior, con vertice en Z_0.

Ejemplos:

$Arg(Z) = 3\pi/4$	$\pi/6 < Arg(Z) \leq 3\pi/4$	$\pi/6 < Arg(Z + 2 - i) < 3\pi/4$ $\leftrightarrow \pi/6 < Arg(Z - (-2+i)) \leq 3\pi/4$ vértice $= (-2, 1) = -2 + i$
		
$\{z \in \mathbb{C} / Arg(z) = 3\pi/4\}$	$\{z \in \mathbb{C} / \pi/6 < Arg(z) \leq 3\pi/4\}$	$\{z \in \mathbb{C} / \pi/6 < Arg(z - (-2+i)) \leq 3\pi/4\}$

6.3 GRAFICO RELATIVO A LA CIRCUNFERENCIA

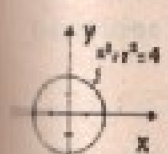
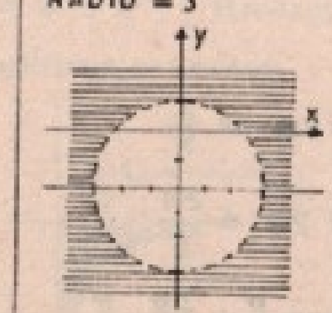
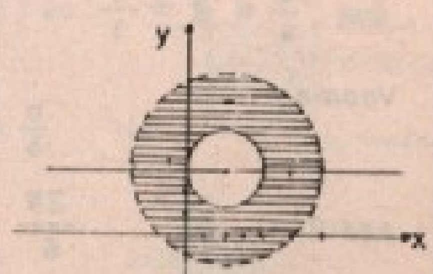
① El gráfico de $|z - z_0| = r$ es una circunferencia de centro en z_0 y radio r, si $r > 0$

② El gráfico de $|z - z_0| \leq r$, es un círculo incluido la circunferencia.

③ El gráfico de $|z - z_0| > r$, es el semiplano, fuera de la circunferencia, sin incluir la circunferencia.

④ El gráfico de $r_1 < |z - z_0| < r_2$ es una corona circular.

Ejemplos:

$\lvert z \rvert = 2$ $x^2 + y^2 = 4$	$\lvert z + 3 - 2i \rvert \leq 2$ $\leftrightarrow \lvert z - (-3 + 2i) \rvert \leq 2$ CENTRO $= (-3, 2)$ RADIO $= 2$	$\lvert z + 2i \rvert > 3$ $\leftrightarrow \lvert z - (0 - 2i) \rvert > 3$ CENTRO $= (0, -2)$ RADIO $= 3$	$2 \leq \lvert z - 2 - 3i \rvert < 4$ $\leftrightarrow 2 \leq \lvert z - (2 + 3i) \rvert < 4$ CENTRO $= (2, 3)$, RADIOS 2, 4
			 CORONA CIRCULAR

6.4 PROBLEMAS

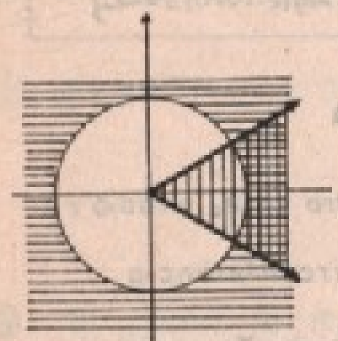
① Graficar : $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, z = \overline{\left(\frac{i}{w^2}\right)} ,\ |w| \geq 1 ,\ \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} w \leq \frac{\pi}{3} \right\}$

SOLUCION

El conjunto B se grafica por partes.

Veamos : (1) El gráfico de $|w| \geq 1$ es la REGION exterior a la circunferencia $x^2+y^2=1$ incluyendo a la circunferencia.

Pues $|w| \geq 1 \leftrightarrow x^2+y^2 \geq 1$ ⟨ $x^2+y^2=1$ → es circunf. o $x^2+y^2>1$ → región fuer[a] de la circunferencia.



donde : $w = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, $\theta = \operatorname{Arg}(w)$

(2) ¿Cómo es $z = \overline{\left(\frac{i}{w^2}\right)}$?

si $w = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \Rightarrow w^2 = \cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$

Además : $i = \cos\pi/2 + i\operatorname{sen}\pi/2$

Luego : $\frac{i}{w^2} = \frac{\cos\pi/2 + i\operatorname{sen}\pi/2}{\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

(3) $z = \overline{\left(\frac{i}{w^2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

$= \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ es la forma polar de z,

donde $2\theta - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(z)$

(4) Ahora, debemos hallar el intervalo para : $2\theta - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(z)$, sabiendo que $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

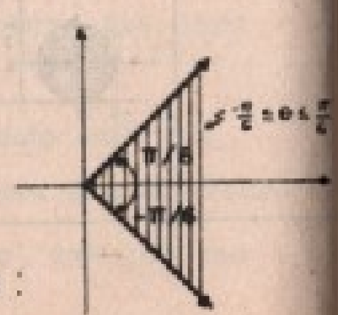
Veamos :

si $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

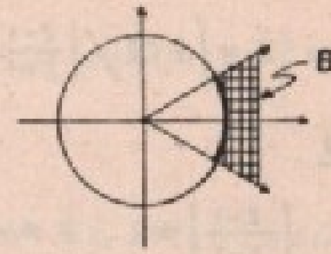
por 2 $\Rightarrow \frac{2\pi}{6} \leq 2\theta \leq \frac{2\pi}{3}$

sumar $-\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{6} \leq 2\theta - \frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\theta - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ su gráfico es :



Llevar este intervalo al grafico y obtenemos :



② GRAFICAR $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im}(\bar{z}^2) \leq 2 ,\ \left|\frac{z-2}{z+2}\right| \leq 1 , -\pi/2 \leq \operatorname{Arg}(z) < 0^\circ \right\}$

SOLUCION

(1) si $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\Rightarrow \bar{z}^2 = (x^2 - y^2) - i(2xy)$

donde $\operatorname{Im}(\bar{z}^2) = -2xy \leq 2$

De $-2xy \leq 2 \Rightarrow \boxed{xy \geq -1}$

(2) si $\left|\frac{z-2}{z+2}\right| \leq 1 \Rightarrow |z-2| \leq |z+2|$, si $z \neq -2$

$\Rightarrow |x+iy-2| \leq |x+iy+2|$

$\Rightarrow |(x-2)+iy| \leq |(x+2)+iy|$

$\Rightarrow |(x-2)+iy|^2 \leq |(x+2)+iy|^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq (x+2)^2 + y^2$

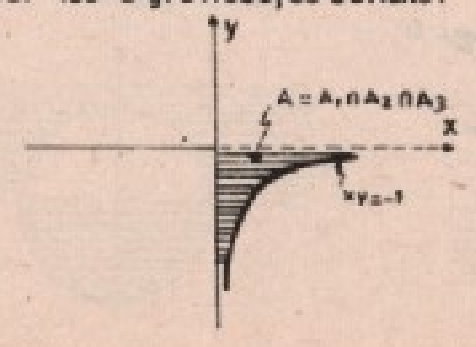
$\Rightarrow \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} \leq \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2}$

$\Rightarrow -4x \leq 4x$

$\Rightarrow 0 \leq 8x \Rightarrow \boxed{x \geq 0}$

(3) El gráfico de $-\pi/2 \leq \theta < 0^\circ$, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ es :

(4) Al intersectar los 3 gráficos, se obtiene :



(3) Graficar $E=\left\{ z\in\mathbb{C} \,/\, \left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leq 2, |-5-3z|\leq 9, -\pi/4 < \mathrm{Arg}(z+5/3)\leq \pi/4 \right\}$

SOLUCION

(1) Discutir : $\left|\frac{z-1}{z-1}\right|\leq 2$, $z\neq -1$

$\leftrightarrow |z-1|\leq 2\,|z+1|$

$\leftrightarrow |x+iy-1|\leq 2\,|x+iy+1|$

$\leftrightarrow |(x-1)+iy|\leq 2\,|(x+1)+iy|$

$\leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}\leq 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\leftrightarrow (x-1)^2+y^2\leq 4\left[(x+1)^2+y^2\right]$

$\leftrightarrow x^2-2x+1+y^2\leq 4x^2+8x+4+4y^2$

$\leftrightarrow 0\leq 3x^2+3y^2+10x+3$

$\leftrightarrow x^2+y^2+\frac{10}{3}x+1\geq 0$

Completar cuadrados con respecto a y :

$\leftrightarrow x^2+\frac{10}{3}x+\cdots\cdots\cdots+y^2\geq -1$

$\leftrightarrow x^2+\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}+y^2\geq -1+\frac{25}{9}$

$\leftrightarrow \left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2\geq\frac{16}{9}$

El gráfico es la región exterior de la circunferencia de centro $(-\frac{5}{3},0)$ y radio $\frac{4}{3}$.

(2) Discutir : $|-5-3z|\leq 9$

$\leftrightarrow |3z+5|\leq 9$, $|-5-3z|=|5+3z|$

$\leftrightarrow |3(z+5/3)|\leq 9$

$\leftrightarrow |3|\,|z+5/3|\leq 9$

$\leftrightarrow 3\,|z+5/3|\leq 9$

$\leftrightarrow |z+5/3|\leq 3$

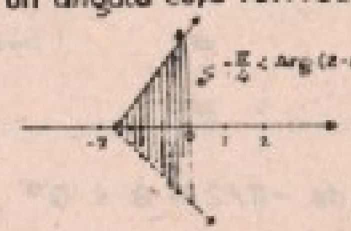
$\leftrightarrow |z-(-5/3+0i)|\leq 3$

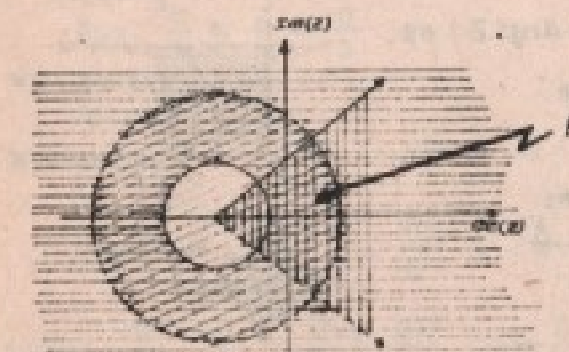
Donde $|z-(-5/3+0i)|\leq 3$ es una circunferencia de centro $(-5/3,0)$ y radio 3.

$|z-(-5/3)|<3$ es la región dentro de la circunferencia: $|z-(-5/3)|=3$

(3) Discutir : $-\frac{\pi}{4}<\mathrm{Arg}(z-(-5/3))\leq\frac{\pi}{4}$

es un ángulo cuyo vértice es $(-5/3,0)$





(4) Graficar $A=\left\{ z\in\mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\geq 0 , |z-1+i|\leq|z+1-i| \right\}$

SOLUCION

(1) Discutir : $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\geq 0$

como $z=x+iy \wedge \frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$

$z+\frac{1}{z}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$

(2) $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=y-\frac{y}{x^2+y^2}$

(3) Luego $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\geq 0$ es:

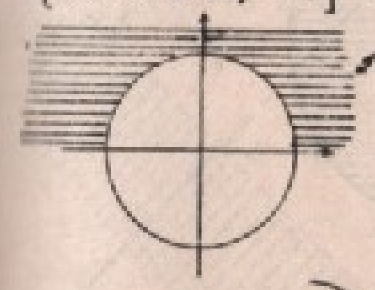
$$y-\frac{y}{x^2+y^2}\geq 0$$

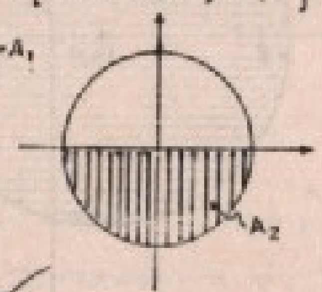
$\Rightarrow y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\geq 0$

$\Rightarrow y(x^2+y^2-1)\geq 0$

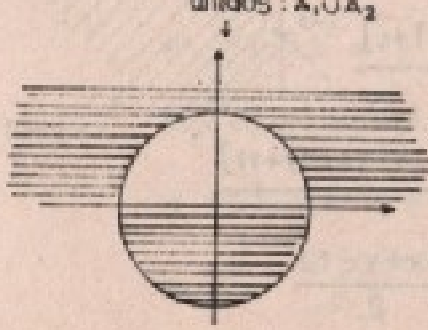
$\Leftrightarrow \left[y\geq 0 \wedge x^2+y^2-1\geq 0\right]\vee\left[y\leq 0 \wedge x^2+y^2-1\leq 0\right]$

$\left[y\geq 0 \wedge x^2+y^2\geq 1\right] \vee \left[y\leq 0 \wedge x^2+y^2\leq 1\right]$





unidos : $A_1\cup A_2$



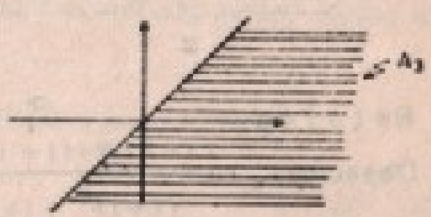
(4) Discutir: $|z-1+i|\leq|z+1-i|$

$\Rightarrow |x+iy-1+i|\leq|x+iy+1-i|$

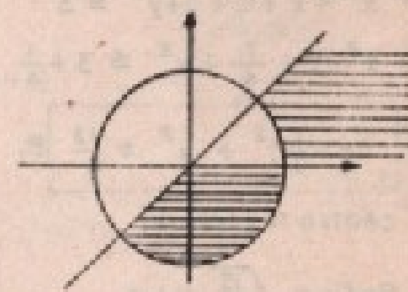
$\Rightarrow |(x-1)+i(y+1)|^2\leq|(x+1)+i(y-1)|^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2\leq(x+1)^2+(y-1)^2$

$\Rightarrow \quad y\leq x$



Luego, el conjunto A será : $(A_1\cup A_2)\cap A_3=A$



⑤ Graficar: $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;/\; Re\left(\frac{z-2+i}{z+1-i}\right) \leq 0 \;\vee\; Arg\left(\frac{z-2+i}{1-i}\right) = 0 \right\}$

SOLUCION:

Discutir: $Re\left(\frac{z-2+i}{z+1-i}\right) \leq 0$

Hagamos:

(1) $u = \frac{z-2+i}{z+1-i} = \frac{x+iy-2+i}{x+iy+1-i} = \frac{(x-2)+i(y+1)}{(x+1)+i(y-1)}$

$$= \frac{[(x-2)+i(y+1)][(x+1)-i(y-1)]}{[(x+1)+i(y-1)][(x+1)-i(y-1)]} = \frac{(x-2)(x+1)+(y+1)(y-1)+i[-(x-2)(y-1)+(y+1)(x+1)]}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$u = \underbrace{\frac{(x-2)(x+1)+(y+1)(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}}_{a} + \underbrace{\frac{i[-(x-2)(y-1)+(y+1)(x+1)]}{(x+1)^2+(y-1)^2}}_{b}$$

(2) $Re(u) = a$

(3) Deseamos: $\overbrace{\frac{(x-2)(x+1)+(y+1)(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}}^{a} \leq 0 \;,\; (x,y) \neq (-1,1)$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 + y^2 - 1 \leq 0$

$\Rightarrow x^2 - x + \cdots\cdots + y^2 \leq 3$

$\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq 3 + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{13}{4}} \; B_1$

centro $= (1/2, 0)$

Radio $= \sqrt{\frac{13}{4}} = 1.8$

(4) Discutir: $Arg\left(\frac{z-2+i}{1-i}\right) = 0$

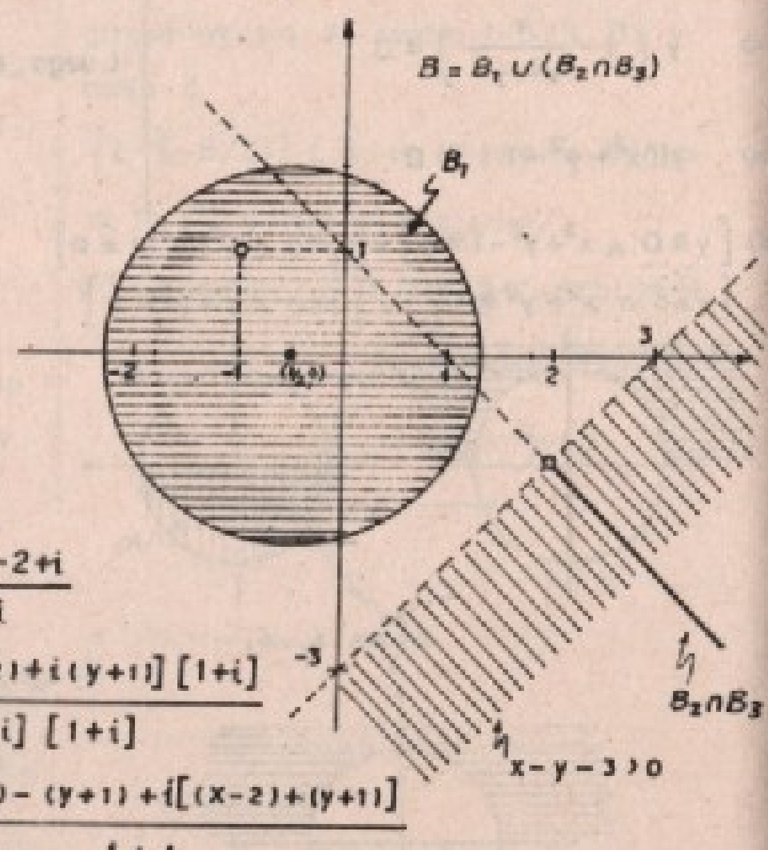
Hagamos $v = \frac{z-2+i}{1-i}$

$\Rightarrow$ Como $z = x+iy \Rightarrow v = \frac{x+iy-2+i}{1-i}$

$$= \frac{[(x-2)+i(y+1)][1+i]}{[1-i][1+i]}$$

$$= \frac{(x-2)-(y+1)+i[(x-2)+(y+1)]}{1+1}$$

$$= \frac{(x-y-3)}{2} + \frac{i(x+y-1)}{2}$$



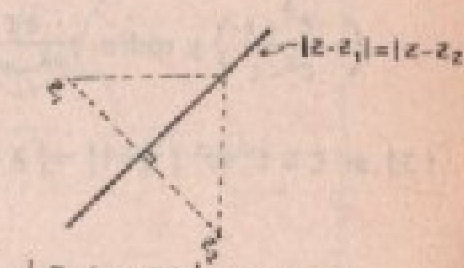
(5) $Arg(V) = arctg\left(\frac{x+y-1}{x-y-3}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{x+y-1}{x-y-3} = 0 \iff \overbrace{x-y-3 > 0}^{B_2} \;\wedge\; \overbrace{x+y-1=0}^{B_3}$

es un semiplano — es una recta

Nota: no se toma x-y-3<0 porque el arco hacemos variar entre 0° y 90°.

6.5 MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO



La Ecuación de la mediatriz del segmento de extremos z_1 y z_2, es: $|z-z_1| = |z-z_2|$ o $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$

Ejemplo: $|z-3+2i| = |z+1-3i| \iff |z-(3,-2)| = |z-(-1,3)|$ es una recta que es perpendicular y pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(3,-2)$ y $(-1,3)$.

Veamos: De $|z-3+2i| = |z+1-3i|$, obtenemos:

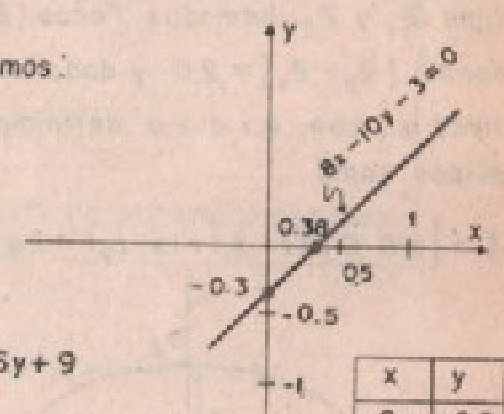
$\iff |x+iy-3-2i| = |x+iy+1-3i|$

$\iff |(x-3)+i(y+2)|^2 = |(x+1)+i(y-3)|^2$

$\iff (x-3)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2$

$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$

$\iff 8x - 10y - 3 = 0$



x	y
0	-0.3
0.38	0

6.6 $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = C$ es una circunferencia, si $C \in \mathbb{R}^+$, $C \neq 1$

Prueba:

(1) $\frac{z-1}{z+1} = C \iff z-1 = C\, z+1$

$\iff |x+iy-1| = C\,|x+iy+1|$

$\iff |(x-1)+iy|^2 = \left(C\,|(x+1)+iy|\right)^2$

$\iff (x-1)^2 + y^2 = C^2\left[(x+1)^2 + y^2\right]$

$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = C^2\left[x^2 + 2x + 1 + y^2\right]$

$\iff (C^2-1)x^2 + 2(C^2+1)x + \cdots\cdots + (C^2-1)y^2 = 1 - C^2$

$\iff x^2 + \frac{2(C^2+1)}{C^2-1}x + \cdots\cdots + y^2 = -1$

$$\leftrightarrow \quad x^2 + \frac{2(C^2+1)}{C^2-1}x + \left[\frac{C^2+1}{C^2-1}\right]^2 + y^2 = -1 + \left[\frac{C^2+1}{C^2-1}\right]$$

(2) $\leftrightarrow \quad \left(x + \frac{c^2+1}{c^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4c^2}{(c^2-1)^2}$, es una circunferencia de centro

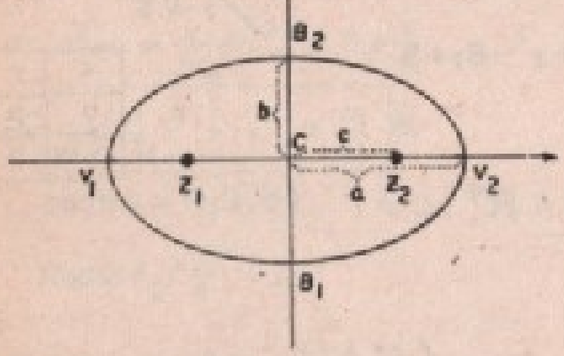
$\left(-\frac{c^2+1}{c^2-1}\right)$ y radio $\frac{2c}{c^2-1}$, con $c \neq 1$

(3) si $C = 1 \Rightarrow |z-1| = |z+1| \leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$

$\leftrightarrow x = 0$, es el eje Y.

6.7 LA ELIPSE: Dados dos puntos fijos z_1 y z_2 llamados Focos ($z_1 \neq z_2$), donde $|z_2 - z_1| = 2C$ y dado una constante a, con $a > c > 0$ definimos la elipse como:

$$\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$$



Donde:

CENTRO: $|z_1 + z_2| / 2 = C$

EJE MAYOR: $|V_2 - V_1| = 2a$

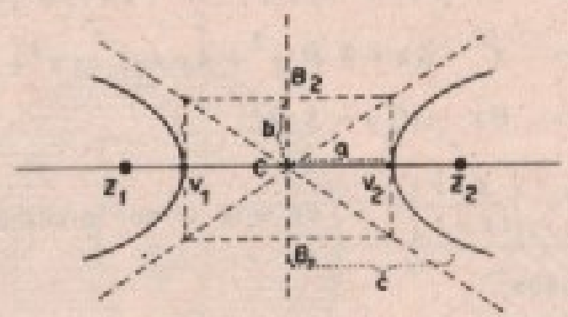
EJE MENOR: $|B_2 - B_1| = 2b$

donde: $a^2 = b^2 + c^2$

VERTICES: V_1, V_2

6.8 LA HIPERBOLA: Dados dos puntos fijos z_1 y z_2 diferentes, llamados Focos, donde $|z_2 - z_1| = 2C$ y dado una constante a, con $0 < a < c$, se define una hipérbola como:

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \left||z - z_1| - |z - z_2|\right| = 2a\}$$



CENTRO: $|z_1 + z_2| / 2 = C$

EJE TRANSVERSO: $|V_2 - V_1| = 2a$

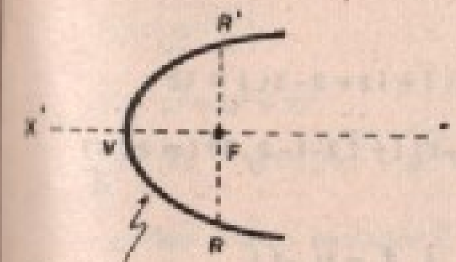
EJE CONJUGADO: $|B_2 - B_1| = 2b$

donde: $c^2 = a^2 + b^2$

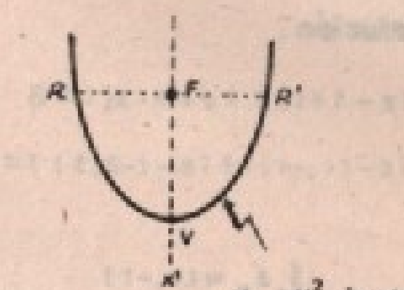
VERTICES: V_1, V_2

NOTA: $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ es sólo una rama de la hipérbola.

6.9 LA PARABOLA:



$x = py^2 + qy + r$



$y = ax^2 + bx + c$

Cualquiera de éstas ecuaciones representa una parábola, donde:

F : Foco

V : Vértice

X' : eje de la parábola

RR' : Lado recto.

NOTA: Todo gráfico se deduce desarrollando el Módulo de un número complejo.

Ejemplos:

(6) $A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| + |z+2| = 6\}$

Solución:

$|z-(2,0)| + |z-(-2,0)| = 2\underbrace{(3)}_{a}$ es una elipse

Donde:

1) Los focos son: $z_1 = (-2,0)$, $z_2 = (2,0)$

2) El centro: $|z_2 + z_1|/2 = \frac{1}{2}(0,0) = (0,0) = C$

3) El semieje mayor: $a = 3$

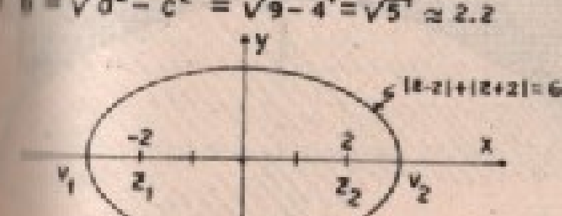
4) Distancia entre focos: $\underbrace{|z_2 - z_1|}_{4} = 2C$

$4 = 2C \Rightarrow \boxed{C=2}$

Vemos que: $a > C$

$3 > 2$

5) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \simeq 2.2$



(7). $B = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-i| + |z+i| \leq 4\}$

Solución:

$|z-(0,1)| + |z-(0,-1)| \leq 2\underbrace{(2)}_{a}$

Donde:

1) Los focos son $z_1 = (0,-1)$, $z_2 = (0,1)$

2) El centro: $|z_1 + z_2|/2 = \frac{1}{2}(0,0) = (0,0) = C$

3) Semieje Mayor: $a = 2$

4) Distancia entre focos: $\underbrace{|z_2 - z_1|}_{2} = 2C$

$2 = 2C$

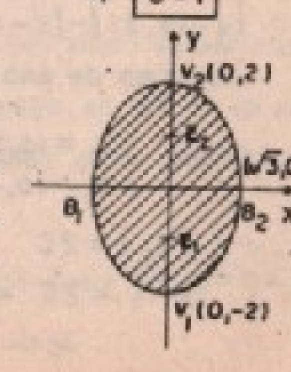
$\Rightarrow \boxed{C=1}$

Como vemos: $a > C$

$2 > 1$

5) $b = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \simeq 1.7$

6) Se sombrea la parte interior de la elipse, incluyendo a la elipse.



⑧ Graficar: $A=\{ z\in\mathbb{C} \,/\, 8 \le |z-1+i| + |z+2-3i| \le 12 \}$

Solución:

(I) $|z-1+i| + |z+2-3i| = 8$

$\Leftrightarrow |z-(1,-1)| + |z-(-2,3)| = 2(\underbrace{4}_{a})$

1) Focos $\begin{cases} z_2 = (1,-1) \\ z_1 = (-2,3) \end{cases}$

2) Centro: $|z_1+z_2|/2 = \frac{1}{2}(-1,2) = (-1/2,1)$

3) $2C = |z_2 - z_1|$

$= |(3,-4)|$

$= \sqrt{9+16}$

$2C = 5 \Rightarrow \boxed{C=2.5}$

4) $a=4$ es el semieje mayor

5) $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\pm\sqrt{a^2-c^2}$

$=\pm\sqrt{16-6.25}$

$=\pm 3.1$

(II) $|z-1+i| + |z+2-3i| = 12$

$\Leftrightarrow |z-(1,-1)| + |z-(-2,3)| = 2(\underbrace{6}_{a})$

1) Focos $\begin{cases} z_2 = (1,-1) \\ z_1 = (-2,3) \end{cases}$

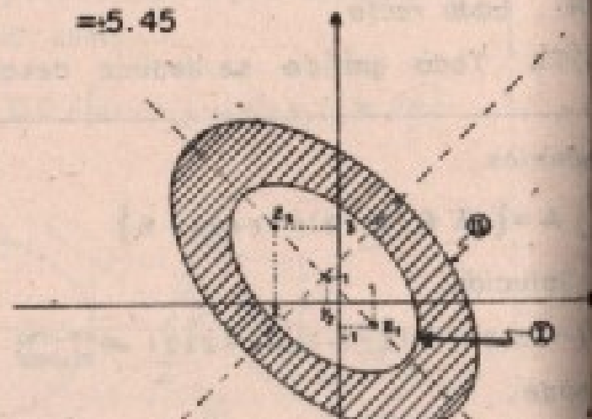
2) Centro: $(-1/2, 1)$

3) $C = 2.5$

4) $a=6$

5) $b=\pm\sqrt{36-6.25}$

$=\pm 5.45$



⑨ Graficar: $B=\{ z\in\mathbb{C} \,/\, |z-3i| - |z+3i| \le 2 \ \wedge \ |z| \le 4 - \mathrm{Im}(z) \}$

Solución: $\begin{cases} 1^{ro} \text{ se grafica la ecuación: } |z-3i|-|z+3i|=2 \\ 2^{do} \text{ sombrear: } |z-3i|-|z+3i|<2 \end{cases}$

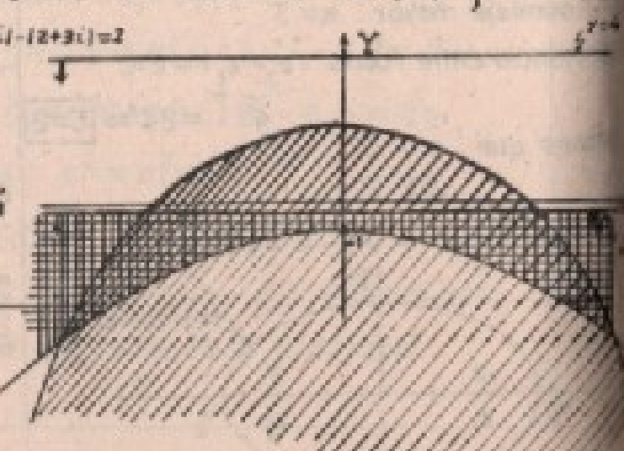
I) Discutir: $|z-3i| - |z+3i| = 2$

$\Rightarrow |z-(0,3)| - |z-(0,-3)| = 2(1)$ que será una rama de una hipérbola.

Focos $\begin{cases} z_1 = (0,3) \\ z_2 = (0,-3) \end{cases}$

$|z_1 - z_2| = 2C$

$6 = 2C \Rightarrow \boxed{C=3}$



3) Centro: $|z_1+z_2|/2 = (0,0)$

4) $\boxed{a=1}$

5) $c^2 = a^2+b^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2} \approx 2.8$

¿Cuál rama escoger?

Desarrollemos: $|z-3i| = 2 + |z+3i|$

$\Leftrightarrow |z-3i|^2 = (2+|z+3i|)^2$

$\Leftrightarrow |x+(y-3)i|^2 = 4 + 4|x+(y+3)i| + |x+(y+3)i|^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 4 + 4|x+(y+3)i| + x^2 + (y+3)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9} = 4 + 4|x+(y+3)i| + \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+6y+\cancel{9}$

$\Leftrightarrow -12y - 4 = 4|x+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow -(3y+1) = |x+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow |x+(y+3)i|^2 = (-(3y+1))^2$, si $-(3y+1) \ge 0$

$x^2+(y+3)^2 = (3y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6y+9 = 9y^2+6y+1$

$x^2-8y^2+8=0$

$y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$

$\boxed{y \le -1/3}$ indica que se debe graficar la rama de curva que está debajo de la recta $y=-1/3$

$y^2 - \frac{x^2}{8} = 1 \ \wedge \ y \le -1/3 \quad \cdots (\alpha)$

6) Ahora nos falta graficar la REGION $|z-3i| - |z+3i| < 2$ ······ (*)

Una manera práctica es reemplazar $z=(0,0)$ en (*), obteniendo:

$|-3i| - |3i| < 2 \Rightarrow \boxed{0<2}$ que es verdadero, luego se sombrea la región donde se encuentra el punto escogido $(0,0)$.

OTRA MANERA DE GRAFICAR

En (α) discutir las inecuaciones: $y \le -1/2 \ \wedge \ y^2 - \frac{x^2}{8} < 1$

con $(0,0)$ se obtiene: $\boxed{0<1}$

Luego, sombrear la región donde está el $(0,0)$

(II) $|z| \le 4 - \mathrm{Im}(z)$

$\Rightarrow |z| \le 4-y \Leftrightarrow [4-y \ge 0 \wedge |z|^2 \le (4-y)^2] \Leftrightarrow [y\le 4 \wedge x^2+y^2 \le 16-8y+y^2] \Leftrightarrow [y \le 4 \wedge x^2 \le -8(y-2)]$

Donde: $x^2=-8(y-2)$ es una parábola con vértice $(0,2)$, se abre hacia abajo.

(10) Graficar : $A=\left\{ z\in\mathbb{C} \ / \ |z|-2+\operatorname{Re}(z)\geq 0 \ \wedge \ -\pi/4 \leq \operatorname{Arg}(z)\leq \pi/4 \right\}$

(I) Discutir : $|z|-2+\operatorname{Re}(z)\geq 0$

$\leftrightarrow \quad |z|-2+x \geq 0$

$\leftrightarrow \quad |z| \geq 2-x$

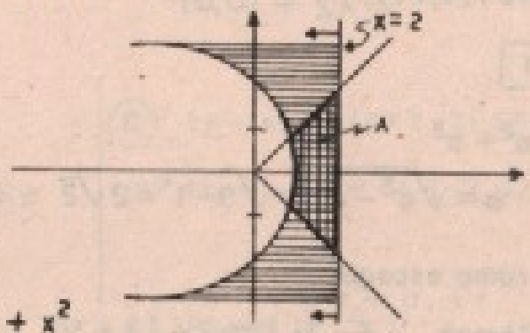
$\leftrightarrow \quad 2-x\geq 0 \quad \wedge \quad |z|^2 \geq (2-x)^2$

$\leftrightarrow \quad x\leq 2 \quad \wedge \quad x^2+y^2 \geq 4-4x+x^2$

$\leftrightarrow \quad x\leq 2 \quad \wedge \quad y^2\geq -4(x-1)$ — $y^2=-4(x-1)$: VERTICE (1,0); $4p=-4 \Rightarrow p=-1$

REGION: $y^2 > -4(x-1)$

con (0,0) : $\boxed{0>4}$ FALSO



(II) Discutir $-\pi/4 \leq \operatorname{Arg}(z)\leq \pi/4$

son todos los $z\in\mathbb{C}$, cuyo argumento está entre $-\pi/4$ y $\pi/4$.

(11) $A=\left\{ z\in\mathbb{C} \ / \ |z|=2+\operatorname{Re}(z) \ \wedge \ \operatorname{Re}(z)\leq 2 \right\}$

(I) $|z|=2+\operatorname{Re}(z)$

$\leftrightarrow \quad |z|=2+x$

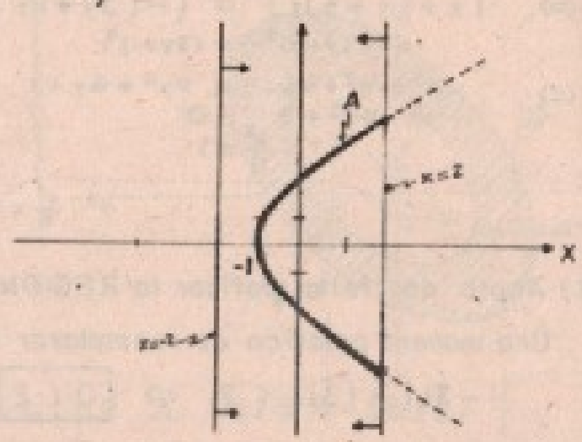
$\leftrightarrow \quad 2+x\geq 0 \quad \wedge \quad |z|^2=(2+x)^2$

$x^2+y^2=4+4x+x^2$

$\leftrightarrow \quad x\geq -2 \quad \wedge \quad y^2=4(x+1)$

(II) $\operatorname{Re}(z)\leq 2$

$\leftrightarrow \quad x \leq 2$



(12) $B=\left\{ z\in\mathbb{C} \ / \ |z|-\operatorname{Im}(z)-2=0 \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(z) < 3 \right\}$

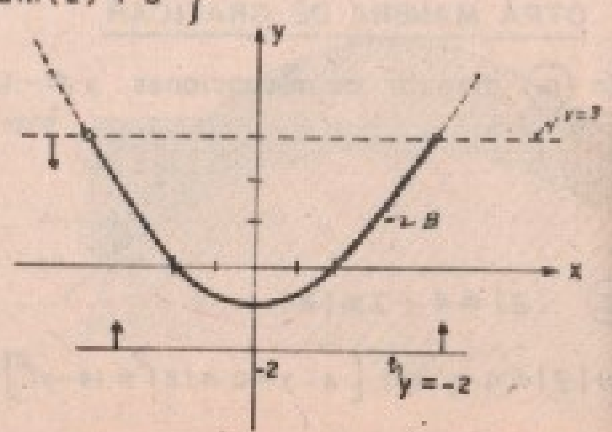
(I) $|z| = 2+\operatorname{Im}(z)$

$\leftrightarrow \quad |z| = 2+y$

$\leftrightarrow \quad 2+y\geq 0 \ \wedge \ |z|^2=(2+y)^2$

$\leftrightarrow \quad y\geq -2 \ \wedge \ x^2+y^2=4+4x+x^2$

$x^2=4(y+1)$



(II) $\operatorname{Im}(z) < 3$

$\leftrightarrow \quad y < 3$

(13) $A=\left\{ z\in\mathbb{C} \ / \ |z+1-i|=2-\operatorname{Re}(z+1-i) \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(z+2-i)\geq 0 \right\}$

(I) $|x+iy+1-i|=2-\operatorname{Re}(x+yi+1-i)$

$\leftrightarrow \quad |(x+1)+(y-1)i| = 2-\operatorname{Re}\big((x+1)+(y-1)i\big)$

$= 2-(x+1)$

$= 1-x$

$\leftrightarrow \quad 1-x\geq 0 \quad \wedge \quad |(x+1)+(y-1)i|^2=(1-x)^2$

$\leftrightarrow \quad x\leq 1 \qquad \wedge \quad (x+1)^2+(y-1)^2=(1-x)^2$

$\wedge \quad x^2+2x+1+y^2-2y+1=1-2x+x^2$

$y^2-2y+4x+1=0$

$y^2-2y+1=-4x$

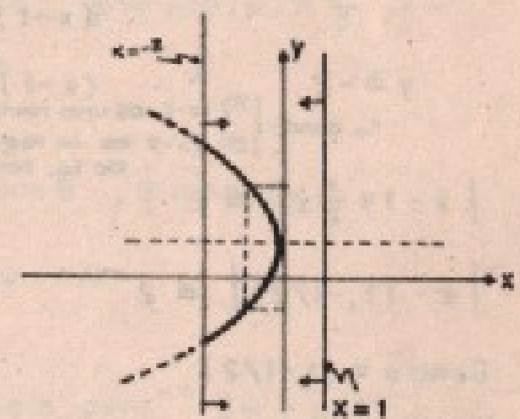
$\leftrightarrow \quad x\leq 1 \qquad \wedge \qquad (y-1)^2=-4x$

(II) $\operatorname{Re}(z+2-i)\geq 0$

$\leftrightarrow \quad \operatorname{Re}\big((x+2)+(y-1)i\big)\geq 0$

$\leftrightarrow \quad x+2\geq 0$

$\leftrightarrow \quad \boxed{x\geq -2}$



(14) $A=\left\{ z\in\mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im}\left[(z-1+i)^2\right]\geq 2 \quad \wedge \quad |z-1+i|\leq 3 \right\}$

(I) $\operatorname{Im}\left[(z-1+i)^2\right] \geq 2$

$\leftrightarrow \quad \operatorname{Im}\left[\big((x-1)+(y+1)i\big)^2\right]\geq 2$

$\leftrightarrow \quad \operatorname{Im}\left[(x-1)^2-(y+1)^2+2(x-1)(y+1)i\right]\geq 2$

$\leftrightarrow \quad 2(x-1)(y+1) \geq 2$

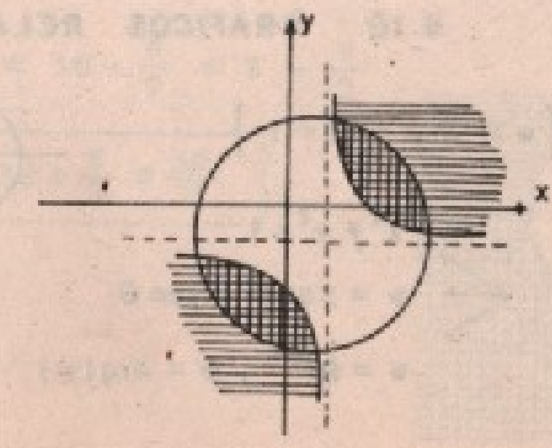
$\leftrightarrow \quad (x-1)(y+1) \geq 1$

(II) $|z-1+i| \leq 3$

$\leftrightarrow \quad |z-(1,-1)|\leq 3$

Centro : (1,-1)

Radio : 3



(15) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z-1-i| \leq 2 - \mathrm{Im}(\bar{z}) \;\wedge\; \left|z-1+\frac{1}{2}i\right| \leq 2 \right\}$

(I) $|z-1-i| \leq 2 - \mathrm{Im}(\bar{z})$

$\leftrightarrow \quad |(x-1)+(y-1)i| \leq 2 - \mathrm{Im}(x-iy)$

$\leftrightarrow \quad |(x-1)+(y-1)i| \leq 2+y$

$\leftrightarrow \quad 2+y \geq 0 \quad \wedge \quad |(x-1)+(y-1)i|^2 \leq (2+y)^2$

$\leftrightarrow \quad y \geq -2 \quad \wedge \quad (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4+4y+y^2$

$(x-1)^2+y^2-2y+1 \leq 4+4y+y^2$

$(x-1)^2 \leq 6y+3$

$\leftrightarrow \quad y \geq -2 \quad \wedge \quad (x-1)^2 \leq 6(y+1/2)$, donde $\begin{cases} 1^{o})\ (x-1)^2 = 6(y+\frac{1}{2}) \text{ es una parabola de vértice } (1,-1/2) \\ 2^{o})\ (x-1)^2 \leq 6(y+\frac{1}{2}) \text{ es la región debajo de la parábola} \end{cases}$

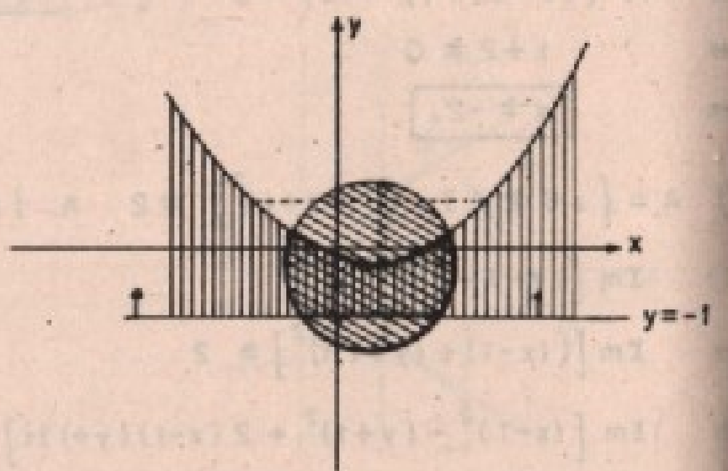
↳ donde $\begin{cases} 1^{o})\ y=-2 \text{ es una recta horizontal.} \\ 2^{o})\ y \geq -2 \text{ es la región encima de la recta } y=-2. \end{cases}$

(II) $\left|z-1+\frac{1}{2}i\right| \leq 2$

$\leftrightarrow \quad |z-(1,-1/2)| \leq 2$

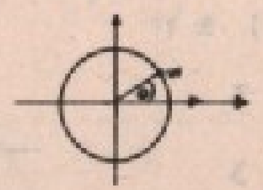
Centro = $(1,-1/2)$

Radio = 2



6.10 GRAFICOS RELATIVOS A $|W| = 1$

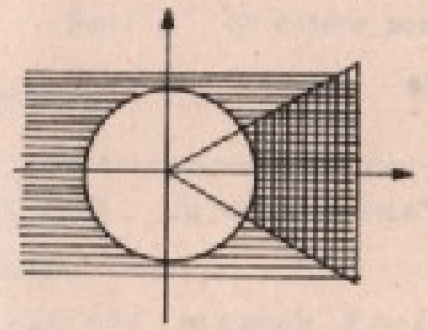
(1) $A = \left\{ w \in \mathbb{Z} \,/\, |w| = 1 \right\}$

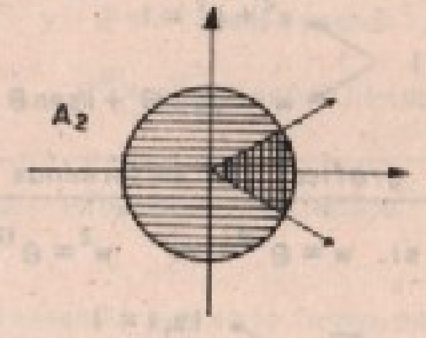


De $|w|=1$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ w = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \\ w = e^{i\theta}, \ \theta = \mathrm{Arg}(w) \end{cases}$

(2) $A_1 = \left\{ w \in \mathbb{Z} \,/\, |w| \geq 1,\ -\pi/4 \leq \mathrm{Arg}(w) \leq \pi/4 \right\}$

(3) $A_2 = \left\{ w \in \mathbb{Z} \,/\, |w| \leq 1,\ -\pi/4 \leq \mathrm{Arg}(w) \leq \pi/4 \right\}$





(4) $A_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, z = \frac{w^3}{-i},\ |w| \geq 1,\ \frac{\pi}{6} \leq \mathrm{Arg}(w) \leq \frac{\pi}{3} \right\}$

1) si $|w| \geq 1$ $\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ w = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta, \ \theta = \mathrm{Arg}(w) \end{cases}$

2) De $z = \frac{w^3}{-i} = \frac{e^{i3\theta}}{e^{-i\pi/2}} = e^{i(3\theta+\pi/2)}$

Ahora, debemos hallar el intervalo para " $3\theta+\pi/2$ "

Veamos

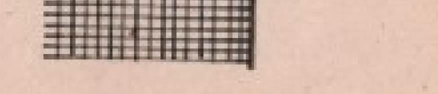
3) Como: $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Por 3: $3\cdot\frac{\pi}{6} \leq 3\theta \leq 3\cdot\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} \leq 3\theta \leq \pi$

Sumar $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \leq 3\theta+\frac{\pi}{2} \leq \pi+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\pi \leq 3\theta+\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2}}$



(5) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, z = \overline{\left(\frac{w^2}{z_1}\right)} \,,\; z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \,,\; |w| = 1 \,,\; \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} w < \frac{\pi}{2} \right\}$

1) De $|w| = 1$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = e^{i\theta} \end{cases}$

<u>Deseamos graficar z en términos de w.</u>

2) Tenemos: si $w = e^{i\theta} \Rightarrow w^2 = e^{i2\theta}$

3) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ \operatorname{Arg}(z_1) = -\pi/4 \text{ o } \frac{7\pi}{4} \end{cases}$

$= e^{-i\pi/4}$

4) $\frac{w^2}{z_1} = \frac{e^{i2\theta}}{e^{-i\pi/4}} = e^{i(2\theta + \pi/4)}$

5) $z = \overline{\left(\frac{w^2}{z_1}\right)} = e^{-i(2\theta + \pi/4)} = e^{i(-2\theta - \frac{\pi}{4})} = e^{i\alpha}$

donde $\alpha = -2\theta - \frac{\pi}{4}$

6) Ahora debemos hallar el intervalo para $\alpha = -2\theta - \frac{\pi}{4}$.

Sabiendo que θ se encuentra en el intervalo $\theta \in \,]\pi/4, \pi/2[$.

Veamos:

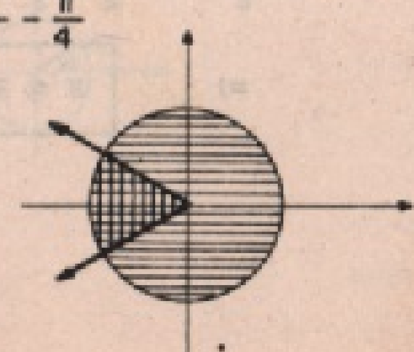
Como: $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Por -2 $\Rightarrow$ $-2\cdot\frac{\pi}{4} > -2\theta > -2\cdot\frac{\pi}{2}$

Sumar $-\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{-\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} > \frac{-\pi}{4} - 2\theta > -2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{-\frac{3\pi}{4} > \alpha > -\frac{5\pi}{4}}$$

7) El gráfico de z, será:



7. FORMULA de DE-MOIVRE

(Potencia entera de numeros complejos)

7.1 TEOREMA (Formula de DE-MOIVRE)

Sea "n" un entero positivo y $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $r = |z|$

entonces: $z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right]$

<u>PRUEBA</u>: La demostración es por Inducción matematica.

Veamos:

1) Para $n = 1$, se cumple: $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ que es la forma polar de un número complejo $z = x + iy$.

2) Para $n = h$, suponer que se cumple: $z^h = r^h\left[\cos(h\theta) + i\,\text{sen}(h\theta)\right]$

3) Para $n = h+1$, debe cumplirse que $z^{h+1} = r^{h+1}\left[\cos((h+1)\theta) + i\,\text{sen}((h+1)\theta)\right]$

Veamos:

En el paso 2) se tenia: $z^h = r^h\left[\cos(h\theta) + i\,\text{sen}(h\theta)\right]$

Multiplicar por z $\quad : z^h z = r^h . r\left[\cos(h\theta) + i\,\text{sen}(h\theta)\right]\left[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right]$

$= r^{h+1}\left[\cos(h\theta + \theta) + i\,\text{sen}(h\theta + \theta)\right]$

$= r^{h+1}\left[\cos((h+1)\theta) + i\,\text{sen}((h+1)\theta)\right]$

Por tanto, la proposición: $z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right]$ se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

7.2 <u>NOTA</u>

1) La fórmula de De-Moivre también es valida para cualquier entero negativo n.

2) La fórmula de De-Moivre nos permite hallar la potencia entera de un número complejo cualquiera, siempre que esté expresada en su forma polar.

3) De $z = r\left[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right]$

$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right]$

$= r^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$= r^n e^{i(n\theta)}$

7.3 COROLARIO.– Para todo entero "n", se cumple:

$$\boxed{(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta)}$$

Prueba:

1) $\begin{cases} \cos\theta = \cos(-\theta) \\ -\text{sen}\,\theta = \text{sen}(-\theta) \end{cases}$

2) Luego: $(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)^n = (\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta))^n$

$= [\cos(-n\theta) + i\,\text{sen}(-n\theta)]$ ··· Por Moivre

$= \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta)$.

7.4 si: $w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = e^{i\theta} \Rightarrow w^n = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) = e^{i(n\theta)}$

si $\overline{w} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta = e^{-i\theta} \Rightarrow \overline{w}^n = (\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta) = e^{-i(n\theta)}$

7.5 si $w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow w^{-n} = \cos(n\theta) - i\,\text{sen}(n\theta)$.

Ejemplo:

1

$$z = \frac{(1-i)^{16}(1+i)^{20}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{18}} = \frac{2^8\,\text{cis}(-4\pi)\;2^{10}\,\text{cis}(5\pi)}{\cos(14\pi)\;\text{cis}(6\pi)} = 2^{18}\,\text{cis}[(-4\pi+5\pi)-(14\pi+6\pi)]$$

$$= 2^{18}\,.\,\text{cis}[-19\pi]\;//$$

SOLUCION:

$z_1 = 1 - i \;\Big\langle\; |z_1| = \sqrt{2},\; \theta = -\pi/4$

$= \sqrt{2}\,\text{cis}(-\pi/4)$

$z_1^{16} = (\sqrt{2})^{16}\,\text{cis}(-16\frac{\pi}{4})$

$= 2^8\,\text{cis}(-4\pi)$

$z_2 = 1 + i \;\Big\langle\; |z_2| = \sqrt{2},\; \theta = \pi/4$

$= \sqrt{2}\,\text{cis}(\pi/4)$

$z_2^{20} = (\sqrt{2})^{20}\,\text{cis}(20\frac{\pi}{4})$

$= 2^{10}\,\text{cis}(5\pi)$

$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \;\Big\langle\; |z_3| = 1,\; \theta = \pi + \text{arctg}(1/\sqrt{3})$

$= \pi + \pi/6$

$= 7\pi/6$

$= \text{cis}(\frac{7\pi}{6})$

$z_3^{12} = \text{cis}(12\cdot\frac{7\pi}{6})$

$z_3^{12} = \text{cis}(14\pi)$

$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;\Big\langle\; |z_4| = 1,\; \theta = \pi/3$

$z_4 = \text{cis}(\pi/3)$

$z_4^{18} = \text{cis}(18\frac{\pi}{3})$

$z_4^{18} = \text{cis}(6\pi)$

7.6 Por el Binomio de Newton:

$$\boxed{\begin{aligned} (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\,\text{sen}\,\theta)^k \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) &= \sum \binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\,\text{sen}\,\theta)^k \\ &= A + iB \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos(n\theta) &= A = Re[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]^n \\ \text{sen}(n\theta) &= B = Im[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]^n \end{aligned}}$$

A y B estarán expresados en términos de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

APLICACIONES

1 Hallar $\cos 3\theta$ y $\text{sen}\,3\theta$ en terminos de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

SOLUCION:

se tiene: $\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3$

$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + \underbrace{3i^2}_{-3}\cos\theta.\text{sen}^2\theta + \underbrace{i^3}_{-i}\text{sen}^3\theta$

$= [\cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\text{sen}^2\theta] + i[3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta]$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\text{sen}^2\theta \\ \text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\cdot\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta \end{cases}$

2 Hallar $(1-i)^n$

SOLUCION:

1) $z = 1 - i \;\Big\langle\; |z| = \sqrt{2},\; \theta = -\pi/4$

$z = \sqrt{2}\,[\cos(-\pi/4) + i\,\text{sen}(-\pi/4)]$

2) Luego: $(1-i)^n = 2^{n/2}[\cos(-\frac{n\pi}{4}) + i\,\text{sen}(-\frac{n\pi}{4})]$

$= 2^{n/2}\,\text{cis}(-\frac{n\pi}{4})$

$= 2^{n/2}e^{-i(n\pi/4)}\;//$

③ si $w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, hallar $(1+w)^n$

SOLUCION:

1) $1+w = \underbrace{1+\cos\theta}\ + i\,\overbrace{\text{sen}\,\theta}$

$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\,2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right]$

2) $(1+w)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]$

$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\ \text{cis}\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\ e^{i\left(\frac{n\theta}{2}\right)}$

④ Simplificar $(1+w)^n$, donde $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

SOLUCION:

1) $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $1+w = 1-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ → $|1+w| = 1$; $\theta = \pi/3$

3) $1+w = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$

4) $(1+w)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

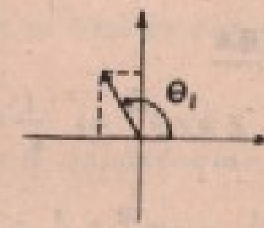
$= e^{i(n\pi/3)}$

⑤ Sean $w_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hallar $(w_1^n + w_2^n)$, donde n es un número entero.

SOLUCION:

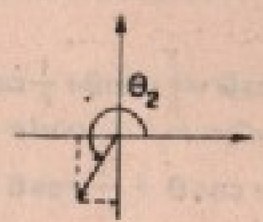
I) De $w_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ → $|w_1| = 1$; $\theta_1 = \pi - \text{arctg}(\sqrt{3})$



$= \text{cis}(2\pi/3)$ $\qquad \theta_1 = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$

$\Rightarrow w_1^n = \text{cis}(2n\pi/3)$

II) De $w_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ → $|w_2| = 1$; $\theta_2 = \pi + \text{arctg}(\sqrt{3})$



$= \text{cis}(4\pi/3)$ $\qquad \theta_2 = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$

$\Rightarrow w_2^n = \text{cis}(4n\pi/3)$

III) Luego:

$w_1^n + w_2^n = \text{cis}\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \text{cis}\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$

$= \left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4n\pi}{3}\right)\right]$

$= \left[\cos\underbrace{\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}_{A} + \cos\underbrace{\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}_{B}\right] + i\left[\text{sen}\underbrace{\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}_{A} + \text{sen}\underbrace{\left(\frac{4n\pi}{3}\right)}_{B}\right]$

$= \left[2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right] + i\left[\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$

$= \left[\underbrace{2\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] + i\left[\underbrace{\text{sen}(n\pi)}_{0}\cdot\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]$

Donde:

$A = \frac{4n\pi}{3}$

$B = \frac{2n\pi}{3}$

$\frac{A+B}{2} = n\pi$

$\frac{A-B}{2} = \frac{n\pi}{3}$

$= 2(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ //

⑥ Demostrar que si $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$, entonces $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos(m\theta)$, $n\in\mathbb{Z}^+, z\in\mathbb{C}$

$\theta=\text{Arg}(\bar{z})$.

PRUEBA:

1) sea $z=re^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{i\theta}$, $r>0$

2) $z+\frac{1}{z}=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

$=r\cos\theta+ir\,\text{sen}\,\theta+\frac{1}{r}\cos\theta-\frac{1}{r}i\,\text{sen}\,\theta$

3) $2\cos\theta=\left[r\cos\theta+\frac{1}{r}\cos\theta\right]+i\left[r\,\text{sen}\,\theta-\frac{1}{r}\text{sen}\,\theta\right]$

igualando la parte real y la parte imaginaria

$$\Rightarrow\begin{cases} r\cos\theta+\frac{1}{r}\cos\theta=2\cos\theta\ \cdots\cdots(\text{I})\\ r\,\text{sen}\,\theta-\frac{1}{r}\text{sen}\,\theta=0\ \cdots\cdots(\text{II})\end{cases}$$

$r=?$, $\theta=?$

4)
$$\begin{cases}\frac{r^2+1}{r}\cos\theta=2\cos\theta\Rightarrow\frac{r^2+1}{r}=2\\ \qquad\Rightarrow r^2+1=2r\\ \qquad\Rightarrow r^2-2r+1=0\Rightarrow(r-1)^2=0\\ \qquad\Rightarrow\boxed{r=1}\\ \frac{r^2-1}{r}\text{sen}\,\theta=0\Leftrightarrow r^2-1=0\quad\vee\quad\text{sen}\,\theta=0\\ \qquad\Leftrightarrow r=\pm1\quad\vee\quad\theta=K\pi\end{cases}$$

5) Las soluciones son: $r=1, \theta=K\pi$

luego: $z=re^{i\theta}=e^{i\theta}$ $\begin{cases} z^m=e^{i(m\theta)}\\ \frac{1}{z^m}=z^{-m}=e^{-i(m\theta)}\end{cases}$

6) $z^m+\frac{1}{z^m}=e^{i(m\theta)}+e^{-i(m\theta)}$

$=2\cos(m\theta)$ // , $\theta=K\pi$

⑦ Demostrar que: $\left(\frac{1+i\,\text{tg}\,\alpha}{1-i\,\text{tg}\,\alpha}\right)^n=\frac{1+i\,\text{tg}\,n\alpha}{1-i\,\text{tg}\,n\alpha}$

PRUEBA:

(1) sea: $\frac{1+i\,\text{tg}\alpha}{1-i\,\text{tg}\alpha}=\frac{1+i\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha-i\,\text{sen}\,\alpha}=\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}$

(2) Luego: $\left[\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}\right]^n=\frac{e^{i(n\alpha)}}{e^{-i(n\alpha)}}=\frac{\cos(n\alpha)+i\,\text{sen}(n\alpha)}{\cos(n\alpha)-i\,\text{sen}(n\alpha)}$ Dividir numerador y denominador entre $\cos(n\alpha)$

(3) $\Rightarrow\left(\frac{1+i\,\text{tg}\,\alpha}{1-i\,\text{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\,\text{tg}\,(n\alpha)}{1-i\,\text{tg}\,(n\alpha)}$ //

⑧ Expresar en forma polar $\bar{z}=(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha+i)$, $-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6}$

SOLUCION:

Expresar cada número complejo en su forma polar o exponencial

(1) $z_1=1+i\sqrt{3}$ $\begin{cases}|z_1|=2\\ \theta=\text{arctg}\sqrt{3}=\pi/3\end{cases}$

$=2e^{i\pi/3}$.

(2) $z_2=1+i$ $\begin{cases}|z_2|=\sqrt{2}\\ \theta=\text{arctg}(1)=\pi/4\end{cases}$

$=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

(3) $z_3=\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha+i$

$=\cos\alpha+i\left[\text{sen}\,\alpha+1\right]$

$=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1\right]$, pues $\begin{cases}\text{sen}\,\alpha=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\ \cos\,\alpha=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\end{cases}$

$=2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\left[2\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$, Hacer $\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$

$=2\,\text{sen}\left[\cos\beta+i\,\text{sen}\,\beta\right]$

$=2\,\text{sen}\beta.e^{i\beta}$, donde $\text{sen}\,\beta>0$ porque: $-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6}$

por $\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{\pi}{12}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{12}$

sumar $\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow\frac{\pi}{6}<\beta<\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow\text{sen}\,\beta>0$

(4) $\bar{z}=z_1\,z_2\,z_3$

$=4\sqrt{2}\,\text{sen}\beta.e^{i[\pi/3+\pi/4+\pi/4+\alpha/2]}$

$=4\sqrt{2}\,\text{sen}\beta\left[\cos(5\pi/6+\alpha/2)+i\,\text{sen}\,(5\pi/6+\alpha/2)\right]$ //

8. TRANSFORMACION DE : SUMAS EN PRODUCTO

(Sumas de términos en SENO y COSENO que se transforman en producto)

Para transformar sumas de términos con SENO y COSENO , en producto se requiere de los sigtes fórmulas :

8.1 $(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)$ ····· (Teorema de De Moivre)

8.2 $\sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k = (a+b)^n$ .... *binomio de Newton* .

8.2.1 $\sum_{k=0}^{n} C_k^n z^k = (1+z)^n = 1 + C_1^n z + C_2^n z^2 + \cdots + C_n^n z^n$

8.2.2 $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n z^k = (1-z)^n = 1 - C_1^n z + C_2^n z^2 - \cdots (-1)^k C_k^n z^k + \cdots + (-1)^n C_n^n z^n$.

8.2.3 $\sum_{k=0}^{n} C_k^n = C_0^n + C_1^n + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$, si $a = b = 1$

8.3 $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$ (forma polar y exponencial de un número complejo de módulo 1).

NOTA : Toda vez que se requiera transformar una suma de términos con Seno y Coseno , en PRODUCTO ; lo primero que se hará construir números Complejos de la forma $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ para luego separar correctamente la parte real de la parte imaginaria.

En la forma Polar : $\underbrace{\cos\alpha}_{A} + \underbrace{i\operatorname{sen}\alpha}_{B}$, tener en cuenta que la parte real es $\cos\alpha$ y la parte imaginaria es $\operatorname{sen}\alpha$ (coeficiente de i).

PROBLEMA 1 – Hallar la suma : $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + \operatorname{sen} nx$.

SOLUCION :

(1) Llamemos : $B = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + \operatorname{sen} nx$

(2) Donde : $iB = i\operatorname{sen} x + i\operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + i\operatorname{sen} nx$

(3) Llamemos : $A = \cos x + \cos 2x + \cdots\cdots + \cos nx$

(4) Sumar : $A + iB = (\cos x + i\operatorname{sen} x) + (\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x) + \cdots + (\cos nx + i\operatorname{sen} nx)$.

$$= \quad z \quad + \quad z^2 \quad + \cdots + \quad z^n .$$

$$A + iB = z(1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^{n-1})$$

$$= z\left[\frac{1-z^n}{1-z}\right] \text{ , como } z = e^{ix} \Rightarrow z^n = e^{inx} = \cos nx + i\operatorname{sen} nx$$

$$= z\left[\frac{1-\cos nx - i\operatorname{sen} nx}{1-\cos x - i\operatorname{sen} x}\right]$$

$$= z\left[\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{nx}{2} - i\,2\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - i2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \frac{z\left(-2i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right)\left[\cos\frac{nx}{2} + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right]}{-2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2} + i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]}$$

$$= \frac{\overbrace{(\cos x + i\operatorname{sen} x)}^{z}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\left[\cos\frac{nx}{2} + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right]}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2} + i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\cos\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

$$A + iB = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x + i\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right]$$

(5) Al igualar las partes real e imaginaria ,se obtienen :

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)x = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \cdots\cdots\cdots + \operatorname{sen} nx \\ A &= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots\cdots\cdots + \cos nx \end{aligned}}$$

PROBLEMA 2 - Hallar las sumas:

a) $\cos x + C_1^n \cos 2x + \cdots\cdots + C_n^n \cos(n+1)x$

b) $\operatorname{sen} x + C_1^n \operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + C_n^n \operatorname{sen}(n+1)x$

SOLUCION:

El objetivo es formar números complejos de la forma: $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$

1) Llamemos: $A = \cos x + C_1^n \cos 2x + \cdots\cdots + C_n^n \cos(n+1)x$

$iB = i\operatorname{sen} x + iC_1^n \operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + iC_n^n \operatorname{sen}(n+1)x$

2) sumar: $A + iB = [\cos x + i\operatorname{sen} x] + C_1^n[\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x] + \cdots + C_n^n[\cos(n+1)x + i\operatorname{sen}(n+1)x]$

$$= z + C_1^n z^2 + \cdots\cdots + C_n^n z^{n+1}$$

3) Llamar $z = \cos x + i\operatorname{sen} x$

$$= z\left[1 + C_1^n z + \cdots\cdots + C_n^n z^n\right]$$

$$= z \cdot (1+z)^n$$

$$= z\,(1 + \cos x + i\operatorname{sen} x)^n$$

$$= z\left[2\cos^2\frac{x}{2} + i\,2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]^n$$

$$= z\left[2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\right]^n$$

$$= z \cdot 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{nx}{2} + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right]$$

$$= (\cos x + i\operatorname{sen} x)\,2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{nx}{2} + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right], \quad \frac{n}{2}+1 = \frac{n+2}{2}$$

$$A + iB = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n+2}{2}x + i\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x\right]$$

4) Escogiendo las partes real e imaginaria, hallamos las sumas pedidas:

$$A = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{n+2}{2}x \;//$$

$$B = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x \;//$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + C_1^n\cos 2x + \cdots\cdots + C_n^n\cos(n+1)x = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{n+2}{2}\right)x \\ \operatorname{sen} x + C_1^n\operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + C_n^n\operatorname{sen}(n+1)x = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{2}\right)x \end{cases}$$

PROBLEMA 3 - Hallar la suma:

$$1 - C_1^n\cos x + C_2^n\cos 2x - C_3^n\cos 3x + \cdots\cdots + (-1)^n\cos nx$$

SOLUCION:

El objetivo es formar números complejos de la forma $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ y luego el binomio de NEWTON.

1) Llamemos: $A = 1 - C_1^n\cos x + C_2^n\cos 2x - C_3^n\cos 3x + \cdots\cdots + (-1)^n\cos nx$

$B = 0 - C_1^n\operatorname{sen} x + C_2^n\operatorname{sen} 2x - C_3^n\operatorname{sen} 3x + \cdots\cdots + (-1)^n\operatorname{sen} nx$

2) Por i: $iB = i0 - iC_1^n\operatorname{sen} x + iC_2^n\operatorname{sen} 2x - iC_3^n\operatorname{sen} 3x + \cdots\cdots + i(-1)^n\operatorname{sen} x$

3) Sumar:

$$A + iB = 1 + i0 - C_1^n[\cos x + i\operatorname{sen} x] + C_2^n[\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x] \cdots\cdots (-1)^n C_n^n[\cos nx + i\operatorname{sen} nx],$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

4) Hacer: $z = \cos x + i\operatorname{sen} x$

$z^n = \cos nx + i\operatorname{sen} nx$

$$A + iB = 1 - C_1^n z + C_2^n z^2 - C_3^n z^3 + \cdots\cdots (-1)^n C_n^n z^n$$

$$= (1-z)^n$$

$$= (1 - \cos x - i\operatorname{sen} x)^n$$

$$= \left[2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - i\,2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]^n$$

$$= \left[2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)\right]^n$$

$$= 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right]^n, \text{ usar } \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ \cos\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$$= 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right]^n \quad \begin{cases} -\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(-A) \\ \cos A = \cos(-A) \end{cases}$$

$$= 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]^n$$

$$A + iB = 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n}{2}(x-\pi) + i\operatorname{sen}\frac{n}{2}(x-\pi)\right]$$

5) $\Rightarrow \begin{cases} A = 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\cos\frac{n}{2}(x-\pi) \\ B = 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{n}{2}(x-\pi) \end{cases}$

6) Luego: $\begin{cases} 1 - C_1^n\cos x + C_2^n\cos 2x - C_3^n\cos 3x + \cdots + (-1)^n\cos(nx) = 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\cos\frac{n}{2}(x-\pi) \\ 1 - C_1^n\operatorname{sen} x + C_2^n\operatorname{sen} 2x + C_3^n\operatorname{sen} 3x + \cdots + (-1)^n\operatorname{sen}(nx) = 2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{n}{2}(x-\pi) \end{cases}$

PROBLEMA 4 – Hallar la suma: $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x + \cdots + \operatorname{sen}^2(2n-1)x$

SOLUCION:

El objetivo es formar números complejos de la forma: $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$

(1) se tiene: $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x + \cdots + \operatorname{sen}^2(2n-1)x$, $\left[\text{convertir: } \operatorname{sen} A = \frac{1-\cos A}{2}\right]$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \cdots + \frac{1-\cos 2(2n-1)x}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos 6x + \cdots + \cos 2(2n-1)x\right]$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos 6x + \cdots + \cos 2(2n-1)x\right]$$

(2) Llamar:

$A = \cos 2x + \cos 6x + \cos 10x + \cdots + \cos 2(2n-1)x$

Sea $B = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 10x + \cdots + \operatorname{sen} 2(2n-1)x$.

por i: $iB = i\operatorname{sen} 2x + i\operatorname{sen} 6x + i\operatorname{sen} 10x + \cdots + i\operatorname{sen} 2(2n-1)x$

(3) Sumar:

$$A+iB = [\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x] + [\cos 6x + i\operatorname{sen} 6x] + \cdots + [\cos 2(2n-1)x + i\operatorname{sen} 2(2n-1)x]$$

(4)

$$= z^2 + z^6 + z^{10} + \cdots + z^{2(2n-1)}$$, donde: $\cos x + i\operatorname{sen} x = z$, $\cos nx + i\operatorname{sen} nx = z^n$

$$= z^2\left[1 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{4(n-1)}\right]$$, LA RAZON GEOMETRICA es: z^4

$$= z^2\left[\frac{1-(z^4)^n}{1-z^4}\right]$$

$$= z^2\left[\frac{1-z^{4n}}{1-z^4}\right]$$

$$= z^2\left[\frac{1-\cos 4nx - i\operatorname{sen} 4nx}{1-\cos 4x - i\operatorname{sen} 4x}\right]$$

$$= z^2\left[\frac{2\operatorname{sen}^2 2nx - i2\operatorname{sen} 2nx \cdot \cos 2nx}{2\operatorname{sen}^2 2x - i2\operatorname{sen} 2x\cos 2x}\right]$$

$$= z^2\frac{2\operatorname{sen} 2nx}{2\operatorname{sen} 2x}\left[\frac{\operatorname{sen} 2nx - i\cos 2nx}{\operatorname{sen} 2x - i\cos 2x}\right]$$

$$= z^2\frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2nx\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2nx\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}\right], \quad z^2 = \cos 2x + i\operatorname{sen} 2x$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\left[\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x\right]\left[\frac{\cos\left(2nx - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(2nx - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\left[\cos\left(2x + 2nx - \frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(2x + 2nx - \frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A+iB = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\left[\cos(2nx) + i\operatorname{sen}(2nx)\right]$$

(5) Luego:

$$A = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\cos(2nx) = \frac{\operatorname{sen}(4nx)}{2\operatorname{sen} 2x}$$

$$B = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\operatorname{sen}(2nx) = \frac{\operatorname{sen}^2(2nx)}{\operatorname{sen} 2x}$$

(6) Reemplazar A en (1):

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x + \cdots + \operatorname{sen}^2(2n-1)x = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 4nx}{2\operatorname{sen} 2x}\right]$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4nx}{4\operatorname{sen} 2x}$$

PROBLEMA 5 – Hallar la suma: $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \cdots + \operatorname{sen}^2 nx$

SOLUCION:

1) Aplicar la transformación: $\operatorname{sen}^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$ en cada termino de la suma:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \cdots + \operatorname{sen}^2 nx = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \cdots + \frac{1-\cos 2nx}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx\right]$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx\right]$$

2) segun el problema anterior:

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} nx}{2\operatorname{sen} x}\cdot\cos(n+1)x$$

PROBLEMA 6 – Hallar las sumas:

a) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots\cdots + \cos^3 nx$

b) $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 2x + \cdots\cdots + \operatorname{sen}^3 nx$

Solución de a)

1) Aplicar la fórmula : $\cos^3 A = \frac{1}{4}\cos 3A + \frac{3}{4}\cos A$ en cada término de la suma

2) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots + \cos^3 nx = \left[\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right] + \left[\frac{1}{4}\cos 6x + \frac{3}{4}\cos 2x\right] + \cdots + \left[\frac{1}{4}\cos 3nx + \frac{3}{4}\cos nx\right]$

Asociar : $= \frac{1}{4}\underbrace{\left[\cos 3x + \cos 6x + \cdots + \cos 3nx\right]}_{A} + \frac{3}{4}\underbrace{\left[\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right]}_{M}$

3) CALCULO de M

$$M = \cos x + \cos 2x + \cdots\cdots + \cos nx$$

sea $\quad iN = i\operatorname{sen} x + i\operatorname{sen} 2x + \cdots\cdots + i\operatorname{sen} nx$

mar : $M + iN = (\cos x + i\operatorname{sen} x) + (\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x) + \cdots\cdots + (\cos nx + i\operatorname{sen} nx)$

$$= e^{ix} + e^{i2x} + \cdots\cdots + e^{inx}$$

$$= e^{ix}\left[1 + e^{ix} + \cdots\cdots + e^{i(n-1)x}\right], \quad \begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x \\ \quad = z \end{cases}$$

$$= z\left[1 + z + \cdots\cdots + z^{n-1}\right]$$

$$= z\left[\frac{1 - z^n}{1 - z}\right]$$

$$= z\left[\frac{1 - \cos nx - i\operatorname{sen} nx}{1 - \cos x - i\operatorname{sen} x}\right]$$

$$= z\left[\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{nx}{2} - 2i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - 2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\, z\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\cos x + i\operatorname{sen} x\right]\left[\frac{\cos\left(\frac{nx}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\cos\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\cos\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$M + iN = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{(n+1)}{2}x + i\operatorname{sen}\frac{(n+1)}{2}x\right]$$

Luego :

$$M = \operatorname{Re}(M + iN) = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{(n+1)}{2}x$$

CALCULO de A

$$A = \cos 3x + \cos 6x + \cos 9x + \cdots\cdots + \cos 3nx$$

sea : $\quad iB = i\operatorname{sen} 3x + i\operatorname{sen} 6x + i\operatorname{sen} 9x + \cdots\cdots + i\operatorname{sen} 3nx$

$A + iB = (\cos 3x + i\operatorname{sen} 3x) + (\cos 6x + i\operatorname{sen} 6x) + \cdots\cdots + (\cos 3nx + i\operatorname{sen} 3nx)$

$= e^{i3x} + e^{i6x} + \cdots\cdots + e^{i3nx}$. *donde* $e^{ix} = z$

$= z^3 + z^6 + z^9 + \cdots\cdots + z^{3n}$

$= z^3\left[1 + z^3 + z^6 + \cdots\cdots + z^{3(n-1)}\right]$ *es una serie geométrica de razón* z^3.

$= z^3\left[\frac{1 - (z^3)^n}{1 - z^3}\right]$ $\qquad$ como $z = e^{ix}$

$= z^3\left[\frac{1 - z^{3n}}{1 - z^3}\right]$ $\qquad \Rightarrow \begin{cases} z^3 = e^{i3x} = \cos 3x + i\operatorname{sen} 3x \\ z^{3n} = \cos 3nx + i\operatorname{sen} 3nx \end{cases}$

$$= z^3\left[\frac{1 - \cos 3nx - i\operatorname{sen} 3nx}{1 - \cos 3x - i\operatorname{sen} 3x}\right]$$

$$= z^3\left[\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{3nx}{2} - i\,2\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}\cos\frac{3nx}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{3x}{2} - i\,2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}}\right]$$

$$= z^3\,\frac{2\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2} - i\cos\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - i\cos\frac{3x}{2}}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\left[\cos 3x + i\operatorname{sen}3x\right]\left[\frac{\cos\left(\frac{3nx}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3nx}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\left[\cos\left(3x+\frac{3nx}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(3x+\frac{3nx}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A+iB = \frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\left[\cos\frac{3}{2}(n+1)x + i\operatorname{sen}\frac{3}{2}(n+1)x\right]$$

Luego:

$$A = \frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\cos\frac{3}{2}(n+1)x = \operatorname{Re}(A+iB)$$

4) Reemplazar en 2)

$$\cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots + \cos^3 nx = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\cos\frac{3}{2}(n+1)x + \frac{3}{4}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)}{2}x$$

Solución de b) Usar $\operatorname{sen}^3 A = \frac{3}{4}\operatorname{sen}A - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3A$

$$1)\ \operatorname{sen}^3x+\operatorname{sen}^3 2x+\cdots+\operatorname{sen}^3 nx = \left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}3x\right)+\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}6x\right)+\cdots+\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}nx-\frac{1}{4}\operatorname{sen}3nx\right)$$

$$= \frac{3}{4}\Big[\underbrace{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx}_{N}\Big] - \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}6x+\cdots+\operatorname{sen}3nx}_{B}\Big]$$

2) En problema anterior observamos que:

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx = N = \operatorname{Im}(M+iN) = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{(n+1)}{2}x$$

$$\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}6x+\cdots+\operatorname{sen}3nx = \operatorname{Im}(A+iB) = \frac{\operatorname{sen}\frac{3n}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\frac{3}{2}(n+1)x$$

3) Reemplazar en 1)

$$\operatorname{sen}^3x+\operatorname{sen}^3 2x+\cdots+\operatorname{sen}^3 nx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{(n+1)}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{3}{2}(n+1)x$$

PROBLEMA 7 – Hallar las sumas:

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx$

b) $\operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}2x + 3\operatorname{sen}3x + \cdots + n\operatorname{sen}nx$

SOLUCION:

NOTA → Para hallar sumas de las formas: $\begin{cases} 1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1} = \dfrac{1-a^n}{(1-a)^2}-\dfrac{na^n}{1-a} \\ 1+2^2a+3^2a^2+\cdots+n^2a^{n-1} = \end{cases}$

es conveniente multiplicar previamente por $1-a$.

Así:

i) sea $S = 1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$

$$(1-a)S = \left(1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}\right)-\left(a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n\right)$$

$$= 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}-na^n$$

$$(1-a)S = \frac{1-a^n}{1-a}-na^n$$

$$\therefore\quad S = \frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$$

ii) sea $T = 1+2^2a+3^2a^2+\cdots+n^2a^{n-1}$

$$(1-a)T = \left(1+2^2a+3^2a^2+\cdots+n^2a^{n-1}\right)-\left(a+2^2a^2+3^2a^3+\cdots+(n-1)^2a^{n-1}+n^2a^n\right)$$

$$= 1+(2^2-1)a+(3^2-2^2)a^2+(4^2-3^2)a^3+\cdots(n^2-(n-1)^2)a^{n-1}-n^2a^n$$

$$= \underbrace{1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}}_{R}-n^2a^n \quad \cdots\cdots(*)$$

$$R = 1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$$

$$(1-a)R = \left[1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}\right]-\left[a+3a^2+5a^3+7a^4+\cdots+(2n-3)a^{n-1}+(2n-1)a^n\right]$$

$$= 1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$$

$$= 1+2a\left[1+a+a^2+\cdots+a^{n-2}\right]-(2n-1)a^n$$

$$= 1+2a\left[\frac{1-a^{n-1}}{1-a}\right]-(2n-1)a^n$$

$$R=\frac{1}{1-a}+2a\,\frac{(1-a^{n-1})}{(1-a)^2}-\frac{(2n-1)}{1-a}\,a^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Reemplazar : $(**)$ en $(*)$:

$$T=\frac{R}{1-a}-\frac{n^2a^n}{1-a}$$

$$=\frac{1}{(1-a)^2}+\frac{2a(1-a^{n-1})}{(1-a)^3}-\frac{(2n-1)a^n}{(1-a)^2}-\frac{n^2a^n}{1-a}$$

Solución de a)

1) sea $S=\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots\cdots+n\cos nx$

2) sea $iT=i\left[\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}2x+3\operatorname{sen}3x+\cdots\cdots+n\operatorname{sen}nx\right]$

3) $S+iT=\left[\cos x+i\operatorname{sen}x\right]+2\left[\cos 2x+i\operatorname{sen}2x\right]+\cdots+n\left[\cos nx+i\operatorname{sen}nx\right]$,

$$\text{si}\quad z=\cos x+i\operatorname{sen}x=e^{ix}=\operatorname{cis}x$$
$$z^n=\cos nx+i\operatorname{sen}nx=e^{inx}$$
$$=\operatorname{cis}(nx)$$

$$S+iT=z+2z^2+3z^3+\cdots\cdots\cdots+nz^{n-1}$$

DESEAMOS HALLAR $S=\operatorname{Re}(S+iT)$ y $T=\operatorname{Im}(S+iT)$

4) Pero:

$$S+iT=z\Big[\underbrace{1+2z+3z^2+4z^3+\cdots\cdots\cdots+nz^{n-1}}_{A}\Big]$$

5) Llamemos:

$$A=1+2z+3z^2+\cdots\cdots\cdots+nz^{n-1}$$

6) Donde:

$$(1-z)A=\left[1+2z+3z^2+\cdots\cdots+nz^{n-1}\right]-\left[z+2z^2+3z^3+\cdots\cdots+(n-1)z^{n-1}+nz^n\right]$$

$$=\underbrace{1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{n-1}}_{\frac{1-z^n}{1-z}}-nz^n$$

$$A=\frac{1-z^n}{(1-z)^2}-\frac{nz^n}{1-z}$$

7) Sustituir en (4):

$$S+iT=z\left[\frac{1-z^n}{(1-z)}-\frac{nz^n}{1-z}\right]$$

$$=z\left[\frac{1-z^n-nz^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}\right]$$

$$=\frac{z}{(1-z)^2}\left[1-(1+n)z^n+nz^{n+1}\right]\ \ldots\ldots (7*)$$

CALCULO de $\dfrac{z}{(1-z)^2}$:

$$1-z=1-\cos x-i\operatorname{sen}x$$
$$=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-i\,2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right]$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$1-z=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(1-z)^2=4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cis}(x-\pi)$$

Luego:

$$\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{\operatorname{cis}x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cis}(x-\pi)}$$
$$=\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\operatorname{cis}(x-x+\pi)$$
$$=\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\operatorname{cis}\pi$$
$$\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

Por lo tanto, en (7*) se tendrá:

$$=\frac{-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\left[1-(1+n)\left[\cos nx+i\operatorname{sen}nx\right]+n\left[\cos(n+1)x+i\operatorname{sen}(n+1)x\right]\right]$$

$$=\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\left[-1+(1+n)\cos nx-n\cos(n+1)x\right]+i\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\left[(1+n)\operatorname{sen}nx-n\operatorname{sen}(n+1)x\right]$$

8) Donde:

$$S=\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\left[-1+(1+n)\cos nx-n\cos(n+1)x\right].$$

$$T=\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\left[(1+n)\operatorname{sen}nx-n\operatorname{sen}(n+1)x\right]\ //$$

PROBLEMA 8 – Calcular las sumas:

a) $1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \cdots + a^K \cos K\theta$

b) $\operatorname{sen}\theta + a\operatorname{sen}(\theta+h) + a^2\operatorname{sen}(\theta+2h) + \cdots + a^K\operatorname{sen}(\theta+kh)$

c) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots\cdots + \cos nx.$

SOLUCION de a)

1) Llamemos: $S = 1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \cdots\cdots + a^K\cos K\theta$

2) sea $\quad iT = i(0 + a\operatorname{sen}\theta + a^2\operatorname{sen}2\theta + \cdots + a^K\operatorname{sen}K\theta)$

3) sumar:

$$S + iT = (1+0i) + a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + a^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen}2\theta) + \cdots + a^K(\cos K\theta + i\operatorname{sen}K\theta)$$

$$= 1 + aZ + a^2Z^2 + \cdots\cdots + a^K Z^K \quad , \text{si } Z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

$$Z^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen}n\theta$$

Es una serie geométrica de razón: aZ $\qquad n \geq 0$

$$= \frac{1-(aZ)^{K+1}}{1-aZ}$$

$$= \frac{a^{K+1}Z^{K+1}-1}{aZ-1}\cdot\frac{aZ^{-1}-1}{aZ^{-1}-1}$$

$$= \frac{a^{K+2}Z^K - aZ^{-1} - a^{K+1}Z^{K+1} + 1}{a^2 - aZ^{-1} - aZ + 1}$$

$$= \frac{a^{K+2}Z^K - a^{K+1}Z^{K+1} - aZ^{-1} + 1}{a^2 - a(Z^{-1}+Z) + 1}$$

$$S + iT = \frac{a^{K+2}\left[\cos K\theta + i\operatorname{sen}K\theta\right] - a^{K+1}\left[\cos(K+1)\theta + i\operatorname{sen}(K+1)\theta\right] - a\left[\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\right] + 1}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}$$

4) Donde: $Z^{-1} + Z = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$$= \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = 2\cos\theta$$

5) Agrupando la parte real $= S$ y la parte imaginaria $= T$, obtenemos:

$$S = \frac{a^{K+2}\cos K\theta - a^{K+1}\cos(k+1)\theta - a\cos\theta + 1}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}$$

$$T = \frac{a^{K+2}\operatorname{sen}K\theta - a^{K+1}\operatorname{sen}(k+1)\theta + a\operatorname{sen}\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1} \qquad //$$

b) Queda como ejercicio. Sol. $\dfrac{a^{K+2}\operatorname{sen}(\theta+kh) - a^{K+1}\operatorname{sen}\left[\theta+(k+1)h\right] - a\operatorname{sen}(\theta-h) + \operatorname{sen}\theta}{a^2 - 2a\cos h + 1}$

PROBLEMA 9 – Calcular $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots\cdots + \cos nx$

SOLUCION:

1) En $\frac{1}{2} + \underbrace{\cos x + \cos 2x + \cdots\cdots\cdots + \cos nx}_{M}$, hacer:

2) $\qquad M = \cos x + \cos 2x + \cdots\cdots\cdots + \cos nx$

3) En el problema 6, se ha calculado:

$$M = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{(n+1)}{2}x$$

4) Reemplazar en (1):

$$\frac{1}{2} + M = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{(n+1)}{2}x$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2.\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}\right)x + \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-\frac{n+1}{2}\right)x\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{(2n+1)}{2}x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \qquad //$$

PROBLEMA 10 – Hallar: $1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}\cos nx$

SOLUCION: según el problema 8 parte a) se tendría que $a = \frac{1}{2}$

Luego:

$$1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \cdots + \frac{1}{2^n}\cos nx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\cos nx - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cos(n+1)x - \frac{1}{2}\cos x + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cos x + 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\cos nx - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cos(n+1)x - \frac{1}{2}\cos x + 1}{\frac{5}{4} - \cos x}$$

Cuando n es muy grande $(n \to +\infty)$ la suma será:

$$\frac{-\frac{1}{2}\cos x + 1}{\frac{5}{4} - \cos x} = \frac{2(2-\cos x)}{5 - 4\cos x}$$

PROBLEMA 11 — Hallar las sumas :

a) $\cos(a) - \cos(a+h) + \cos(a+2h) - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\cos\left[a+(n-1)h\right]$

b) $\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\operatorname{sen}\left[a+(n-1)h\right]$.

SOLUCIÓN :

1) sea $S = \cos(a) - \cos(a+h) + \cos(a+2h) - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\cos\left[a+(n-1)h\right]$

2) Hacer $iT = i\operatorname{sen}(a) - i\operatorname{sen}(a+h) + i\operatorname{sen}(a+2h) - \cdots + i(-1)^{n-1}\operatorname{sen}\left[a+(n-1)h\right]$

3) $S+iT = \left[\cos(a)+i\operatorname{sen}(a)\right] - \left[\cos(a+h)+i\operatorname{sen}(a+h)\right] + \cdots + (-1)^{n-1}\left[\cos(a+(n-1)h)+i\operatorname{sen}(a+(n-1)h)\right]$

$$= e^{ia} - e^{i(a+h)} + e^{i(a+2h)} - \cdots + (-1)^{n-1} e^{i(a+(n-1)h)}$$

$$= e^{ia}\left[1 - e^{ih} + e^{i2h} - \cdots + (-1)^{n-1} e^{i(n-1)h}\right], \text{ si } z = e^{ih} = \cos h + i\operatorname{sen} h$$

$$= e^{ia}\left[1 - z + z^2 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} z^{n-1}\right], \text{ la razon es } (-z)$$

$$= e^{ia}\left[\frac{1-(-z)^n}{1-(-z)}\right]$$

$$= \begin{cases} e^{ia}\left[\dfrac{1-z^n}{1+z}\right], & n = \text{par} \\[2ex] e^{ia}\left[\dfrac{1+z^n}{1+z}\right], & n = \text{impar} \end{cases}$$

donde
$$\begin{cases} 1-z^n = 1 - \cos nh - i\operatorname{sen} nh = \\ 1-z^n = 2\operatorname{sen}\dfrac{nh}{2}\left[\cos\left(\dfrac{nh}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{nh}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ 1+z = 1 + \cos h + i\operatorname{sen} h \\ \quad = 2\cos\dfrac{h}{2}\left[\cos\dfrac{h}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}\right] \\ 1+z^n = 2\cos\dfrac{nh}{2}\left[\cos\dfrac{nh}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{nh}{2}\right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}\left[\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{(n-1)h}{2}\right) - i\cos\left(a+\dfrac{(n-1)h}{2}\right)\right], & n = \text{par} \\[3ex] \dfrac{\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\dfrac{(n-1)}{2}h\right) + i\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{(n-1)}{2}h\right)\right], & n = \text{impar} \end{cases}$$

4) Tomando la parte real :

$$S = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}\cdot\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{(n-1)h}{2}\right), & n = \text{par} \\[3ex] \dfrac{\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(a+\dfrac{(n-1)h}{2}\right), & n = \text{impar} \end{cases}$$

5) Tomando la parte imaginaria :

$$T = \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}\cos\left(a+\dfrac{(n-1)}{2}h\right), & n = \text{par} \\[3ex] \dfrac{\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{(n-1)}{2}h\right), & n = \text{impar} \end{cases}$$

PROBLEMA 12 — Hallar las sumas :

a) $\cos x - C_1^n\cos 2x + C_2^n\cos 3x - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n \cos(n+1)x$

b) $\operatorname{sen} x - C_1^n \operatorname{sen} 2x + C_2^n \operatorname{sen} 3x - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n \operatorname{sen}(n+1)x$

SOLUCION :

1) sea $S = \cos x - C_1^n\cos 2x + C_2^n\cos 3x - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n\cos(n+1)x$

2) sea $iT = i\operatorname{sen} x - iC_1^n\operatorname{sen} 2x + iC_2^n\operatorname{sen} 3x - \cdots + i(-1)^n C_n^n \operatorname{sen}(n+1)x$

3) $S+iT = (\cos x + i\operatorname{sen} x) - C_1^n(\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x) + \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n\left[\cos(n+1)x + i\operatorname{sen}(n+1)x\right]$

$$= z - C_1^n z^2 + C_2^n z^3 - \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n z^{n+1}, \quad z = \cos x + i\operatorname{sen} x$$

$$= z\left[1 - C_1^n z + C_2^n z^2 - \cdots\cdots + (-1)^n C^n z_n^n\right] \quad = e^{ix}$$

$$\qquad\qquad = \operatorname{cis} x$$

$$= z(1-z)^n$$

$$= e^{ix} 2^n \operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\, e^{i\frac{n}{2}(x-\pi)}, \text{ ver problema 3}$$

$$= 2^n \operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\, e^{i\left(x+\frac{n}{2}x-\frac{n}{2}\pi\right)}$$

$$= 2^n \operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{(n+2)x-n\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)x-n\pi}{2}\right)\right]$$

4) Donde :

$$S = 2^n \operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{(n+2)x-n\pi}{2}\right)$$

$$T = 2^n \operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)x-n\pi}{2}\right)$$

9. RELACION ENTRE LA FORMULA DE MOIVRE Y LA FORMULA DE EULER.

Por la fórmula de Euler, tenemos $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \end{cases}$

Al sumar obtenemos:

Al restar obtenemos:

(I)

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}} \qquad \boxed{\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \qquad \operatorname{sen} kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}}$$

Se obtienen las potencias $\cos^n x$, $\operatorname{sen}^n x$, $n \in \mathbb{Z}^+$

RELACION ENTRE LA FORMULA DE MOIVRE Y EL BINOMIO DE NEWTON:

(II) $$\boxed{\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (\cos x)^{n-k} (i \operatorname{sen} x)^k} \quad , n \in \mathbb{Z}^+$$

PROBLEMA 9.1 — Expresar mediante $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

a) $\cos 5x$, b) $\cos 8x$, c) $\operatorname{sen} 6x$, d) $\operatorname{sen} 7x$

Se aplica la fórmula II:

a) $\cos 5x + i \operatorname{sen} 5x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^5$

$$= \cos^5 x + 5\cos^4 x\, i \operatorname{sen} x + 10\cos^3 x . i^2 \operatorname{sen}^2 x + 10 \cos^2 x . i^3 \operatorname{sen}^3 x + 5 \cos x . i^4 \operatorname{sen}^4 x + i^5 \operatorname{sen}^5 x$$

$$= \left[\cos^5 x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x\right] + i\left[5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^5 x\right]$$

Luego:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x . \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x . \operatorname{sen}^4 x$$

$$\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen}^5 x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + 5\cos^4 x \operatorname{sen} x$$

De igual manera, se obtienen:

b) $\cos^8 x - 28\cos^6 x \operatorname{sen}^2 x + 70\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x - 28 \cos^2 x \operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^8 x$

c) $6\cos^5 x \operatorname{sen} x - 20\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 6\cos x \operatorname{sen}^5 x$

d) $7\cos^6 x \operatorname{sen} x - 35\cos^4 x \operatorname{sen}^3 x + 21\cos^2 x \operatorname{sen}^5 x - \operatorname{sen}^7 x$

PROBLEMA 9.2 — Componer las fórmulas que expresen $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx$ mediante $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

SOLUCION:

1) De la fórmula II:

$$\cos nx + i \operatorname{sen} nx = \sum_{k=0}^{n} C_k^n (\cos x)^{n-k} i^k \operatorname{sen}^k x$$

$$= \cos^n x + C_1^n \cos^{n-1} x\, i \operatorname{sen} x + C_2^n \cos^{n-2} x\, i^2 \operatorname{sen}^2 x + C_3^n \cos^{n-3} x\, i^3 \operatorname{sen}^3 x + \cdots + C_n^n i^n \operatorname{sen}^n x.$$

Al separar la parte real y la parte imaginaria, se obtiene que:

a) Para $K = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$ se obtiene la parte real.

b) Para $K = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n-1$ se obtiene la parte imaginaria.

$$= \left[\cos^n x - C_2^n \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x + C_4^n \cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x - C_6^n \cos^{n-6} x \operatorname{sen}^6 x + \cdots + M\right] + \left[C_1^n \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x - C_3^n \cos^{n-3} x \operatorname{sen}^3 x + \cdots + N\right]$$

2) Igualando las partes real e imaginaria, respectivamente; se obtiene:

$$\cos nx = \cos^n x - C_2^n \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x + C_4^n \cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x - C_6^n \cos^{n-6} x \operatorname{sen}^6 x + \cdots + M$$

donde: $M = (-1)^{n/2} \operatorname{sen}^n x$, si n es par

$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x$, si n es impar.

$$\operatorname{sen} nx = C_1^n \cos^{n-1} x . \operatorname{sen} x - C_2^n \cos^{n-3} x \operatorname{sen}^3 x + \cdots + N$$

donde: $N = (-1)^{\frac{n-2}{2}} n \cos x . \operatorname{sen}^{n-1} x$, si n es par

$N = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen}^n x$, si n es impar.

PROBLEMA 9.3 — Representar en forma de un polinomio de primer grado en las funciones trigonométricas de los ángulos múltiplos de x:

a) $\operatorname{sen}^3 x$, b) $\operatorname{sen}^4 x$, c) $\cos^5 x$, d) $\cos^6 x$

SOLUCION:

se aplica la fórmula (I)

1) De $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, hacer $\begin{cases} e^{ix} = \alpha \\ e^{-ix} = \alpha^{-1} \end{cases}$

(1*) $\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^{-1})}$

2) Al cubo: $\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{8(i)}\left[\alpha^3 - 3\alpha^2\alpha^{-1} + 3\alpha\,\alpha^{-2} - \alpha^{-3}\right]$

$$= \frac{1}{-8i}\left[(\alpha^3 - \alpha^{-3}) - 3(\alpha - \alpha^{-1})\right], \text{ como} \begin{cases} \alpha^k - \alpha^{-k} = 2i\operatorname{sen} kx \\ \alpha^k + \alpha^{-k} = 2\cos kx \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{-8}\, i\left[2i\operatorname{sen} 3x - 3(2i\operatorname{sen} x)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} x = \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4}$$

Solución de b)

3) En (1*) elevar a la cuarta:

$$\operatorname{sen}^4 x = \frac{1}{(2i)^4}\left[\alpha^4 - 4\alpha^3\alpha^{-1} + 6\alpha^2\alpha^{-2} - 4\alpha\alpha^{-3} + \alpha^{-4}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[(\alpha^4 + \alpha^{-4}) - 4(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[2\cos 4x - 4(2\cos 2x) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right]$$

Solución de c)

4) sea $\cos x = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$

5) $$\cos^5 x = \frac{1}{32}\left[\alpha^5 + 5\alpha^4\alpha^{-1} + 10\alpha^3\alpha^{-2} + 10\alpha^2\alpha^{-3} + 5\alpha\alpha^{-4} + \alpha^{-5}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[(\alpha^5 + \alpha^{-5}) + 5(\alpha^3 + \alpha^{-3}) + 10(\alpha + \alpha^{-1})\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[2\cos 5x + 5(2\cos 3x) + 10\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\cos 5x + 5\cos 3x + 5\cos x\right]$$

Solución de d)

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\left[\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\right]$$

PROBLEMA 9.4 – sea el binomio: $(1+i)^n$

FORMA POLAR

$1+i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$

$(1+i)^n = 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right]$

BINOMIO DE NEWTON

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n\, i^k$$

$$= C_0^n i^0 + C_1^n i + C_2^n i^2 + C_3^n i^3 + C_4^n i^4 + \cdots\cdots$$

$$= C_0^n + C_1^n i - C_2^n - C_3^n i + C_4^n + C_5^n i - C_6^n + \cdots$$

$$= \left[C_0^n - C_2^n + C_4^n - C_6^n + \cdots\right] + i\left[C_1^n - C_3^n + C_5^n - C_7^n + \cdots\right]$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re}(1+i)^n &= C_0^n - C_2^n + C_4^n - C_6^n + \cdots\cdots = 2^{n/2}\cos(\tfrac{n\pi}{4}) \\ \operatorname{Im}(1+i)^n &= C_1^n - C_3^n - C_5^n - C_7^n + \cdots\cdots = 2^{n/2}\operatorname{sen}(\tfrac{n\pi}{4}) \end{aligned}}$$

Por otro lado tenemos: $\begin{cases} 2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots\cdots + C_n^n \\ 0^n = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \cdots\cdots \end{cases}$

1) sumar: $2^n - 0^n = 2C_0^n + 2C_2^n + 2C_4^n + \cdots\cdots$

$$2^n = 2\left[C_0^n + C_2^n + C_4^n + C_6^n + C_8^n + \cdots\cdots\right]$$

$$\boxed{2^{n-1} = C_0^n + C_2^n + C_4^n + C_6^n + \cdots\cdots}$$

2) Restar: $2^n - 0^n = 2C_1^n + C_3^n + C_5^n + C_7^n + \cdots\cdots$

$$2^n = 2\left[C_1^n + C_3^n + C_5^n + C_7^n + \cdots\cdots\right]$$

$$\boxed{2^{n-1} = C_1^n + C_3^n + C_5^n + C_7^n + \cdots\cdots}$$

3) $\begin{cases} 2^{n-1} = C_0^n + C_2^n + C_4^n + C_6^n + C_8^n + \cdots \\ Re(1+i)^n = C_0^n - C_2^n + C_4^n - C_6^n + C_8^n - \cdots \end{cases}$

4) Sumar :

$$2^{n-1} + Re\,(1+i)^n = 2\,C_0^n + 2\,C_4^n + 2\,C_8^n + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\left[2^{n-1} + Re\,(1+i)^n\right] = C_0^n + C_4^n + C_8^n + C_{12}^n + \cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right] = C_0^n + C_4^n + C_8^n + C_{12}^n + \cdots}$$

5) Restar :

$$2^{n-1} - Re(1+i)^n = 2\,C_2^n + 2\,C_6^n + 2\,C_{10}^n$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[2^{n-1} - 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right] = C_2^n + C_6^n + C_{10}^n + \cdots}$$

6) $\begin{cases} 2^{n-1} = C_1^n + C_3^n + C_5^n + C_7^n + \cdots \\ Im(1+i)^n = C_1^n - C_3^n + C_5^n - C_7^n + \cdots \end{cases}$

7) Sumar :

$$2^{n-1} + Im(1+i)^n = 2C_1^n + 2C_5^n + 2C_9^n + \cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[2^{n-1} + 2^{n/2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right] = C_1^n + C_5^n + C_9^n + \cdots}$$

8) Restar :

$$2^{n-1} - Im(1+i)^n = 2C_3^n + 2C_7^n + 2C_{11}^n + \cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[2^{n-1} - 2^{n/2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right] = C_3^n + C_7^n + C_{11}^n + \cdots}$$

PROBLEMA 9.5 - Hallar la suma : $C_1^n - \frac{1}{3}C_3^n + \frac{1}{9}C_5^n - \frac{1}{27}C_7^n + \cdots$

SOLUCION: Partir de $\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$

Forma polar — Binomio de Newton

$$z = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{cases} |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \theta = \pi/6 \end{cases} \qquad \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n i^k \left(\frac{1}{3^{1/2}}\right)^k$$

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\cos\pi/6 + i\operatorname{sen}\pi/6\right] \qquad = C_0^n + C_1^n i\frac{1}{3^{1/2}} + C_2^n i^2\frac{1}{3} + C_3^n i^3\frac{1}{3^{3/2}} + C_4^n i^4\frac{1}{9} + \cdots$$

$$\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n/2}}\left[\cos n\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{6}\right] \qquad = \left[C_0^n - \frac{1}{3}C_2^n + \frac{1}{9}C_4^n - \frac{1}{27}C_6^n + \cdots\right] + i\left[\frac{1}{3^{1/2}}C_1^n - \frac{1}{3^{3/2}}C_3^n + \cdots\right]$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria :

$$Re\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n/2}}\cos n\frac{\pi}{6} = C_0^n - \frac{1}{3}C_2^n + \frac{1}{9}C_4^n - \frac{1}{27}C_6^n + \cdots$$

$$Im\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n/2}}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3^{1/2}}C_1^n - \frac{1}{3^{3/2}}C_3^n + \frac{1}{3^{5/2}}C_5^n - \cdots$$

$$= \frac{1}{3^{1/2}}\left[C_1^n - \frac{1}{3}C_3^n + \frac{1}{9}C_5^n - \frac{1}{27}C_7^n + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1^n - \frac{1}{3}C_3^n + \frac{1}{9}C_5^n - \frac{1}{27}C_7^n + \cdots = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{6}$$

PROBLEMA 9.6 - Hallar las sumas $\begin{cases} a)\ C_0^n - 3C_2^n + 9\,C_4^n - 27C_6^n + \cdots \\ b)\ C_1^n - 3C_3^n + 9\,C_5^n - 27\,C_7^n \end{cases}$

SOLUCIÓN: sea el complejo $(1 + i\sqrt{3})^n$

Forma polar : — Binomio de Newton

$$2\left[\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^n \qquad (1 + i\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n i^k (\sqrt{3})^k$$

$$2^n\left[\cos\frac{n\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right] \qquad = C_0^n + C_1^n i\sqrt{3} + C_2^n i^2 3 + C_3^n i^3 3\sqrt{3} + C_4^n i^4 .9 + \cdots$$

$$= \left[C_0^n - 3C_2^n + 9C_4^n - 27C_6^n + \cdots\right] + i\left[3^{1/2}C_1^n - 3\cdot 3^{1/2}C_3^n + 9\cdot 3^{1/3}C_5^n - \cdots\right]$$

Donde :

$$Re(1+i\sqrt{3})^n = 2^n \cos\frac{n\pi}{3} = C_0^n - 3\,C_2^n + 9\,C_4^n - 27\,C_6^n + \cdots$$

$$Im(1+i\sqrt{3})^n = 2^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = 3^{1/2}\left[C_1^n - 3\,C_3^n + 9\,C_5^n - 27\,C_7^n + \cdots\right]$$

$$\frac{2^n}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = C_1^n - 3\,C_3^n + 9\,C_5^n - 27\,C_7^n + \cdots$$

PROBLEMA 9.7 – Demostrar que :

a) $1 + C_3^n + C_6^n + \cdots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right]$

b) $C_1^n + C_4^n + C_7^n + \cdots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right]$

c) $C_2^n + C_5^n + C_8^n + \cdots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]$

PROBLEMA 9.8 – Demostrar que :

$$2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_k^{2m}\cos 2(m-k)x + C_m^{2m}$$

SOLUCION:

1) sean $\begin{cases}\alpha = \cos x + i\operatorname{sen} x\\ \alpha^{-1} = \cos x - i\operatorname{sen} x\end{cases}$ y $\begin{cases}\alpha^k = \cos kx + i\operatorname{sen} kx\\ \alpha^{-k} = \cos kx - i\operatorname{sen} kx\end{cases}$

Donde : $\cos x = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$, $\boxed{\alpha + \alpha^{-1} = 2\cos x}$, $\boxed{\alpha^k + \alpha^{-k} = 2\cos kx}$

2) $$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}(\alpha + \alpha^{-1})^{2m}$$

$$2^{2m}\cos^{2m} x = (\alpha + \alpha^{-1})^{2m}$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m}\,\alpha^{2m-k}\,\alpha^{-k} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m}\,\alpha^{2(m-k)} \text{ , si } m-k=0 \Rightarrow m=k$$

$$= C_0^{2m}\alpha^{2m} + C_1^{2m}\alpha^{2(m-1)} + \cdots C_{m-1}^{2m}\alpha^2 + C_m^{2m} + C_{m+1}^{2m}\alpha^{-2} + \cdots + C_{2m-1}^{2m}\alpha^{-2(m-1)} + C_{2m}^{2m}\alpha^{-2m}$$

son iguales los coeficientes equidistantes :

Asociar los coeficientes equidistantes :

$$= \left[C_0^{2m}\alpha^{2m} + C_0^{2m}\alpha^{-2m}\right] + \left[C_1^{2m}\alpha^{2(m-1)} + C_1^{2m}\alpha^{-2(m-1)}\right] + \cdots + \left[C_{m-1}^{2m}\alpha^2 + C_{m-1}^{2m}\alpha^{-2}\right] + C_m^{2m}$$

$$= C_0^{2m}\left[\alpha^{2m} + \alpha^{-2m}\right] + C_1^{2m}\left[\alpha^{2(m-1)} + \alpha^{-2(m-1)}\right] + \cdots + C_{m-1}^{2m}\left[\alpha^2 + \alpha^{-2}\right] + C_m^{2m}$$

$$= C_0^{2m}\,2\cos(2mx) + C_1^{2m}\,2\cos 2(m-1)x + \cdots + C_{m-1}^{2m}\,2\cos 2x + C_m^{2m}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m-1}\cos 2(m-k)x + C_m^{2m}$$

PROBLEMA 9.9 – Demostrar que :

a) $2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_k^{2m+1}\cos(2m-2k+1)x$

b) $2^{2m}\operatorname{sen}^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}\,C_k^{2m}\cos 2(m-k)x + C_m^{2m}$

c) $2^{2m}\operatorname{sen}^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\,C_k^{2m+1}\operatorname{sen}(2m-2k+1)x$

PROBLEMA 9.10

si $w = e^{i2\pi/3}$, demostrar que :

$$(z+a)^n + (z+aw)^n + (z+aw^2)^n = \sum_{k=0}^{p/3} 3\binom{n}{3k} z^{n-3k} a^{3k}$$

en donde : $a \neq 0$, $p = \dot{3}$ (multiplo de 3), p es el mayor entero tal que $p \leq n$.

SOLUCION :

Aplicar el binomio de Newton :

1) $(z+a)^n = z^n + C_1^n z^{n-1}a + C_2^n z^{n-2}a^2 + C_3^n z^{n-3}a^3 + C_4^n z^{n-4}a^4 + \cdots + a^n$

$(z+aw)^n = z^n + C_1^n z^{n-1}aw + C_2^n z^{n-2}a^2w^2 + C_3^n z^{n-3}a^3w^3 + \cdots + a^n w^n$

$$(z+aw^2)^n = z^n + C_1^n z^{n-1} aw^2 + C_2^n z^{n-2} a^2 w^4 + C_3^n z^{n-3} a^3 w^6 + \cdots\cdots + a^n w^{2n}$$

2) Sumar:

$$(z+a)^n + (z+aw)^n + (z+aw^2)^n = 3z^n + C_1^n z^{n-1} a \underbrace{(1+w+w^2)}_{0} + C_2^n z^{n-2} a^2 \underbrace{(1+w^2+w^4)}_{0} +$$

$$+ C_3^n z^{n-3} a^3 \underbrace{(1+w^3+w^6)}_{3} + \cdots + a^n (1+w^n+w^{2n})$$

$$= 3z^n + 3C_3^n z^{n-3} a^3 + C_6^n z^{n-6} a^6 + C_9^n z^{n-9} a^9 + \cdots\cdots$$

$$+ C_{3K}^n z^{n-3K} a^{3K} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{K=0}^{P/3} 3\, C_{3K}^n z^{n-3K} a^{3K} \text{, donde } p = \dot{3} \text{ (múltiplo de 3)}$$

3) Donde:

$1+w+w^2=0$

$1+w^2+w^4=0$, $w^4 = w^3 . w = w$

$\boxed{1+w^3+w^6=3}$, $w^3=1$, $w^6 = w^3 . w^3 = 1$

$1+w^4+w^8=0$

$1+w^5+w^{10}=0$

$\boxed{1+w^6+w^{12}=3}$; $w^{\dot{3}}=1$, $w^{\dot{3}+1}=w$, $w^{\dot{3}+2}=w^2$

$1+w^7+w^{14}=0$

$1+w^8+w^{16}=0$

$1+w^9+w^{18}=3$

En general $\begin{cases} 1+w^{\dot{3}}+w^{\dot{3}}=3 \\ 1+w^{\dot{3}+1}+w^{\dot{3}+2}=1+w+w^2=0 \end{cases}$

Pues:

$w = e^{i2\pi/3}$

$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

$= \cos 120° + i\,\text{sen}\, 120°$

$= -\cos 60° + i\,\text{sen}\, 60°$

$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$w^2 = \cos 240° + i\,\text{sen}\, 240°$

$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$w^3 = \cos 2\pi + i\,\text{sen}\, 2\pi$

$= 1$

$1+w+w^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

10. RAIZ DE UN NUMERO COMPLEJO

DEFINICION 10.1

Una raiz n-ésima del número complejo $z = a + bi$ es el número complejo w, tal que $w^n = z$.

Es decir: $\sqrt[n]{z} = w \iff w^n = z$

Conociendo z, deseamos hallar $w = ?$

1) Supongamos que: $\boxed{w = re^{i\varphi}}$ → $r = ?$, $\varphi = ?$

2) sea: $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ → $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \text{Arg}(z) = \text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\right)$

3) Como:

$$w^n = z$$

$$(re^{i\varphi})^n = \rho e^{i\theta}$$

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$$

$$r^n = \rho \quad \wedge \quad e^{in\varphi} = e^{i\theta}$$

$$\boxed{r = \rho^{1/n}} \quad \wedge \quad \underbrace{e^{i(n\varphi-\theta)} = 1}$$

$$\cos(n\varphi-\theta) + i\,\text{sen}\,(n\varphi-\theta) = 1 + i0$$

$\left.\begin{array}{l} \cos(n\varphi-\theta) = 1 \\ \text{sen}\,(n\varphi-\theta) = 0 \end{array}\right\rangle$ $n\varphi - \theta = 2K\pi$

$$\boxed{\varphi = \frac{\theta + 2K\pi}{n}}$$

4) Reemplazar en (1):

$$w_K = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)}$$

$$= \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$$

$K = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$

Son los "n" raices de $z = a + bi$

PROBLEMA 10.2 Hallar las 12 raices de -2^{12}

SOLUCION:

1) En primer lugar se hallan el módulo y el argumento de $z=-2^{12} < \begin{matrix} |z|=|-2^{12}|=2^{12} \\ \theta=\pi \end{matrix}$

2) Aplicar la fórmula:

$$W_K = \rho^{1/12}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right] \quad \text{, donde por 1)} \begin{matrix} \rho=2^{12} \\ \theta=2\pi \end{matrix}$$

$$=(2^{12})^{1/12}\left[\cos\left(\frac{\pi+2K\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi+2K\pi}{12}\right)\right]$$

$$W_K = 2\left[\cos(15+30K) + i\,\text{sen}\,(15+30K)\right]$$

$$K=0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots,11$$

$$W_0 = 2\left[\cos 15° + i\,\text{sen}\,15°\right] = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$W_1 = 2\left[\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$W_2 = 2\left[\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°\right] = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$W_3 = 2\left[\cos 105° + i\,\text{sen}\,105°\right] = 2\left[-\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°\right]$$

$$W_4 = 2\left[\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°\right] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\vdots$$

$$W_{10} = 2\left[\cos 315° + i\,\text{sen}\,315°\right] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$W_{11} = 2\left[\cos 345° + i\,\text{sen}\,345°\right] = 2\left[\cos 15° - i\,\text{sen}\,15°\right] = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

PROBLEMA 10.3 Hallar las "n" raices de la unidad.

SOLUCION: Se pide hallar: $X_K = \sqrt[n]{1}$ donde $z=1+0i < \begin{matrix} |z|=1 \\ \theta=0° \end{matrix}$

Fórmula: $X_K = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)}$

Luego:

$$\boxed{\begin{aligned} X_K &= e^{i(2K\pi/n)} = \left[e^{i\frac{2\pi}{n}}\right]^K = W^K \\ &= \text{cis}\left(\tfrac{2K\pi}{n}\right) = \left[\cos\tfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\tfrac{2\pi}{n}\right]^K \\ & K=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad \cos\tfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\tfrac{2\pi}{n} = W \end{aligned}}$$

Donde:

$$X_0 = W^0 = 1$$
$$X_1 = W$$
$$X_2 = W^2$$
$$X_3 = W^3$$
$$X_4 = W^4$$
$$\vdots$$
$$X_{n-1} = W^{n-1}$$

Como $W = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}$

$$\Rightarrow W^n = \cos n\tfrac{(2\pi)}{n} + i\,\text{sen}\,n\tfrac{(2\pi)}{n}$$
$$= \cos 2\pi + i\,\text{sen}\,2\pi$$
$$= 1$$

NOTA: $W=\cos\frac{2\pi}{n}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}$ se llama raíz primitiva de la ecuación $x^n-1=0$, porque las potencias enteras de W dan origen a las n raices de la unidad.

Entonces las "n" raices de la unidad serán:

$$\{1, W, W^2, W^3, W^4, \ldots\ldots\ldots\ldots, W^{n-1}\}$$

10.4 PROPOSICION – si W es una raiz enésima de la unidad y $W \neq 1$, entonces:

$$1+W+W^2+W^3+\cdots\cdots\cdots+W^{n-1}=0$$

PRUEBA:

$$1+W+W^2+W^3+\cdots\cdots+W^{n-1} = \frac{1-W^n}{1-W} \qquad \text{donde } W^n=1$$

$$= \frac{1-1}{1-W} \qquad , W \neq 1$$

$$= 0 \; /\!/$$

PROBLEMA 10.5 – Demostrar que si A es un número complejo, cuyo módulo es igual a 1, entonces la ecuación: $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = A$ tiene todas las raices reales y distintas.

SOLUCION:

1) sea $A \in \mathbb{C}$, tal que $\left\{\begin{matrix} |A|=1 \\ Arg(A)=\alpha \end{matrix}\right. > \begin{aligned} A &= \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \\ &= \text{cis}\,\alpha \end{aligned}$

2) Luego: $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+ix}{1-ix} = \sqrt[n]{\text{cis}\,\alpha}$$

$$= \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$= \text{cis}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad \text{llamemos: } \boxed{\varphi_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n}}$$

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \text{cis}\,\varphi_k$$

3) Despejar x:

$$x_k = \frac{\text{cis}\,\varphi_k - 1}{i(1+\text{cis}\,\varphi_k)}$$

$$x_k = \frac{2i\,\text{sen}\,\frac{\varphi_k}{2}\cdot\text{cis}\,\frac{\varphi_k}{2}}{2i\cos\frac{\varphi_k}{2}\cdot\text{cis}\,\frac{\varphi_k}{2}}$$

$$\boxed{x_k = \text{tg}\,\frac{\varphi_k}{2} = \text{tg}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)}$$

$k=0,1,2,3,\ldots,n-1$

Donde:

$$\text{cis}\,\varphi_k - 1 = \cos\varphi_k + i\,\text{sen}\,\varphi_k - 1$$

$$= -(1-\cos\varphi_k) + i\,\text{sen}\,\varphi_k$$

$$= -2\,\text{sen}^2\frac{\varphi_k}{2} + i2\,\text{sen}\,\frac{\varphi_k}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_k}{2}$$

$$= 2i\,\text{sen}\,\frac{\varphi_k}{2}\left[\cos\frac{\varphi_k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi_k}{2}\right]$$

$$1+\text{cis}\,\varphi_k = 1+\cos\varphi_k + i\,\text{sen}\,\varphi_k$$

$$= 2\cos^2\frac{\varphi_k}{2} + i2\,\text{sen}\,\frac{\varphi_k}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_k}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\varphi_k}{2}\left[\cos\frac{\varphi_k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi_k}{2}\right]$$

Los siguientes ecuaciones tienen igual tratamiento que el problema 10.5

PROBLEMA 10.6 Resolver: $(z+i)^n = (z-i)^n$, donde $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

SOLUCION: Debemos hallar $z = ?$

1) De $(z+i)^n = (z-i)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \sqrt[n]{1}, \quad z \neq i$$

$$\frac{z+i}{z-i} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

2) Hacer $\frac{2k\pi}{n} = \alpha_k$ y despejar z:

$$\frac{z+i}{z-i} = \text{cis}\,\alpha_k$$

$$\Leftrightarrow \quad z+i = z.\text{cis}\,\alpha_k - i\,\text{cis}\,\alpha_k$$

$$i(1+\text{cis}\,\alpha_k) = z(\text{cis}\,\alpha_k - 1)$$

$$z = \frac{i(1+\text{cis}\,\alpha_k)}{\text{cis}\,\alpha_k - 1}$$

$$z = \frac{i2\cos\frac{\alpha_k}{2}\cdot\text{cis}\,\frac{\alpha_k}{2}}{2i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\cdot\text{cis}\,\frac{\alpha_k}{2}}$$

$$z_k = \text{cotg}\,\frac{\alpha_k}{2}, \quad \text{como } \alpha_k = \frac{2k\pi}{n}, \text{ entonces: } \frac{\alpha_k}{2} = \frac{k\pi}{n}$$

$$\boxed{z_k = \text{cotg}\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad n \neq 0$$

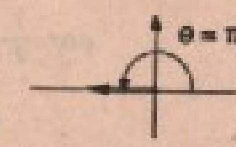
$k=0,1,2,\ldots\ldots\ldots,n-1$

PROBLEMA 10.7 – Hallar la forma polar de $z \in \mathbb{C}$, tal que $(z+1)^n = -1$

SOLUCION: $z = ?$

1) De $(z+1)^n = -1$

$$\Rightarrow \quad z+1 = \sqrt[n]{-1}, \quad \text{donde } -1 = -1+i0 < \begin{matrix}\rho = 1\\ \theta = \pi\end{matrix}$$



$$= \rho^{1/n}\,\text{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad \text{Pero } \rho=1 \to \rho^{1/n}=1$$

$$= \text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$$

$$z+1 = \text{cis}\,\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

2) Despejar z:

$$z = -1+\text{cis}\,\alpha_k, \quad \text{donde } \alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$= -1+\cos\alpha_k + i\,\text{sen}\,\alpha_k$$

$$= -(1-\cos\alpha_k) + i\,\text{sen}\,\alpha_k$$

$$= -2\,\text{sen}^2\frac{\alpha_k}{2} + i\,2\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_k}{2}$$

$$= 2i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\left[\cos\frac{\alpha_k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\right], \quad \text{donde } i = \text{cis}\,(\pi/2)$$

$$= 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{cis}\,\frac{\alpha_k}{2}$$

$$\boxed{z_k = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\alpha_k+\pi}{2}\right)} \quad (2*)$$

$k=0,1,2,\ldots\ldots\ldots,n-1$

3) Se debe de garantizar que z_K esté expresado en forma polar. Para ello debe cumplirse que sen $\frac{\alpha_K}{2}$ sea positivo, para confirmar que el módulo de z_K, que es:

$$|z_K| = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2} \quad \text{sea positivo.}$$

Veamos:

a) Como $0 \leq K \leq n-1$

por 2π: $0 \leq 2\pi K \leq 2\pi\,(n-1)$

Sumar π: $\pi \leq 2\pi K + \pi = 2\pi\,(n-1)+\pi$

$$\text{por } \frac{1}{n}:\quad \frac{\pi}{n} \leq \underbrace{\frac{(2K+1)\pi}{n}} \leq \frac{(2n-1)\pi}{n},\ n>0$$

$$\frac{\pi}{n} \leq \alpha_K \leq \frac{(2n-1)}{n}\pi$$

$$\text{por } \frac{1}{2}:\quad \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\alpha_K}{2} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

$$\frac{\pi}{2n} \leq \frac{\alpha_K}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$$

b) Si $\quad \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\alpha_K}{2} < \pi \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2} > 0$ //

PROBLEMA 10.8 — Hallar la forma polar de $z \in \mathbb{C}$ / $(iz-1)^n = z^n, n \in \mathbb{Z}^+$

SOLUCION:

1) De $(iz-1)^n = z^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{iz-1}{z}\right)^n = 1,\quad z \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{iz-1}{z} = \sqrt[n]{1}$$

$$= \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{n}\right),$$

$K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\frac{iz-1}{z} = \text{cis}\,\alpha_K,\ \text{si}\ \alpha_K = \frac{2K\pi}{n}$$

2) $iz - 1 = z \cdot \text{cis}\,\alpha_K$

$$z\,(i - \text{cis}\,\alpha_K) = 1$$

$$\Rightarrow z_K = \frac{1}{i - \text{cis}\,\alpha_K}$$

3) Pero:

$$i - \text{cis}\,\alpha_K = i - \cos\alpha_K - i\,\text{sen}\,\alpha_K.$$

$$= -\cos\alpha_K + i\,(1 - \text{sen}\,\alpha_K)$$

$$i - \text{cis}\,\alpha_K = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_K\right) + i\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_K\right)\right],$$ por ángulo mitad obtenemos:

$$= -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right) + i\,2\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)$$

$$= -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)\right]$$

$$= -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)\ \text{cis}\left[-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)\right]$$

INVERTIR:

$$\frac{1}{i - \text{cis}\,\alpha_K} = \frac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)}{-2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)}$$

4)

$$\boxed{z_K = \frac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)}{-2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_K}{2}\right)}}$$

$\boxed{K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1}$

PROBLEMA 10.9 — Hallar $z \in \mathbb{C}$, tal que, $(z+1)^n = (z-1)^n$

SOLUCION:

1) $(z+1)^n = (z-1)^n$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1,\ z \neq 1$$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z-1} = \sqrt[n]{1}$$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z-1} = \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{n}\right),\ \text{Hacer}\ \frac{2K\pi}{n} = \alpha_K$$

$K = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z-1} = \text{cis}\,\alpha_K \qquad K \neq 0$$

$$\Rightarrow z + 1 = z \cdot \text{cis}\,\alpha_K - \text{cis}\,\alpha_K$$

$$\Rightarrow 1 + \text{cis}\,\alpha_K = z\,(\text{cis}\,\alpha_K - 1)$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 + \text{cis}\,\alpha_K}{\text{cis}\,\alpha_K - 1}$$

$$z = \frac{1 + \cos\alpha_K + i\,\text{sen}\,\alpha_K}{\cos\alpha_K + i\,\text{sen}\,\alpha_K - 1}$$

$$= \frac{(1 + \cos\alpha_K) + i\,\text{sen}\,\alpha_K}{-(1 - \cos\alpha_K) + i\,\text{sen}\,\alpha_K}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha_K}{2} + i\,2\,\text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_K}{2}}{-2\,\text{sen}^2\frac{\alpha_K}{2} + i\,2\,\text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2}\cos\frac{\alpha_K}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cos\frac{\alpha_K}{2}\left[\cos\frac{\alpha_K}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2}\right]}{\cancel{2}\,i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2}\left[\cos\frac{\alpha_K}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_K}{2}\right]}$$

$$= \frac{1}{i}\,\text{cotg}\,\frac{\alpha_K}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_K = -i\,\text{cotg}\left(\frac{K\pi}{n}\right)}$$

$\boxed{K = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n-1}$

PROBLEMA 10.10– si $n \in \mathbb{Z}^+$, Resolver $\begin{cases} x^n = i & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ -1 + \frac{i}{z} = x & \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

SOLUCION :

1) Se pide hallar $\begin{cases} x = ? \\ z = ? \end{cases}$

2) De $x^n = i \Rightarrow x_k = \sqrt[n]{i}$, de $i \begin{cases} |i| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$x_k = \text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n}\right) \quad , \; k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$$

$$x_k = \text{cis}\,\frac{(1+4k)\pi}{2n}$$

$$\boxed{x_k = \text{cis}\,\alpha_k} \quad \text{siendo} \quad \alpha_k = \frac{(1+4k)\pi}{2n} \;, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$

3) Despejar z de (2) y sustituir el valor de x por x_k :

$$-z + i = xz$$

$$i = (1+x)z$$

$$z = \frac{i}{1+x}$$

$$z = \frac{i}{1 + \text{cis}\,\alpha_k}$$

$$z = \frac{i}{1 + \cos\alpha_k + i\,\text{sen}\,\alpha_k}$$

$$z = \frac{i}{2\cos^2\frac{\alpha_k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_k}{2}}$$

$$z = \frac{i}{2\cos\frac{\alpha_k}{2}\left[\cos\frac{\alpha_k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha_k}{2}\right]}$$

$$= \frac{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha_k}{2}\;\text{cis}\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)} \quad , \; i = \text{cis}\,\pi/2$$

$$z = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha_k}{2}}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_k}{2}\right), \text{ como } \alpha_k = \frac{(1+4k)\pi}{2n}$$

$$z_k = \frac{\text{cis}\left(\frac{\pi - \alpha_k}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{1+4k}{4n}\right)\pi}$$

4) CONCLUSION $\begin{cases} x_k = \text{cis}\,\frac{(1+4k)\pi}{2n} \\ z_k = \dfrac{\text{cis}\left(\frac{\pi - \alpha_k}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha_k}{2}} \end{cases}$, $\alpha_k = \frac{(4k+1)\pi}{2n}$

11. PROPIEDADES DE LAS RAICES DE LA UNIDAD.

P_1) si $1, w, w^2, w^3, \ldots\ldots, w^{n-1}$ son los n-ésimos RAICES de la unidad (Grado n) , entonces :

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots\cdots + w^{n-1} = 0 \quad y \quad w^n = 1$$

PRUEBA :

1) De $x^n - 1 = 0 \iff x^n = 1$

$\iff x = \sqrt[n]{1}$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\begin{cases} x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \\ \quad = \underbrace{\left[\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\right]}_{w}^{k} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = w^k \\ x_0 = 1 \\ x_1 = e^{i2\pi/n} = w \\ x_2 = e^{i4\pi/n} = w^2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = w^{n-1} \\ \text{si } k = n \Rightarrow w^n = e^{i2\pi} = 1 \end{cases}$$

2) $1 + w + w^2 + w^3 + \cdots\cdots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = \frac{0}{1 - w} = 0$, pues $w^n = 1$, $w \neq 1$

3) Ademas $x^n - 1 = 0$ tiene $\begin{cases} \text{a) Una RAIZ Real, que es 1, cuando } n = \text{impar y } n-1 \text{ Raices Complejas, de los cuales } \frac{n-1}{2} \text{ son parejas de números complejos conjugados.} \\ \text{b) dos RAICES REALES : } \pm 1 \text{, cuando } n = \text{par y } n-2 \text{ raices son complejos, de los cuales } \frac{n-2}{2} \text{ son parejas de números complejos conjugados.} \end{cases}$

4) $x^n - 1 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots\cdots(x_{n-1})$

$$= \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}(x - w^k), \text{ siendo } w^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

P_2) La Ecuación $x^{2n} - 1 = 0$ tiene $2n$ RAICES de las cuales $\begin{cases} \text{a) Los RAICES reales son } \pm 1 \\ \text{b) } 2n-2 \text{ son Raices Complejos, de las cuales } \frac{2n-2}{2} = n-1 \text{ son parejas de números complejos conjugados :} \end{cases}$

De $x^{2n}-1=0 \Rightarrow x^{2n}=1$

$$\Rightarrow x=\sqrt[2n]{1}$$

$$\Rightarrow x_k=e^{i\frac{2k\pi}{2n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_k=e^{i\frac{k\pi}{n}}}$$

$k=0,1,2,\dots,2n-1$

Luego:

$$(x^{2n}-1)=(x-e^{0})(x-e^{i\pi/n})\cdots\cdots(x-e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}})(x-e^{i\frac{n\pi}{n}})(x-e^{i\frac{(n+1)\pi}{n}})(x-e^{i\frac{(n+2)\pi}{n}})\cdots$$

$$\cdots\cdots(x-e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}})$$

$$=(x-1)\underbrace{(x-e^{i\pi/n})\cdots(x-e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}})}_{\substack{k=1,2,3,\dots,n-1\\ \prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)}}(x+1)\underbrace{(x-e^{i\frac{(n+1)\pi}{n}})\cdots\cdots(x-e^{i\frac{(2n-1)\pi}{n}})}_{\substack{k=n+1,\ n+2,\dots\dots,2n-1\\ \prod_{k=1}^{n-1}(x-x_{2n-k})}}$$

$$=(x^2-1)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\cdots(x-x_{2n-1})$$

son conjugados

Donde: x_k y x_{2n-k} son conjugados, Luego $x_{2n-k}=\bar{x}_k$, $k=1,2,\dots,2n-1$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)\prod_{k=1}^{n-1}(x-\bar{x}_k)$$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\bar{x}_k)$$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2-(\bar{x}_k+x_k)x+x_k\bar{x}_k\right],\ \text{pero}\ \begin{cases}\bar{x}_k+x_k=2Re(x_k)\\ x_k\,\bar{x}_k=|x_k|^2\end{cases}$$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left\{x^2-\left[2Re(x_k)\right]x+|x_k|^2\right\},\ \text{como}\ x_k=e^{i\frac{k\pi}{n}}\ \text{entonces}\begin{cases}|x_k|=1\\ Re(x_k)=\cos\frac{k\pi}{n}\end{cases}$$

$$=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right]$$

$$(I)\quad \boxed{\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right]}\quad \forall x\in\mathbb{C}-\{1,-1\}$$

a) si $x=i \Rightarrow$

$$\frac{i^{2n}-1}{i^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[i^2-2\cos\frac{k\pi}{n}i+1\right]$$

$$\frac{(-1)^n-1}{-2}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[-2i\cos\frac{k\pi}{n}\right]$$

$$=(-2i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$$

$$\frac{(-1)^n-1}{(-2)(-2i)^{n-1}}=\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}\ ,\ \text{donde}\ \frac{1}{(-i)^{n-1}}=i^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{\left[1-(-1)^n\right]i^{n-1}}{2^n}=\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}}$$

b) En (I), si $x=1$, en el límite, el valor real de $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right]$, es:

$$\frac{(x^n-1)(x^n+1)}{(x-1)(x+1)}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[1-2\cos\frac{k\pi}{n}+1\right]$$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)(x^n+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[\quad\right]$$

$$\frac{\overbrace{(1+1+1+\cdots\cdots+1)}^{n}(1+1)}{1+1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left[2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right]$$

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left[1-\cos\frac{k\pi}{n}\right]\quad ;\text{donde: } 1-\cos\frac{k\pi}{n}=2\,\text{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}4\,\text{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$$

$$n=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\text{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$$

$$n = \left[2^{n-1} \prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{K\pi}{2n} \right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n} = 2^{n-1} \prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{K\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{K\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}} \quad \text{siempre que} \quad 0 < \frac{K\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$$

c) En (I), en el límite cuando $x = -1$, se obtiene:

$$\boxed{\prod_{K=1}^{n-1} \cos \frac{K\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}} \qquad \text{si } 0 < \frac{K\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$$

d) Como: $\displaystyle\prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{K\pi}{n} = \prod_{K=1}^{n-1} \left(2 \operatorname{sen} \frac{K\pi}{2n} \cdot \cos \frac{K\pi}{2n} \right)$

$$= 2^{n-1} \left(\prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{K\pi}{2n} \right) \left(\prod_{K=1}^{n-1} \cos \frac{K\pi}{2n} \right)$$

$$= 2^{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \right)$$

$$\boxed{\prod_{K=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{K\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}} \quad //$$

P_4) Las raices de la unidad provienen de resolver la ecuación $x^n - 1 = 0$

Consecuencias:

1) si n = entero impar, entonces:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)$$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

Por tanto:

Resolver la Ecuación: $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$, es equivalente en hallar las Raices Complejas de $x^n - 1 = 0$, con $x \neq 1$

2) si $n = 2m$ es par, entonces:

$$x^{2m} - 1 = (x^2)^m - 1 = (x^2 - 1)(x^{2m-2} + x^{2m-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^{2m} - 1}{x^2 - 1} = x^{2m-2} + x^{2m-4} + \cdots + x^2 + 1$$

Por tanto, resolver la ecuación $x^{2m-2} + x^{2m-4} + \cdots + x^2 + 1$ es equivalente a Resolver la ecuación $x^{2n} - 1 = 0$, con $x \neq \pm 1$

3) La ecuación: $x^{2n} + x^n + 1 = 0$, tiene $2n$ raices complejas de las cuales "n" son parejos de números complejos conjugados.

Dichas raices son: $x^n = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$$x^n = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$x_K = \sqrt[n]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$ si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$= |z|^{1/n} (\cos \alpha_K + i \operatorname{sen} \alpha_K)$

$$\alpha_K = \frac{\theta + 2K\pi}{n} = \frac{\frac{2\pi}{3} + 2K\pi}{n} = \frac{2\pi(3K+1)}{n}$$

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = 2\pi/3$, $\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} \right| = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$$x_K = \cos \frac{2\pi(3K+1)}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi(3K+1)}{n} = \operatorname{cis} \frac{2\pi(3K+1)}{n}$$

$x_0 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$

$x_1 = \operatorname{cis} \frac{8\pi}{n}$

$x_2 = \operatorname{cis} \frac{14\pi}{n}$

$\vdots$

$x_{n-1} = \operatorname{cis}(2\pi - \frac{4\pi}{n}) = \operatorname{cis}(-\frac{4\pi}{n}) = \overline{x'_0}$

$$x'_n = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$x'_K = \sqrt[n]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$ si $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

$= |z|^{1/n} (\cos \alpha'_K + i \operatorname{sen} \alpha'_K)$

$$\alpha'_K = \frac{\theta + 2K\pi}{n} = \frac{\frac{4\pi}{3} + 2K\pi}{n} = \frac{2\pi(3k+2)}{n}$$

$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} \right| = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$$x'_K = \cos \frac{2\pi(3K+2)}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi(3K+2)}{n} = \operatorname{cis} \frac{2\pi(3K+2)}{n}$$

$x'_0 = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{n}$

$x'_1 = \operatorname{cis} \frac{10\pi}{n}$

$x'_2 = \operatorname{cis} \frac{16\pi}{n}$

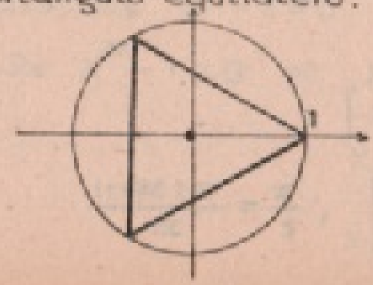
$x'_{n-1} = \operatorname{cis}(2\pi - \frac{2\pi}{n}) = \operatorname{cis}(-\frac{2\pi}{n}) = \overline{x_0}$

En general: $x'_K = \overline{x}_K = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi(3K+1)}{n}\right)$

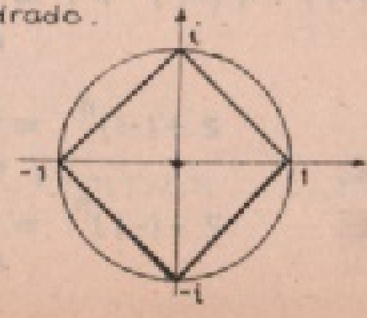
4) Geométricamente: Las n raices de la unidad son vértices de un polígono regular de n lados.

EJEMPLOS:

a) Las 3 raices de $x^3 = 1$, que son $\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\}$ son vértices de un triángulo equilátero.



b) Las 4 raices de $x^4 - 1 = 0$, que son $\{1, -1, i, -i\}$ son vértices de un cuadrado.



PROBLEMA 11.1 - Usando la Ecuación $x^{2n}+x^n+1=0$, hallar en su forma más simple : $\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{(3K+1)\pi}{3n}$

SOLUCION :

1) Al resolver la Ecuación : $x^{2n}+x^n+1=0$, obtenemos : $x^n=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$, de los cuales :

$$x^n=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow X_K=\text{cis}\left[\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right]$$

$$K=0,1,2,\ldots\ldots,n-1$$

$$x^n=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \bar{X}_K=\text{cis}\left[\frac{-2\pi(3K+1)}{3n}\right]$$

son conjugados

2) Luego : $x^{2n}+x^n+1=\prod_{K=0}^{n-1}(X-X_K)\prod_{K=0}^{n-1}(X-\bar{X}_K)$

$$=\prod_{K=0}^{n-1}(X-X_K)(X-\bar{X}_K)$$

$$x^{2n}+x^n+1=\prod_{K=0}^{n-1}\left[x^2-X(X_K+\bar{X}_K)+|X_K|^2\right] \text{ donde } \begin{cases} X_K+\bar{X}_K=\text{Re}\left[\text{cis}\,\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right] \\ \qquad =2\cos\left[\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right] \\ |X_K|=1 \end{cases}$$

(2✱) $$\boxed{x^{2n}+x^n+1=\prod_{K=0}^{n-1}\left[x^2-2X\cos\left[\frac{2\pi(3K+1)}{3n}\right]+1\right]}$$

3) La igualdad en (2✱) es una identidad de polinomios que se cumple para todo $X\in\mathbb{C}$.

a) si $X=-1$, tendremos :

$$(-1)^{2n}+(-1)^n+1=\prod_{K=0}^{n-1}\left[(-1)^2-2(-1)\cos\alpha+1\right],\ \alpha=\frac{2\pi(3K+1)}{3n}$$

$$2+(-1)^n=\prod_{K=0}^{n-1}\left[2+2\cos\alpha\right]$$

$$2+(-1)^n=\prod_{K=0}^{n-1}\left[4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right],\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi(3K+1)}{3n}.$$

$$2+(-1)^n=4^{n-1}\left[\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(3K+1)}{3n}\right]^2$$

$$\Rightarrow \prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(3K+1)}{3n}=\sqrt{\frac{2+(-1)^n}{4^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow \prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(3K+1)}{3n}=\frac{\sqrt{2+(-1)^n}}{2^{n-1}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}, & \text{si } n=\dot{2} \\ \frac{1}{2^{n-1}}, & \text{si } n=\dot{2}+1\end{cases}$$

b) si $X=1$, en (2✱) tendremos :

$$1+1+1=\prod_{K=0}^{n-1}\left[1-2\cos\alpha+1\right]$$

$$3=\prod_{K=0}^{n-1}\left[2(1-\cos\alpha)\right]$$

$$3=\prod_{K=0}^{n-1}\left[4\,\text{sen}^2\frac{\pi(3K+1)}{3n}\right]$$

$$3=4^{n-1}\left[\prod_{K=0}^{n-1}\text{sen}\,\frac{\pi(3K+1)}{3n}\right]^2$$

$$\prod_{K=0}^{n-1}\text{sen}\,\frac{\pi(3K+1)}{3n}=\frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}$$

PROBLEMA 11.2 - sea ε una RAIZ primitiva de la unidad de grado $2n$.

Calcular la suma : $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

SOLUCION :

1) Las raíces de la unidad de grado $2n$, se obtiene de resolver la ecuación : $x^{2n}-1=0$

De $x^{2n}-1=0 \Rightarrow x=\sqrt[2n]{1}$

$$X_K=e^{i2K\pi/2n},\ K=0,1,2,3,\ldots\ldots,2n-1$$

$$X_K=e^{iK\pi/n}$$

Donde: $X_0=1$, $X_1=\boxed{\mathcal{E}=e^{i\pi/n}}$, $X_2=\mathcal{E}^2=e^{i2\pi/n}$, $X_3=\mathcal{E}^3=e^{i3\pi/n}$, $\ldots$, $X_n=\mathcal{E}^n=\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}$

2) Pero: $1+\mathcal{E}+\mathcal{E}^2+\cdots\cdots+\mathcal{E}^{n-1}=\dfrac{1-\mathcal{E}^n}{1-\mathcal{E}}=\dfrac{1-(-1)}{1-\mathcal{E}}=\dfrac{2}{1-\mathcal{E}}$ //

PROBLEMA II.3 – Calcular $1+2w+3w^2+\cdots\cdots+nw^{n-1}$, donde w es una raíz n-ésima de 1

SOLUCION:

Los raices n-ésimas de la unidad son de la forma: $X_K=e^{i2K\pi/n}$, $K=0,1,2,\ldots\ldots,n-1$.

1) Hacer: $S=1+2w+3w^2+\cdots\cdots\cdots+nw^{n-1}$

2) $(1-w)S=(1+2w+3w^2+\cdots+nw^{n-1})-(w+2w^2+3w^3+\cdots+(n-1)w^{n-1}+nw^n)$

$$=\underbrace{1+w+w^2+\cdots\cdots+w^{n-1}}-nw^n$$

$(1-w)S=\dfrac{1-w^n}{1-w}-nw^n$; pero $w^n=1$ porque $w=e^{i2\pi/n}=X_1$

$(1-w)S=\;0-n$

$$\boxed{S=\frac{-n}{1-w}}\quad ,\text{si } w\neq 1$$

3) $w=1 \Rightarrow S=1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$.

PROBLEMA II.4 – Calcular $1+4w+9w^2+\cdots\cdots+n^2w^{n-1}$, donde w es una RAIZ n-ésima de 1.

SOLUCION:

1) Hacer $S=1+4w+9w^2+\cdots\cdots+n^2w^{n-1}$

2) $(1-w)S=(1+4w+9w^2+\cdots+n^2w^{n-1})-(w+4w^2+9w^3+\cdots+(n-1)^2w^{n-1}+n^2w^n)$

$$=1+3w+5w^2+\cdots\cdots+(n^2-(n-1)^2)w^{n-1}-n^2w^n$$

$$=\underbrace{1+3w+5w^2+\cdots\cdots+(2n-1)w^{n-1}}_{T}-n^2\cancel{w^n}_{1}$$

3) Llamar: $T=1+3w+5w^2+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)w^{n-1}$

4) Donde:

$$(1-w)T=\left(1+3w+5w^2+\cdots+(2n-1)w^{n-1}\right)-\left(w+3w^2+5w^3+\cdots+(2n-3)w^{n-1}+(2n-1)w^n\right)$$

$$(1-w)T=1+2w+2w^2+\cdots\cdots\cdots+2w^{n-1}-(2n-1)w^n$$

$$=1+2(w+w^2+w^3+\cdots\cdots+w^{n-1})-(2n-1)w^n$$

$$T=\frac{1+2(w+w^2+w^3+\cdots\cdots+w^{n-1})}{1-w}-\frac{(2n-1)w^n}{1-w}$$

5) Reemplazar en 2) y despejar S:

$$S=\frac{1+2(w+w^2+w^3+\cdots\cdots+w^{n-1})}{(1-w)^2}-\frac{(2n-1)w^n}{(1-w)^2}-\frac{n^2w^n}{1-w}$$

6) a) Como: $w^n=1$, $1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1}=0 \Rightarrow w+w^2+\cdots+w^{n-1}=-1$, entonces:

$$S=\frac{1+2(-1)}{(1-w)^2}-\frac{2n-1}{(1-w)^2}-\frac{n^2}{1-w}=-\frac{2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}\quad ,\text{si } w\neq 1$$

b) si $w=1 \Rightarrow S=1+4+9+\cdots\cdots+n^2$

$$S=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$$

PROBLEMA II.5 – Hallar las sumas:

a) $\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots\cdots\cdots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$

b) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}+\cdots\cdots\cdots+(n-1)\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$

SOLUCION:

1) Hacer: $S=\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots\cdots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$

$$iT=i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+2i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}+\cdots\cdots+i(n-1)\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

2) Sumar:

$$S+iT=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)+2\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+(n-1)\left[\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

$=e^{i2\pi/n}+2e^{i4\pi/n}+\cdots+(n-1)e^{i2(n-1)\pi/n}$, Hacer $W=e^{i2\pi/n}$. Pues $X_K=e^{\frac{i2K\pi}{n}}=\left(e^{i2\pi/n}\right)^K=W^K$

$S+iT=W+2W^2+3W^3+\cdots\cdots+(n-1)W^{n-1}$ $\quad K=0,1,\ldots,n-1$ son las n raíces de 1.

El objetivo, es hallar $S=$ parte real y $T=$ parte imaginaria.

Pero antes, se debe hallar la suma: $W+2W^2+\cdots\cdots+(n-1)W^{n-1}$

3) Hacer $M = w + 2w^2 + 3w^3 + \cdots + (n-1)w^{n-1}$

$$= w\underbrace{\left(1 + 2w + 3w^2 + \cdots + (n-1)w^{n-2}\right)}_{R}$$

4) Hacer $R = 1 + 2w + 3w^2 + (n-1)w^{n-2}$

$$\Rightarrow (1-w)R = (1+2w+3w^2+\cdots+(n-1)w^{n-2}) - (w+2w^2+3w^3+\cdots+(n-2)w^{n-2}+(n-1)w^{n-1})$$

$$= \underbrace{1+w+w^2+\cdots+w^{n-2}}_{-w^{n-1}} - (n-1)w^{n-1}$$

Pero $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1} = 0 \Rightarrow 1+w+w^2+\cdots+w^{n-2} = -w^{n-1}$.

$$= -w^{n-1} - (n-1)w^{n-1}$$

$$(1-w)R = -nw^{n-1} \Rightarrow R = \frac{-nw^{n-1}}{1-w}$$

5) Reemplazar en 3) : $M = w\left[\frac{-nw^{n-1}}{1-w}\right] = -\frac{nw^n}{1-w} = -\frac{n}{1-w}$, $w^n = 1$

Donde : $M = -\frac{n}{1-w} = -i\frac{n}{2}\cotg\frac{\pi}{n} - \frac{n}{2}$ Ver : problema 2, pág. 21

6) Reemplazar en 2) :

$$S + iT = -\frac{n}{2} - i\frac{n}{2}\cotg\frac{\pi}{n} \quad \begin{cases} S = -\frac{n}{2} \\ T = -\frac{n}{2}\cotg\frac{\pi}{n} \end{cases}$$

PROBLEMA II.6 – Hallar las sumas:

a) $1 + \cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + n\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$

b) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + n\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$

SOLUCION :

1) Hacer : $S = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + n\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$

$iT = i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + 2i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + ni\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$

2) sumar :

$$S+iT = 1 + i0 + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right) + 2\left(\cos\frac{4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + n\left[\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

$$= e^0 + e^{i2\pi/n} + 2e^{i4\pi/n} + \cdots + ne^{i2(n-1)\pi/n}$$

$$S + iT = 1 + w + 2w^2 + 3w^3 + \cdots + nw^{n-1} \quad , \quad w = e^{i2\pi/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{-n}{1-w} - \frac{w}{1-w}$$

Donde :

a) $\frac{-n}{1-w} = \frac{n}{\cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} - 1}$ $\wedge$ b) $-\frac{w}{1-w} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\cotg\frac{\pi}{n}$.

$$= \frac{n}{-(1-\cos\alpha) + i\operatorname{sen}\alpha} = \frac{n}{-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + i2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} \quad , \alpha = \frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{n}{2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right]}$$

$$= \frac{in\left[\cos\frac{\alpha}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right]}{-2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = -\frac{n}{2} - i\frac{1}{2}\cotg\frac{\pi}{n}$$

$$S + iT = -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\cotg\frac{\pi}{n} - i\frac{1}{2}\cotg\frac{\pi}{n} \quad \begin{cases} S = -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\ T = -\frac{n}{2}\cotg\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\cotg\frac{\pi}{n} \end{cases}$$

PROBLEMA II.7 – si $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, demostrar que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(a + bw_k) = a^n + (-1)^{n-1}b^n$$

Prueba :

1) De $x^n = 1$, se obtiene las raices $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2) Luego : $\boxed{x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - w_k)}$ ← es una identidad de polinomios, que se cumple $\forall\, x \in \mathbb{C}$

3) En particular, si hacemos : $x = -\frac{a}{b}$

$$\left(\frac{-a}{b}\right)^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{a}{b} - w_k\right]$$

$$(-1)^n\frac{a^n}{b^n} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left[(-1)\frac{(a+bw_k)}{b}\right]$$

$$\frac{(-1)^n a^n - b^n}{b^n} = \frac{(-1)^n}{b^n}\prod_{K=0}^{n-1}\left[a + bw_K\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(-1)^n a^n - b^n}{(-1)^n} = \prod_{K=0}^{n-1}\left[a + bw_K\right]$$

, Donde: $\frac{(-1)^n a^n}{(-1)^n} - \frac{b^n}{(-1)^n} = a^n + (-1)(-1)^{-n}b^n = a^n + (-1)^{1-n}b^n = a^n + (-1)^{n-1}b^n$

$$\Rightarrow \quad a^n + (-1)^{n-1} b = \prod_{K=0}^{n-1}\left[a + bw_K\right] \;//$$

PROBLEMA II.8 - si $w_K = \cos\frac{2K\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2K\pi}{n}$, demostrar que:

$$\prod_{K=0}^{n-1}\left[w_K^2 - 2w_K\cos\theta + 1\right] = 2(1-\cos n\theta)$$

PRUEBA:

1) $x^n - 1 = \prod_{K=0}^{n-1}(x - w_K)$ se cumple $\forall\, x \in \mathbb{C}$

2) En particular se cumplen para $\begin{cases} x = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x^{-1} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

Reemplazar x y x^{-1} en (1)

a) $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)^n - 1 = \prod_{K=0}^{n-1}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta - w_K)$

$$\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta - 1 = \prod_{K=0}^{n-1}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta - w_K)$$

b) $(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n - 1 = \prod_{K=0}^{n-1}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta - w_K)$

$$\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\, n\theta - 1 = \prod_{K=0}^{n-1}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta - w_K)$$

3) Multiplicar a) por b):

$$(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta - 1)(\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\, n\theta - 1) = \prod_{K=0}^{n-1}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta - w_K)(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\theta - w_K)$$

$$\left[(\cos n\theta - 1) + i\,\mathrm{sen}\, n\theta\right]\left[(\cos n\theta - 1) - i\,\mathrm{sen}\, n\theta\right] = \prod_{K=0}^{n-1}\left[(\cos\theta - w_K) + i\,\mathrm{sen}\theta\right]\left[(\cos\theta - w_K) - i\,\mathrm{sen}\theta\right]$$

$$(\cos n\theta - 1)^2 + \mathrm{sen}^2 n\theta = \prod_{K=0}^{n-1}(\cos\theta - w_K)^2 + \mathrm{sen}^2\theta$$

$$\cos^2 n\theta - 2\cos n\theta + 1 + \mathrm{sen}^2 n\theta = \prod_{K=0}^{n-1}\left[\cos^2\theta - 2w_K\cos\theta + w_K^2 + \mathrm{sen}^2\theta\right]$$

$$2(1 - 2\cos n\theta) = \prod_{K=0}^{n-1}\left[w_K^2 - 2w_K\cos\theta + 1\right] \;//$$

PROBLEMA II.9 - Hallar todos los números complejos que satisfacen a la condición $\bar{z} = z^{n-1}$, donde $\bar{z}$ es el conjugado de z.

SOLUCION:

1) En $\bar{z} = z^{n-1}$ multiplicar ambos miembros por z

$\Rightarrow \quad z\bar{z} = z \cdot z^{n-1}$

$\Rightarrow \quad |z|^2 = z^n$ .... (1*)

2) Además, al sacar módulos en ambos miembros en 1)

$|\bar{z}| = |z^{n-1}|$

$\Rightarrow \quad |z| = |z|^{n-1}$, pues $\begin{cases} |\bar{z}| = |z| \\ |z^{n-1}| = |z|^{n-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad |z| - |z|^{n-1} = 0$

$\Rightarrow \quad |z|(1 - |z|) = 0 \Rightarrow |z| = 0 \quad \vee \quad 1 - |z| = 0$

$\Rightarrow \quad |z| = 0 \quad \vee \quad \boxed{|z| = 1}$

3) a) si $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$

b) si $|z| = 1$, reemplazar en (1*):

$z^n = 1 \Rightarrow z = \sqrt[n]{1}$

$\Rightarrow \quad z = e^{i\frac{2K\pi}{n}}$, $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1.$

PROBLEMA 11.10 – Demostrar que las raíces de la ecuación $\lambda(z-a)^n+\mu(z-b)^n=0$ donde λ,μ,a,b son complejos, están situados en una circunferencia, la cual, en caso particular, puede degenerarse en una recta (n es un número natural)

SOLUCION:

1) En $\lambda(z-a)^n+\mu(z-b)^n=0$ dividir por $(z-b)^n$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n=-\frac{\mu}{\lambda}$$

2) Sacar módulo, en ambos miembros:

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|^n=\left|-\frac{\mu}{\lambda}\right|$$

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|^n=\left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \Rightarrow \left|\frac{z-a}{z-b}\right|=\sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$$

$$\Rightarrow |z-a|=\sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}\,|z-b| \text{ es } \begin{cases} \text{a) una circunferencia, si } \sqrt[n]{\frac{\mu}{\lambda}}\neq 1. \\ \text{b) una recta si } \sqrt[n]{\frac{\mu}{\lambda}}=1 \end{cases}$$

PROBLEMA 11.11 – Resolver la ecuación:

$$\cos\theta+C_1^n\cos(\theta+\alpha)x+C_2^n\cos(\theta+2\alpha)x^2+\cdots+C_n^n\cos(\theta+n\alpha)x^n=0$$

SOLUCION: Se trata de hallar $x=?$

1) sean $S=\cos\theta+C_1^n\cos(\theta+\alpha)x+\cdots\cdots+C_n^n\cos(\theta+n\alpha)x^n$

$$iT=i\operatorname{sen}\theta+iC_1^n\operatorname{sen}(\theta+\alpha)x+\cdots\cdots+iC_n^n\operatorname{sen}(\theta+n\alpha)x^n$$

2) $S+iT=(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)+C_1^n[\cos(\theta+\alpha)x+i\operatorname{sen}(\theta+\alpha)x]+\cdots+C_n^n[\cos(\theta+n\alpha)x^n+i\operatorname{sen}(\theta+n\alpha)x^n]$

$$=(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)+C_1^n[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta][\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha]x+\cdots+C_n^n[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta][\cos n\alpha+i\operatorname{sen} n\alpha]x^n$$

$$=\underbrace{(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}_{z}\left[1+C_1^n\underbrace{(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)}_{w}x+\cdots+C_n^n\underbrace{(\cos n\alpha+i\operatorname{sen} n\alpha)}_{w^n}x^n\right]$$

$$=z\Big[\underbrace{1+C_1^n wx+\cdots\cdots+C_n^n w^n x^n}_{(1+wx)^n}\Big]$$

$$\boxed{S+iT=z\,(1+wx)^n}$$

3) $\overline{S+iT}=\overline{z\,(1+wx)^n}$, $S\in\mathbb{R}$, $T\in\mathbb{R}$

$$\boxed{S-iT=\bar{z}\,(1+\bar{w}x)^n}$$

4)
$$\begin{cases} S+iT=z\,(1+wx)^n \\ S-iT=\bar{z}\,(1+\bar{w}x)^n \end{cases}$$

$$2S=z(1+wx)^n+\bar{z}(1+\bar{w}x)^n$$

$$S=\frac{1}{2}\left[z(1+wx)^n+\bar{z}(1+\bar{w}x)^n\right]$$

5) se desea resolver $S=0 \Leftrightarrow z(1+wx)^n+\bar{z}(1+\bar{w}x)^n=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+wx}{1+\bar{w}x}\right)^n=-\frac{\bar{z}}{z} \text{ , donde : } -\frac{\bar{z}}{z}=-\frac{\bar{z}\,\bar{z}}{z\,\bar{z}}=-\frac{\bar{z}^2}{|z|}=-[\cos 2\theta-i\operatorname{sen}2\theta]=\overbrace{e^{i\pi}}^{-1}e^{-i2\theta}=e^{i(\pi-2\theta)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+wx}{1+\bar{w}x}\right)^n=e^{i(\pi-2\theta)}$$

siendo $z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$
$\bar{z}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$
$|z|=1$
$\bar{z}^2=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta-i2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$=\cos 2\theta-i\operatorname{sen}2\theta$
$w=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$
$\bar{w}=\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha$

$$\Rightarrow \frac{1+wx}{1+\bar{w}x}=\sqrt[n]{e^{i(\pi-2\theta)}}$$

$$=\operatorname{cis}\left[\frac{(\pi-2\theta)+2k\pi}{n}\right]$$

$$\frac{1+wx}{1+\bar{w}x}=\operatorname{cis}\left[\frac{(2k+1)\pi-2\theta}{n}\right] \quad \text{, sea} \quad \beta=\frac{(2k+1)\pi-2\theta}{n}$$

$$1+wx=(1+\bar{w}x)\operatorname{cis}\beta$$

$$1+\underline{wx}=\operatorname{cis}\beta+\underline{\bar{w}x}\operatorname{cis}\beta$$

$$1-\operatorname{cis}\beta=x\left[\bar{w}\operatorname{cis}\beta-w\right]$$

$$x=\frac{1-\operatorname{cis}\beta}{\bar{w}\operatorname{cis}-w}$$

$$=\frac{1-\operatorname{cis}\beta}{\bar{w}\left(\operatorname{cis}\beta-\frac{w}{\bar{w}}\right)} \text{ , Donde: } \frac{w}{\bar{w}}=\frac{w.w}{\bar{w}\,w}=\frac{w^2}{|w|^2}=\cos 2\alpha+i\operatorname{sen}2\alpha$$
$$=\operatorname{cis}2\alpha$$

$$= \frac{1 - \operatorname{cis}\beta}{\overline{w}\,(\operatorname{cis}\beta - \operatorname{cis}2\alpha)}$$

$$= \frac{-2i\,\operatorname{sen}\beta/2 \,.\operatorname{cis}(\beta/2)}{\overline{w}\,2i\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-2\alpha}{2}\right)\operatorname{cis}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\beta/2\ \operatorname{cis}\left[\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}-\alpha\right]}{\overline{w}\ \operatorname{sen}\left(\frac{\beta-2\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\ \operatorname{cis}[-\alpha]}{\overline{w}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-2\alpha}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-2\alpha}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\operatorname{Sen}\left[\frac{(2K+1)\pi-2\theta}{2n}\right]}{\operatorname{Sen}\left[\frac{\frac{(2K+1)\pi-2\theta}{n}-2\alpha}{2}\right]}$$

$$= -\frac{\operatorname{Sen}\left[\frac{(2K+1)\pi-2\theta}{2n}\right]}{\operatorname{Sen}\left[\frac{(2K+1)\pi-2\theta-2n\alpha}{2n}\right]}\ //$$

$$\operatorname{cis}\beta-\operatorname{cis}2\alpha=(\cos\beta-\cos2\alpha)+i(\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}2\alpha)$$

$$= -2\operatorname{sen}\frac{\beta+2\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta-2\alpha}{2}+i2\cos\frac{\beta+2\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta-2\alpha}{2}$$

$$= 2i\operatorname{sen}\frac{\beta-2\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta+2\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\beta+2\alpha}{2}\right]$$

$$= 2i\operatorname{sen}\frac{\beta-2\alpha}{2}\ \operatorname{cis}\left(\frac{\beta+2\alpha}{2}\right)$$

$$1-\operatorname{cis}\beta = 1-\cos\beta-i\operatorname{sen}\beta$$

$$= 2\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}-i\,2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

$$= -2i\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\left[\cos\frac{\beta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right]$$

$$= -2i\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{cis}(\beta/2)$$

$$\frac{\operatorname{cis}(-\alpha)}{\overline{w}} = \frac{\cos(-\alpha)+i\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha} = 1$$

12. RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO COMPLEJO

La raíz cuadrada del número complejo $z = a + ib$ es otro número complejo $w = x + iy$, tal que $z = w^2$.

Es decir: $\boxed{\sqrt{z} = w \iff z = w^2}$ donde w se debe hallar.

Hay dos formas de hallar la raíz cuadrada de $z = a + ib$.

12.1 $\boxed{1^{\underline{a}}\ \text{FORMA}}$ Resolviendo un sistema de dos ecuaciones :

(1) Sea : $\sqrt{a+ib} = x + iy \iff a + ib = (x+iy)^2$

$$= x^2 - y^2 + 2xyi$$

(2) $\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (\mathrm{I}) \\ 2xy = b & (\mathrm{II}) \end{cases}$ $\quad x = ?\ ,\ y = ?$

(3) Elevar al cuadrado en (1) : $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2$

(4) Elevar al cuadrado en (2) : $4x^2y^2 = b^2$

Sumar : $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2$

$$(x^2+y^2)^2 = a^2 + b^2$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ ---- (3) (Sólo se toma la Raíz positiva, porque x^2+y^2 es positiva)

(5) Resolver el sistema formado por (1) y (3)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$$

$$2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}}$$

(6) Los valores de "y" se hallan sustituyendo los valores de "x" en la Ecuación (II) del sistema (2).

EJEMPLO 1 - Hallar las raices cuadradas de $z = 2+2\sqrt{3}i$

Solución

1) Al resolver el sistema $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ 2xy=2\sqrt{3} \cdots (\text{II}) \end{cases}$

se obtiene: $x=\pm\sqrt{\dfrac{|z|+Re(z)}{2}}$

$$x=\pm\sqrt{\frac{4+2}{2}}=\pm\sqrt{3}$$

2) Reemplazar "x" en (II):

si $x=\sqrt{3} \Rightarrow y=1$

si $x=-\sqrt{3} \Rightarrow y=-1$

3) Las raices cuadradas son $\begin{cases} \sqrt{3}+i \\ -\sqrt{3}-i \end{cases}$

EJEMPLO 2 - Hallar las raices cuadradas de $z=-3-4i$.

Solución

1) Resolver el sistema $\begin{matrix} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=-4 \cdots\cdots (\text{II}) \end{matrix}$

se obtiene: $x=\pm\sqrt{\dfrac{|z|+Re(z)}{2}}$

$$x=\pm\sqrt{\frac{5-3}{2}}=\pm 1$$

2) Reemplazar "x" en (II):

si $x=1 \Rightarrow y=-2$

si $x=-1 \Rightarrow y=2$

3) Las raices cuadradas de z son $\begin{cases} 1-2i \\ -1+2i \end{cases}$

12.2 $\boxed{2^{\underline{a}} \text{ FORMA}}$

Usando el Teorema: $w_K=|z|^{1/n}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)$, $K=0,1,\ldots,n-1$

Dado: $z=a+bi$ $\begin{cases} |z|=\sqrt{a^2+b^2} \\ \theta=Arg(z) \end{cases}$, entonces las raices cuadradas de z son:

$$\boxed{w_K=|z|^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2K\pi}{2}\right)\right] \quad K=0,1}$$

$$w_0=|z|^{1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]$$

$$w_1=|z|^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]$$

$$=|z|^{1/2}\left[-\cos\frac{\theta}{2}-i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]$$

Se cumple que: $\boxed{w_1=-w_0}$

EJEMPLO 1 - Hallar las raices cuadradas de $z=2+2\sqrt{3}i$

Solución:

(1) $z=2+2\sqrt{3}i$ $\begin{cases} |z|=4 \\ \theta=\operatorname{arctg}(\sqrt{3})=\pi/3 \end{cases}$

(2) Luego:

$$w_0=4^{1/2}\left[\cos\pi/6 -i\operatorname{sen}\pi/6\right]$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]$$

$$=\sqrt{3}+i$$

$$w_1=2\left[-\cos\pi/6-i\operatorname{sen}\pi/6\right]$$

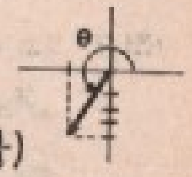
$$=2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right]$$

$$=-\sqrt{3}-i$$

EJEMPLO 2 - Hallar las raices cuadradas de $z=-3-4i$

Solución:

(1) $z=-3-4i$ $\begin{cases} |z|=5 \\ \theta=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \end{cases}$



Donde: $\cos\theta=\dfrac{-3}{|z|}=\dfrac{-3}{5}$

$\operatorname{sen}\theta=\dfrac{-4}{|z|}=\dfrac{-4}{5}$

(2) Más que el valor de θ, nos interesa el valor de $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

a) $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ (el signo depende en qué cuadrante cae el ángulo θ/2)

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$, θ/2 cae en el $2^{\underline{do}}$ cuadrante

b) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

$$=+\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(3) Luego:

$$w_0=5^{1/2}\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}+i\frac{2}{\sqrt{5}}\right]=-1+2i$$

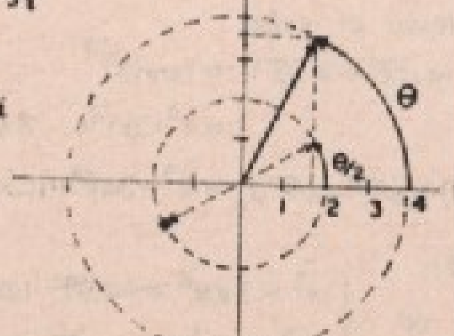
$$w_1=1-2i$$

12.3 INTERPRETACION GRAFICA DE LAS RAICES CUADRADAS

$z=2+2\sqrt{3}i$

$w_0=\sqrt{3}+i$

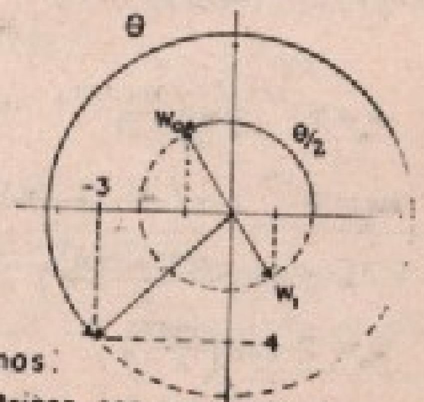
$w_1=-\sqrt{3}-i$



$z=-3-4i$

$w_0=-1+2i$

$w_1=1-2i$



Como observamos:

w_0 y w_1 son simétricos con respecto al origen.

13. RAIZ CUBICA DE UN NUMERO COMPLEJO

13.1 La raiz cúbica de $z = a + bi$ es otro número complejo $w = x + iy$, tal que :

$w^3 = z$, donde $\begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$

Es decir : $\sqrt[3]{z} = w \iff w^3 = z$

Por Moivre : $\iff$ $\boxed{w_K = |z|^{1/3} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right) \quad K = 0, 1, 2.}$

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= |z|^{1/3} \operatorname{cis}\left(\tfrac{\theta}{3}\right) \\ w_1 &= |z|^{1/3} \operatorname{cis}\left(\tfrac{\theta + 2\pi}{3}\right) \\ w_2 &= |z|^{1/3} \operatorname{cis}\left(\tfrac{\theta + 4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

NOTA: 1) Los valores de $\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right)$ se hallan, sólo cuando los ángulos son conocidos, de lo contrario se dejarían indicado los valores de w_0, w_1, w_2.

2) Sin necesidad de aplicar la fórmula de Moivre para hallar las raíces cúbicas de un número complejo, se puede hallar dichas raíces resolviendo un sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas.

EJEMPLO: Hallar las raices cúbicas de $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$

SOLUCION

A) APLICANDO Moivre :

(1) si $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ $\begin{cases} |z| = 8 \\ \theta = \operatorname{Arg}(z) = 135^\circ \end{cases}$

$w_K = |z|^{1/3} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right) \quad K = 0, 1, 2.$

$w_K = 8^{1/3} \operatorname{cis}\left(\frac{135^\circ + 2K\pi}{3}\right)$

$= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{135^\circ + 2K\pi}{3}\right)$, $K = 0, 1, 2$

$w_0 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{135^\circ}{3}\right)$.

B) POR SISTEMAS DE ECUACIONES :

(1) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i} = x + iy$

Elevar al cubo :

$-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i = (x + iy)^3$

$= x^3 + 3x^2 y i - 3xy^2 - iy^3$

(2) $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3)$

(3) $\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -4\sqrt{2} & (\mathrm{I}) \\ 3x^2 y - y^3 = 4\sqrt{2} & (\mathrm{II}) \end{cases}$

Solución A

$w_0 = 2 \operatorname{cis}(45^\circ)$

$= 2[\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ]$

$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_1 = 2[\cos 165^\circ + i \operatorname{sen} 165^\circ]$

$= 2[-\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ]$

$= 2\left[-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]$

$= -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$w_2 = 2[\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ]$

$= 2[\cos 75^\circ - i \operatorname{sen} 75^\circ]$

$= \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Solución B

(4) Hallar módulos en (1) y elevar al cuadrado :

$\left|-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i\right|^{1/3} = |x + iy|$

$8^{1/3} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$4 = x^2 + y^2$ ...... (III)

(5) Resolver el sistema :

$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -4\sqrt{2} & (\mathrm{I}) \\ 3x^2 y - y^3 = 4\sqrt{2} & (\mathrm{II}) \\ x^2 + y^2 = 4 & (\mathrm{III}) \end{cases}$

(6) Sumar (I) y (II) :

$(x^3 - y^3) + 3xy(x - y) = 0$

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 3xy(x - y) = 0$

$(x - y)[x^2 + y^2 + 4xy] = 0$

$x - y = 0 \quad \vee \quad x^2 + y^2 + 4xy = 0$ .... (V)

$y = x$ .... (IV)

(7) Reemplazar (IV) en (III) :

$2x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{2}$, luego $y = \pm\sqrt{2}$

(8) Satisface $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ $\boxed{w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i}$

(9) (III) en (V) : $4 + 4xy = 0$

$xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$ (VI)

(10) (VI) en (III) : $x^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = 4$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$

$\Rightarrow x^2 - 4x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(1)}}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 = 2 \pm \sqrt{3}}$

$y^2 = 4 - x^2$ .... $\Rightarrow \boxed{y^2 = 2 \mp \sqrt{2}}$

Sigue Solución B:

(11) Satisfacen $\begin{cases} w_1 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ w_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases}$

(12) Conclusión:

$$w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$
$$w_1 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$w_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

13.2 LA RAIZ CUBICA DE LA UNIDAD Y SUS PROPIEDADES

1) sea la ecuación $x^3 - 1 = 0$

2) cuyas raices se puede hallar de dos formas:

A) Factorizando:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x-1=0 \quad \vee \quad x^2+x+1=0$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

Luego, las raices de 1, son:

$$w_0 = 1$$
$$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

B) Por Moivre:

De $x^3 = 1$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{1}$ donde $z = 1 \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = Arg(z) = 0^\circ \end{cases}$ $z = (1,0)$

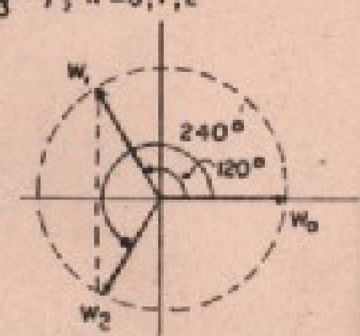
$$\Rightarrow x_K = |z|^{1/3} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x_K = \cos\left(\frac{2K\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2K\pi}{3}\right), \quad K = 0,1,2$$

$$x_0 = \cos 0^\circ + i\,\text{sen}\, 0^\circ$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos 240^\circ + i\,\text{sen}\, 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



3) PROPIEDADES · si $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

son las raices cúbicas de la UNIDAD, se cumplen las siguientes propiedades:

P_1) $w_2 = \overline{w_1}$

P_2) si hacemos $w_1 = w$, se cumple que $w_2 = w^2 = \overline{w}$, luego las 3 RAICES de la unidad, son $\{1, \omega, \omega^2\}$

P_3) $1 + w + w^2 = 0$ $\begin{cases} w + w^2 = -1 \\ 1 + w^2 = -w \\ 1 + w = -w^2 \end{cases}$ siendo w cualquiera de las dos raices imaginarias de la UNIDAD.

P_4) De $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\begin{cases} w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w^3 = 1 \end{cases}$

P_5) $\begin{cases} w^n = 1, & \text{si } n = \dot{3} \\ w^n = w, & \text{si } n = \dot{3}+1 \\ w^n = w^2, & \text{si } n = \dot{3}+2 \end{cases}$

13.2.1 TEOREMA · Dado $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$ y w cualquiera de las dos raices imaginarias de la UNIDAD, si W es una de las RAICES cúbicas de z, entonces las 3 RAICES cúbicas de z son: $\{W, wW, w^2W\}$.

PRUEBA

(1) si W es una raiz cúbica de z,

entonces $\sqrt[3]{z} = W \iff W^3 = z$

$$\Rightarrow W_K = \sqrt[3]{z}$$
$$= |z|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right)\right], \quad K = 0,1,2.$$

$$\begin{cases} W_0 = |z|^{1/3}\left[\cos\frac{\theta}{3} + i\,\text{sen}\frac{\theta}{3}\right] \\ W_1 = |z|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\right] \\ W_2 = |z|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right] \end{cases}$$

(2) sean $w = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ una de las raices imaginarias de la unidad.

donde: $w^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

(3) Escogemos: $W_0 = |z|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right]$ como una de las raices cúbicas de z.

Tenemos :

$$W_1 = w\,W_0 = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[|z|^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{3}\right)\right]$$

$$= |z|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\right]$$

$$W_2 = w^2\,W_0 = \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]\left[|z|^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{3}\right)\right]$$

$$= |z|^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right]$$

(4) Luego, los tres raices cúbicos de z son $\{W_0,\ w\,W_0,\ w^2\,W_0\}$

14. ECUACIONES CUADRATICAS CON COEFICIENTES COMPLEJAS

14-1 – Una ecuación cuadrática con coeficientes complejas es de la forma :

$$A z^2 + B z + C = 0\ ,\ \text{con } A, B, C \in \mathbb{C}\ ,\ A \neq 0.$$

14-2 – Se resuelve de la siguiente forma :

1^{ro}) se completa cuadrados :

De $\quad A z^2 + B z + C = 0$

$$\Rightarrow \quad z^2 + \frac{B}{A} z + \frac{C}{A} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^2 + \frac{B}{A} z + \frac{B^2}{4A^2} = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow \quad \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

2^{do}) Hacer $z + \dfrac{B}{2A} = w$ y $\dfrac{B^2-4AC}{4A^2} = u \in \mathbb{C}$

se halla w_k, de : $\quad w^2 = u$

$$w = \sqrt{u} \begin{cases} |u| \\ \theta = \mathrm{Arg}\,(u) \end{cases}$$

$$w_k = |u|^{1/2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right),\ k = 0, 1.$$

3^{o}) Sustituir : $\quad z + \dfrac{B}{2A} = |u|^{1/2}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{2}\right)$

$$z_k = -\frac{B}{2A} + |u|^{1/2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right),\ k = 0, 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} z_0 &= -\frac{B}{2A} + |u|^{1/2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\theta}{2} \\ z_1 &= -\frac{B}{2A} - |u|^{1/2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\theta}{2} \end{aligned}} \quad \text{donde } \mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) = -\mathrm{cis}\,\frac{\theta}{2}$$

14.3 PROBLEMA – Resolver : $(1-i)\,z^2 - 4z = -3 - 9i$

SOLUCION

1^{o}) Dividir entre $1-i$ $\Rightarrow \quad z^2 - \dfrac{4}{1-i} z = \dfrac{-3-9i}{1-i}$

$$\Rightarrow \quad z^2 + (-2-2i)\,z = 3 - 6i$$

2^{o}) Completar cuadrados :

$$z^2 + (-2-2i)\,z + \left(\frac{-2-2i}{2}\right)^2 = 3 - 6i + \left(\frac{-2-2i}{2}\right)^2$$

$$\left[z + (-1-i)\right]^2 = 3 - 4i$$

$$z + (-1-i) = \sqrt{3-4i}$$

$$z + (-1-i) = |u|^{1/2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right),\ k = 0, 1.$$

$$\begin{cases} z + (-1-i) = 5^{1/2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\theta}{2} \\ z + (-1-i) = -5^{1/2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + (-1-i) = 5^{1/2}\left[-\dfrac{2}{\sqrt{5}} + i\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right] \\ z + (-1-i) = -5^{1/2}\left[-\dfrac{2}{\sqrt{5}} + i\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z - 1 - i = -2 + i \\ z - 1 - i = 2 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_0 = -1 + 2i \\ z_1 = 3 \end{cases}$$

, donde $\sqrt{3-4i} = x + iy$

$\Rightarrow \quad 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 9$$

$$4x^2y^2 = 16$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$2x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

si $x = 2 \longrightarrow y = -1$

si $x = -2 \longrightarrow y = 1$

Luego, los raices cuadrados de $u = 3 - 4i$, son $\{2-i,\ -2+i\}$

14.4 PROBLEMA : Resolver $Az^{2n}+Bz^{n}+C=0$, $A,B,C\in\mathbb{C}$, $A\neq 0$

SOLUCION :

1º) Hacer $z^n=w \Rightarrow Aw^2+Bw+C=0$

2º) Se procede igual que 14.1

$$\Rightarrow \left(w+\frac{B}{2A}\right)^2=\overbrace{\frac{B^2-4AC}{4A^2}}^{u}$$

$$\Rightarrow w+\frac{B}{2A}=\sqrt{u} \qquad \text{De } u\begin{cases}|u|\\ \theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow w_K=-\frac{B}{2A}+|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2K\pi}{2}\right),\ K=0,1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_0=-\dfrac{B}{2A}+|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\\[2mm] w_1=-\dfrac{B}{2A}-|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$\text{como } w=z^n \Rightarrow \begin{cases} z^n=-\dfrac{B}{2A}+|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\\[2mm] z^n=-\dfrac{B}{2A}-|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} z_K=\sqrt[n]{\dfrac{-B}{2A}+|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)},\ K=0,1,2,\dots,n-1\\[2mm] z_K=\sqrt[n]{\dfrac{-B}{2A}-|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)},\ K=0,1,2,\dots,n-1\end{cases}$$

Habrán $2n$ raices.

14.5 EJEMPLO : Resolver $iz^{2n}+(i-1)z^n-1=0$

SOLUCION :

(1) Dividir entre i : $z^{2n}+\frac{i-1}{i}z^n-\frac{1}{i}=0$

$$z^{2n}+(1+i)z^n+i=0$$

(2) Completar cuadrados : $z^{2n}+(1+i)z^n+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2=-i+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2$

$$\left(z^n+\frac{1+i}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}i$$

$$z^n+\frac{1+i}{2}=\sqrt{-\frac{1}{2}i},\ \text{donde si } u=-\frac{1}{2}i \begin{cases}|u|=\frac{1}{2}\\ \theta=270^\circ\end{cases}$$

$$=|u|^{1/2}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2K\pi}{2}\right),\ K=0,1.$$

(3) si $K=0 \Rightarrow z^n+\frac{1+i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos 135^\circ+i\operatorname{sen}135^\circ\right]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$z^n=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z^n=-1 \Rightarrow z=\sqrt[n]{-1}$$

$$z_K=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2K\pi}{n}\right)$$

$$\boxed{z_K=\operatorname{cis}\frac{(1+2K)\pi}{n} \quad K=0,1,2,\dots,n-1.}$$

(4) si $K=1 \Rightarrow z^n+\frac{1+i}{2}=-\left[-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right]$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z^n=-i \Rightarrow z=\sqrt[n]{-i}$$

$$z=\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2K\pi}{n}\right)$$

$$\boxed{z=\operatorname{cis}\frac{(3+4K)\pi}{2n} \quad K=0,1,2,\dots,n-1}$$

15. POTENCIA FRACCIONARIA DE UN NUMERO COMPLEJO

15.1 FUNCION POTENCIA FRACCIONARIA.

sea $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, sean m,n enteros con n positivo, entonces definimos la potencia $z^{m/n}$ como:

$$\boxed{z^{m/n} = \sqrt[n]{z^m} = (z^m)^{1/n}}$$

tendrá exactamente n valores.

PROPIEDADES

P_1) $z^{m/n} \neq z^{km/kn}$, si $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo: $z^{3/6} \neq z^{1/2}$

P_2) $z^{m/n} \neq (\sqrt[n]{z})^m$, $z \in \mathbb{C}$

Ejemplo: $\sqrt[6]{i^3} = i^{3/6} \neq (i^{1/6})^3$. Es verdadero: $i^{3/6} = (i^3)^{1/6}$

P_3) Teorema generalizado del Teo. de Moivre:

si $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces $\boxed{z^{m/n} = \rho^{m/n}\left[\cos\left(\frac{m\theta+2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{m\theta+2K\pi}{n}\right)\right]}$

$m,n \in \mathbb{Z}$, $n>0$, $\rho = |z|$, $\theta = \text{Arg}(z)$

Prueba: (1) si $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$\Rightarrow z^m = \rho^m(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^m$

$= \rho^m(\cos m\theta + i\,\text{sen}\, m\theta)$

(2) $(z^m)^{1/n} = (\rho^m)^{1/n}(\cos m\theta + i\,\text{sen}\, m\theta)^{1/n}$

$= \rho^{m/n}\left[\cos\left(\frac{m\theta+2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{m\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$

PROBLEMA 15.1.1. – si $z = 16 \in \mathbb{C}$, probar que $(4^2)^{1/4} \neq 4^{1/2}$

Prueba:

(1) $(4^2)^{1/4} = (16)^{1/4}$ tiene 4 RAICES, que son: ± 2, $\pm 2i$ que se obtienen fácilmente resolviendo $x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4) = 0 < \begin{matrix} x = \pm 2 \\ x = \pm 2i \end{matrix}$

(2) $4^{1/2}$ tiene dos valores que son ± 2. Que se obtienen fácilmente de resolver:

$x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \rightarrow x = 2 \;\vee\; x = -2.$

PROBLEMA 15.1.2 – Probar que $i^{3/6} \neq i^{1/2}$ y que $i^{3/6} \neq (i^{1/6})^3$

SOLUCION:

(1) $i^{3/6} = (i^3)^{1/6} = (-i)^{1/6} \leftarrow$ tendrá 6 raíces: $w_k = \text{cis}\left(\frac{270°+2K\pi}{6}\right)$, $K=0,1,2,3,4,5$.

(2) $i^{1/2}$ tendrá dos raíces: $w = \text{cis}\left(\frac{90°+2K\pi}{2}\right)$, $K = 0,1$

(3) $(i^{1/6})^3 \leftarrow$ indica que, luego de hallar las 6 raíces de i se debe elevar al cubo cada raíz.

15.2 FUNCION EXPONENCIAL

sea $z \in \mathbb{C}$, definimos: $\boxed{\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i\,\text{sen}\, y) \end{aligned}}$

Donde: 1) $|e^z| = e^x$

2) $\text{Arg}(e^z) = y$

3) $\text{Re}(e^z) = e^x \cos y$

4) $\text{Im}(e^z) = e^x\,\text{sen}\, y$

15.3 PROPIEDADES

P_1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

P_2) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

P_3) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

P_4) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

P_5) $(e^z)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(z+i2K\pi)}$

P_6) $(e^n)^z = e^{z(n+i2K\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$

P_7) $(e^z)^n = e^{zn}$, $n \in \mathbb{Z}$

P_8) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + i2K\pi$

P_9) $(e^z)^{p/q} = e^{p/q(z+i2K\pi)}$

PRUEBA de P_5)

$(e^z)^{1/n} = \left[e^x(\cos y + i\,\text{sen}\, y)\right]^{1/n}$

$= e^{x/n}(\cos y + i\,\text{sen}\, y)^{1/n}$

$= e^{x/n}\left[\cos\left(\frac{y+2K\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{y+2K\pi}{n}\right)\right]$

$(e^z)^{1/n} = e^{x/n} \cdot e^{i\left(\frac{y+2K\pi}{n}\right)}$

$= e^{\frac{1}{n}(x+iy+i2K\pi)}$

$= e^{\frac{1}{n}(z+i2K\pi)}$

Prueba de P_7)

$$(e^z)^n = (e^{x+iy})^n = \left[e^x.(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)\right]^n = e^{nx}.(\cos ny + i\,\mathrm{sen}\, ny) = e^{nx}.e^{iny} = e^{n(x+iy)} = e^{(x+iy)n} = e^{zn}$$

Prueba de P_1)

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}\,e^{i(y_1+y_2)}$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\,\mathrm{sen}\,(y_1+y_2)\right] = e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + i\,\mathrm{sen}\, y_1)(\cos y_2 + i\,\mathrm{sen}\, y_2)$$

$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\,\mathrm{sen}\, y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\,\mathrm{sen}\, y_2) = e^{z_1}.e^{z_2}$$

Prueba de P_8)

$(\Rightarrow)$ si $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1+iy_1} = e^{x_2+iy_2}$.

$$e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}$$

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i\,\mathrm{sen}\, y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i\,\mathrm{sen}\, y_2)$$

$$\underline{e^{x_1}\cos y_1} + \underline{\underline{e^{x_1}\mathrm{sen}\, y_1}} = \underline{e^{x_2}\cos y_2} + \underline{\underline{i e^{x_2}\mathrm{sen}\, y_2}}$$

Igualando las partes real e imaginario:

a) $e^{x_1}\cos y = e^{x_2}\cos y \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \wedge \cos y_1 = \cos y_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 + 2K\pi$

b) $e^{x_1}\mathrm{sen}\, y_1 = e^{x_2}\mathrm{sen}\, y_2 \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \wedge \mathrm{sen}\, y_1 = \mathrm{sen}\, y_2$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2 + 2K\pi$

Las ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 + 2K\pi \end{array}\right.$ implican: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 + 2K\pi$

$\Rightarrow (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2 - 2K\pi) = 0 + 0i$

$\Rightarrow (x_1 + iy_1) = x_2 + iy_2 + i2K\pi$

$\Rightarrow z_1 = z_2 + i2K\pi$ //

15.4 EL LOGARITMO NATURAL DE UN NUMERO COMPLEJO

$$Ln: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto W = Ln\, z \text{, tal que, } z = e^W$$

DEFINICION– El logaritmo natural de $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, es el número complejo:

$$\boxed{Ln\, z = Ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2K\pi)} \quad \text{donde} \left\{\begin{array}{l} Ln|z| = Re(Ln\, z) \\ \mathrm{Arg}\, z + 2K\pi = Im(Ln\, z) \\ \text{El valor principal es cuando } K=0 \end{array}\right.$$

PRUEBA:

(1) sea $Ln\, z = W \Leftrightarrow z = e^W$, $W \in \mathbb{C}$

(2) sea $w = x + iy \Rightarrow z = e^{x+iy}$

$$= e^x.e^{iy}$$

$$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y) \quad \text{donde} \left\{\begin{array}{l} e^x = |z| \Rightarrow x = Ln|z| \\ y = \mathrm{Arg}\, z \end{array}\right.$$

$$= e^x\left[\cos(y + 2K\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(y + 2K\pi)\right]$$

$$z = e^x.e^{i(y+2K\pi)}$$

(3) Tomar Ln: $Ln\, z = Ln\, e^x + Ln\, e^{i(y+2K\pi)}$

$$= x + i(y + 2K\pi)$$

$$Ln\, z = Ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2K\pi) \text{ //}$$

16. SISTEMA DE ECUACIONES CON VARIABLES COMPLEJAS.

16.1 Resolver: $\left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 = 2 \\ iz_1 + 2z_2 + (2+3i)z_3 = 12 + 4i \\ \bar{z}_1 - i\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 2i \end{array}\right.$

SOLUCION:

(1) Para hacer más sencillo el proceso de resolver es necesario "deshacernos" de los conjugados.

Así, por ejemplo, en la 3ª ecuación debemos aplicar la CONJUGADA en ambos miembros y obtendremos:

$$\overline{(\bar z_1 - i\bar z_2 + \bar z_3)} = \overline{2i}$$

$$\iff \quad z_1 + iz_2 + z_3 = -2i$$

(2) El sistema a resolver será:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 = 3 \\ iz_1 + 2z_2 + (2+3i)z_3 = 12+4i \\ z_1 + iz_2 + z_3 = -2i \end{array} \right.$$

(3) Simplificar la variable z_1

$$\begin{array}{l} (\text{II}) - i(\text{I}): \\ (\text{I}) - (\text{III}): \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (2-i)z_2 + (2+2i)z_3 = 12+2i & (\text{IV}) \\ (1-i)z_2 \qquad\qquad = 2+2i \implies & z_2 = \dfrac{2+2i}{1-i} \end{array} \right.$$

$$\boxed{z_2 = 4}$$

(4) Reemplazar $z_2 = 4$ en (IV):

$$(2-i)(4) + (2+2i)z_3 = 12+2i$$

$$8-4i + (2+2i)z_3 = 12+2i$$

$$(2+2i)z_3 = 4+6i$$

$$z_3 = \frac{2+3i}{1+i} \implies \boxed{z_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i} \quad \text{en (I)}: \quad \boxed{z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$$

CONCLUSION:
$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ z_2 = 4 \\ z_3 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{array} \right.$$

Resolver los siguientes sistemas:

16.2 $\left\{ \begin{array}{l} -i\bar z_1 + (1-i)\bar z_2 - 4\bar z_3 = -10-2i \\ -z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 6 \\ (1+i)z_1 - 3z_2 + 4z_3 = 3-i \end{array} \right.$

16.4 $\left\{ \begin{array}{l} z_3 + 2z_1 - z_2 = 6-i \\ -\bar z_1 - 2\bar z_3 - i\bar z_2 = -6 \\ 3iz_1 + 2z_2 - iz_3 = 1-2i \end{array} \right.$

16.3 $\left\{ \begin{array}{l} (1-i)\bar z_1 - \bar z_2 + (2+i)\bar z_3 = 3-4i \\ z_1 + (1-i)z_2 + (1+i)z_3 = 3i \\ (1-i)z_1 + (2+i)z_2 - z_3 = -i \end{array} \right.$

16.5 $\left\{ \begin{array}{l} 3iz_1 + \bar z_2 + (1+i)z_3 = 2+3i \\ (1-i)\bar z_1 + (2+i)z_2 + (1-2i)\bar z_3 = 7-7i \\ (2+i)z_3 - (3-i)z_1 + (1-i)\bar z_2 = 8-2i \end{array} \right.$

R. $z_1 = i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 3-i$

PROBLEMA 16.6 sea $S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9$, donde ε es una raiz primitiva de $x^4-1=0$. *Hallar* $|S|$.

SOLUCION: De $x^n-1=0$, estamos tomando $\boxed{n=4 \mid \text{par}}$

(1) De $x^4-1=0$ se obtienen las 4 raices: $\varepsilon_k = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$

(2) si $\varepsilon = \text{cis}\frac{\pi}{2} = i = \varepsilon_1$ es raiz primitiva de $x^4-1=0$, entonces $\varepsilon \neq 1$ y las otras 3 raices son potencias enteras de ε de la forma ε^K, con $1<K<4$ y cualquier potencia ε^K, con $K=\dot{4}$ se reduce a una de las raices $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$. Es decir:

$$\varepsilon^K = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , \text{si } K = \dot{4} \\ \varepsilon & , \text{si } K = \dot{4}+1 \\ \varepsilon^2 & , \text{si } K = \dot{4}+2 \\ \varepsilon^3 & , \text{si } K = \dot{4}+3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3 = 0 \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^2 = -\varepsilon^3 \end{array}$$

(3) Luego:

$$S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9$$
$$= 1+\varepsilon+1+\varepsilon, \text{ pues } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^4 = 1 \\ \varepsilon^9 = \varepsilon^{\dot{4}+1} = \varepsilon \end{array} \right.$$

$S = 2 + 2\varepsilon \qquad \varepsilon = i = \text{cis}\,\frac{\pi}{2} = \varepsilon_1$

$= 2(1+\varepsilon)$

$= 2(1+i)$

(4) $|S| = 2\sqrt{2}$, donde $\sqrt{1+i} = \sqrt{2}$

OTRA FORMA DE HACER:

(5) Se da:

$$S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^9$$

(6) $\bar{S} = 1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-9}$

(7) $\bar{S}S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9 + \varepsilon^{-1}+1+\varepsilon^3+\varepsilon^8+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+1+\varepsilon^5+\varepsilon^{-9}+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-5}+1$

$$= 4+(\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\varepsilon^3+\varepsilon^8+\varepsilon^5)+(\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-9}+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-5})$$

$$= 4 + \frac{(\varepsilon^{10}+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{18}+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{17}+\varepsilon^{14})+(\varepsilon^8+\varepsilon^5+\varepsilon^6+1+\varepsilon+\varepsilon^4)}{\varepsilon^9}$$

$$= 4 + \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon+\varepsilon^2+1+\varepsilon+\varepsilon^2)+(1+\varepsilon+\varepsilon^2+1+\varepsilon+1)}{\varepsilon}$$

$$= 4 + \frac{4+4\varepsilon+4\varepsilon^2}{\varepsilon} = 4 + \frac{4(1+\varepsilon+\varepsilon^2)}{\varepsilon} = 4 + \frac{4(-\varepsilon^3)}{\varepsilon}$$

$$= 4+4(-\varepsilon^2) = 4\,[1-\varepsilon^2] = 4\,[1+1] = 4(2)$$

(8) $|S|^2 = 4(2) \Rightarrow |S| = 2\sqrt{2}$

PROBLEMA 1.57 si ε es una raiz primitiva de $x^5-1=0$ y

$$S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\varepsilon^{16}, \quad \text{hallar } |S|$$

SOLUCION:

De $x^n-1=0$,estamos tomando $\boxed{n=5 \;|\; \text{impar}}$

1) De $x^5-1=0$, obtenemos las 5 raices $\varepsilon_K = \text{cis}\,\frac{2K\pi}{5}$, $K=0,1,2,3,4$.

2) Escojamos como raiz primitiva $\varepsilon_1 = \text{cis}\,\frac{2\pi}{5} = \varepsilon$, luego las 5 raices serán: $\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4\}$, donde $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4=0$

3) se da: $S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\varepsilon^{16}$

4) Tomemos: $\bar{S} = 1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-9}+\varepsilon^{-16}$

donde $\left\{\begin{array}{l}\bar{S} \text{ es la conjugada de } S\\ \varepsilon^{-K} \text{ es la conjugada}\\ \text{de } \varepsilon^K.\end{array}\right.$

$$\bar{S}S = (1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\varepsilon^{16})+(\varepsilon^{-1}+1+\varepsilon^3+\varepsilon^8+\varepsilon^{15})+(\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+1+\varepsilon^5+\varepsilon^{12})+(\varepsilon^{-9}+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-5}+1+\varepsilon^7)+(\varepsilon^{-16}+\varepsilon^{-15}+\varepsilon^{-12}+\varepsilon^{-7}+1)$$

$$= 5+(\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\varepsilon^{16}+\varepsilon^3+\varepsilon^8+\varepsilon^{15}+\varepsilon^5+\varepsilon^{12}+\varepsilon^7)+(\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-9}+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-16}+\varepsilon^{-15}+\varepsilon^{-12}+\varepsilon^{-7})$$

$$= 5 + \frac{(\varepsilon^{17}+\varepsilon^{20}+\varepsilon^{25}+\varepsilon^{32}+\varepsilon^{19}+\varepsilon^{24}+\varepsilon^{31}+\varepsilon^{21}+\varepsilon^{28}+\varepsilon^{23})+(\varepsilon^{15}+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{13}+\varepsilon^7}{\varepsilon^{16}} \quad \frac{+\varepsilon^8+\varepsilon^{11}+1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9)}{\varepsilon^{16}}$$

$$= 5 + \frac{(\varepsilon^2+1+1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^4+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^3)+(1+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon+1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^4)}{\varepsilon}$$

$$= 5 + \frac{4+4\varepsilon+4\varepsilon^2+4\varepsilon^3+4\varepsilon^4}{\varepsilon}$$

$$= 5 + \frac{4(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4)}{\varepsilon} , \quad \text{donde } 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^5=0$$

$$\bar{S}S = 5$$

4) $|S|^2 = 5 \Rightarrow |S| = \sqrt{5}$

PROBLEMA 1.58 En general si $S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\cdots+\varepsilon^{(n-1)^2}$,donde ε es una raiz primitiva n-ésima de 1. Hallar $|S|$.

SOLUCION:

Hay dos casos: a) para n = impar y b) para n = par.

1) se tiene: $S = 1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\cdots+\varepsilon^{(n-1)^2}$

2) sea $\bar{S} = 1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-9}+\cdots+\varepsilon^{-(n-1)^2}$,donde $\left\{\begin{array}{l}\bar{S} = \text{conjugada de } S\\ \varepsilon^{-K} = \text{conjugado de } \varepsilon^K\end{array}\right.$

3) Hallemos el producto : $\bar{S}S$

$$\bar{S}S=\left[1+\varepsilon+\varepsilon^4+\cdots+\varepsilon^{(n-1)^2}\right]+\left[\varepsilon^{-1}+1+\varepsilon^3+\varepsilon^8+\cdots+\varepsilon^{(n-1)^2-1}\right]+\left[\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+1+\varepsilon^{5}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)^2-4}\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\left[\varepsilon^{-(n-1)^2}+\varepsilon^{1-(n-1)^2}+\cdots\cdots+1\right]$$

4) Asociar adecuadamente y ver cada caso :

a) si n= impar , obtendremos :

$$\bar{S}S=n+\frac{(n-1)(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots\cdots+\varepsilon^{n-1})}{\varepsilon}$$

$$=n+\frac{0}{\varepsilon}$$

$$|S|^2=n \Rightarrow |S|=\sqrt{n}$$

b) si n= par , obtendremos

$$\bar{S}S=n+n\,\varepsilon^{n^2/4}$$

$$=n\left[1+\varepsilon^{(n/2)^2}\right]$$

$$=n\left[1+(-1)^{n/2}\right]$$

$$|S|^2=n\left[1+(-1)^{n/2}\right]$$

$$|S|=\sqrt{n\left[1+(-1)^{n/2}\right]}\ //$$

PROBLEMA 14.- Escribir las raices de la unidad de grado : a) 2 , b) 3 , c) 4 d) 6 , e) 8 , f) 12 , g) 24

SOLUCION :

a) Las raices de la unidad de grado 2 , se obtienen de resolver $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

b) Las raices de la unidad de grado 3 , se obtienen de resolver $x^3-1=0$

$\Rightarrow\quad x=1\ ,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) Las raices de la unidad de grado 4 , se obtienen de resolver $x^4-1=0$

$\Rightarrow\quad x=\pm 1\ ,\pm i$

d) De $x^6-1=0 \Rightarrow x=\sqrt[6]{1}$

$$\Rightarrow\ x_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{6}\ ,\quad k=0,1,2,\ldots\ldots,5$$

$$=\pm 1,\quad \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e) $\pm 1\ ;\pm i\ ;\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$

f) $\pm 1\ ;\pm i\ ;\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$

g) $\pm 1\ ;\pm i\ ;\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\ ;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}\ ;\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

PROBLEMA 15.- Escribir las raices primitivas de grado : a) 2 ; b) 3 ; c) 4 ; d) 6 ; e) 8 ; f) 12 ; g) 24 .

SOLUCION :

a) De $x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$ es raiz primitiva de grado 2 porque las potencias enteras de $x=-1$ dan origen a todas las otras raices.

Así tendremos que las raices de la unidad de grado dos son $\begin{cases} w=-1\\ w^2=1\end{cases}$

b) De $x^3-1=0 \leftrightarrow (x-1)\underline{(x^2+x+1)}=0$, las raices primitivas de grado 3 , se obtienen del polinomio :

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} w_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}=\mathrm{cis}\,\frac{1}{3}(2\pi)\\ w_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{3}=\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$$

Así tendremos :

1) si $w_1=w$ es una raiz primitiva de grado 3 , entonces las raices son: $\{w, w^2, w^3=1\}$

2) si $w_2=w$ es una raiz primitiva de grado 3 , entonces las raices son : $\{w, w^2, w^3=-1\}$

c) De $x^4-1=0 \iff (x^2-1)\underline{(x^2+1)}=0$, los raices primitivas de grado 4 ,

$w_k=\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi}{4}$, $k=0,1,2,3.$

se obtienen del polinomio $x^2+1=0 \Rightarrow \begin{cases} w_1=i=\mathrm{cis}\,\frac{2(1)\pi}{4}=\mathrm{cis}\left(\frac{1}{4}\right)(2\pi)\\ w_3=-i=\mathrm{cis}\,\frac{2(3)\pi}{4}=\mathrm{cis}\left(\frac{3}{4}\right)(2\pi)\end{cases}$

d) De $x^6-1=0 \iff (x^3-1)(x^3+1)=0$

$$\iff (x-1)(x^2+x+1)(x+1)\underline{(x^2-x+1)}=0$$

Los raices primitivas de grado 6 , se obtienen del polinomio : $x^2-x+1=0$

$\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Cualquiera de éstos raíces primitivos dan origen a las otras raíces de grado 6, tan solo elevando a la potencia entera.

Tener en cuenta lo siguiente:

De $x^6-1=0 \Rightarrow w_K = \text{cis}\,\frac{K}{6}(2\pi)$, $K=0,1,2,3,4,5$.

$w_0 = \text{cis}\,0 = 1$

1 y 6 son primos entre sí

$w_1 = \text{cis}\,\frac{1}{6}(2\pi) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

$w_2 = \text{cis}\,\frac{2}{6}(2\pi)$

$w_3 = \text{cis}\,\frac{3}{6}(2\pi)$

$w_4 = \text{cis}\,\frac{4}{6}(2\pi)$

5 y 6 son primos entre sí

$w_5 = \text{cis}\,\frac{5}{6}(2\pi) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

w_1 y w_5 son raíces primitivas, porque "K = 1, 5 y 6" son números primitivos entre sí.

e) De $x^8-1=0 \iff (x^4-1)(x^4+1)=0$

$\iff (x^2-1)(x^2+1)(\underline{x^4+1})=0$

Las raíces primitivas de grado 8 se obtienen del polinomio:

$$x^4+1=0$$

$$x=\sqrt[4]{-1}$$

$$x_j = \text{cis}\left(\frac{\pi+2j\pi}{4}\right),\ j=0,1,2,3,4$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

La forma directa de hallar las raíces primitivas de grado 8 es la sigte:

1º) se formaliza las 8 raíces de la unidad: $w_K = \text{cis}\left[\left(\frac{K}{8}\right)2\pi\right]$ $K=0,1,2,3,4,5,6,7$

2º) En el cociente $\left(\frac{K}{8}\right)$ escogemos para qué valores de K hacen que "K y 8" sean números primos entre sí.

Así encontramos que: $K=1,3,5,7$ son primos con $n=8$.

De manera que, las raíces primitivas de grado 8, son:

$w_1 = \text{cis}\,\frac{1}{8}(2\pi) = \text{cis}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_3 = \text{cis}\,\frac{3}{8}(2\pi) = \text{cis}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_5 = \text{cis}\,\frac{5}{8}(2\pi) = \text{cis}\,\frac{5\pi}{4} = \text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_7 = \text{cis}\,\frac{7}{8}(2\pi) = \text{cis}\,\frac{7\pi}{4} = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) De $x^{12}-1=0 \Rightarrow w_K = \text{cis}\left[\frac{K}{12}(2\pi)\right]$, $K=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$.

donde $K=1,5,7,11$ son primos con 12, luego las raíces primitivas de grado 12 son:

$w_1 = \text{cis}\left[\frac{1}{12}(2\pi)\right] = \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i$

$w_5 = \text{cis}\left[\frac{5}{12}(2\pi)\right] = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i$

$w_7 = \text{cis}\left[\frac{7}{12}(2\pi)\right] = \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i$

$w_{11} = \text{cis}\left[\frac{11}{12}(2\pi)\right] = \text{cis}\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i$

g) De $x^{24}-1=0 \Rightarrow w_K = \text{cis}\left[\frac{K}{24}(2\pi)\right]$, $K=0,1,2,3,4,\ldots\ldots,23$

se tiene que: $K=1,5,7,11,13,17,19,23$ son primos con $n=24$.

Luego las raíces primitivas de grado 24, son:

$w_1 = \text{cis}\left[\frac{1}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$w_5 = \text{cis}\left[\frac{5}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{5}{12}\pi = \cos\frac{5\pi}{12}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

$w_7 = \text{cis}\left[\frac{7}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{7}{12}\pi = \cos\frac{7\pi}{12}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$w_{11} = \text{cis}\left[\frac{11}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{11}{12}\pi = \cos\frac{11}{12}\pi+i\,\text{sen}\,\frac{11}{12}\pi = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

$w_{13} = \text{cis}\left[\frac{13}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{13}{12}\pi = \text{cis}\left(-\frac{11}{12}\pi\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

$w_{17} = \text{cis}\left[\frac{17}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{17}{12}\pi = \text{cis}\left(-\frac{7}{12}\pi\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$w_{19} = \text{cis}\left[\frac{19}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{19}{12}\pi = \text{cis}\left(-\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

$w_{23} = \text{cis}\left[\frac{23}{24}(2\pi)\right] = \text{cis}\,\frac{23}{12}\pi = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

PROBLEMA 16.11 ¿ A qué exponente pertenece ?

a) $W_K = \cos\frac{2K\pi}{180} + i\,\text{sen}\frac{2K\pi}{180}$, si $K = 27, 99, 137$.

b) $W_K = \cos\frac{2K\pi}{144} + i\,\text{sen}\frac{2K\pi}{144}$, si $K = 10, 35, 60$

SOLUCION – En general: si $W_K = \cos\frac{2K\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2K\pi}{n}$

Todo lo que se hará es simplificar $\frac{K}{n}$, hasta que el numerador y denominador sean números primos. El denominador que queda indicará el exponente a que pertenece.

Veamos :

a) se tiene $n = 180$

– si $K = 27 \Rightarrow \frac{27}{180} = \frac{3}{20}$ Son primos entre sí. Luego, cuando $K = 27$, pertenece al exponente 20.

– si $K = 99 \Rightarrow \frac{99}{180} = \frac{11}{20}$ son primos entre sí, pertenece al exponente 20.

– si $K = 137 \Rightarrow \frac{137}{180}$ son primos, luego pertenece al exponente 180.

b) se tiene $n = 144$

– si $K = 10 \Rightarrow \frac{10}{144} = \frac{5}{72}$ Son primos entre sí, pertenece al exponente 72.

– si $K = 35 \Rightarrow \frac{35}{144}$ son primos, pertenece al exponente 144.

– si $K = 60 \Rightarrow \frac{60}{144} = \frac{5}{12}$ son primos entre sí, pertenece al exponente 12.

PROBLEMA 16.12 Escribir todas las raíces de la unidad de grado 28 que pertenece al exponente 7.

SOLUCION :

1) sea $W_K = \text{cis}\left[\frac{K}{28}(2\pi)\right] = \left(\text{cis}\left[\frac{1}{28}(2\pi)\right]\right)^K$, $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 27$ todas las raíces de la unidad de grado 28.

2) Cuando pertenecen al exponente 7, es porque el denominador de $\frac{K}{28}$ se debe reducir a 7.

3) Veamos con que valores de K, la fracción $\frac{K}{28}$ tiene denominador 7. Se cumple para $K = 4$.

PROBLEMA 16.13 Para cada raíz de la unidad de grado : a) 16 ; b) 20 ; c) 24 indicar el exponente al que pertenece.

SOLUCION :

Para responder al presente problema, analicemos la fracción $\frac{K}{n}$ que aparece en las raíces n-ésimas de la unidad : $w_K = \text{cis}\frac{K}{n}(2\pi)$, $K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Veamos :

si $W_K = \text{cis}\left[\frac{K}{n}(2\pi)\right] = \left[\text{cis}\left(\frac{1}{n}(2\pi)\right)\right]^K$, $K = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$

tenemos :

1) "n" indica el grado de las raíces de la unidad.

2) $K = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$.

3) si $K \wedge n$ son primos entre sí $\Rightarrow$ las W_K son raíces primitivas de grado "n"

4) Los divisores positivos de n menores que n, son los "NUEVOS EXPONENTES"

a) 1) $n = 16 =$ grado , donde $W_K = \text{cis}\left[\frac{K}{16}(2\pi)\right]$

2) $K = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, 15$.

3) DIVISORES POSITIVOS de 16 menores que 16 : 1, 2, 4, 8 son los "NUEVOS EXPONENTES".

4) Los W_K, tales que $K \wedge 16$ son primos entre sí, son las raíces primitivas de grado 16. Dichas raíces primitivas serán : W_1, W_3, W_5, W_7, W_9, W_{11}, W_{13}, W_{15}.

Como vemos ; de $K = 0, \boxed{1}, \boxed{2}, 3, \boxed{4}, 5, 6, 7, \boxed{8}, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$.

Así tendremos :

– Al exponente 1 pertenece W_0

– Al exponente 2 pertenece W_8, porque $W_8 = \text{cis}\frac{8}{16}(2\pi) = \text{cis}\frac{1}{2}(2\pi)$

– Al exponente 4 pertenecen W_4, W_{12}. Pues $\begin{cases} W_4 = \text{cis}\frac{4}{16}(2\pi) = \text{cis}\frac{1}{4}(2\pi) \\ W_{12} = \text{cis}\frac{12}{16}(2\pi) = \text{cis}\frac{3}{4}(2\pi) \end{cases}$

- Al exponente 8 pertenecen: w_2, w_6, w_{10}, w_{14}. Pues $\begin{cases} w_2 = cis\frac{2}{16}(2\pi) = cis\frac{1}{8}(2\pi) \\ w_6 = cis\frac{6}{16}(2\pi) = cis\frac{3}{8}(2\pi) \\ w_{10} = cis\frac{10}{16}(2\pi) = cis\frac{5}{8}(2\pi) \\ w_{14} = cis\frac{14}{16}(2\pi) = cis\frac{7}{8}(2\pi) \end{cases}$

b) 1) $n = 20$, donde $W_K = cis\left[\frac{K}{20}(2\pi)\right]$

2) $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 19.$

3) DIVISORES POSITIVOS de 20, menores que 20: 1, 2, 4, 5, 10 son los EXPONENTES.

4) Los W_K, tales que $K \wedge 20$ son primos entre sí, sean las raíces primitivas:

$$\{W_1, W_3, W_7, W_9, W_{11}, W_{13}, W_{17}, W_{19}\}$$

- Al exponente 1, pertenece W_0
- Al exponente 2 pertenece W_{10}, porque $W_{10} = cis\frac{10}{20}(2\pi) = cis\frac{1}{2}(2\pi)$
- Al exponente 4 pertenecen: W_5, W_{15} porque $\begin{cases} W_5 = cis\frac{5}{20}(2\pi) = cis\frac{1}{4}(2\pi) \\ W_{15} = cis\frac{15}{20}(2\pi) = cis\frac{3}{4}(2\pi) \end{cases}$

La ecuación se reduce en hallar los W_K, tal que $\frac{K}{20} = \frac{X}{4}$, donde "$X \wedge 4$" son primos entre sí.

De $\frac{K}{20} = \frac{X}{4} \Rightarrow \frac{K}{X} = \frac{20}{4} \Rightarrow \frac{K}{X} = 5 \Rightarrow \boxed{K = 5X}$, esta ecuación indica que K debe ser múltiplo de 5, que sea menor que 20, tal que "$X \wedge 5$" sean primos entre sí.

En este caso $K = 5$, 15 porque $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ --> son primos entre sí; $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ --> son primos entre sí

- Al exponente 5 pertenecen: W_4, W_8, W_{12}, W_{16}

Pues; si $\frac{K}{20} = \frac{X}{5} \Rightarrow K = 4X$, $X = 1, 2, 3, 4$

- Al exponente 10 pertenecen W_2, W_6, W_{14}, W_{18}

Pues, si $\frac{K}{20} = \frac{X}{10} \Rightarrow K = 2X$, $X = 1, 3, 7, 9$.

c) 1) $n = 24$

2) $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, 23$

3) Divisores de 24 menores que 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.

4) Los W_K, tales que $K \wedge 24$ son primos entre sí, serán las raíces primitivas: $\{W_1, W_5, W_7, W_{11}, W_{13}, W_{17}, W_{19}, W_{23}\}$

5) Para la raíz de la unidad de grado 24, se tiene:

- Al exponente 1, pertenece W_0
- Al exponente 2, pertenece W_{12}

Pues, si $\frac{K}{24} = \frac{X}{2} \Rightarrow K = 12X$, $X = 1$

- Al exponente 3, pertenecen: W_8, W_{16}

Pues, si $\frac{K}{24} = \frac{X}{3} \Rightarrow K = 8X$, $X = 1, 2$

- Al exponente 4, pertenecen: W_6, W_{18}

Pues, si $\frac{K}{24} = \frac{X}{4} \Rightarrow K = 6X$, $X = 1, 3$

- Al exponente 6, pertenecen: W_4, W_{20}

Pues, si $\frac{K}{24} = \frac{X}{6} \Rightarrow K = 4X$, $X = 1, 5$

- Al exponente 8, pertenecen: W_3, W_9, W_{15}, W_{21}

Pues, si $\frac{K}{24} = \frac{X}{8} \Rightarrow K = 3X$, $X = 1, 3, 5, 7$

- Al exponente 12, pertenecen: $W_2, W_{10}, W_{14}, W_{22}$

Pues, si $\frac{K}{24} = \frac{X}{12} \Rightarrow K = 2X$, $X = 1, 5, 7, 11$

Como observamos: "$12 \wedge X$" son primos entre sí.

PROBLEMA 16.14 Escribir los "polinomios circulares" $\mathcal{X}_n(x)$ para "n" igual a.

a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ; d) 4 ; e) 5 ; f) 6 ; g) 7 ; h) 8 ; i) 9 ; j) 10 ; k) 11 ; ℓ) 12 ; m) 15 ; n) 105.

SOLUCION :

NOTA : Los "polinomios circulares" $\mathcal{X}_n(x)$ son aquellos cuyas raices son "las raices primitivas" de grado "n".

a) Para $n=1$

De $x-1=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_1(x)=x-1}$

b) Para $n=2$

De $x^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_2(x)=x+1}$

c) Para $n=3$

De $x^3-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_3(x)=x^2+x+1}$

Otra forma de hallar el polinomio circular de grado 3 es de la siguiente manera :

1º) De $x^3-1=0 \Rightarrow W_K = cis\,\frac{K}{3}(2\pi)$, $K=0,1,2$.

2º) Las raices primitivas son : W_1 , W_2

3º) Luego ; el polinomio circular será : $\mathcal{X}_3(x) = (X-W_1)(X-W_2)$, $W_2=\overline{W}_3$

$$= (X-W_1)(X-\overline{W}_1)$$

$$= \left[X^2-(W_1+\overline{W}_1)X + W_1\overline{W}_2\right]$$

$$= (X^2-2\,Re(W_1)X + |W_1|^2)$$

$$= X^2+X+1 .$$

d) Para $n=4$.

De $X^4-1=0 \Leftrightarrow (X^2-1)(X^2+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_4(x)=X^2+1}$

e) Para $n=5$

De $X^5-1=0 \Leftrightarrow (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_5(x)=X^4+X^3+X^2+X+1}$

Otra forma : Como W_1 , W_2, W_3, W_4 son las raices primitivas de grado 5 ,entonces:

$\mathcal{X}_5(x)=\prod_{K=1}^{4}(X-W_K)$, donde $W_K = cis\,(\frac{2K\pi}{5})$, $K=0,1,2,3,4$.

f) Para $n=6$

De $X^6-1=0 \Leftrightarrow (X^3-1)(X^3+1)=0$

$\Leftrightarrow (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_6(x)=X^2-X+1}$

Otra forma :

Las raices de $X^6-1=0$ son $W_K = cis\,\frac{K}{6}(2\pi)$, $K=0,1,2,\ldots,5$.

Las raices primitivas de grado 6 son: W_1, W_5 , luego :

$\mathcal{X}_6(x) = (X-W_1)(X-W_5)$, donde $W_5=\overline{W}_1$

$= X^2-X+1$

g) Para $n=7$

De $X^7-1=0 \Leftrightarrow (X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_7(x)=X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1}$

h) Para $n=8$

De $X^8-1=0 \Leftrightarrow (X^4-1)(X^4+1)=0$

$\Leftrightarrow (X^2-1)(X^2+1)(X^4+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_8(x)=X^4+1}$

Otra forma :

Las raices de $X^8-1=0$, son $W_K = cis\,(\frac{K}{8}(2\pi))$, $K=0,1,2,\ldots,7$.

Las raices primitivas de grado 8 , son : W_1, W_3, W_5 , W_7 ; luego

$\mathcal{X}_8(x)=\prod_{K=1}^{4}(X-W_{2K-1})$

i) Para $n=9$

De $X^9-1=0 \Leftrightarrow (X^3-1)(X^6+X^3+1)=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{X}_9(x)=X^6+X^3+1}$

Otra forma :

Las raices de $X^9-1=0$, son $W_K = cis\,(\frac{2K\pi}{9})$, $K=0,1,\ldots,8$

Las raices primitivas de grado 9, son: $W_1, W_2, W_4, W_5, W_7, W_8$, que dan origen a $\chi_9(x) = (X-W_1)(X-W_2)(X-W_4)(X-W_5)(X-W_7)(X-W_8)$.

j) Para $n = 10$

De $x^{10} - 1 = 0 \iff (x^5-1)(x^5+1) = 0$

$\iff (x^5-1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$\Rightarrow \boxed{\chi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$

Otra forma:

Las raices primitivas de $x^{10} - 1 = 0$ son W_1, W_3, W_7, W_9.

Luego $\chi_{10}(x) = (X-W_1)(X-W_3)(X-W_7)(X-W_9)$.

k) Para $n = 11$

De $x^{11} - 11 = 0 \iff (x-1)(x^{10} + x^9 + \cdots\cdots + x + 1)$

$\Rightarrow \boxed{\chi_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + \cdots\cdots + x + 1}$

l) Para $n = 12$

$x^{12} - 1 = 0 \iff (x^6-1)(x^6+1)$

$\iff (x^3-1)(x^3+1)(x^2+1)\underline{(x^4-x^2+1)}$

$\Rightarrow \boxed{\chi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1}$

Otra forma: Las raices primitivas de $x^{12} - 1 = 0$, son: W_1, W_5, W_7, W_{11}

Luego: $\chi_{12}(x) = (X-W_1)(X-W_5)(X-W_7)(X-W_{11})$.

m) Para $n = 15$

Las raices de $x^{15} - 1 = 0$, son $W_K = cis\frac{2K\pi}{15}$, $K = 0, 1, 2, \ldots, 14$.

Las raices primitivas son: $W_1, W_2, W_4, W_7, W_8, W_{11}, W_{13}, W_{14}$

Luego el polinomio circular será de grado 8:

$$\chi_{15}(x) = (X-W_1)(X-W_2)(X-W_4)(X-W_7)(X-W_8)(X-W_{11})(X-W_{13})(X-W_{14})$$

$$= x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

PROBLEMA 15 Demostrar que $\displaystyle\sum_{K=0}^{2n-1} z^K = \frac{1-z^{2n}}{1-z}$; $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

Prueba:

1) sea $\displaystyle S_n = \sum_{K=0}^{2n-1} z^K = \frac{1-z^{2n}}{1-z}$, $z \neq 1$

2) Donde $\displaystyle S_1 = \sum_{K=0}^{1} z^K = 1 + z$

$$S_2 = \sum_{K=0}^{3} z^K = 1 + z + z^2 + z^3 = \frac{1-z^4}{1-z} = \frac{1-z^{2(2)}}{1-z}$$

$$S_3 = \sum_{K=0}^{5} z^K = 1 + z + \underbrace{z^2 + z^4}_{5-3=2 \text{ términos}} + z^5 = \frac{1-z^6}{1-z} = \frac{1-z^{2(3)}}{1-z}$$

3) Para $n = h \Rightarrow$

$$S_h = \sum_{K=0}^{2h-1} z^K = 1 + z + z^2 + \cdots\cdots + \underbrace{z^h + z^{h+1} + z^{h+2} + \cdots + z^{2h-1}}_{2h-1-h = h-1 \text{ términos}} = \frac{1-z^{2h-1+1}}{1-z}$$

$$= \frac{1-z^{2h}}{1-z}$$

4) Para $n = h+1$, debo probar que: $S_{h+1} = \dfrac{1-z^{2(h+1)}}{1-z}$

Pero: $\displaystyle S_{h+1} = \sum_{K=0}^{2(h+1)-1} z^K$

$$= \sum_{K=0}^{(2h-1)+2} z^K = \sum_{K=0}^{2h-1} z^K + z^{2h-1+1} + z^{2h-1+2}$$

$$= \sum_{K=0}^{2h-1} z^K + z^{2h} + z^{2h+1}$$

$$= \frac{1-z^{2h}}{1-z} + z^{2h}(1+z)$$

$$= \frac{(1-z^{2h}) + z^{2h}(1+z)(1-z)}{1-z} = \frac{(1-z^{2h}) + z^{2h}(1-z^2)}{1-z}$$

$$\frac{1-z^{2h} + z^{2h} - z^{2h+2}}{1-z} = \frac{1-z^{2(h+1)}}{1-z} \quad //$$

PROBLEMA - Hallar $(1+2i)^{-1}\sum\limits_{K=0}^{2n-1}(2-2i)^K$

SOLUCION :

1) Por el problema anterior, se tiene:

$$\sum_{K=0}^{2n-1}(2-2i)^K = \frac{1-(2-2i)^{2n}}{1-(2-2i)}, \text{ donde } (2-2i)^{2n} = \left[(2-2i)^2\right]^n$$

$$= \left[4-8i+4i^2\right]^n$$

$$= \frac{1-(-8i)^n}{-(1-2i)} \qquad = \left[-8i\right]^n$$

2) Luego:

$$(1+2i)^{-1}\sum_{K=0}^{2n-1}(2-2i)^K = \frac{1}{(1+2i)}\left[-\frac{1-(-8i)^n}{1-2i}\right]$$

$$= -\frac{1-(-8i)^n}{1-4i^2} = -\frac{1-(-8i)^n}{5}$$

$$= \frac{(-8i)^n-1}{5}$$

$$= \frac{(-1)^n 8^n i^n - 1}{5} = \begin{cases} \frac{1}{5}(8^n-1), & \text{si } n=\dot{4} \\ \frac{1}{5}(-8^n i-1), & \text{si } n=\dot{4}+1 \\ \frac{1}{5}(-8^n-1), & \text{si } n=\dot{4}+2 \\ \frac{1}{5}(8^n i-1), & \text{si } n=\dot{4}+3 \end{cases}$$

17. PROBLEMAS RELATIVOS AL MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO PARTE REAL E IMAGINARIA, CONJUGADA.

PROBLEMA[17.1] si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, demostrar que:

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$

Prueba

Aplicar la propiedad: $z\bar{z} = |z|^2$

1) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$

$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$|z_1+z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2$$

2) $|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$$= (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$$

3) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

PROBLEMA[17.2] a) si $W = \dfrac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}$, demostrar que $W\bar{W} = \dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)}{1+|z_1|^2|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)}$

b) si $|z_1| \le 1$. Demostrar que $|W| \le 1$.

Prueba:

a) 1) Como $W = \dfrac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}$, entonces $\bar{W} = \overline{\left(\dfrac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{1-\bar{z}_1 z_2}$

2) $W\bar{W} = \left(\dfrac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right)\left(\dfrac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right)$

$$= \frac{z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2}{1-\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2\cdot\bar{z}_1 z_2}$$

$$= \frac{|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)}{1+(z_1\bar{z}_1)(\bar{z}_2 z_2)-(\bar{z}_1 z_2+z_1\bar{z}_2)}$$

$$= \frac{|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)}{1+|z_1|^2|z_2|^2-(\bar{z}_1 z_2+z_1\bar{z}_2)} \quad //$$

b) como: $W\bar{W} = |W|^2$, luego

$$|W|^2 = \frac{|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)}{1+|z_1|^2|z_2|^2-(\bar{z}_1 z_2+z_1\bar{z}_2)} \le \frac{1+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)}{1+|z_2|^2-(\bar{z}_1 z_2+z_1\bar{z}_2)} = 1, \text{pues } |z_1| \le 1$$

$\Rightarrow |W|^2 \le 1$

$\Rightarrow |W| \le 1 \quad //$

PROBLEMA 13 Sean z y w números complejos, tales que, $|z| = |w| = 1$

a) Probar que $\frac{z-w}{z+w}$, $z \neq -w$ es imaginario puro.

b) si $n \in \mathbb{Z}$, Probar que $\frac{(z+w)^n}{z^n+w^n}$, $z^n \neq -w^n$ es real.

<u>Prueba de a)</u>

1) Debo probar que $\frac{z-w}{z+w} = ik$, $k = ?$, $k \in \mathbb{R}$.

2) Como $|z| = |w| = 1$, entonces conviene que z y w sean expresados en forma polar.

$$\text{sean} \begin{cases} z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \\ w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

3) $\frac{z-w}{z+w} = \frac{(\cos\alpha - \cos\theta) + i(\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\theta)}{(\cos\alpha + \cos\theta) + i(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\theta)}$ · Transformar las sumas y diferencias de sen y cos en productos.

$$= \frac{-2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\theta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\theta}{2} + i.2\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{\alpha-\theta}{2}}{2\cos\frac{(\alpha+\theta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\theta)}{2} + i.\,2\,\text{sen}\,\frac{(\alpha+\theta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\theta)}{2}}$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,\frac{(\alpha-\theta)}{2}\left[-\text{sen}\,\frac{\alpha+\theta}{2} + i\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\right]}{2\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\theta}{2}\right]},$$

$$\text{pero} \begin{cases} -\text{sen}\,x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$= \frac{\text{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\left[\cos\frac{\alpha+\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\theta}{2}\right]}$$

$$= \text{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]$$

$$= \text{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right], \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{sen}\,\frac{\pi}{2} =$$

$$= i\,\text{tg}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)_{//}, \quad \text{como vemos } K = \text{tg}\,\frac{\alpha-\theta}{2}$$

<u>Prueba de b)</u>

$$\frac{(z+w)^n}{z^n+w^n} = \frac{\left[(\cos\alpha + \cos\theta) + i(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\theta)\right]^n}{(\cos n\alpha + \cos n\theta) + i(\text{sen}\,n\alpha + \text{sen}\,n\theta)},$$

$$\text{donde} \begin{cases} z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow z^n = \cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha \\ w = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow w^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta \end{cases}$$

$$= \frac{\left[2\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\theta}{2} + i\,2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\theta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\right]^n}{2\cos\frac{n(\alpha+\theta)}{2}\cos\frac{n(\alpha-\theta)}{2} + i\,2\,\text{sen}\,\frac{n(\alpha+\theta)}{2}\cos\frac{n(\alpha-\theta)}{2}}$$

$$= \frac{2^n\cos^n\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]^n}{2\cos\frac{n(\alpha-\theta)}{2}\left[\cos\frac{n(\alpha+\theta)}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{n(\alpha+\theta)}{2}\right]} \quad \text{son iguales}$$

$$= 2^{n-1}\,\frac{\cos^n\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}{\cos\frac{n(\alpha-\theta)}{2}}\;\frac{\left[\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]^n}{\left[\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]^n}$$

$$= 2^{n-1}\,\frac{\cos^n\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}{\cos\frac{n(\alpha-\theta)}{2}} \quad //$$

PROBLEMA 14 Probar: $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ (II)

Prueba:

Debo probar que: $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ (I)

1) <u>Probaré (II)</u>:

$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ (Prop. triangular)

$\Rightarrow \quad |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$

$\Rightarrow \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \ldots\ldots\ldots(1*)$

2) Probaré (I)

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| = |(z_2 - z_1) + z_1| \le |z_2 - z_1| + |z_1| \ldots \text{Prop. triang.}$$

$\Rightarrow \quad |z_2| \le |z_2 - z_1| + |z_1|$

$\Rightarrow \quad |z_2| - |z_1| \le |z_1 - z_2|$, pues $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$

Multiplicar por (-1)

$\Rightarrow \quad |z_1| - |z_2| \ge -|z_1 - z_2| \quad \ldots\ldots\ldots (2*)$

3) Por $(1*)$ y $(2*)$ obtenemos :

$$-|z_1 - z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

$$\Leftrightarrow \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$$

PROBLEMA 175 Demostrar que $\forall\ z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, se cumple :

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 + |z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2)$$

Prueba :

1) $|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 = (z_1 w_1 + z_2 w_2)(\overline{z_1 w_1 + z_2 w_2})$

$= (z_1 w_1 + z_2 w_2)(\overline{z}_1 \overline{w}_1 + \overline{z}_2 \overline{w}_2)$

$= z_1 \overline{z}_1 w_1 \overline{w}_1 + z_1 \overline{z}_2 w_1 \overline{w}_2 + z_2 \overline{z}_1 w_2 \overline{w}_1 + z_2 \overline{z}_2 w_2 \overline{w}_2$

$= |z_1|^2 |w_1|^2 + z_1 \overline{z}_2 w_1 \overline{w}_2 + z_2 \overline{z}_1 w_2 \overline{w}_1 + |z_2|^2 |w_2|^2$

2) $|z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1|^2 = (z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1) \cdot (\overline{z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1})$

$= (z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1) \cdot (\overline{z}_1 w_2 - \overline{z}_2 w_1)$

$= z_1 \overline{z}_1 \overline{w}_2 w_2 - z_1 \overline{z}_2 \overline{w}_2 w_1 - z_2 \overline{z}_1 \overline{w}_1 w_2 + z_2 \overline{z}_2 \overline{w}_1 w_1$

$= |z_1|^2 |w_2|^2 - z_1 \overline{z}_2 \overline{w}_2 w_1 - z_2 \overline{z}_1 \overline{w}_1 w_2 + |z_2|^2 |w_1|^2$

3) $|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 + |z_1 \overline{w}_2 - z_2 \overline{w}_1|^2 = |z_1|^2 (|w_1|^2 + |w_2|^2) + |z_2|^2 (|w_2|^2 + |w_1|^2)$

$= (|w_1|^2 + |w_2|^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

PROBLEMA 176 Probar que $|\overline{z} + ki| = |z - ki|$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Prueba

Bastará aplicar la propiedad : $|z| = |\overline{z}|$

Veamos :

$$|\overline{z} + ki| = |\overline{\overline{z} + ki}| = |z + \overline{ki}| = |z - ki| \ //$$

PROBLEMA 177 Hallar z en forma polar, si :

$$(|iz + 4| + |\overline{z} + 4i|)\,|z + 3i| = 0$$

SOLUCION :

1) se tiene : $|iz + 4| = |i(z - 4i)| = |i|\,|z - 4i| = |z - 4i|$

2) Aprovechando la propiedad : $|z| = |\overline{z}|$, se tiene :

$$|\overline{z} + 4i| = |\overline{\overline{z} + 4i}| = |z + \overline{4i}| = |z - 4i|$$

3) Luego, al reemplazar en la pregunta :

$$(|z - 4i| + |z - 4i|)\,|z + 3i| = 0$$

$\Rightarrow \quad 2\,|z - 4i|\,|z + 3i| = 0$

$\Rightarrow \quad |z - 4i| = 0 \quad \vee \quad |z + 3i| = 0$

$\Leftrightarrow \quad z = 4i \quad \vee \quad z = -3i$

$z = 4(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2) \quad \vee \quad z = 3(\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2)$

$= 4e^{i\pi/2} \quad \vee \quad = 3e^{3\pi/2\, i}$

PROBLEMA 178 Hallar la forma exponencial de z , tal que :

$$z = w^2 + w \quad , \quad w \in \mathbb{C} - \{-1\} \ , |w| = 1$$

SOLUCION :

1) Como $|w| = 1$, entonces conviene expresar w, de la forma :

$$w = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

2) Pero : $z = w^2 + w$

$= w(w + 1)$, como $w \ne -1 \Rightarrow \theta \ne \pi$

$$z = e^{i\theta}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta + 1)$$

$$= e^{i\theta}\left[(\cos\theta + 1) + i\,\text{sen}\,\theta\right]$$

$$= e^{i\theta}\left[2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\,2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

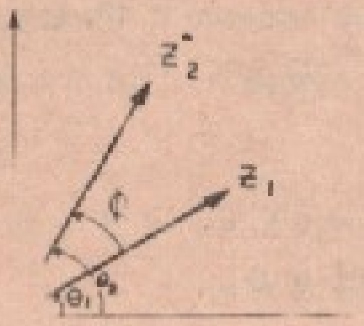
$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\theta}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\right] = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\theta}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{3\theta}{2}} \quad //$$

PROBLEMA[17.9] Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ demostrar que: $\cos\phi = \dfrac{Re(z_1\bar{z}_2)}{|z_1\,\bar{z}_2|}$

ϕ es el ángulo comprendido entre los radios vectores que representan a z_1 y z_2

SOLUCION:



1) sea $\phi = \theta_2 - \theta_1$, donde ϕ es el ángulo entre z_2 y z_1

2) $\cos\phi = \cos(\theta_2 - \theta_1)$

3) Nuestro objetivo es hallar $\cos(\theta_2 - \theta_1)$. Que se logra cuando se multiplica o divide dos números complejos cuando están expresados en su forma polar.

4) supongamos que las formas polares de z_1 y z_2 sean:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \Rightarrow \bar{z}_2 = r_2(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$= r_2(\cos(-\theta_2) + i\,\text{sen}(-\theta_2))$$

5) $z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right)$

6) Donde: a) $Re(z_1\bar{z}_2) = r_1 r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$

$$\Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{Re(z_1\bar{z}_2)}{r_1\,r_2}, \text{ donde } r_1 = |z_1|, \quad r_2 = |z_2| = |\bar{z}_2|$$

$$\boxed{\cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{Re(z_1\bar{z}_2)}{|z_1\,\bar{z}_2|}}, \quad r_1 r_2 = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1\bar{z}_2|$$

$$// \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos[-(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$= \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

b) $Im(z_1\bar{z}_2) = r_1 r_2\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{Im(z_1\bar{z}_2)}{r_1\,r_2} = \frac{Im(z_1\bar{z}_2)}{|z_1\,\bar{z}_2|}}$$

PROBLEMA[17.10] $\forall\, z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, probar que:

$$z_1 w_1\overline{z_2 w_2} + \overline{z_1 w_1\overline{z_2 w_2}} \le |z_1|^2\,|\overline{w_2}|^2 + |\bar{z}_2|^2|w_1|^2$$

Prueba:

1) Se aplican sucesivamente las propiedades:

(I) $(|z| - |w|)^2 \ge 0 \Rightarrow |z| + |w| \ge 2|z||w|$

(IV) $\boxed{|z|^2 + |w|^2 = zw + \overline{zw}}$

(II) $Re(z) \le |z|$

Entonces: $|z||w| = |zw| \ge Re(zw)$

Luego: $\boxed{2|z||w| \ge 2Re(zw)}$

(III) $2Re(z) = z + \bar{z}$

2) Para el presente caso, hacer $\begin{cases} z = z_1\overline{w_2} \\ w = \bar{z}_2 w_1 \end{cases}$

Así obtendremos:

$$\left(|z_1\overline{w_2}| - |\bar{z}_2 w_1|\right)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow |z_1\overline{w_2}|^2 + |\bar{z}_2 w_1|^2 \ge 2|z_1\overline{w_2}||\bar{z}_2 w_1| = 2|z_1\overline{w_2}\,\bar{z}_2 w_1|$$

$$= 2|z_1 w_1\overline{z_2 w_2}| \ge 2Re(z_1 w_1\overline{z_2 w_2}) \cdots (\text{Por II})$$

3) Pero: $2Re(z_1 w_1\overline{z_2 w_2}) = z_1 w_1\overline{z_2 w_2} + \overline{z_1 w_1\overline{z_2 w_2}}$ (Por III)

$$= z_1 w_1\bar{z}_2\overline{w}_2 + \bar{z}_1\overline{w}_1 z_2 w_2$$

4) Por (2) y (3):

$$|z_1\overline{w}_2|^2 + |\overline{z}_2 w_1|^2 \geq z_1 w_1 \overline{z_2 w_2} + \overline{z_1 w_1 \overline{z_2 w_2}} \quad \text{o lo que es igual}$$

$$|z_1|^2|\overline{w}_2|^2 + |\overline{z}_2|^2|w_1|^2 \geq z_1 w_1 \overline{z}_2\overline{w}_2 + \overline{z}_1\overline{w}_1 z_2 w_2 \quad //$$

PROBLEMA 17.11 Probar que $\forall\ z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$

$$|z_1w_1 + z_2w_2|^2 \leq \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right)$$

Prueba:

1) Aplicando la propiedad $|z|^2 = z\overline{z}$, se tiene:

$$|z_1w_1 + z_2w_2|^2 = (z_1w_1 + z_2w_2)(\overline{z_1w_1 + z_2w_2})$$
$$= (z_1w_1 + z_2w_2)(\overline{z}_1\overline{w}_1 + \overline{z}_2\overline{w}_2)$$
$$= z_1\overline{z}_1 w_1\overline{w}_1 + z_1w_1\overline{z}_2\overline{w}_2 + z_2w_2\overline{z}_1\overline{w}_1 + z_2\overline{z}_2 w_2\overline{w}_2$$
$$= |z_1|^2|w_1|^2 + \underline{z_1w_1\overline{z}_2\overline{w}_2 + z_2w_2\overline{z}_1\overline{w}_1} + |z_2|^2|w_2|^2$$

2) Por el problema anterior se ha probado que:

$$\underline{z_1 w_1\overline{z}_2\overline{w}_2 + z_2w_2\overline{z}_1\overline{w}_1} \leq |z_1|^2|\overline{w}_2|^2 + |\overline{z}_2|^2|w_1|^2$$

3) En (1 se tendrá:

$$|z_1w_1 + z_2w_2|^2 \leq |z_1|^2|w_1|^2 + |z_1|^2|\overline{w}_2|^2 + |\overline{z}_2|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2$$

$$\Rightarrow |z_1w_1 + z_2w_2|^2 \leq |z_1|^2|w_1|^2 + |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2$$

$$\text{pues} \begin{cases} |\overline{w}_2| = |w_2| \\ |\overline{z}_2| = |z_2| \end{cases}$$

$$\leq |z_1|^2\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) + |z_2|^2\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right)$$

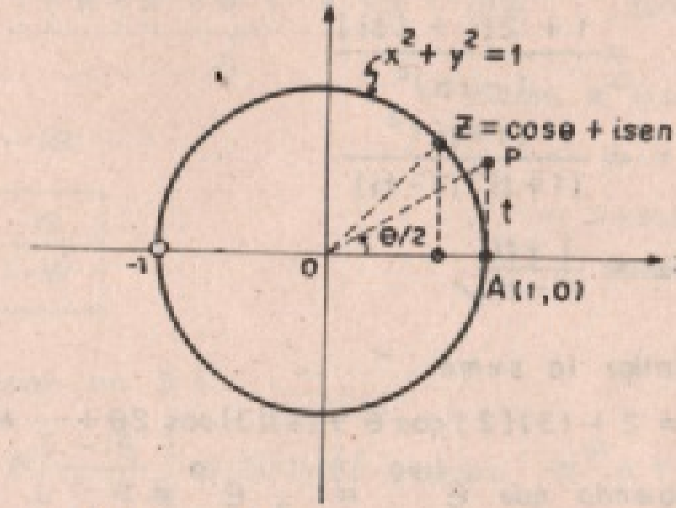
$$\leq \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) \quad //$$

PROBLEMA 17.12 Demostrar que todo número complejo z, distinto de -1 y cuyo módulo es igual a 1, puede expresarse en la forma

$$z = \frac{1+ti}{1-ti} \quad \text{donde } t \text{ es un número real.}$$

PRUEBA

1) si $z \in \mathbb{C}$, donde $|z| = 1$; entonces $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, con $z \neq -1$



2) Ayudándonos del gráfico, tenemos:

a) z es un número complejo unitario y por tanto pertenece al gráfico de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

b) θ es el argumento de z.

c) En el triángulo OAP, hagamos: $|AP| = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Así obtenemos: $\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = t$, con $\theta \neq \pi$, pues $z \neq -1$.

Como: $$\text{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\,\theta/2}{\cos\theta/2} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

entonces: $$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = t \iff \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = t^2$$

$$\iff 1 - \cos\theta = t^2 + t^2\cos\theta$$

$$\iff 1 - t^2 = (t^2+1)\cos\theta$$

$$\iff \boxed{\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Donde $\quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2}$

3) Luego :

$$
\begin{aligned}
Z &= \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} \\
&= \frac{1+2ti-t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{1+2ti+(ti)^2}{1-(ti)^2} \\
&= \frac{(1+ti)^2}{(1+ti)(1-ti)} \\
Z &= \frac{1+ti}{1-ti} \;/\!/
\end{aligned}
$$

PROBLEMA [IV.15] Hallar la suma :

$$S = 2 + (3)(2)\cos\theta + (4)(3)\cos 2\theta + \cdots + (20)(19)\cos 18\theta$$

Sabiendo que $e^{i19\theta} = 1$, $e^{i\theta} \neq 1$

SOLUCION :

1) se tiene : $S = 2 + (3)(2)\cos\theta + (4)(3)\cos 2\theta + \cdots + (20)(19)\cos 18\theta$

2) Hacer : $iT = i(3)(2)\operatorname{sen}\theta + i(4)(3)\operatorname{sen}2\theta + \cdots + i(20)(19)\operatorname{sen}18\theta$

3) $S+iT = 2+(3)(2)\left[\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right] + (4)(3)\left[\cos 2\theta + i\operatorname{sen}2\theta\right] + \cdots$

$\cdots + (20)(19)\left[\cos 18\theta + i\operatorname{sen}18\theta\right]$.

$= 2 + (3)(2)e^{i\theta} + (4)(3)e^{i2\theta} + \cdots + (20)(19)e^{i18\theta}$

4) $\quad Z = 2 + (3)(2)W + (4)(3)W^2 + \cdots + (20)(19)W^{18}$,

donde $W = e^{i\theta}$, $S+iT = Z$

5) $(1-W)Z = \left[2 + (3)(2)W + (4)(3)W^2 + \cdots + (20)(19)W^{18}\right] - \left[2W + (3)(2)W^2 + (4)(3)W^3 + \cdots + (19)(18)W^{18} + (20)(19)W^{19}\right]$

$= 2 + 2(2W) + 2(3W^2) + \cdots + 2(19W^{18}) - (20)(19)W^{19}$

$$(1-W)Z = 2\underbrace{\left[1+2W+3W^2+\cdots+19W^{18}\right]}_{M} - (20)(19)\underbrace{W^{19}}_{1}$$

6) Pero : $M = 1 + 2W + 3W^2 + \cdots + 18W^{17} + 19W^{18}$

$(1-W)M = \left[1+2W+3W^2+\cdots+18W^{17}+19W^{18}\right] - \left[W+2W^2+3W^3+\cdots + 18W^{18}+19W^{19}\right]$.

$= \underbrace{1+W+W^2+W^3+\cdots+W^{18}}_{Q} - 19W^{19}$, donde $W^{19} = e^{i19\theta} = 1$

Como $W^{19} = 1 \Rightarrow 1-W^{19} = 0$

$\Rightarrow (1-W)(1+W+W^2+\cdots+W^{18}) = 0$

$\Rightarrow 1+W+W^2+\cdots+W^{18} = 0$

puesto que $W \neq 1$.

$(1-W)M = -19$

$\Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{-19}{1-W}}$

7) Al reemplazar en 5) :

$(1-W)Z = 2\left[\frac{-19}{1-W}\right] - (20)(19)$, pues $W^{19} = 1$

$Z = \frac{-2(19)}{(1-W)^2} - \frac{(20)(19)}{1-W}$, donde $Z = S + iT$, $S = \operatorname{Re}(Z)$.

8) Donde : $1 - W = 1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$

$$
\begin{aligned}
&= 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - i2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right] \\
&= 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

9) Reemplazar en 7)

$$Z = \frac{-2(19)}{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left[\cos(\theta-\pi) - i\operatorname{sen}(\theta-\pi)\right] - \frac{(20)(19)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

10) $\operatorname{Re}(Z) = \frac{-2(19)}{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\cos(\theta-\pi) - \frac{10(19)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$, pero $\begin{cases}\cos(\theta-\pi) = -\cos\theta \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\end{cases}$

$$\boxed{S = \frac{19\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} - 190} \quad S = \operatorname{Re}(Z) \;/\!/$$

PROBLEMA 17.14 Sea $x=\frac{\pi}{n+1}$, n par y $S=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\operatorname{sen}kx}{\cos^k x}$

a) Demostrar que $S=\frac{\cos^{n+1}x+1}{\operatorname{sen}x.\cos^n x}$

b) $S=\frac{4\cos^2 x/2}{\operatorname{sen}2x}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\operatorname{sen}^{k-2}x$

PRUEBA de a)

1. Se da $S=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos^2 x}+\dots+\frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{\cos^{n+1}x}$

2. Por i $iS=i\operatorname{sen}x.\sec x+i\operatorname{sen}2x.\sec^2 x+\dots+i\operatorname{sen}(n+1)x.\sec^{n+1}x$.

3. Nos damos: $T=\cos x.\sec x+\cos 2x.\sec^2 x+\dots+\cos(n+1)x.\sec^{n+1}x$

4. Sumar: $T+iS$

$$T+iS=(\cos x+i\operatorname{sen}x)\sec x+(\cos 2x+i\operatorname{sen}2x)\sec^2 x+\dots+(\cos(n+1)x+i\operatorname{sen}(n+1)x)\sec^{n+1}x$$
$$=z.\sec x+z^2\sec^2 x+\dots+z^{n+1}.\sec^{n+1}x.$$

5. Hacer $T+iS=M\in\mathbb{C}$

$M=z.\sec x+z^2\sec^2 x+\dots+z^{n+1}.\sec^{n+1}x$

6. Multiplicar por: $1-z.\sec x$

$$(1-z\sec x)M=z\sec x+z^2\sec^2 x+\dots+z^{n+1}\sec^{n+1}x-\left[z^2\sec^2 x+z^3\sec^3 x+\dots+z^{n+2}\sec^{n+2}x\right]$$
$$=z.\sec x-z^{n+2}\sec^{n+2}x$$
$$M=\frac{z.\sec x-z^{n+2}.\sec^{n+2}x}{1-z.\sec x}=\frac{z.\sec x\left[1-z^{n+1}\sec^{n+1}x\right]}{1-z.\sec x}$$
$$=\frac{(\cos x+i\operatorname{sen}x)\sec x\left[1-(\cos(n+1)x+i\operatorname{sen}(n+1)x)\sec^{n+1}x\right]}{1-(\cos x+i\operatorname{sen}x)\sec x}$$
$$=\frac{(1+i\operatorname{sen}x\sec x)\left[(1-\sec^{n+1}x.\cos(n+1)x)-i\sec^{n+1}x.\operatorname{sen}(n+1)x\right]}{-i\operatorname{sen}x.\sec x}$$
$$M=\frac{\left[1-\sec^{n+1}x.\cos(n+1)x+\operatorname{sen}x.\sec^{n+2}x\operatorname{sen}(n+1)x\right]+i\left[\operatorname{sen}x.\sec x(1-\sec^{n+1}x\cos(n+1)x)-\sec^{n+1}x.\operatorname{sen}(n+1)x\right]}{-i\operatorname{sen}x,\sec x}.$$

Multiplicar numerador y denominador por i:

$$M=\frac{\left[1-\sec^{n+1}x.\cos(n+1)x+\operatorname{sen}x.\sec^{n+2}x.\operatorname{sen}(n+1)x\right]i}{\operatorname{sen}x.\sec x}+\frac{\sec^{n+1}x.\operatorname{sen}(n+1)x-\operatorname{sen}x.\sec x+\operatorname{sen}x\sec^{n+2}x\cos(n+1)x}{\operatorname{sen}x.\sec x}$$

7. S es parte imaginaria de M:

$$S=\frac{1-\sec^{n+1}x\left[\cos(n+1)x-\operatorname{sen}x.\sec x.\operatorname{sen}(n+1)x\right]}{\operatorname{sen}x.\sec x}\quad,\text{haciendo } x=\frac{\pi}{n+1}\begin{cases}\cos(n+1)x=\cos\pi\\ \quad=-1\\ \operatorname{sen}(n+1)x=\operatorname{sen}\pi\\ \quad=0\end{cases}$$
$$S=\frac{1-\sec^{n+1}x\,[-1-0]}{\operatorname{sen}x.\sec x}=\frac{1+\sec^{n+1}x}{\operatorname{sen}x.\sec x}=\frac{\cos^{n+1}x+1}{\operatorname{sen}x.\cos^n x}$$

b) Queda como ejercicio.

18. POLINOMIOS Y ECUACIONES POLINOMICAS

18.1 DEFINICION.— Dado un número entero $n\geq 0$, un POLINOMIO ENTERO EN X CON COEFICIENTES EN IK DE GRADO n , es una función de la forma :

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots\dots\dots+a_1 x+a_0\quad,\text{con } a_n\neq 0.$$

x = es la variable independiente que puede ser : $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$a_i\in$ IK , son los coeficientes de las X y son constantes que pueden ser números enteros , racionales o complejos.

IK = es un conjunto , que puede ser $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$

a_n = coeficiente principal

a_0 = término constante

$n=\operatorname{grad}P(x)$ es el grado del polinomio P (x)

polinomio entero = porque los exponentes de X son enteros positivos o cero.

P (x) = es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

La notación $P:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto P(x)$ indica que P es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir la variable independiente $x\in\mathbb{R}$ y $P(x)\in\mathbb{R}$.

En este caso , se dice que P(x) es un polinomio real de variable real.

La notación $P:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, $x\longmapsto P(x)$ indica que P es una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es decir $X\in\mathbb{C}$ y $P(x)\in\mathbb{C}$.

En este caso se dice que P (x) es un polinomio complejo de variable complejo.

El nombre particular que tenga el polinomio P(x) , dependerá de la variable independiente "X" y de los coeficientes $a_i\in$ IK , así tendremos :

a) si $X\in\mathbb{C}$ y los coeficientes $a_i\in\mathbb{C}$, diremos que P(x) es un polinomio sobre el campo de los números complejos.

b) si $X\in\mathbb{R}$ y los coeficientes $a_i\in\mathbb{Z}$, diremos que P(x) es un polinomio real con coeficientes enteros.

NOTA : El estudio de todo polinomio entero $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ radica en el tratamiento de sus coeficientes $a_i \in \mathbb{K}$ y en particular de a_n y a_0 . Esto lo veremos más adelante.

Ejemplos :

1) $P(z) = 3iz^5 + 2z^4 - (2-3i)z^3 + 5z^2 - 3z + 2$ es un polinomio entero en z, sobre el campo de los números complejos; de 5^{to} grado ; cuyo coeficiente principal $a_5 = 3i$.

2) $P(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 5$, con $x \in \mathbb{R}$; es un polinomio entero en X, de coeficientes racionales y de 3^{er} grado ; con coeficiente principal $a_3 = \frac{2}{3}$.

3) $Q(y) = 5y^4 - 3y^3 + 5y^2 - y - 8$ con $y \in \mathbb{R}$; es un polinomio entero en y, de coeficientes enteros , de 4º grado , con coeficiente principal $a_4 = 5$.

4) $P(z) = 2 - 3i$ con $z \in \mathbb{C}$; es un polinomio constante sobre $\mathbb{C}$, cuyo grado es CERO.

5) $P(X) = 5$ con $x \in \mathbb{R}$, es un polinomio constante en $\mathbb{R}$, cuyo grado es CERO.

6) $P(X) = 0$, con $x \in \mathbb{R}$; es el polinomio NULO, cuyo grado es INDEFINIDO :

- si $P(x) = 0$ con $x \in \mathbb{R}$, diremos que es el polinomio nulo en $\mathbb{R}$.
- si $P(x) = 0$ con $x \in \mathbb{C}$, diremos que es el polinomio nulo en $\mathbb{C}$.

18.2 IDENTIDAD DE POLINOMIOS

Dados dos polinomios :

$$P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad , a_n \neq 0$$
$$Q(x) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0 \quad , b_n \neq 0$$

diremos que el polinomio $P(x)$ es IDENTICO al polinomio $Q(x)$, si y sólo sí , los coeficientes de ambos polinomios , correspondientes a las mismas potencias de X , son iguales.

Es decir $P(x) \equiv Q(x)$, sí y solo sí , $a_i \equiv b_i$, $\forall x \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplo : sean $P(x) = 2$ y $Q(x) = A(X+1) + B(X-1)$, hallar A y B, si $P(x)$ es idéntico a $Q(x)$.

Solución :

$$2 \equiv A(X+1) + B(X-1)$$

$$0X + 2 \equiv (A+B)X + (A-B) \iff A+B = 0 \;\wedge\; A-B = 2$$

$$\iff \begin{cases} A+B = 0 \\ A-B = 2 \end{cases}$$
$$2A = 2$$
$$\boxed{A = 1} , \boxed{B = 1}$$

18.3 ECUACION POLINOMICA EN UNA VARIABLE

Se llama ECUACION POLINOMICA EN X DE GRADO n ($n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$), a toda ecuación de la forma :

$$\underbrace{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0}_{P(x)} = 0 \quad , \text{con } a_n \neq 0$$

18.4 RAICES DE UNA ECUACION POLINOMICA

sea el polinomio en X de grado n , $P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ con $a_n \neq 0$.

Diremos que el valor $\boxed{\text{"C" es RAIZ de } P(x)\text{, sí y solo sí, } P(C)=0}$

Donde "C" puede ser número entero, racional, irracional o complejo.

Ejemplo : sea el polinomio $P(X) = 4X^4+12X^3+21X^2+14X+3$

El número racional $X=-1/2$ es RAIZ de $P(x)$, porque $P(-1/2)=0$

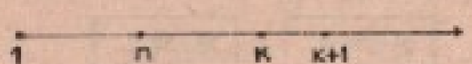
Como $P(-1+\sqrt{2}i)=0$, entonces $X=-1+\sqrt{2}i$ es RAIZ de $P(x)$.

18.5 TEOREMA (ALGORITMO DE LA DIVISION)

HIPOTESIS $\left\{\begin{array}{l}\text{si } P(x) \text{ es un polinomio de grado } n \text{ y} \\ D(x) \neq 0 \text{ es un polinomio de grado } m.\end{array}\right.$

TESIS $\left\{\begin{array}{l}\text{entonces existen dos polinomios únicos } Q \text{ y } R\text{, donde } R \\ \text{es la función CERO o tiene grado menor que } m\text{, tales que} \\ \boxed{P = QD+R}\end{array}\right.$

Para probar este teorema, se aplica el segundo principio de inducción matemática, cuyo enunciado afirma : Cualquier conjunto S de enteros positivos que:



1) contiene 1 y

2) contiene $\underline{K+1}$ siempre que contiene $\underline{\text{todos los enteros positivos } n} \leq \underline{K}$, es el conjunto de todos de todos los enteros positivos.

Dicho de otra forma : Sea S un conjunto de números enteros que cumplen dos condiciones : 1) $1\in S$ $\wedge$ 2) que de la hipotesis : $K\in S$, con $n\leq K$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se puede deducir que $K+1\in S$; entonces $S=\mathbb{Z}^+$.

<u>PRUEBA</u>

Hay dos casos por probar $\left\{\begin{array}{l}\text{(I) LA EXISTENCIA de Q y R} \\ \text{(II) LA UNICIDAD de Q y R}\end{array}\right.$

$$\begin{array}{l|l} P & D \\ \hline R & Q \end{array} \Rightarrow P = \underbrace{Q}_{\text{COCIENTE}}\ \underbrace{D}_{\text{DIVISOR}} + \underbrace{R}_{\text{RESIDUO}}, \quad P: \text{DIVIDENDO}$$

(I) Para probar la existencia de Q y R hay dos casos :

$\boxed{\text{CASO 1}}$ si $m > n$, entonces (n: grado del dividendo; m: grado del divisor)

$$\begin{array}{r|l} P & D \\ \hline \underline{0} & 0 \\ P & \end{array}$$

Luego : $\boxed{P = 0.D + P}\left\{\begin{array}{l} Q=0 \\ R=P\end{array}\right.$

Cuando el grado del dividendo P es menor que el grado del denominador D, acabamos de probar que al dividir P entre D, existen el cociente Q que es cero y el residuo R que coincide con P.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ si $n \geq m$, la prueba es por el $2^{\underline{do}}$ PRINCIPIO DE INDUCCION. (m: grado del divisor; n: grado del dividendo)

sea $S = \{ n \geq 0 \,/\, P = QD+R \}$ (n: grado del dividendo es cero o mayor que cero.)

Debo probar que para $n=0$, $n=K$, $n=K+1$, existen el cociente Q y el residuo R.

1) si $\boxed{n=0}$ y $n\geq m$ entonces $m=0$, de modo que $\left\{\begin{array}{l} P(x) = a_n \\ D(x) = d_m \end{array}\right.$

(n: grado del dividendo; m: grado del divisor (m no puede ser negativo))

Como vemos, si $n=0$ y $m=0$; los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se hacen constantes ; en consecuencia la división será :

$$\boxed{P = \underbrace{\frac{P}{D}}_{Q}\cdot D + \underbrace{0}_{R}}\text{, pues} \quad \begin{array}{r|l} a_n & d_m \\ \hline \underline{-a_n} & \frac{a_n}{d_m} \\ 0 & \end{array} \quad a_n = \frac{a_n}{d_m}\cdot d_m + 0, \quad P = \frac{P}{D}\cdot D + 0$$

Como D es constante y P es constante, entonces el cociente, $Q = \frac{P}{D} = \frac{a_n}{d_m}$ también es constante y el residuo R es cero.

Acabamos de probar que existen el cociente $Q = \frac{a_n}{d_m}$ y el residuo $R=0$.

2) Hipótesis inductiva: Supongamos que existe la división para todo $n \leq K$, $n \in S$.

Es decir, suponer que existe la división de un polinomio P_1 de grado K entre el polinomio D de grado m, tal que $P_1 = Q_1 D + R$, donde o $R = 0$ o $grad(R) < m$

3) Debo probar que la división existe para " $K+1$ " (Debo probar que $(K+1) \in S$)

Es decir, debo probar que existe la división de un polinomio $P(x)$ de grado "$K+1$" entre el polinomio $D(x)$ de grado m.

Veamos :

sean: $P(X) = a_{K+1} X^{K+1} + a_K X^K + \cdots + a_1 X + a_0$, $a_{K+1} \neq 0$

y $D(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$, $b_m \neq 0$

Al efectuar la División de $P(X)$ entre $D(X)$ obtenemos :

$$\begin{array}{l|l} a_{K+1} X^{K+1} + a_K X^K + \cdots + a_1 X + a_0 & b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0 \\ \hline -a_{K+1} X^{K+1} - \frac{a_{K+1}}{b_m} X^K + \cdots & \frac{a_{K+1}}{b_m} X^{K+1-m} \\ \hline \underbrace{\left(a_K - \frac{a_{K+1}}{b_m}\right) X^K + \cdots + a_1 X + a_0}_{P_1} & \end{array}$$

De modo que $\boxed{P = \frac{a_{K+1}}{b_m} X^{K+1-m} D + P_1}$ (*)

grado $(P_1) = K$

Donde P_1 es un polinomio de grado K o menor.

4) Por el paso 2) para $n = K$ existe la división de P_1 entre D. Es decir, al efectuar la división de P_1 entre D, existen el polinomio cociente Q_1 y el residuo R, tal que $\boxed{P_1 = Q_1 D + R}$ (**) donde o $R = 0$ o de grado menor que m.

5) Reemplazar (**) en (*) :

$$P = \frac{a_{K+1}}{b_m} X^{K+1-m} D + Q_1 D + R$$

$$= \underbrace{\left(\frac{a_{K+1}}{b_m} X^{K+1-m} + Q_1\right)}_{Q} D + R$$

$\Rightarrow \boxed{P = QD + R}$ indica que al efectuar la división de P entre D, hemos encontrado (existen) el polinomio cociente Q y el Residuo R.

6) Así, el conjunto S tiene las propiedades $\begin{cases} 1) \; 0 \in S \\ 2) \text{ Suponiendo que para todo } n \leq K, \\ \quad \text{con } n \in S \text{ implica que } K+1 \in S. \end{cases}$

Por tanto, por el segundo principio de inducción, S es el conjunto de todos los enteros no negativos n, tal que, existen los polinomios Q y R que cumplen $P = QD + R$.

(II) LA UNICIDAD DE Q y R

Supongamos que existen otros polinomios Q_1 y R_1 (donde o $R_1 = 0$ o de grado menor que m), tales que :

$$P = Q_1 D + R_1 = QD + R$$

Debo probar que $Q_1 = Q \wedge R_1 = R$

Veamos :

De $\quad Q_1 D + R_1 = QD + R$

$\iff \quad (Q_1 - Q) D = R - R_1 \quad \cdots\cdots\cdots$ (***)

En esta igualdad tenemos : si $grad(D) = m \wedge (Q_1 - Q)$ no es la función cero, entonces $grad(Q_1 - Q) D \geq m$.

CONTRADICCION

Pero $R - R_1$ o es la función cero o $grad(R - R_1) < m$.

Hay una contradicción, por tanto debemos tener que $Q_1 - Q = 0 \Rightarrow Q_1 = Q$

Al reemplazar en (***) : $R - R_1 = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 = R}$

lqqd

18.6 DEFINICION.— Dados dos polinomios no nulos $P(X)$ y $D(X)$, Diremos que $D(X)$ divide a $P(X)$, si existe un polinomio $Q(X)$, tal que
$P(X) = Q(X) \cdot D(X)$

si $grad(P) = n$ y $grad(D) = m$, siendo $n \geq m$;

entonces $grad(Q) = n - m$

La igualdad $P = Q.D$ implica $\begin{cases} \text{i) } Q \text{ divide a } P. \\ \text{ii) } P \text{ es divisible por } D \text{ y por } Q. \\ \text{iii) } Q \text{ y } D \text{ son factores de } P. \\ \text{iv) } Q \text{ y } D \text{ son divisores de } P. \end{cases}$

Un caso especial del algoritmo de la división, es cuando $D(X) = x - a$.

En este caso $\boxed{P(X) = (x-a)\,Q(X) + R \quad \text{donde } R = 0 \ \vee \ R \text{ es constante}}$

18.7 TEOREMA DEL RESIDUO

El residuo de dividir el polinomio $P(X)$ de grado $n \geq 1$, entre el binomio $(x-a)$, es $P(a)$

Prueba

(1) Por el algoritmo de la División, al dividir $P(X)$ entre $(x-a)$, existen un polinomio $Q(X)$ y un residuo R tal que: $P(X) = (x-a)Q(X) + R$

Donde R es una constante, puesto que $grad(R) < 1 =$ grado de $(x-a)$.

(2) Si $x = a$, entonces $P(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}\,Q(a) + R$
$= \quad 0 \quad + R$
$P(a) = R$

18.7.1 LA DIVISION SINTÉTICA : Es un procedimiento para hallar el cociente y el residuo cuando se divide $P(x)$ entre $(x-a)$ ó entre $ax+b$.

EJEMPLO : Determinar $E = abc$ si el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ es divisible entre $(x-1)(x-3)(x-5)$.

SOLUCION :

1	1	a	b	c
		1	a+1	a+b+1
3	1	a+1	a+b+1	$\boxed{a+b+c+1}$
		3	3a +12	
5	1	a+4	$\boxed{4a+b+13}$	
		5		
	1	$\boxed{a+9}$		

Los residuos deben ser cero

$\begin{cases} a+9 = 0 \\ 4a+b+13 = 0 \\ a+b+c+1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -9 \\ b = 23 \\ c = -15 \end{cases}$

$abc = 3105$.

18.8 TEOREMA DEL FACTOR : Un polinomio $P(X)$ de grado $n \geq 1$ es divisible por $(x-a)$, sí y solo sí "a" es una raiz de $P(X)$.

Dicho de otra manera : $(x-a)$ es un factor de $P(X)$, sí y solo sí, $P(a) = 0$.

Prueba

($\Rightarrow$) si $P(x)$ es divisible por $(x-a)$, entonces a es raiz de $P(X)$.

PRUEBA :

(1) Por 18.6, si $P(X)$ es divisible por $(x-a)$, entonces existe un polinomio $Q(X)$, tal que :

$$P(X) = (x-a)\,Q(X)$$

(2) Para $x = a$ se tendrá : $P(a) = (a-a)Q(a)$

$$P(a) = 0$$

(3) Por 18.4, si $P(a) = 0$, entonces "a" es raiz de $P(X)$.

($\Leftarrow$) si a es una raiz de $P(X)$, entonces $P(X)$ es divisible por $x - a$.

PRUEBA :

(1) Por 18.4 si "a" es raiz de $P(X)$, entonces $P(a) = 0$

(2) Por 18.7, si $P(a) = 0$, entonces $R = 0$ y $P(X) = (x-a)Q(X)$

(3) La igualdad $P(X) = (x-a)Q(X)$ implica que $P(X)$ es divisible por $x - a$.

18.9 COROLARIO – Un polinomio $P(X)$ de grado $n \geq 1$, es divisible entre el binomio $ax + b$, sí y solo sí $x = -b/a$ es raiz de $P(x)$.

Prueba

($\Rightarrow$) Si $P(x)$ es divisible entre $(ax + b)$, entonces $x = -b/a$ es RAIZ de $P(x)$.

PRUEBA

(1) si $P(X)$ es divisible entre $ax + b$, entonces existe $Q(X)$, tal que :

$$P(X) = (ax + b)\,Q(X).$$

(2) si $x=-b/a$, entonces $P(-b/a) = \left(a(-b/a)+b\right) Q(-b/a)$

$$= (-b+b)\,Q(-b/a) = 0$$

(3) Como $P(-b/a)=0$, entonces $x=-b/a$ es RAIZ de $P(X)$

($\Leftarrow$) si $P(-b/a)=0$, entonces $P(X)$ es divisible entre $ax+b$.

PRUEBA

Por el TEO. del Residuo, si $P(-b/a)=0$, entonces el residuo $R=0$

y nos da $P(X) = a\left(x-(-b/a)\right)Q(X)$, en este caso se supone que el coeficiente principal a_n del polinomio $P(X)=a_nx^n+\cdots+a_0$ es divisible por a o sea $P(x)=a\left(x-\frac{b}{a}\right)Q(X)$

$$= a\left(\frac{ax+b}{a}\right)Q(X)$$

$$=(ax+b)\,Q(X)$$

18.10 MULTIPLICIDAD

DEFINICION.— Si el polinomio D^K divide al polinomio P y si ninguna de las potencias más altas de D divide a P, entonces se dice que D es un factor de multiplicidad K.

Ejemplos:

1) si $(X+2)$ es un factor de multiplicidad 3 del polinomio $P(X)$, entonces existe un polinomio $Q(X)$, tal que $P(X)=(X+2)^3Q(X)$. $Q(-2)\neq 0$
En este caso decimos de $X=-2$ es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio $P(X)$.

2) si $(x-a)$ es un factor de multiplicidad K del polinomio $P(X)$, entonces existe un polinomio $Q(X)$, tal que, $P(X)=(x-a)^K Q(X)$. donde $Q(a)\neq 0$.

18.11 PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

P_1) Si $P(X)$ es divisible por $Q(X)$ y $Q(X)$ es divisible por $S(X)$, entonces $P(X)$ es divisible por $S(X)$.

PRUEBA

(1) si $P(X)$ es divisible por $Q(X)$, existe un polinomio $D(X)$, tal que,

$P(X)=Q(X)\,D(X)$

(2) si $Q(X)$ es divisible por $S(X)$, entonces existe un polinomio $E(X)$, tal que $Q(X)=S(X)E(X)$

(3) Sustituir (2) en (1):

$$P(X) = \left[S(X)E(X)\right]\cdot D(X)$$

$= S(X)\left[E(X)D(X)\right]$, lo cual implica que $P(X)$ es divisible por $S(X)$

P_2) Si $P(X)$ y $Q(X)$ son divisibles por $S(X)$, entonces $P(X)\pm Q(X)$ es divisible por $S(X)$.

PRUEBA

Debo probar que existe un polinomio $D(X)$, tal que:

$S(X)=\left[P(X)\pm Q(X)\right]D(X)$

Veamos:

(1) si $P(X)$ es divisible por $S(X)$, entonces existe un polinomio $D(X)$, tal que, $P(X)=S(X)D(X)$.

(2) si $Q(X)$ es divisible por $S(X)$, entonces existe un polinomio $D_1(X)$, tal que, $Q(X)=S(X)D_1(X)$.

(3) Sumar o restar: $P(X)\pm Q(X)=S(X)\left[D(X)\pm D_1(X)\right]$, esta igualdad implica que $P\pm Q$ es divisible por S.

P_3) Si $P(X)$ es divisible por $Q(X)$ y $F(X)$ es cualquier polinomio $P(X)F(X)$ también es divisible por $Q(X)$.

PRUEBA

(1) si $P(X)$ es divisible por $Q(X)$, entonces existe un polinomio $D(X)$ tal que, $P(X)=Q(X)D(X)$.

(2) Como $F(X)$ es cualquier otro polinomio, al multiplicar $F(X)$ en la igualdad anterior obtendremos:

$$P(X)F(X) = Q(X)D(X)F(X)$$

$= Q(X)\left[D(X)F(X)\right]$, esto implica que $P(X)F(X)$ es divisible por $Q(X)$

P_4) Si cada uno de los polinomios $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ es divisible por Q, entonces el polinomio $P_1G_1 + P_2G_2 + \cdots\cdots + P_nG_n$ también es divisible por Q, para cualquiera que sean los polinomios $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

La prueba es por inducción.

(1) Para $n=1$, si P_1 es divisible por Q y G_1 es cualquier otro polinomio, entonces P_1G_1 también es divisible por Q. Esta proposición es verdadera segun la propiedad P_3.

(2) Para $n=h$, suponer que se cumple:

si $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_h$ es divisible por Q, entonces $P_1G_1 + P_2G_2 + \cdots\cdots + P_hG_h$ es divisible por Q, para cualquiera que sean $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_h$.

Por esta proposición, estamos afirmando que:

si P_1 es divisible por Q, entonces existe un polinomio D_1, tal que $P_1 = Q\ D_1$.

y si G_1 es cualquier otro polinomio, entonces:

$P_1G_1 = Q(D_1G_1)$ también es divisible por G

De igual manera: $P_2G_2 = Q(D_2G_2)$

$\vdots$

$P_hG_h = Q(D_hG_h)$ para cualquier G_i

Luego, la suma: $P_1G_1 + P_2G_2 + \cdots\cdots + P_hG_h = Q\left[D_1G_1 + D_2G_2 + \cdots\cdots + D_hG_h\right]$

implica que $P_1G_1 + \cdots\cdots\cdots + P_hG_h$ es divisible por Q.

(3) Para $n = h+1$ y bajo el supuesto que $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{h+1}$ es divisible por Q; debo probar que $P_1G_1 + P_2G_2 + \cdots\cdots + P_{h+1}G_{h+1}$ es divisible por Q.

Veamos:

En $P_1G_1 + P_2G_2 + \cdots\cdots + P_hG_h + P_{h+1}G_{h+1} = \underbrace{(P_1G_1 + \cdots\cdots + P_hG_h)}_{\text{es divisible por Q, según paso 2.}} + \underbrace{P_{h+1}G_{h+1}}_{\text{es divisible por Q porque } P_{h+1} \text{ es divisible por Q.}}$

$$= Q\left[D_1G_1 + D_2G_2 + \cdots\cdots + D_hG_h\right] + Q\left[D_{h+1}G_{h+1}\right]$$

$$= Q\left[(D_1G_1 + \cdots\cdots + D_hG_h) + D_{h+1}G_{h+1}\right]$$

$= Q\left[D_1G_1 + \cdots\cdots + D_{h+1}G_{h+1}\right]$, lo cual indica que Q es divisible por $P_1G_1 + \cdots\cdots + P_{h+1}G_{h+1}$.

P_5) Sea $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots\cdots + a_1X + a_0$ un polinomio entero de coeficientes enteros. sea $r \neq s$

si $P(X)$ es divisible por $(x-r)$ y $(x-s)$; entonces $P(X)$ es divisible por el producto $(x-r)(x-s)$.

Prueba

Debo probar que existe un polinomio $Q_2(X)$ tal que $P(X) = (x-r)(x-s)Q_2(x)$ para afirmar que $P(X)$ es divisible por el producto $(x-r)(x-s)$

Veamos:

(1) si $P(X)$ es divisible por $(x-r)$, entonces existe un polinomio $Q_1(X)$ tal que $P(X) = (x-r)Q_1(X)$

(2) Como $P(X)$ es divisible por $(x-s)$, entonces $x=s$ es raiz de $P(X)$, luego en (1):

$P(s) = (s-r)Q_1(s) = 0$ ..... (por el TEO. del FACTOR)

(3) En la igualdad $(s-r)Q_1(s) = 0$, se tiene por hipótesis que $s \neq r$, es decir $s-r \neq 0$; por tanto debe ser que $Q_1(s) = 0$.

(4) si $Q_1(s)=0$, entonces $(x-s)$ es factor de $Q_1(X)$ ...... [TEO. del FACTOR]

(5) si $(x-s)$ es factor de $Q_1(X)$, entonces existe otro polinomio $Q_2(X)$ tal que $Q_1(X) = (x-s)Q_2(X)$ .... (5*)

(6) Reemplazar (5*) en (1):

$$P(X) = (x-r)(x-s)Q_2(X)$$

lqqd.

P_6) si $f(x^n)$ es divisible por $(x-1)$; también es divisible por x^n-1.

PRUEBA

(1) si $f(x^n)$ es divisible por $(x-1)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$, tal que, $f(x^n) = (x-1)Q(x)$, que es equivalente afirmar que $x=1$ es raiz de $f(x^n)$, por tanto $f(1^n)=(1-1)Q(1)=0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=0}$

(2) si $f(1)=0$, entonces $f(x)$ es divisible por $(x-1)$, por tanto existe $Q(x)$, tal que, $\boxed{f(x)=(x-1)Q(X)}$

(3) En la ecuación $f(x)=(x-1)Q(x)$, la variable x, puede ser sustituida por y, por z, por x^2, por x^n.
si sustituimos por X^n, se tendrá:

$f(x^n)=(x^n-1)Q(x^n)$, lo cual indica que $f(x^n)$ es divisible por (x^n-1).

P_7) si $F(x)=f_1(x^3)+x\,f_2(x^3)$ es divisible por x^2+x+1, entonces $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son divisibles por $(x-1)$.

PRUEBA

1) si $F(x)=f_1(x^3)+x\,f_2(x^3)$ es divisible por x^2+x+1, entonces existe el polinomio $Q(x)$, tal que:

$$F(x) = f_1(x^3)+x\,f_2(x^3) = (x^2+x+1)Q(x)$$

Lo que es equivalente afirmar que una raiz w del polinomio (x^2+x+1), será tambien una raiz de $F(x)$, es decir $F(w)=0$.

2) Donde: $F(w)=f_1(w^3)+w\,f_2(w^3) = 0$

3) Al resolver la ecuación $x^2+x+1=0$, obtenemos $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, donde w puede ser $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ó $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $w^3=1$.

4) En 2) tendremos: $F(W)=f_1(1)+W\,f_2(1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(1)=0 \Rightarrow (x-1) \text{ es factor de } f_1 \Leftrightarrow f(x) \text{ es divisible por } (x-1). \\ f_2(1)=0 \Rightarrow (x-1) \text{ es factor de } f_2 \Leftrightarrow f(x) \text{ es divisible por } (x-1). \end{cases}$$

18.12 PROBLEMAS:

PROBLEMA 1- Demostrar que $X^{3m}+X^{3m+1}+X^{3p+2}$ es divisible por X^2+X+1.

PRUEBA

Para demostrar que $X^{3m}+X^{3m+1}+X^{3p+2}$ es divisible por X^2+X+1, bastaeá probar que una raiz de X^2+X+1, también es raiz de $X^{3m}+X^{3m+1}+X^{3p+2}$

Veamos:

(1) Las raices de X^2+X+1 son $X=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2) Llamamos W a cualquiera de las raices, así por ejemplo:

Si $W=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, se cumplirá que $W^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $W^3=1$ y $1+W+W^2=0$.

(3) Reemplazar W en $X^{3m}+X^{3m+1}+X^{3P+2}$, obtendremos:

$$\begin{aligned} W^{3m}+W^{3m+1}+W^{3P+2} &= (W^3)^m+(W^3)^m W+(W^3)^P W^2 = \\ &= 1^m + 1^m\cdot W + 1^P\cdot W^2 \\ &= 1 + W + W^2 = 0 \end{aligned}$$

(4) Como W es raiz de (X^2+X+1) y también es raiz de $X^{3m}+X^{3m+1}+X^{3P+2}$, entonces el polinomio $X^{3m}+X^{3m+1}+X^{3P+2}$ es divisible por X^2+X+1.

PROBLEMA 2- ¿ Cuándo $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ es divisible por $x^2 - x + 1$?

SOLUCION :

Debo probar que una raíz de $x^2 - x + 1$, también es raíz de $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$.

Veamos :

(1) Las raíces de $x^2 - x + 1 = 0$ son $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Si escogemos $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ se tiene $\lambda^3 = -1$, $\lambda^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) Al reemplazar en el polinomio $P(x) = x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$, obtenemos:

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^{3m} - \lambda^{3n+1} + \lambda^{3p+2} =$$

$$= (\lambda^3)^m - (\lambda^3)^n \lambda + (\lambda^3)^p \lambda^2$$

$$= (-1)^m - (-1)^n \lambda + (-1)^p \lambda^2$$

$$= (-1)^m - (-1)^n \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] + (-1)^p\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= (-1)^m - \underline{\frac{1}{2}(-1)^n} - \underline{\underline{(-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}i}} - \underline{\frac{1}{2}(-1)^p} + \underline{\underline{(-1)^p \frac{\sqrt{3}}{2}i}}$$

$$P(\lambda) = (-1)^m - \frac{1}{2}\left[(-1)^n + (-1)^p\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left[(-1)^p - (-1)^n\right]$$

(3) En $P(\lambda)$:

a) si $n = p = m =$ par $\Rightarrow P(\lambda) = 1 - \frac{1}{2}[1+1] + \frac{\sqrt{3}}{2}i[1-1] = 0$

b) si $n = p = m =$ impar $\Rightarrow P(\lambda) = -1 - \frac{1}{2}[-1-1] + \frac{\sqrt{3}}{2}i[-1+1] = 0$

(4) Como $P(\lambda) = 0$, entonces λ es raíz de $P(x)$; por tanto $P(x)$ es divisible por $x + x + 1$, cuando m, n y p son simultáneamente pares ó impares.

——— o ———

PROBLEMA 3 .- ¿ Qué valor debe tomar "m" para que $x^{2m} + x^m + 1$ sea divisible por $x^2 + x + 1$?

SOLUCION :

(1) sea $P(x) = x^{2m} + x^m + 1$ y $Q(x) = x^2 + x + 1$

(2) Para afirmar que $P(x)$ sea divisible entre $Q(x)$ deberá cumplirse cumplirse que una raíz de $Q(x)$ debe ser también raíz de $P(x)$.

Veamos :

(3) Las raíces de $Q(x) = x^2 + x + 1$ son $W = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $W^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ siendo $1 + W + W^2 = 0$, $W^3 = 1$.

(4) Reemplazar W en $P(x)$: $P(W) = W^{2m} + W^m + 1$

Donde :

si $m = 1 \Rightarrow P(W) = W^2 + W + 1 = 0$

si $m = 2 \Rightarrow P(W) = W^4 + W^2 + 1$
$$= W^3 . W + W^2 + 1$$
$$= W + W^2 + 1 = 0$$

si $m = 3 \Rightarrow P(W) = W^{3m} + W^3 + 1$
$$= (W^3)^m + W^3 + 1$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

si $m = 4 \Rightarrow P(W) = W^8 + W^4 + 1$
$$= W^6 . W^2 + W^3 . W + 1$$
$$= W^2 + W + 1 = 0$$

En general, si $m = \overset{\circ}{3} \Rightarrow P(W) = W^{2.\overset{\circ}{3}} + W^{\overset{\circ}{3}} + 1$
$$= W^{\overset{\circ}{3}} + W^{\overset{\circ}{3}} + 1$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

Se puede generalizar, afirmando que sólo para $m = \overset{\circ}{3}$, W no es raíz de $P(x)$.

En consecuencia, si m no es divisible por 3; el polinomio $P(x)$ será divisible entre $Q(x)$.

PROBLEMA 4.- ¿ Para que valores de "m" el polinomio

$P(x) = (X+1)^m - X^m - 1$ es divisible por $Q(x) = X^2 + X + 1$?

SOLUCION :

(1) Para afirmar que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, debo probar que una raiz de $Q(x)$ también debe ser raiz de $P(x)$.

Veamos :

(2) Las raices de $Q(x)$ son $W = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $W^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ademas se cumplen : $W^3 = 1$, $1 + W + W^2 = 0$

(3) Al remplazar W en $P(x)$ se tendrá : $\boxed{P(W) = (W+1)^m - W^m - 1}$ —(3*)

Como $1 + W + W^2 = 0 \Rightarrow 1 + W = -W^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \lambda$

donde λ es una raiz primitiva de $X^6 - 1 = 0$

Además $\lambda^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = W$

(4) Se tiene $\begin{cases} 1+W = -W^2 = \lambda \\ W = \lambda^2 \end{cases}$

(5) Reemplazar en(3*) :

$P(W) = \lambda^m - \lambda^{2m} - 1$

(6) De $x^6 - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt[6]{1}$

$\Rightarrow x_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{6}$

$x_k = (\cos\pi/3 + i\,\text{sen}\,\pi/3)^k$

$= \lambda^k$, $\lambda = \cos\pi/3 + i\,\text{sen}\,\pi/3$

$\lambda = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Las raices de $x^6 - 1 = 0$ son $\{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5\}$.

Donde $\lambda^m = \begin{cases} 1 & , \text{si } m = \dot{6} \\ \lambda & , \text{si } m = \dot{6}+1 \\ \lambda^2 & , \text{si } m = \dot{6}+2 \\ \lambda^3 & , \text{si } m = \dot{6}+3 \\ \lambda^4 & , \text{si } m = \dot{6}+4 \\ \lambda^5 & , \text{si } m = \dot{6}+5 \end{cases}$

Luego :

$P(W) = \begin{cases} \lambda^m - \lambda^{2m} - 1 = -1 & , \text{si } m = \dot{6} \\ \lambda^m - \lambda^{2m} - 1 = \lambda - \lambda^2 - 1 & , \text{si } m = \dot{6}+1 \\ \quad = 1 + w - w - 1 = 0 & \\ \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0 & , \text{si } m = \dot{6}+2 \\ \lambda^{\dot{6}+3} - \lambda^{2(\dot{6}+3)} - 1 = -3 & , \text{si } m = \dot{6}+3 \\ -\lambda + \lambda^2 - 1 \neq 0 & , \text{si } m = \dot{6}+4 \\ -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 & , \text{si } m = \dot{6}+5 \end{cases}$

$\therefore$ P(x) es divisible por $x^2 + x + 1$, si $m = \dot{6}+1$ y $m = \dot{6}+5$.

PROBLEMA 5.- ¿qué valores tendrán m, n y P para que :

$P(X) = X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3P+2}$ sea divisible por $D(X) = X^4 + X^2 + 1$?

SOLUCION :

(1) En este problema aplicaremos la propiedad P_5

(2) Factorizar $D(X) = X^4 + X^2 + 1$

$= X^4 + 1 + \cdots\cdots\cdots + X^2$

$= \underbrace{X^4 + 1 + 2X^2} - 2X^2 + X^2$

$= (X^2 + 1) - X^2$

$D(X) = (X^2 + 1 - X)(X^2 + 1 + X)$

$= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

Debo probar que $P(X)$ sea divisible por $(X^2 - X + 1)$ y por $(X^2 + X + 1)$

Veamos :

(3) Las raices de $X^2 - X + 1$ son $X = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\begin{cases} r = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \begin{cases} r^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ r^3 = -1 \end{cases} \\ s = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

Las raices de $X^2 + X + 1$ son $X = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\begin{cases} w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = x_1 \\ w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = x_2 \end{cases}$

$w^3 = 1$, $1 + w + w^2 = 0$

(4) si reemplazamos la raiz W en $P(X)$, tendremos :

$P(W) = W^{3m} + W^{3n+1} + W^{3P+2}$

$= (W^3)^m + (W^3)^n \cdot W + (W^3)^P \cdot W^2$,

$= 1 + W + W^2 = 0$, pues $W^3 = 1$

$P(W) = 0$, indica que W es RAIZ de $P(X)$. Por tanto $P(X)$ es divisible por $(X^2 + X + 1)$.

(5) Reemplazar la raiz r en $P(X)$, tendremos :

$P(r) = r^{3m} + r^{3n+1} + r^{3P+2}$

$= (r^3)^m + (r^3)^n r + (r^3)^P r^2$

$= (-1)^m + (-1)^n r + (-1)^P r^2$

$= (-1)^m + (-1)^n\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] + (-1)^P\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right]$

$= (-1)^m + \frac{1}{2}(-1)^n + (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}(-1)^P + (-1)^P\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= (-1)^m + \frac{1}{2}\left[(-1)^n - (-1)^P\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left[(-1)^n + (-1)^P\right]$

Donde :

a) si n es impar, p y m es par ; se cumple :

$$P(r) = 1+\frac{1}{2}\left[-1-1\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left[-1+1\right]$$

$$= 0 \Rightarrow r \text{ es RAIZ de } P(X).$$

b) si n es par, p y m es impar, se cumple :

$$P(r) = -1+\frac{1}{2}\left[1+1\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left[1-1\right]$$

$$= 0 \Rightarrow r \text{ es RAIZ de } P(X)$$

(6) Luego $P(X)$ es divisible por $X^2 - X + 1$.

(7) Por (4) y (6) afirmamos que $P(X)$ es divisible por $(X^2+X+1)(X^2-X+1) = X^4+X^2+1$.

19. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

El Teorema fundamental del algebra se refiere al número de raíces que tiene todo polinomio.

Por ejemplo :

$P(X) = 2X^2 - X + 1$ tiene dos raices.

$P(X) = 2X^5 - 2X^3 + 5X + 7$, tiene 5 raices.

Del total de raices que tiene un polinómio, será de gran importancia discutir el número de raices enteros, racionales, reales e complejos que pueda tener el polinomio.

También conviene discutir y hallar el número de raíces reales positivas y el número de raíces reales negativas que tiene un polinomio.

19.1 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Todo polinomio $P(X)$ de grado $n > 0$ con coeficientes complejos en general, tiene al menos una raiz generalmente compleja.

19.2 TEOREMA- Todo polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$; con coeficientes complejos en general, TIENE EXACTAMENTE n RAICES y $P(x)$ puede ser expresado en la forma $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)$, r_i es raiz de $P(x)$

PRUEBA

(1) si $n=1$, entonces $P(x) = a_1 x + a_0 = 0$ implica que $x = -\frac{a_0}{a_1}$, $a_1 \neq 0$

Lo cual indica que si el polinomio $P(x)$ es de grado UNO, entonces tiene exactamente una raiz.

(2) segun el TEOREMA fundamental del algebra, el polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ tiene al menos una RAIZ.

Supongamos que r_1, sea una raiz ; entonces según el TEOREMA del factor, el polinomio $P(x)$ se puede expresar como :

$$P(x) = (x-r_1)Q_1(x) \text{ , donde } \operatorname{grad}(Q_1) = n-1$$

(3) Como Q_1 es de grado $(n-1)$ entonces Q_1 tiene exactamente $(n-1)$ raices y P tendrá $(n-1)+1 = n$ raices.

(4) se ha probado para $n=1$, $n-1$ y n . Luego $P(x)$ tiene exactamente n raices.

OBSERVACIONES

1) Para $n=0$ el polinomio constante $P(x) = a_0$ no tiene raices, siempre que $a_0 \neq 0$.

2) si el polinomio constante es el nulo $P(x) = 0$, entonces el teorema no se cumple. NOTA : $P(x)=0$ es el eje X .

3) En las n raices, están incluidas las raices repetidas.

19.3 TEOREMA- Un polinomio de grado "n" no puede tener más de n raices distintas.

PRUEBA (La prueba se hace por el método de reducción al absurdo).

(1) supongamos que el polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots\cdots + a_0$, $a_n \neq 0$ tiene $(n+1)$ raices diferentes : $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_n$.

(2) Por 19.2 el polinomio $P(x)$ puede expresarse de la forma :

$$P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)$$

(3) Tomando $x = r \Rightarrow P(r) = a_n(r-r_1)(r-r_2)\cdots\cdots(r-r_n) \neq 0$ porque $r \neq r_i \;\forall i$ (segun paso 1)

(4) Luego "r" NO es RAIZ de $P(x)$; lo cual es una contradicción. Contradice al supuesto dado en (1).

(5) Por tanto $P(x)$ NO puede tener más de n raices distintas.

IDENTIDAD DE POLINOMIOS

19.4 COROLARIO – Si $P(X) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $Q(X) = b_n x^n + \cdots + b_0$ son polinomios de grado n y $P(X) = Q(X)$ para $n+1$ valores distintos de X, entonces $P(X) \equiv Q(X)$. Es decir, $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$.

PRUEBA

Las hipótesis son
$$\begin{cases} t_1: & P \text{ es un polinomio de grado } n. \\ t_2: & Q \text{ " " " " "} \\ t_3: & P = Q \text{ para } n+1 \text{ valores distintos de } x. \end{cases}$$

TESIS $\{\, a_i = b_i \;\forall i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n.$

La demostración es por REDUCCION AL ABSURDO : que consiste en negar la tesis para llegar a la negación de la hipótesis.

Veamos :

(1) Negar la tesis : Suponer que $a_n \neq b_n$

(2) Luego, el polinomio $(P-Q)(x) = (a_n - b_n)X^n + \cdots\cdots + (a_0 - b_0)$ tiene grado positivo $K \leq n$. Por tanto $(P-Q)(x)$ no puede tener más de n raices distintas [es decir n distintos valores de X que anulan al polinomio $(a_n - b_n)X^n + \cdots\cdots + (a_0 - b_0)$].

(3) Esto contradice a la hipótesis t_3 : que afirma $(P-Q)(x)$ se anula para $n+1$. valores distintos de X.

La contradicción se presentó porque supusimos que $a_n \neq b_n$, luego debe ser que $a_n = b_n$.

(4) si $a_n = b_n$, es decir $a_n - b_n = 0$, entonces ahora tendremos el polinomio $(a_{n-1} - b_{n-1})X^{n-1} + \cdots\cdots + (a_0 - b_0)$ que tiene a lo más $(n-1)$ raices diferentes si $a_{n-1} \neq b_{n-1}$.

(5) Esto contradice a la hipótesis que afirma $(a_{n-1} - b_{n-1})X^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$ se anula para "n" diferentes valores distintos de X.

La contradicción se presentó porque partimos del supuesto $a_{n-1} \neq b_{n-1}$.

Debe ser que $a_{n-1} = b_{n-1}$.

(6) Así, en forma sucesiva, si suponemos que $a_0 \neq b_0$, tendremos :

a) Por un lado el polinomio $(a_0 - b_0)$ no tiene raices.

b) Por otro lado, segun la hipótesis t_3 : el polinomio $(a_0 - b_0)$ tiene una raiz.

Hay una contradicción por suponer que $a_0 \neq b_0$.

Debe ser entonces que $a_0 = b_0$.

(7) Conclusión : $a_i = b_i \;\forall i = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ //.

OBSERVACIONES

1) Segun el COROLARIO 19.4, si $P(X) = Q(X)$ para "n+1" valores distintos de X, entonces $P(X) \equiv Q(X)$.

2) Afirmar que $P(X) \equiv Q(X) \Leftrightarrow a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_0 \equiv b_n x^n + \cdots\cdots + b_0$ $\Leftrightarrow a_k = b_k \;\forall k$.

3) Ejemplo : $2X - 1 \equiv (A+B+C)X^2 + (A+3B-2C)X - 6B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 3B - 2C = 2 \\ -6A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 3/10 \\ C = -7/15 \end{cases}$$

20 POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES

20.1 TEOREMA (PARIDAD DE LAS RAICES IMAGINARIAS)

Si un polinomio $P(X)$ con COEFICIENTES REALES tiene como raiz el número complejo z, entonces $\bar{z}$ también es raiz de $P(X)$.

PRUEBA

(1) sea el polinomio $P(X) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_0$

(2) Debo probar que $P(\bar{z}) = 0$, sabiendo que $P(z) = 0$

Veamos :

(3) sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces $\bar{z} = a + bi$

(4) En $P(X) = a_n x^n + \cdots\cdots\cdots + a_0$

se cumple : $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_0 = 0$, por ser z raiz de $P(X)$.

(5) Aplicar conjugado :
$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_0} = \bar{0}$$
$$\overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\, \overline{z^{n-1}} + \qquad + \overline{a_0} = 0$$
$$\underbrace{a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \cdots\cdots + a_0}_{P(\bar{z})} = 0$$

(6) Luego $P(\bar{z}) = 0$, lo cual indica que $\bar{z}$ es raiz de $P(X)$.

lqqd

OBSERVACIONES

(1) La paridad de raíces imaginarias, refiere lo siguiente : si $z = a + bi$, con $b \neq 0$ es RAIZ de un polinomio $P(X)$ entonces $\bar{z} = a - bi$ también es raiz de $P(X)$.

EJEMPLO:

si una raiz del polinomio $P(X) = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X - 2$ es $1 + i$, entonces su conjugado $1 - i$ será también otra raiz de $P(X)$.

(2) si $z = a + bi$ es raiz del polinomio $P(X)$, entonces $(X - z)(X - \bar{z})$ será un factor de $P(X)$.

Donde : $(X - z)(X - \bar{z}) = \left[X^2 - X(z + \bar{z}) + z\bar{z} \right] = \left[X^2 - 2aX + |z|^2 \right]$
$$= \left(X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \right).$$

Así, tendremos : si $z = a + bi$ es raiz de $P(X)$, entonces $\left(X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \right)$ es factor de $P(X)$, por tanto existe otro polinomio $Q(X)$, tal que

$$P(X) = \left[X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \right] Q(X) \;/\!/$$

(3) El factor $\left[X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \right]$ que tiene coeficientes reales es llamado un FACTOR CUADRATICO IRREDUCTIBLE EN $\mathbb{R}$

Decir irreductible en $\mathbb{R}$, significa que dicho factor cuadrático NO se puede expresar como el producto de dos factores de primer grado cuyos coeficientes sean reales.

EJEMPLO : $X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$

No es factorizable en $\mathbb{R}$.
Pero es factorizable en $\mathbb{C}$.

20.2 TEOREMA –

Un polinomio con COEFICIENTES REALES puede escribirse como el producto de un número real, multiplicado por factores cuadráticos irreductibles con coeficientes reales y factores lineales con coeficientes reales.

EJEMPLO – Formar una ecuación de grado mínimo, los coeficientes enteros y que tengan como raices : $-1 + \frac{3}{5}i$, -2

SOLUCION :

Por el Teorema 20.1 y 20.2, tendremos :

$$P(X) = a\left[x - \left(-1 + \tfrac{3}{5}i\right) \right]\left[x - \left(-1 - \tfrac{3}{5}i\right) \right]\left[x - (-2) \right]$$
$$= a\left[x^2 - 2(-1)x + \left(1 + \tfrac{9}{25}\right) \right]\left[x + 2 \right]$$

$$= a\left[x^2 - 2x + \frac{34}{25}\right]\left[x+2\right]$$

$$= a\left[\frac{25x^2+50X+34}{25}\right]\left[X+2\right], \text{ hacer } a = 25$$

$$= (25X^2+50X+34)(X+2)$$

← FACTOR LINEAL (para $(X+2)$)

← FACTOR CUADRATICO IRREDUCTIBLE EN $\mathbb{R}$ (para $(25X^2+50X+34)$)

$$= 25X^3+100X^2+134X+68$$

20.3 TEOREMA (PARIDAD DE RAICES IRRACIONALES)

Si un polinomio $P(x)$ con COEFICIENTES RACIONALES tiene como raiz $a+\sqrt{b}$, donde $\sqrt{b}$ es IRRACIONAL, a y b son RACIONALES, entonces $a-\sqrt{b}$ tambien es raíz de $P(x)$.

EJEMPLO - si $2-\sqrt{2}$ y $-1+i$ son raices del polinomio

$P(X) = X^6 - 2X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 8X^2 + 4X - 4$ hallar las demas raices.

SOLUCION

(1) si $2-\sqrt{2}$ es raiz de $P(X)$, tambien lo es su conjugado $2+\sqrt{2}$

(2) si $-1+i$ es raíz de $P(X)$, entonces $-1-i$ también es raíz de $P(X)$

(3) Como $(2-\sqrt{2})$ y $(2+\sqrt{2})$ son raices de $P(X)$, entonces $P(X)$ es divisible por el polinomio cuadrático $\left[X-(2-\sqrt{2})\right]\left[X-(2+\sqrt{2})\right] = X^2-4X+2$.

(4) Como $(-1+i)$ y $(-1-i)$ es raiz de $P(X)$, entonces $P(X)$ es divisible por el polinomio cuadrático $\left[X-(-1+i)\right]\left[X-(-1-i)\right] = X^2+2X+2$

(5) Por tanto $P(X)$ es divisible por $(X^2-4X+2)(X^2+2X+2) = X^4-2X^3-4X^2-4X+4 = Q(X)$.

(6) Al dividir $P(X)$ entre $Q(X)$, obtenemos:

$P(X) = (X-1)Q(X)$

$$\begin{array}{r|l} X^6-2X^5-5X^4-2X^3+8X^2+4X-4 & X^4-2X^3-4X^2-4X+4 \\ \hline -X^6+2X^5+4X^4+4X^3-4X^2 & X^2-1 \\ 0 \quad 0 \quad -X^4+2X^3+4X^2+4X-4 & \\ X^4-2X^3-4X^2-4X+4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

(7) Luego las otras raices se obtienen de : $X^2-1=0 \Rightarrow X=\pm 1$ //

20.4 sea $P(X)$ un polinomio con COEFICENTES RACIONALES.

si $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ es raiz del polinomio $P(X)$, donde $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$ son irracionales, entonces $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $-\sqrt{a}-\sqrt{b}$; también son raices de $P(X)$.

si la raiz $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ es de multiplicidad K, las otras raices también son de multiplicidad K.

EJEMPLO - Hallar el Polinomio de menor grado con coeficientes racionales que tenga como una de sus raices: $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

SOLUCION

(1) si $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$ es raiz, también lo son $\begin{cases} -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{cases}$

(2) El polinomio de menor grado será :

$$P(X) = \left[X-(-\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]\left[X-(-\sqrt{2}-\sqrt{3})\right]\left[X-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]\left[X-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\right]$$

$$= \left(X^2+2\sqrt{2}X-1\right)\left(X^2-2\sqrt{2}X-1\right)$$

$$= X^4-10X^2+1 \ //$$

20.5 TEOREMA - Sea $P(X)$ un polinomio con COEFICIENTES REALES.

Demuéstrese que un número real r es una raíz de $P(X)$ de multiplicidad 2 sí y sólo sí $P(r) = P'(r) = 0$ y $P''(r) \neq 0$.

Explíquese cuál es el comportamiento de $P(X)$ cerca de la raiz r.

Prueba

($\Rightarrow$) si r es raíz de multiplicidad 2, entonces $P(r) = P'(r) = 0$ y $P''(r) \neq 0$.

veamos :

(1) si r es raiz de multiplicidad 2, entonces $P(X) = (x-r)^2\,Q(x)$

(2) Derivando dos veces :

$$P'(X) = 2(x-r)Q(x) + (x-r)^2 Q'(x) \quad \cdots\cdots (2*)$$

Factorizar $(x-r)$:

$$P'(X) = (x-r)\left[\, 2Q(x) + (x-r)Q'(x) \,\right]$$

DERIVAR EN (2A):

$$P''(X) = 2Q(x) + 2(x-r)Q'(x) + 2(x-r)Q'(x) + (x-r)^2 Q''(x)$$

$$= 2Q(x) + 4(x-r)Q'(x) + (x-r)^2 Q''(x)$$

(3) Haciendo $P(X)=0$, obtenemos $x=r$.

(4) Haciendo $P'(X)=0$, obtenemos $x=r$.

(5) Pero $P''(r) = 2Q(r) + 0 + 0 = 2Q(r) \neq 0$.

($\Leftarrow$) si $P(r) = P'(r) = 0$, con $P''(r) \neq 0$, entonces r es una raiz de multiplicidad 2.

(1) si $P(r)=0$, entonces existe $Q(X)$, tal que $P(X) = (x-r)Q(x)$

(2) Al derivar $P(X)$, tenemos : $P'(X) = Q(x) + (x-r)Q'(x)$

(3) si $P'(r)=0$, en (2) tendremos : $P'(r) = Q(r) + (r-r)Q'(x)$

$$0 = Q(r)$$

(4) Como $Q(r)=0$, entonces $\exists Q_1(x)$, tal que : $Q(x) = (x-r)Q_1(x)$

(5) Reemplazar en (1) : $P(X) = (x-r)(x-r)Q_1(x)$

$$= (x-r)^2 Q(x)$$

La generalización de este teorema es : Sea $P(X)$ un polinomio con coeficientes reales. El número real r es una raíz de $P(X)$ de multiplicidad K sí y sólo sí $P(r) = P'(r) = \cdots\cdots = P^{(K-1)}(r) = 0$ y $P^{(K)}(r) \neq 0$

ILUSTRACION GRAFICA

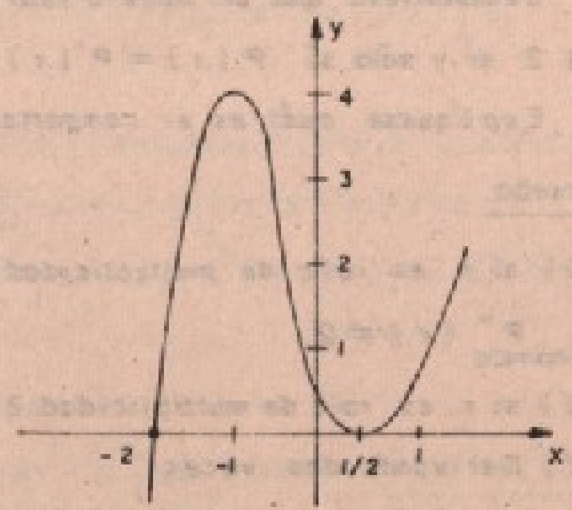
sea $P(x) = \frac{108}{225}(2X-1)^2(X+2)$

El gráfico de $P(x)$ es la curva que aparece a la derecha.

Las raices de $P(X)$ son $X = 1/2$ que es de multiplicidad dos y $X=-2$.

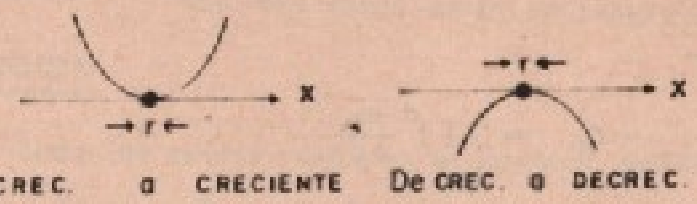
La raiz $X=1/2$ que es de multiplicidad dos toca tangencialmente al eje X.

En cambio la raiz $X=-2$ corta al eje X.



De modo que cerca a la raíz $X=1/2$, que tiene multiplicidad dos, el polinomio $P(X)$ sufre un cambio de curvatura, pues a la izquierda de $X=1/2$, la curva $P(X)$ es decreciente y a su izquierda es creciente.

Siempre que r sea una raíz real de multiplicidad K de un polinomio $P(X)$, ocurrirá que la curva $P(X)$ pasa de DECRECIENTE a CRECIENTE o de CRECIENTE a DECRECIENTE. y es tangente al eje X.



r es raiz de multiplicidad K de $P(x)$

20.6 RELACIONES ENTRE LAS RAICES Y LOS COEFICIENTES

Dado el polinomio de grado $n>0$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_0$, $a_n \neq 0$ (con coeficientes reales o complejos) y cuyas n raices son $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ (reales o complejos, incluidos tantas veces como se repiten las raices múltiples), entonces existen relaciones entre los coeficientes de $P(X)$ y las raices r_i.

Dichas relaciones se obtienen del siguiente modo:

(1) $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x \quad + \frac{a_{n-2}}{a_n}x \quad + \cdots + \frac{a_0}{a_n} = 0 \;\Big|\; a_n \neq 0}$

(1*)

(2) Como $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las n raices de $P(x)$, entonces el polinomio $P(x)$ se puede escribir como $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)$

Como $P(x)=0 \Rightarrow a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n) = 0$, $a_n \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n) = 0} \qquad (2*)$$

(3) Pero son identicos (1*) y (2*) :

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \equiv (x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)$$

$$\equiv x^n - (r_1+r_2+\cdots+r_n)x^{n-1} + (r_1r_2+r_1r_3+\cdots)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n r_1r_2r_3\cdots r_n$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1 r_2 r_3 r_4 \cdots r_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

EJEMPLO 1 – Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$, estando sus raíces en progresión aritmética

SOLUCION

(1) Aplicando la relación de raíces y coeficientes:

si las raíces son $\begin{cases} r_1 = a - r \\ r_2 = a \\ r_3 = a + r \end{cases}$ están en progresión aritmética cuya razón es r.

(2) Las relaciones son:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -(-3) \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = -13 \\ r_1 r_2 r_3 = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-r) + a + (a+r) = 3 \quad \cdots\cdots (I) \\ (a-r)a + (a-r)(a+r) + a(a+r) = -13 \quad \cdots (II) \\ (a-r)a(a+r) = -15 \quad \cdots\cdots (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ \text{Reemplazar en (III):} \\ (1-r)(1+r) = -15 \\ 1 - r^2 = -15 \\ r^2 = 16 \\ \boxed{r = \pm 4} \end{cases}$$

Escogiendo $r = 4$ o $r = -4$. Las raíces serán:

$$\begin{cases} r_1 = 1 - 4 = -3 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 1 + 4 = 5 \end{cases}$$

EJEMPLO 2 – Resolver la ecuación $5x^3 - 62x^2 + 124x - 40 = 0$ sabiendo que sus raíces están en progresión geométrica.

SOLUCION

(1) Como las raíces están en progresión geométrica, considerar:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{a}{r} \\ r_2 = a \\ r_3 = ar \end{cases}$$

(2) En la ecuación dada, previamente, se dividen todos los términos entre 5, para obtener: $x^3 - \dfrac{62}{5}x^2 + \dfrac{124}{5}x - 8 = 0$

(3) Ahora, la relación entre coeficientes y raíces será:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r} + a + ar = -\left(-\dfrac{62}{5}\right) \Rightarrow \dfrac{a + ar + ar^2}{r} = \dfrac{62}{5} \quad \cdots\cdots (I) \\ \dfrac{a}{r}a + \dfrac{a}{r}ar + a.ar = \dfrac{124}{5} \Rightarrow \dfrac{a^2}{r} + a^2 + a^2 r = \dfrac{124}{5} \quad \cdots\cdots (II) \\ \dfrac{a}{r}.a.ar = -(-8) \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow \boxed{a = 2} \end{cases}$$

(4) Remplazar en (I) el valor de $a = 2$:

$$2 + 2r + 2r^2 = \frac{65}{5}r$$

$$10 + 10r + 10r^2 = 65r$$

$$10r^2 - 55r + 10 = 0$$

$$2r^2 - 11r + 5 = 0$$

$$(2r-1)(r-5) = 0 \quad \begin{cases} r = 5 \\ r = 1/2 \end{cases}$$

(5) Como $r = 5$, obtenemos:

$$r_1 = \frac{2}{r}$$

$$r_2 = 2$$

$$r_3 = 10$$

EJEMPLO 3 – Resolver la ecuación $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$, sabiendo que sus raíces están en progresión aritmética.

SOLUCION

(1) Como las raíces están en PROGRESION ARITMETICA, conviene hacer:

$r_1=a-3r$, $r_2=a-r$, $r_3=a+r$, $r_4=a+3r$

hemos considerado "$2r$" la razón aritmética.

(2) Las relaciones entre raíces y coeficientes son:

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3+r_4=-(-2) \\ r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=+(-21) \\ r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4=-(22) \\ r_1r_2r_3r_4=+(40) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-3r+a-r+a+r+a+3r=2 \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow \boxed{a=1/2} \\ (a-3r)(a-r)(a+r)(a+3r)=40 \Rightarrow (a^2-r^2)(a^2-9r^2)=40 \end{cases}$$

(3) De la 1ª relación hemos obtenido $a=1/2$.

Ahora operemos en la última relación (las otras relaciones son innecesarias)

Veamos:

$$\left(\frac{1}{4}-r^2\right)\left(\frac{1}{4}-9r^2\right)=40 \Rightarrow (1-4r)(1-36r)=640$$

$$144r^4-40r^2+1=640$$

$$144r^4-40r^2-639=0$$

$$\begin{array}{ccc} 4r^2 & & -9 \\ 36r^2 & & +71 \end{array}$$

$$\Rightarrow (4r^2-9)(36r^2+71)=0$$

$$\Rightarrow 4r^2-9=0 \Rightarrow r^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{r=\pm\frac{3}{2}}$$

(4) Escoger $r=\frac{3}{2}$, las raíces son:

$$\begin{cases} r_1=\frac{1}{2}-3\left(\frac{3}{2}\right)=-4 & , r_3=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2 \\ r_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1 & , r_4=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5 \end{cases}$$

21 RAICES ENTERAS Y RACIONALES – LIMITE SUPERIOR PARA RAICES REALES.

En esta parte, estudiaremos y discutiremos las posibles raíces enteras y/o racionales que puede tener un polinomio cuyos coeficientes son NUMEROS RACIONALES y/o ENTEROS.

21.1 DEFINICION – Diremos que dos números enteros p y q son PRIMOS RELATIVOS, si los únicos enteros que dividen a ambos, son ± 1

Ejemplos:

1) En $\frac{3}{5}$, 3 y 5 son primos relativos.

2) En $\frac{4}{7}$, 4 y 7 son primos relativos.

21.2 TEOREMA: si el número racional $\frac{p}{q}$, donde p y q son primos relativos, es una raíz del polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_n\neq 0$ de COEFICIENTES ENTEROS, entonces:

a) p es divisor de a_0.

b) q es un divisor de a_n.

c) $p-mq$ es un divisor de $P(m)$ para cualquier "m" entero. En particular, $p-q$ es un divisor de $P(1)$, $p+q$ es un divisor de $P(-1)$.

PRUEBA DE a) y b)

(1) si $\frac{p}{q}$ es una raíz de la ecuación, entonces:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0$$

(2) Multiplicando por q^n en ambos miembros, obtenemos:

$$\underline{a_np^n}+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_1pq^{n-1}+\underline{a_0q^n}=0$$

De donde obtenemos:

i) $\underline{a_0q^n}=-p\,(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{a_0 q^n}{p} = -\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right)}$$

ii) $a_n p^n = -q\left(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{a_n}{q} p^n = -\left(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)}$$

(3) Los segundos miembros de las igualdades de i) y ii) son números enteros porque $a_i \in \mathbb{Z}$, p, q son enteros.

Así tendremos:

En i) $\frac{a_0 q^n}{p} = C$, donde $C, a_0, p, q \in \mathbb{Z}$

En ii) $\frac{a_n p^n}{q} = d$, donde $d, a_n, p, q \in \mathbb{Z}$

(4) Como p y q son primos entre sí, entonces NO puede ser que p divida a q^n o que q divida a p^n.

Lo único que puede ocurrir es que:

En i) a_0 es divisible por p.

En ii) a_n es divisible por q.

PRUEBA DE c)

Debo probar que $p(m) = (p - mq)d$, donde d es un entero.

Veamos

(1) Como $x = \frac{p}{q}$ es raiz del polinomio $P(x)$, entonces $\left(x - \frac{p}{q}\right)$ es factor de $P(x)$, y por tanto existe un polinomio $Q(x)$ de grado $(n-1)$, tal que:

$$P(x) = a_n\left(x - \frac{p}{q}\right) Q(x) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1*)$$

(2) sea $x = m$ un entero cualquiera y reemplazamos en $(1*)$:

$$P(m) = a_n\left(m - \frac{p}{q}\right) Q(m).$$

$P(m) = a_n\left(\frac{mq - p}{q}\right) Q(m)$, donde a_n y $Q(m)$ son enteros.

$= -\frac{a_n}{q}(p - mq) Q(m)$, donde $(mq - p)$ y q son primos, puesto que $\frac{mq-p}{q} = m - \frac{p}{q}$, p y q son primos entre sí.

$$\frac{p(m)}{(p-mq)} = -\frac{a_n}{q} Q(m)$$

(3) En la parte b) se ha probado que "q" es un divisor de a_n; por tanto existe un entero c, tal que: $-\frac{a_n}{q} = c$

$\frac{p(m)}{(p-mq)} = c\,Q(m)$, como c es un entero y $Q(m)$ es también entero, entonces $cQ(m) = d$ es otro entero.

$$\Rightarrow \quad \frac{p(m)}{(p-mq)} = d$$

(4) si el número $\frac{p(m)}{(p-mq)}$ es entero, entonces $p(m)$ es divisible por $(p - mq)$.

21.3 COROLARIO: sea la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ con COEFICIENTES ENTEROS, donde el coeficiente de x^n es la unidad. Todas las raices racionales que tuviera la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ son ENTEROS Y DIVISORES DEL TERMINO INDEPENDIENTE a_0.

PRUEBA

(1) segun el teorema 21.2, si el número racional $\frac{p}{q}$ es raiz de la ecuación, se cumple: $p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0 q^n$

(2) En particular se cumplirá para $q = 1$ y $a_n = 1$. Así obtendremos:

$$p\left(p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0$$

$$\Rightarrow \quad p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \cdots + a_1 = -\frac{a_0}{p}$$

(3) Como $\left(p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \cdots + a_1\right)$ es un entero, entonces $-\frac{a_0}{p}$ también es un entero. Es decir a_0 es divisible por p [ó p divide a a_0].

21.4 REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES

1. El número de raices positivas de un polinomio entero de coeficientes reales es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes de $P(x)$ ó menor en un número par.

2. El número de raices negativas de un polinomio de coeficientes reales es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes de $P(-x)$ ó menor en un número par.

3. El número de raices complejos es igual al grado del polinomio menos el número de raices positivas y negativas.

EJEMPLOS :

Aplicando la regla de signos de DESCARTES, discutir el número de raices reales (positivas y negativas) y complejas que tienen cada uno de las sigtes ecuaciones :

1) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$

2) $4x^4 + 12x^3 + 21x^2 + 14x + 3 = 0$

3) $6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$

SOLUCION DE 1)

1º) En la ecuación dado $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$

contemos ¿ Cuántas variaciones de signo de los coeficientes, existen?

Existen 3 variaciones de signo.

2º) Al hacer el cambio de la variable por $-x$, obtemos :

$$P(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 + 5(-x)^2 - 2(-x) - 2$$
$$= x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2$$

¿ Cuántas variaciones de signo de los coeficientes existen ?

Vemos, que sólo existe una variación.

3º) Hagamos un cuadro, de todos los posibles combinaciones de raices reales (positivas y negativas) y complejas que pueda tener la ecuación.

+	-	$\mathbb{C}$	
3	1	0	← 1ª combinación
1	1	2	← 2ª combinación

De la 1ª combinación se van descendiendo de dos en dos en aquellas donde la posibilidad es 2 ó más y se van aumentando de dos en dos en los complejos.

Si en la 1ª combinación corresponden "0" y "1" para positivos y negativos ó "1" y "0" para positivos y negativos respectivamente, éstas son FIJAS, no variarán

Haciendo otros análisis, como la aplicación del TEOREMA 21.2 y otros, llegaremos a la conclusión que sólo la 2ª combinación se cumple.

SOLUCION de 2)

1º) $4x^4 + 12x^3 + 21x^2 + 14x + 3 = 0$

No hay cambio de signo en los coeficientes.

2º) Al cambiar por $-x$, se tiene :

$$4x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 14x + 3 = 0$$

Hay 4 cambios.

3º) El cuadro

+	-	$\mathbb{C}$
0	4	0
0	2	2
0	0	4

SOLUCION 3)

1º) $6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$

4 cambios.

2º) $-6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$

$(\Rightarrow)$ $6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0$

1 cambio.

3º) El cuadro

+	-	$\mathbb{C}$
4	1	0
2	1	2
0	1	4

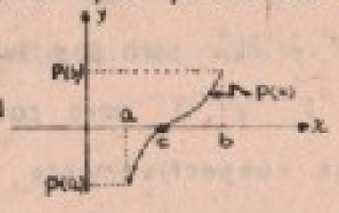
21.5 TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO

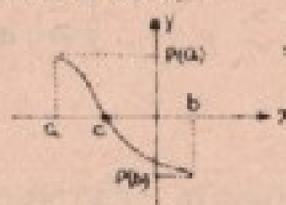
Si $P(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, tal que $P(a)\cdot P(b) < 0$, entonces existe un número real $c \in]a,b[$, tal que $P(c) = 0$.

ACLAREMOS el Teorema:

1º) La existencia de la raíz "C" se garantiza sólo cuando en un intervalo cerrado $[a,b]$, en el que a y b estén muy cerca, se cumple que $P(a)$ y $P(b)$ tengan signos opuestos. Sólo cuando $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos se garantiza que $P(x)$ corta al eje X en algún punto que pertenece al intervalo $]a,b[$.

$P(a)<0 \wedge P(b)>0$
$\rightarrow P(a)\cdot P(b)<0$
Luego $\exists\, c\in[a,b]$ tal que $P(c)=0$





$P(a)>0$ y $P(b)$
$\Rightarrow P(a)\cdot P(b)<0$, luego $\exists\, c\in[a,b]$ tal que $P(c)=0$

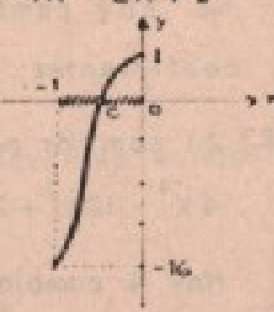
El punto $c \in]a,b[$ que corta al eje X, es una raíz de $P(x)$.

2º) En la práctica, el estudiante debe buscar dos números reales a y b muy cercanos entre sí, de tal manera que $P(a)$ y $P(b)$ tengan signos contrarios.

EJEMPLO : En el polinomio $P(X) = 6X^5 - 5X^4 + 4X^3 - 4X^2 - 2X + 1$

Se tiene $P(0) = 1$

$P(-1) = -16$



Según el TEOREMA 21.5, afirmamos que existe una raíz en el intervalo $]-1,0[$. Lo que no nos dice es quién es la raíz.

Para hallar dicha raíz, se discuten aplicando el teorema 21.2 para el caso en que la raíz sea RACIONAL.

Si la raíz no es racional, se halla por otros métodos (de Newton, de Horner).

LIMITE SUPERIOR DE RAICES REALES

21.6 TEOREMA : Las raíces reales de un polinomio de COEFICIENTES REALES $a_n x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (siendo $a_n > 0$), son menores que $1 + \sqrt[r]{\text{máx}\left|\frac{a_K}{a_n}\right|}$.

donde: r es el número de coeficientes positivos o ceros que preseden al primer coeficiente NEGATIVO, a_K son los coeficientes negativos del polinomio.

EJEMPLO 1 : Dado la ecuación $x^5 + 4x^4 - 7x^2 - 20x + 1 = 0$, hallar el límite superior de las raíces reales.

SOLUCION :

En la ecuación dada le falta el término en x^3, luego el polinomio es.

$$\underbrace{x^5 + 4x^4 + 0x^3}_{r=3} - 7x^2 - 40x + 1 = 0$$

$a_n = 1$

El mayor coeficiente negativo en valor absoluto.

1º COEFICIENTE NEGATIVO

Un límite superior es: $L = 1 + \sqrt[3]{40} = 4.42$

donde máx $\{|-7|, |-40|\} = 40$

según el Teo. 21.6, $L = 1 + \sqrt[r]{\text{max}\left|\frac{a_K}{a_n}\right|}$ es un límite superior de las raíces reales

21.7 TEOREMA : Dado una ecuación real con COEFICIENTES REALES $a_n x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, donde $a_n > 0$, un límite superior de las raíces reales es:

$$L = 1 + \text{máx}\left\{ \frac{|a_K|}{\text{suma de todos los coeficientes positivos que preseden a cada coeficiente } a_K} \;\middle/\; a_K \text{ es COEFICIENTE NEGATIVO} \right\}$$

OBSERVACIONES

1) Los teoremas 21.6 y 21.7 nos proporcionan algunas cotas superiores de las raices reales. Es decir, cada raíz real de un polinomio no puede ser mayor que L.

2) Existen otros criterios para hallar otras cotas superiores para las raices reales (consultar el libro: Problemas de ALGEBRA SUPERIOR – FADDIEEV-SOMINSKI). Lo óptimo es hallar la MENOR de las cotas superiores.

3) Las COTAS INFERIORES (límite inferior) de las raices reales se obtienen sustituyendo x por −x en la ecuación dada y luego se hace similar análisis que lo anterior.

EJEMPLO 2.

En la ecuación $x^5 + 4x^4 - 7x^2 - 40x + 1 = 0$, hallemos el límite superior aplicando los teoremas 21.6 y 21.7, para luego escoger el óptimo.

a) Por el TEO. 21.6, obtuvimos $L = 1 + \sqrt[3]{40} = 4.42$

b) Por el TEO. 21.6, tenemos $\text{máx}\left\{\frac{|-7|}{1+4}, \frac{|-40|}{1+4}\right\} = 8$, por tanto una cota superior será: $L_1 = 1 + 8 = 9$.

De los dos cotas superiores halladas, escoger la menor.

La menor de ambas cotas superiores es $L = 4.42$. Así, afirmamos que las raices reales X_i de la Ecuación dada NO pueden ser mayores que 4.42. Es decir $\boxed{X_i < 4.42}$, X_i es raíz real.

LIMITE SUPERIOR

EJEMPLO 3 – Dada la ecuación $4x^5 - 8x^4 + 22x^3 + 98x^2 - 73x + 5 = 0$ hallar el límite superior de las raices reales.

SOLUCION

a) Por el Teo. 21.6, obtenemos $\text{máx}\left\{\frac{|-8|}{4}, \frac{|-73|}{4}\right\} = \frac{73}{4}$, luego:

$$L = 1 + \frac{73}{4} = 19\ 1/4$$

b) Por el Teo. 21.7, obtenemos: $\text{máx}\left\{\frac{|-8|}{4}, \frac{|-73|}{4+22+98}\right\} = 2$

$$L_1 = 1 + 2 = 3$$

Escogemos como límite superior a $L_1 = 3$, por ser la MENOR de las cotas superiores. Así, afirmamos que $\boxed{X_i < 3,\ \forall\ X_i \text{ raíz real}}$

EJEMPLO 4 – Dada la ecuación $x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 7x^2 - 8 = 0$ hallar los límites superior e inferior para las raices reales.

SOLUCION

1) LIMITE SUPERIOR

a) Por el Teo. 21.6, obtenemos:

i) $\text{Máx}\{|-4|, |-6|, |-7|\} = 7$

ii) $L = 1 + \sqrt[2]{7} \approx 3.6$

b) Por el Teo. 21.7, obtemos:

i) $\text{Máx}\left\{\frac{|-4|}{1+3}, \frac{|-6|}{1+3+5}, \frac{|-7|}{1+3+5}\right\} = 1$

ii) $L_1 = 1 + 1 = 2$

Escogemos $L_1 = 2$. Por tanto, toda raiz real X_i es $X_i < 2$.

2) LIMITE INFERIOR

1º) Cambiar X por −X, en la ecuación dada:

$$-x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^7 - 3x^6 - 4x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 8 = 0}$$

2º) Hallar el límite

a) Por el Teo. 21.6

i) $\text{máx}\{|-3|, |-4|, |-5|, |-6|\} = 6$

ii) $L = -(1 + \sqrt[1]{6}) = -(1+6) = -7$

b) Por el Teo. 21.7

i) $\text{máx}\left\{\frac{|-3|}{1}, \frac{|-4|}{1}, \frac{|-5|}{1}, \frac{|-6|}{1}\right\} = 6$

ii) $L_2 = -(1+6) = -7$ //

El límite inferior es −7.

Por tanto, $-7 < X_i < 2$, $\forall\ X_i$ raiz real de la ecuación.

21.8 PROBLEMAS

(1) Demostrar que si $P(x)$ es un polinomio definido en $\mathbb{C}$, de grado "n" positivo, con coeficientes puramente imaginarios, entonces
$P(\bar{x})\left[2\overline{P(x)}+P(\bar{x})\right]=-\left[\overline{P(x)}\right]^2$

PRUEBA

1) Sea el Polinomio $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} ia_k x^k \quad , x\in\mathbb{C} \quad , a_k\in\mathbb{R}$

2) Donde: $P(\bar{x})=\sum\limits_{k=0}^{n} ia_k \bar{x}^k$

$$\overline{P(x)}=\overline{\sum ia_k x^k}$$
$$=\sum \overline{ia_k}\,\overline{x^k}$$
$$=\sum(-ia_k\bar{x}^k), \quad \text{pues } (\bar{x})^k=\overline{(x^k)}$$
$$=-\sum ia_k\bar{x}^k$$
$$\overline{P(x)}=-P(\bar{x})$$

3) Luego: $P(\bar{x})\left[2\overline{P(x)}+P(\bar{x})\right]=P(\bar{x})\left[2(-P(\bar{x}))+P(\bar{x})\right]$
$$=P(\bar{x})\left[-P(\bar{x})\right]$$
$$=-\left(P(\bar{x})\right)^2$$
$$=-\left[-\overline{P(x)}\right]^2=-\left[\overline{P(x)}\right]^2$$

(2) Sea $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 z+a_0 \;, \; a_n\neq 0 \;, z\in\mathbb{C}$

Demostrar que $P(z)$ es un polinomio de coeficientes reales sí y solo sí $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$.

PRUEBA

($\Rightarrow$) si $P(z)$ es un polinomio de coeficientes reales, entonces $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$

DEMOSTRACION

1) si $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k \quad , a_k\in\mathbb{R} \; , \; k=0,1,2,\ldots\ldots,n$

2) Donde $\overline{P(z)}=\overline{\sum a_k z^k}$
$$=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\;\overline{z^k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n} a_k\bar{z}^k, \text{ pues } \begin{cases}\overline{a_k}=a_k & \text{si } a_k\in\mathbb{R}\\ \overline{z^k}=(\bar{z})^k\end{cases}$$
$$=P(\bar{z}).$$

($\Leftarrow$) si $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$ entonces $P(z)$ es un polinomio de coeficientes reales.

1) Por un lado tenemos: $\overline{P(z)}=\sum\overline{a_k}.\bar{z}^k$

2) Por otro lado: $P(\bar{z})=\sum a_k\bar{z}^k$

3) si $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$, es decir:
$\sum\bar{a}_k.\bar{z}^k=\sum a_k.\bar{z}^k$

4) Pero dos polinomios son idénticamente iguales cuando los coeficientes son iguales, es decir: $\bar{a}_k=a_k \Leftrightarrow a_k\in\mathbb{R}$
(Un número complejo es igual a su conjugado, si y solo sí, es un número real: $z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$)

21.9 DIVISION DE POLINOMIOS Y TEOREMA DEL RESTO

(3) Sea $P(x)$ el polinomio que al ser dividido entre x^4-5x^2+4 dé como resto $2x^3+x-1$.
Hallar el residuo al dividir $P(x)$ entre x^2-3x+2.

SOLUCION

(1) si $P(x)$ es dividido entre x^4-5x^2+4 y dé como resto $2x^3+x-1$ entonces existe $Q(x)$, tal que:

$$P(X) = (X^4-5X^2+4)Q(X) + 2X^3+X-1$$

(2) Dividir $P(X)$ entre X^2-3X+2

$$\frac{P(X)}{X^2-3X+2} = \frac{(X^4-5X^2+4)}{X^2-3X+2}Q(X) + \frac{2X^3+X-1}{X^2-3X+1}$$

$$= \frac{\cancel{(X-2)}(X+2)(X-1)(X+1)Q(X)}{\cancel{(X-2)}(X-1)} + \frac{2X^3+X-1}{X^2-3X+1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 \cdots\cdots + X - 1 & X^2-3X+2 \\ \cline{2-2} -2X^3+6X^2-4X & 2X+6 \\ \hline 6X^2-3X-1 & \\ -6X^2+18X-12 & \\ \hline 15X-13 & \end{array}$$

$$= (X+2)(X+1)Q(X) + \left[(2X+6) + \frac{15X-13}{X^2-3X+2}\right]$$

$$P(X) = \left[(X^2-3X+2)(X+2)(X+1)Q(X) + (2X+6)(X^2-3X+2)\right] + \underbrace{(15X-13)}_{\text{es el RESIDUO}}$$

PROBLEMA 4 Sea $P(X)$ un polinomio con coeficiente principal la unidad tal que, $P(K)=2K$, $K=1,2$. Si el cociente $Q(X)$ de la división de $P(X)$ entre $(X-1)(X-2)$ cumple $Q(j)=3$, $j=3,4$. Hallar $P(X)$ de modo que tenga grado mínimo.

SOLUCION

(1) si $Q(j)=3$, $j=3,4$.

Es decir $\begin{cases} Q(3)=3 \\ Q(4)=3 \end{cases}$

entonces $Q(X) = (X-3)(X-4)+3$.

2) Luego $\dfrac{P(X)}{(X-1)(X-2)} = (X-3)(X-4)+3 = X^2-7X+15$.

3) Pero $P(1)=2 \quad \wedge \quad P(2)=4$

$P(1)=2$ es el residuo de dividir $P(X)$ entre $(X-1)$

$P(2)=4$ es el residuo de dividir $P(X)$ entre $(X-2)$

4) Ademas, la división de $P(X) \div (X-1)(X-2)$ dará un RESIDUO, a lo mas, un polinomio de 1^{er} grado.

Entonces:

$$P(X) = (X-1)(X-2)\left[(X-3)(X-4)+3\right] + \underbrace{(ax+b)}_{\text{RESIDUO}}$$

$$a = ?\ ,\ b = ?$$

5) $\left.\begin{array}{l} \text{si } X=1 \Rightarrow P(1) = a+b = 2 \\ \text{si } X=2 \Rightarrow P(2) = 2a+b = 4 \end{array}\right\}\ a=2,\ b=0$

$$\therefore\ P(X) = (X-1)(X-2)\left[(X-3)(X-4)+3\right] + 2X$$

$$= (X-1)(X-2)\left[X^2-7X+15\right] + 2X$$

$$= X^4-10X^3+38X^2-57X+30$$

COMPROBACION

1) $P(1)=2$

$P(2)=4$

2) $\dfrac{P(X)}{(X-1)(X-2)} = (X^2-7X+10) + \dfrac{2X}{(X-1)(X-2)}$

PROBLEMA 5. Sea $P(X)$ un polinomio con coeficiente principal la unidad, tal que, $P(K) = 2K$, $K = 1,2,3$. Si el cociente $Q(X)$ de la división de $P(X)$ entre $(X-1)(X-2)(X-3)$ cumple que $Q(j) = 3$, $j = 4,5,6,7,8$.
Hallar $P(X)$ de modo que tenga grado mínimo.

SOLUCION

1) si $\left.\begin{array}{l} Q(4) = 3 \\ Q(5) = 3 \\ Q(6) = 3 \\ Q(7) = 3 \\ Q(8) = 3 \end{array}\right\}$ entonces $Q(X) = (X-4)(X-5)(X-6)(X-7)(X+8) + 3$

2) La división de $P(X)$ entre $(X-1)(X-2)(X-3)$ da como cociente $Q(X)$ y como residuos: $P(K) = 2K$, $K = 1,2,3$.

Como el DIVIDENDO es de 3^{er} grado, entonces el residuo, a lo más puede ser de 2^{do} grado: $ax^2 + bx + c$.

Luego:

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)Q(X) + \underbrace{(ax^2+bx+c)}_{R(X)}$$

Debemos hallar $\left\{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right.$

3) Pero $P(K) = 2K$, $K = 1,2,3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} P(1) = a + b + c = 2 & (I) \\ P(2) = 4a + 2b + c = 4 & (II) \\ P(3) = 9a + 3b + c = 6 & (III) \end{array}\right.$

4) $\left.\begin{array}{ll} (III) - (II): & 5a + b = 2 \\ (III) - (I): & 8a + 2b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5a + b = 2 & (IV) \\ 4a + b = 2 & (V) \end{array}\right.$

$(IV) - (V): \quad a = 0$

$b = 2$
$c = 0$

Luego: $R(X) = 2X$

5) CONCLUSION:

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)\Big[\underbrace{(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)(X-8)+3}_{Q(X)}\Big] + 2X$$

PROBLEMA 6 Sean $P(X)$ + $Q(X)$ dos polinomios del mismo grado y coeficiente inicial 1. Se sabe que $P(X)+Q(X)$ tiene término independiente 6 y que es divisible por $X^2 + 3X + 2$, $P(-1) = 2$, $Q(-2) = 6$.
$P(X) - 2Q(X)$ es divisible por X, calcular:
$P(X)$ y $Q(X)$ de modo que tengan grado mínimo.

SOLUCION

1) si $P(X) + Q(X)$ tiene término independiente 6, entonces

$$\boxed{P(0) + Q(0) = 6}$$

2) si $P(X) + Q(X)$ es divisible por $X^2 + 3X + 2 = (X+2)(X+1)$, entonces

$$\boxed{P(-2) + Q(-2) = 0 \quad \wedge \quad P(-1) + Q(-1) = 0}$$

3) Por datos $\left\{\begin{array}{l} P(-1) = 2 \\ Q(-2) = 6 \end{array}\right.$

4) si $P(X) - 2Q(X)$ es divisible por X, entonces $P(0) - 2Q(0) = 0$

5) Así, se ha formado los siguientes sistemas de ecuaciones:

De 1) y 4) se obtiene : $\begin{cases} P(0)+Q(0)=6 \\ P(0)-2Q(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0)+Q(0)=6 \\ -P(0)+2Q(0)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} P(0)=4 \\ Q(0)=2 \end{cases}$ $\qquad 3Q(0)=6$

$\qquad Q(0)=2$

6) De $\begin{cases} P(-2)+Q(-2)=0 \\ Q(-2)=6 \end{cases}$

$\begin{cases} P(-2)=-6 \\ Q(-2)=6 \end{cases}$

De $\begin{cases} P(-1)+Q(-1)=0 \\ P(-1)=2 \end{cases}$

$\begin{cases} P(-1)=2 \\ Q(-1)=-2 \end{cases}$

7) Como se tiene 3 valores para $Q(X)$, que son :

a) $\begin{cases} Q(0)=2 \\ Q(-2)=6 \\ Q(-1)=-2 \end{cases}$

entonces $Q(X)$ debe ser de $3^{\underline{er}}$ grado :

$Q(X)=X^3+aX^2+bX+c$

Luego $\begin{cases} Q(0)=c=2 \\ Q(-2)=-8+4a-2b+2=6 \\ Q(-1)=-1+a-b+2=-2 \end{cases}$

$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \rightarrow \\ -1 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 4a-2b=12 \\ a-b=-3 \end{cases}$

$2a-b=6$

$-a+b=3$

$a=9$

$b=12$

Luego :

$\boxed{Q(X)=X^3+9X^2+12X+2}$

Hay 3 valores para $P(X)$, que son

b) $\begin{cases} P(0)=4 \\ P(-2)=-6 \\ P(-1)=2 \end{cases}$

Luego $P(X)$ será un polinomio de $3^{\underline{er}}$ grado con coeficiente principal la unidad :

$P(X)=X^3+mX^2+nX+p$

Luego $\begin{cases} P(0)=p=4 \\ P(-2)=-8+4m-2n+4=-6 \\ P(-1)=-1+m-n+4=2 \end{cases}$

$-\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 4m-2n=-2 \\ m-n=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2m+n=1 \\ m-n=-1 \end{cases}$

$-m=0$

$\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$

Luego $\boxed{P(X)=X^3+X+4}$

PROBLEMA 7 – Hallar la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n$.

SOLUCION:

1) sean $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ las raíces del polinomio .

2) se pide hallar : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

3) Pero : $(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots\cdots+x_n)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum x_i x_j$

4) Las dos primeras relaciones entre raíces y coeficientes es :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1$$

$$\sum x_i x_j = a_2$$

5) Reemplazar 4) en (3) :

$$(-a_1)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a_2$$

$$\Rightarrow \quad \sum x_i^2 = a_1^2 - 2a_2 \quad //$$

PROBLEMA 8 – Formar una ecuación de $4^{\underline{to}}$ grado cuyas raíces sean $\alpha, \frac{1}{\alpha}, -\alpha, -\frac{1}{\alpha}$

SOLUCION :

La Ecuación será :

$$(x-\alpha)(x-\tfrac{1}{\alpha})(x+\alpha)(x+\tfrac{1}{\alpha})=0$$

$$\left[x^2-\underbrace{(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})}_{a}x+1\right]\left[x^2+\underbrace{(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})}_{a}x+1\right]=0 \text{ , hacer } \alpha+\tfrac{1}{\alpha}=a$$

$$\Rightarrow \quad \left[(x^2+1)-ax\right]\left[(x^2+1)+ax\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+1)^2-a^2x^2=0$$

$$\Rightarrow \quad x^4+2x^2+1-a^2x^2=0$$

$$\Rightarrow \quad x^4+(2-a^2)x+1=0 \text{ , donde } 2-a^2=2-(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})^2=-\left(\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x-\left(\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}\right)x+1=0$$

PROBLEMA 9 – La suma de dos raices de la Ecuación : $2X^3 - X^2 - 7X + \lambda = 0$, es igual a 1. Determinar λ.

SOLUCION :

(1) De $2X^3 - X^2 - 7X + \lambda = 0 \iff X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{\lambda}{2} = 0$

(2) si r_1, r_2, r_3 son las raices , la relación entre coeficientes y raices es :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -(-\frac{1}{2}) \quad \cdots\cdots (I) \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = +(-\frac{7}{2}) \quad \cdots\cdots (II) \\ r_1r_2r_3 = -(\frac{\lambda}{2}) \quad \cdots\cdots (III) \end{cases}$$

(3) Por datos : $r_1 + r_2 = 1$. Al reemplazar en (I) :

$$1 + r_3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_3 = -1/2} \; (IV)$$

(4) Al reemplazar (IV) en (II) y (III) :

$$\begin{cases} r_1r_2 - \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2 = -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2}r_1r_2 = -\frac{\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r_1r_2 - r_1 - r_2 = -7 \quad \cdots\cdots (V) \\ r_1r_2 = \lambda \quad \cdots\cdots (VI) \end{cases}$$

(5) (VI) en (V) : $2\lambda - (r_1 + r_2) = -7$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda - (1) = -7$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = -3}$$

PROBLEMA 10 – Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación $x^3 + px + q = 0$, para que sea $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

SOLUCION : La relación de coeficientes de $x^3 + ax^2 + px + q = 0$ y sus raices , son :

a) sean las raices x_1, x_2, x_3 , donde :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \cdots\cdots (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \quad \cdots\cdots (2) \\ x_1x_2x_3 = -q \quad \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

se pide hallar la relación entre p y q :

b) De $X_3 = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \iff X_1X_2X_3 = X_2 + X_1$

$\iff -q = -X_3$, pues de (1): $X_1 + X_2 = -X_3$

$$X_3 = q \quad \cdots\cdots (4)$$

c) Como , una raiz es $X_3 = q$ al reemplazar en la Ecuación original :

$$\boxed{q^3 + pq + q = 0} \leftarrow \text{es la relación pedida .}$$

PROBLEMA 11 . Hallar el polinomio P(X) de grado mínimo que cumple :

i) coeficiente inicial 1.

ii) divisible entre (X+1) y (X+2)

iii) el resto de dividirlo entre (X−1) es 18

iv) término independiente es 6.

v) $P(2) = 36$, $P(3) = 60$.

vi) el cociente de la división de P(X) entre $X^2 + 3X + 2$ evaluado en 4 es 3.

SOLUCION :

1) $a_n = 1$, $n = ?$

2) si P(X) es divisible entre (X+1) y (X+2) $\Rightarrow \exists\, Q(X) / P(X) = (X+1)(X+2)Q(X)$

3) P(X) : (X−1) da $R = 18 \Rightarrow P(1) = 18$

4) si el término independiente es 6 $\Rightarrow P(0) = 6$

5) $P(2) = 36$, $P(3) = 60$

6) Los datos ii) y vi) son idénticos , pues $(x^2+3x+2) = (x+1)(x+2)$; Luego $P(x) = (x+1)(x+2)Q(x)$

6) Si $Q(4) = 3$, entonces al reemplazar $X = 4$ en P(x)

$$P(4) = (5)(6)Q(4)$$

$$= 30\,(3)$$

$$= 90$$

7) Al evaluar los valores de X en :

$$P(X) = (X+1)(X+2)Q(X) \text{ , obtendremos :}$$

$$\left.\begin{array}{l} 18 = P(1) = (2)(3)Q(1) \rightarrow Q(1) = 3 \\ 6 = P(0) = (1)(2)Q(0) \rightarrow Q(0) = 3 \\ 36 = P(2) = (3)(4)Q(2) \rightarrow Q(2) = 3 \\ 60 = P(3) = (4)(5)Q(3) \rightarrow Q(3) = 3 \\ 90 = P(4) = (5)(6)Q(4) \rightarrow Q(4) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+3$$

8) Luego $P(X)$ es : $P(X) = (X+1)(X+2)\left[X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+3\right]$ //

PROBLEMA 12 – Al dividir el polinomio $P(X)$ entre $X-2$ se obtiene como resto $\overset{R}{x^2+1}$ y como cociente $Q(X)$. Hallar el residuo de dividir el cubo de $P(X)$ entre $(X-2)^2$, si el resto de la división de $Q(X)$ entre $(X-2)$ es 1.

SOLUCION :

(1) $P(X) : (X-2)$ da $\begin{cases} \text{cociente} = Q(X) \\ R = x^2+1 \end{cases}$, luego: $P(X) = (X-2)Q(X) + x^2+1$

(2) $Q(X) : (X-2)$ da $\begin{cases} R = 1 \\ \text{cociente} = Q_1 \end{cases}$, entonces $Q(X) = (X-2)Q_1(X)+1 \Leftrightarrow \boxed{Q(2)=1}$

(3) Sustituir (2) en (1) :

$$P(X) = (X-2)\left[(X-2)Q_1(X)+1\right] + x^2+1$$

$$P(X) = (X-2)^2 Q_1(X) + X-2 + x^2+1$$

$$\boxed{P(X) = (X-2)^2 Q_1(X) + x^2+X-1}$$

Se pide hallar el resto de dividir el cubo de $P(X)$ entre $(X-2)^2$

(4) $[P(X)]^3 \div (X-2)^2$ da $R = ?$

Pero: $P^3(X) = (X-2)^6 Q_1^3(X) + 3(X-2)^4 Q_1^2(X)\left[x^2+X-1\right] + 3(X-2)^2 Q_1(X)\left[x^2+X-1\right]^2 + \underline{(x^2+X-1)^3}$

(5) Al dividir $P^3(X)$ entre $(X-2)^2$, los 3 primeros términos son divisibles entre $(X-2)^2$.

Sólo nos interesa hallar el residuo de la división $(x^2+X-1)^3 \div (X-2)^2$

Veamos :

Pero : $q(X) = (x^2+X-1)^3 = x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3X - 1$

El residuo de $q(X)$ entre $(X-2)^2$ se halla por División SINTETICA dos veces :

2	1	3	0	-5	0	3	-1
		2	10	20	30	60	126
2	1	5	10	15	30	63	125
		2	14	48	126	312	
	1	7	24	63	156	375	

Luego : $R = 375$.

PROBLEMA 13 a) Dado un polinomio $P(z)$, al dividirlo entre $(z-a)$ se obtiene cociente $Q_1(z)$ y resto R_1 y al dividir $Q_1(z)$ entre $(z-b)$ se obtiene resto R_2.

Demostrar que al dividir $P(z)$ entre $(z-a)(z-b)$ se obtiene como resto $R_2 z + R_1 - aR_2$.

PRUEBA

1) $P(z) \div (z-a) \Rightarrow P(z) = (z-a)Q_1(z) + R_1$

2) $Q_1(z) \div (z-b) \Rightarrow Q_1(z) = (z-b)Q_2(z) + R_2$

3) (2) en (1) $P(z) = (z-a)\left[(z-b)Q_2(z) + R_2\right] + R_1$

$$= (z-a)(z-b)Q_2(z) + (z-a)R_2 + R_1$$

Al dividir $P(z)$ entre $(z-a)(z-b)$ el resto es : $(z-a)R_2 + R_1 = R_2 z + R_1 - aR_2$

b) Usar la parte a) para dividir $P(Z)=Z^5+5Z^4+3Z^3-14Z^2-15Z+12$ entre $(Z+2)(Z-3)$, por medio de la división sintética.

Solución

-2	1	5	3	-14	-15	12	
		-2	-6	6	16	-2	
3	1	3	-3	-8	1	$\boxed{10}$	R_1
		3	18	45	111		
	1	6	15	37	$\boxed{112}$	R_2	

Por tanto, el RESIDUO será: $(Z+2)(112)+10 = 112Z+234$

PROBLEMA 14 - Sea $P(X)$ un polinomio entero en X tal que al dividirlo entre $(X^2+4X-5)(X^2-9)$ da como resto $3X^3-5X-8$, calcular los restos de dividir $P(X)$ entre a) $X-1$, b) $(X-3)(X+5)$

SOLUCION:

(1) $\exists\, Q(X)$, tal que, $P(X)=(X^2+4X-5)(X^2-9)Q(X)+(3X^3-5X-8)$

(2) a) El resto de dividir $P(X):(X-1)$ es $P(1)=(0)(-8)Q(1)+3-5-8=-10$

b) Dividir $P(X):(X-3)(X+5)$

$$\frac{P(X)}{(X-3)(X+5)}=\frac{\cancel{(X+5)}(X-1)\cancel{(X-3)}(X+3)}{\cancel{(X-3)}\cancel{(X+5)}}Q(X)+\frac{3X^3-5X-8}{(X-3)(X+5)}$$

$$=(X-1)(X+3)Q(X)+3X-6+\frac{52X-98}{(X-3)(X+5)}$$

El residuo es: $52X-98$ //

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{3X^3} & & -5X-8 & X^2+2X-15 \\ \cancel{-3X^3} & -6X^2 & +45X & \overline{3X-6} \\ \hline & \cancel{-6X^2} & +40X-8 & \\ & \cancel{6X^2} & +12X-90 & \\ \hline & & 52X-98 & \end{array}$$

PROBLEMA 15 - ¿Para qué valores de a, $P(X)=x^n-ax^{n-1}+ax-1$, $n>2$ es divisible por $(x-1)^2$?

SOLUCION:

Para que $P(X)$ sea divisible por $(x-1)^2$, debe ocurrir que $X=1$ sea raíz de multiplicidad 2 de $P(X)$.

Veamos:

(1) $P(x)=x^n-1-ax(x^{n-2}-1)$

$$=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-ax(x-1)(x^{n-3}+x^{n-4}+\cdots+1)$$

(2) $P(X):(x-1)$ da como cociente:

$$Q(x)=(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)-ax(x^{n-3}+\cdots\cdots+1)$$

(3) Luego $Q(1)\Rightarrow$ $Q(1)=\underbrace{(1+1+\cdots\cdots+1)}_{n\text{ veces}}-a(1)\underbrace{(1+1+\cdots\cdots\cdots+1)}_{n-2\text{ veces}}$

$$0=n-a(n-2)\Rightarrow \boxed{a=\frac{n}{n-2}}\ ,\ n>2$$

PROBLEMA 16 - Hallar un polinomio de 3^{er} grado que sea divisible por $(X-1)$ y al dividirlo separadamente por $(X+1)$, $(X+2)$, $(X+3)$, el residuo sea siempre 9.

SOLUCION:

(1) si $P(X)$ es divisible por $(X-1)$ $\Rightarrow$ $P(1)=0$

(2) si $P(X)$ se divide separadamente por $(X+1)$, $(X+2)$, $(X+3)$ da el mismo residuo 9, entonces $P(X)=(X+1)(X+2)(X+3)Q(X)+9$.

(3) Como $P(X)$ debe ser de 3^{er} grado, entonces $Q(X)$ será solo una constante, digamos $Q(X)=A$.

Así tendremos: $P(X)=(X+1)(X+2)(X+3)A+9$

(4) Por (1) : $0 = P(1) = (2)(3)(4)A + 9$

$$0 = 24A + 9 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{3}{8}}$$

(5) CONCLUSION :

$$P(X) = -\frac{3}{8}(X+1)(X+2)(X+3) + 9$$

PROBLEMA 17 — a) Descomponer en factores irreductibles de coeficientes reales $P(X) = X^8 - 2X^4 + 2$.

b) Usando a) calcular $\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{9\pi}{16}\cdot\cos\frac{17\pi}{16}\cdot\cos\frac{25\pi}{16}$

Solución de a)

1) Las raices de $X^8 - 2X^4 + 2 = 0$, son $X^4 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2}$

$$X^4 = 1 \pm i$$

2)

(I) De $X^4 = 1 + i$

$X_K = \sqrt[4]{1+i}$, $z = 1+i$; $|z| = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$X_K = (\sqrt{2})^{1/4}\operatorname{cis}\left[\frac{\pi/4 + 2K\pi}{4}\right]$$

$$X_K = \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\left[\frac{\pi}{16} + \frac{K\pi}{2}\right]$$

$K = 0, 1, 2, 3.$

(II) De: $X^4 = 1 - i$

$X_K = \sqrt[4]{1-i}$, $z = 1 - i$; $|z| = \sqrt{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$X_K = (\sqrt{2})^{1/4}\operatorname{cis}\left[\frac{-\pi/4 - 2K\pi}{4}\right]$$

$$X_K = \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\left[-\frac{\pi}{4} - \frac{K\pi}{2}\right]$$

$$X_K = \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\left[-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{K\pi}{2}\right)\right]$$

$K = 0, 1, 2, 3.$

Podemos apreciar que los 4 raices de (II) son los conjugados de (I) ..

3) Conocido las 8 raices, entonces P(X) se puede factorizar, escribiendo una raiz de (I) y su conjugada que aparece en (II) .

$P(x) = (x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{16})(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{16}))(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\frac{9\pi}{16})(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(-\frac{9\pi}{16}))(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\frac{17\pi}{16})(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(-\frac{17\pi}{16}))(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\frac{25\pi}{16})(x - \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(-\frac{25\pi}{16}))$

$= (x^2 - 2\sqrt[8]{2}x\cos\frac{\pi}{16} + \sqrt[4]{2})(x^2 - 2\sqrt[8]{2}x\cos\frac{9\pi}{16} + \sqrt[4]{2})(x^2 - 2\sqrt[8]{2}x\cos\frac{17\pi}{16} + \sqrt[4]{2})(x^2 - 2\sqrt[8]{2}x\cos\frac{25\pi}{16} + \sqrt[4]{2})$

Si reemplazamos $x = \sqrt[8]{2}\,i$ en P(x)

$P(\sqrt[8]{2}\,i) = (-\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[8]{2}\sqrt[8]{2}\,i\cos\frac{\pi}{16} + \sqrt[4]{2})(-\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[8]{2}\sqrt[8]{2}\,i\cos\frac{9\pi}{16} + \sqrt[4]{2})(-\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[8]{2}\sqrt[8]{2}\,i\cos\frac{17\pi}{16} + \sqrt[4]{2})(-\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[8]{2}\sqrt[8]{2}\,i\cos\frac{25\pi}{16} + \sqrt[4]{2})$

$= (-2\sqrt[4]{2}\,i\cos\frac{\pi}{16})(-2\sqrt[4]{2}\,i\cos\frac{9\pi}{16})(-2\sqrt[4]{2}\,i\cos\frac{17\pi}{16})(-2\sqrt[4]{2}\,i\cos\frac{25}{16}\pi)$

$= 2^4 \cdot 2\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{9\pi}{16}\cos\frac{17\pi}{16}\cdot\cos\frac{25\pi}{16}$ ......(3*)

4) Por otro lado, en $P(X) = X^8 - 2X^4 + 2$, se tendrá :

$$P(\sqrt[8]{2}\,i) = 2 - 2\sqrt{2} + 2 = 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2}) \quad \cdots\cdots (4*)$$

5) Igualando (3*) y (4*)

$$2(2 - \sqrt{2}) = 2^4 \cdot 2\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{9\pi}{16}\cdot\cos\frac{17\pi}{16}\cdot\cos\frac{25\pi}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{9\pi}{16}\cdot\cos\frac{17\pi}{16}\cdot\cos\frac{25\pi}{16} = \frac{2 - \sqrt{2}}{16}$$

PROBLEMA 18 — Resolver la Ecuación $3X^6 - 19X^5 + 45X^4 - 49X^3 + 18X^2 + 10x + 4 = 0$, sabiendo que $1 - i$ es una raíz.

SOLUCION :

1) si $1 - i$ es raíz de P(X) => $1 + i$ también es raíz de P(X)

2) Luego P(X) es divisible entre $[X - (1-i)][X - (1+i)] = (X^2 - 2X + 2) = D(X)$

3) Hallar el cociente de P(X) entre D(X) : Por el método de HORNER

		-13	13	3	-2		
1	3	-19	45	-49	18	10	-4
2		6	-6				
-2			-26	26			
				26	-26		
					6	-6	
						-4	4
	3	-13	13	3	-2	0	0

El coçiente es $Q(X) = 3X^4 - 13X^3 + 13X^2 + 3X - 2$

4) <u>Discutir la ecuación</u> $3x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 3x - 2 = 0$

a) POSIBLES RAICES ENTERAS, son los divisores de 2 : $\boxed{\pm 1 \pm 2}$

b) DIVISORES DE 3 : $\pm 1 \pm 3$

c) POSIBLES RAICES RACIONALES : $\boxed{\pm 1/3 \quad \pm 2/3}$

d) REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES

d_1) NUMERO DE RAICES REALES POSITIVAS = Nº de variaciones de signos de los a_i en $Q(X) = 0$

$Q(X) = 3X^4 - 13X^3 + 13X^2 + 3X - 2$. Hay 3 variaciones

d_2) NUMERO DE RAICES REALES NEGATIVAS = Nº de variaciones de signos de los a_i en $Q(-X) = 0$.

$Q(-X) = 3X^4 + 13X^3 + 13X^2 - 3X - 2$. Hay una sóla variación

Haciendo el cuadro :

+	−	C
3	1	0
1	1	2

indica que $Q(x)=0$ tendrá 3 raíces posivas y 1 negativa .

5) APLICAR LA DIVISION SINTETICA en $Q(X)$ PARA HALLAR LAS RAICES

2	3	−13	13	3	−2
		6	−14	−2	2
1/3	3	−7	−1	1	$\boxed{0}$
		1	−2	−1	
	3	−6	−3	$\boxed{0}$	

6) Las otras 2 raices se obtienen de resolver $3X^2 - 6X - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$
$\leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Las raíces de $Q(x) = 0$ son $\{2, 1/3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$
positivas negativa

7) CONCLUSION : las raíces de $P(x)$ son:

$$C_s = \{2, 1/3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-i, 1+i\}$$

PROBLEMA 19 - Hallar las raíces de la ecuación :
$x^7 - 6x^6 + 19x^5 - 16x^4 - 33x^3 + 22x^2 + 13x = 0$, si $2-3i$ es una raíz de la ecuación dada.

SOLUCION :

(1) Factorizar el polinomio : $X(X^6 - 6X^5 + 19X^4 - 16X^3 - 33X^2 + 22X + 13) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{X = 0} \quad \vee \quad \underbrace{X^6 - 6X^5 + 19X^4 - 16X^3 - 33X^2 + 22X + 13}_{P(X)} = 0$$

(2) si $2-3i$ es raíz de $P(X) \Rightarrow 2+3i$ también es raíz y
$[x-(2-3i)][x-(2+3i)] = x^2 - 4x + 13$ es factor de $P(X)$, por tanto conviene hallar el cociente de $P(X)$ entre $x^2 - 4x + 13$.
<u>Veamos</u> .

Por el método de HORNER

		−2	−2	2	1		
1	1	−6	19	−16	−33	22	13
4		4	−13				
−13			−8	26			
				−8	26		
					8	−26	
						4	−13
	1	−2	−2	2	1	0	0

(3) El cociente es $Q(X) = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 2X + 1$

(4) Ahora, debemos discutir el POLINOMIO $Q(X)$

1º) Las RAICES ENTERAS, son los divisores de $a_0 = 1$: $\boxed{\pm 1}$

2º) Los divisores de $a_4 = 1$: ± 1

3º) RAICES RACIONALES (fraccionarias) NO tiene.

4º) Regla de signos de DESCARTES

+	-	$\mathbb{C}$
2	2	0
0	2	2
0	0	4

i) $Q(X) = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 2X + 1$

Hay 2 variaciones

ii) $Q(-X) = X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X + 1$

Hay 2 variaciones

5º) Hacer la División sintética para hallar las raíces

1	1	-2	-2	2	1
		1	-1	-3	1
-1	1	-1	-3	-1	$\boxed{0}$
		-1	2	1	
	1	-2	-1	$\boxed{0}$	

Las otras 2 raíces se obtiene de resolver: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 2 = 0$

$(x-1)^2 = 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Por tanto las raíces de $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$, son: $\{1, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$

Como vemos, hay 2 raíces positivas y 2 raíces negativas.

(5) Luego, las raíces de $x^7 - 6x^6 + 19x^5 - 16x^4 - 33x^3 + 22x^2 + 13x = 0$, son

$$C_s = \{0, 2-3i, 2+3i, 1, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$$

MATRICES, SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y DETERMINANTES

22. MATRICES

22.1 DEFINICION 1 – Una matriz m x n, denotado por A_{mxn}, es un arreglo rectangular de objetos a_{ij} en m filas por n columnas.

Así tendremos:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{mxn} \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

Los objetos a_{ij} pueden ser números reales, números complejos o cualquier objeto no numérico como por ejemplo las fichas de un ajedrez o los apellidos de personas cuando son codificados en orden alfabético.

22.2 DEFINICION 2 – si $a_{ij} \in \mathbb{R}$, entonces definimos una matriz A_{mxn} como la función.

$$A_{mxn}: A_i \times A_j \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 1 \le i \le m$$
$$(i,j) \longmapsto a_{ij} \qquad 1 \le j \le n$$

"a cada pareja (i,j) le corresponde un sólo número real a_{ij}".

22.3 NOTACION – Se denotarán las matrices por: $A_{mxn} = [a_{ij}]$ ó $A = [a_{ij}]_{mxn}$ donde a_{ij} es la i-j ésimo entrada, i= fila, j= columna.

22.4 MATRICES ESPECIALES

1) MATRIZ CUADRADA : si $m = n$ (número de filas es igual al número de columnas), diremos que $A_n = [a_{ij}]$ o $[a_{ij}]_n$ es una matriz cuadrada.

2) MATRIZ DIAGONAL : La matriz cuadrada A_n es diagonal si $a_{ij} = 0$, $\forall\, i \neq j$ y $\exists i$, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & a_{33} & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B_5 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3) MATRIZ IDENTIDAD : La matriz cuadrada I_n es la matriz identidad, sí y solo sí $a_{ij} = 0$, $\forall\, i \neq j$ $\wedge$ $a_{ii} = 1$ $\forall\, i$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) MATRIZ TRIANGULAR

a) La matriz cuadrada A_n es TRIANGULAR Superior si $a_{ij} = 0$ $\forall\, i > j$.

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

b) La matriz cuadrada A_n es TRIANGULAR Inferior si $a_{ij} = 0$ $\forall\, i < j$.

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

22.5 MATRIZ NULA

$A_{m\times n}$ es nula sí y sólo sí $a_{ij} = 0$ $\forall i$, $\forall j$ denotaremos por $\theta_{m\times n}$.

Ejemplo :
$$\theta_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22.6 IGUALDAD DE MATRICES

Las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ $\wedge$ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ son iguales, sí y solo sí $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i$, $\forall j$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

PROPIEDADES

Sean A, B, C matrices del mismo orden.
Se cumplen las sigtes. propiedades

P_1) $A = A$, $\forall A$

P_2) $A = B$, implica $B = A$

P_3) $A = B \wedge B = C$ implica $A = C$

22.7 MATRIZ TRANSPUESTA

sean las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times m}$, diremos que B es la TRANSPUESTA de A, sí y solo sí, $b_{ij} = a_{ji}$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y denotamos : $B = A^T$

$$\boxed{A^T = B \iff b_{ij} = a_{ji}} \quad \forall i, \forall j$$

indica que las filas se convierten en columnas.

Ejemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

PROPIEDADES

$P_1)$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ " La transpuesta de la inversa es igual a la inversa de la transpuesta."

$P_2)$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ " La transpuesta de una suma de matrices es igual a la suma de transpuestas."

$P_3)$ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, λ es una constante.

$P_4)$ $(AB)^T = B^T A^T$ " La transpuesta de un producto conmuta al producto de transpuestas."

$P_5)$ $(I_n)^T = I_n$

$P_6)$ $(A^T)^T = A$

28.8.1 MATRIZ ANTISIMÉTRICA : $A = [a_{ij}]_n$ es antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^T$
$\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i,j$

Si $j = i \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

↳ indica que los elementos de la diagonal son ceros.

22.8.2 MATRIZ SIMETRICA : sea la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$

A es simétrica, sí y solo sí , $A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$

22.9 MATRIZ ORTOGONAL : sea la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$

A es ORTOGONAL, sí y solo sí , $A^{-1} = A^T$, A es NO singular.

PROPIEDADES

$P_1)$ A es ORTOGONAL $\Leftrightarrow$ $AA^T = I_n$

$P_2)$ si A y B son ortogonales $\Rightarrow$ AB es ortogonal.

22.10 DIAGONAL PRINCIPAL – Dada la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, se llama DIAGONAL PRINCIPAL al conjunto

$$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{nn}\}$$

Ejemplo :

sea $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\{2, 4, 3, 0\}$ es la diagonal principal de A_4.

22.11 TRAZA DE UNA MATRIZ – sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$

se llama TRAZA de A , al número $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$.
(suma de los elementos de la diagonal).

Ejemplo: En la matriz A_4 , se tiene $Tr(A_4) = 2 + 4 + 3 + 0 = 9$

PROPIEDADES

$P_1)$ $Tr(\theta_n) = 0$

$P_2)$ $Tr(I_n) = n$

$P_3)$ $Tr(A^T) = Tr(A)$

$P_4)$ $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

$P_5)$ $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$

$P_6)$ $Tr(AB) = Tr(BA)$

$P_7)$ Si A es antisimétrica $\Rightarrow Tr(A) = 0$

$P_8)$ Si A es ORTOGONAL $\Rightarrow Tr(AA^T) = n$

22.12 MATRIZ DIAGONAL : La matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$ es DIAGONAL , sí y sólo sí $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ y $\exists i$, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo :

$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22.12.1 MATRIZ ESCALAR : Es una matriz diagonal cuyos elementos son iguales. Es decir $A = [a_{ij}]_n$ es escalar $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$
$\wedge \ a_{ii} = K$, $K \in \mathbb{R}$

Ejemplo :

$B_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

22.13 MATRIZ IDEMPOTENTE · Una matriz cuadrada A es idempotente , sí y solo si , $A^2 = A$.

22.13.1 MATRIZ PERIODICA : A es PERIÓDICA si $\exists K \in \mathbb{Z}^+ / A^{K+1} = A$.

22.14 MATRIZ INVOLUTIVA .– Una matriz cuadrada A es involutiva , si y solo si $A^2 = I$

22.14.1 MATRIZ NILPOTENTE : $A_{n \times n}$ es NILPOTENTE si $A^K = \theta$ para algún entero $K \geq 1$

22.15 MATRIZ HERMITIANA

sea la matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Diremos que A es hermitiana $\Leftrightarrow$ $A = (\bar{A})^T$
$\Leftrightarrow$ $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $\forall i \ \forall j$

Los elementos de la diagonal de toda matriz hermitiana son numeros reales, porque $a_{ii} = \bar{a}_{ii} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix}$

Donde: $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 4-2i \\ 1-i & 5 & -1+i \\ 4+2i & -1-i & -3 \end{bmatrix}$

$$(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix}$$

se cumple $A = (\bar{A})^T$

23. OPERACIONES CON MATRICES

23.1 SUMA DE MATRICES

DEFINICION: Dodos los matrices $A_{m\times n} = [a_{ij}]$

$B_{m\times n} = [b_{ij}]$

$C_{m\times n} = [c_{ij}]$

definimos: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

EJEMPLO: $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} -2+5 & 3+(-3) \\ 4+2 & -1+1 \\ 0+3 & 2+(-2) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = C$$

PROPIEDADES: si A, B, C y θ son matrices del mismo orden.

A_1) $A + B = B + A$

A_2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

A_3) $\exists\, \theta \,/\, A+\theta = \theta + A = A, \ \forall A$

A_4) $\forall A, \ \exists B \,/\, A+B = B+A = \theta$.

23.2 MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

DEFINICION: sea $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y λ un escalar,

entonces $\lambda A = [\lambda\, a_{ij}]_{m\times n}$.

EJEMPLO: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

PROPIEDADES. si λ y β son escalares (reales o complejos)

E_1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

E_2) $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A) = \beta(\lambda A)$

E_3) $(\lambda+\beta)A = \lambda A + \beta A$.

23.3 MULTIPLICACION DE MATRICES

DEFINICION: El producto de $A_{m\times n}$ por $B_{n\times p}$, se define del sigte. modo: $A_{m\times n}\, B_{n\times p} = C_{m\times p} = [c_{ij}]$, tal que, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

PROPIEDADES

M_1) $A_{m\times n}(B_{n\times p}\, C_{p\times q}) = (A_{m\times n}\, B_{n\times p})\, C_{p\times q}$

M_2) $A(B+C) = AB + AC$, siempre que tengan sentido $B+C$, AB, AC

$(B+C)A = BA + CA$, si tienen sentido: $B+C$, BA y CA.

$M_3)$ $I_n A_{n\times m} = A_{n\times m}$ ó $A_{n\times m} I_m = A_{n\times m}$

$M_4)$ $\theta_{p\times m}\, A_{m\times n} = \theta_{p\times n}$

$M_5)$ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.

EJEMPLOS :

sean $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, hallar AB y BA, si existen.

SOLUCIÓN

1) Para poder multiplicar AB, debe cumplirse :

N° columnas de A = N° de filas de B

En caso contrario no existe AB.

Igualmente, para poder hallar BA, debe ser :

N° de columnas de B = N° de filas de A

2) $A_{3\times 2}\, B_{2\times 4} = C_{3\times 4}$. En cambio $B_{2\times 4}\, A_{3\times 2}$ NO existe .

3) Hallemos AB :

Una forma sencilla es hacer :

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Donde :

$C_{11} = (-3,2).(2,-1) = (-3)(2) + (2)(-1) = -6-2 = -8$

$C_{12} = (-3,2)\cdot(1,-2) = (-3)(1) + (2)(-2) = -3-4 = -7$

$C_{13} = (-3,2)\cdot(3,-2) = (-3)(3) + (2)(-2) = -9-4 = -13$

$C_{14} = (-3,2)\cdot(0,2) = (-3)(0) + (2)(2) = 0+4 = 4$

$C_{21} = (1,-1).(2,-1) = (1)(2) + (-1)(-1) = 2+1 = 3$

$C_{22} = (1,-1).(1,-2) = (1)(1) + (-1)(-2) = 1+2 = 3$

$C_{23} = (1,-1).(3,-2) = (1)(3) + (-1)(-2) = 3+2 = 5$

$C_{24} = (1,-1).(0,2) = (1)(0) + (-1)(2) = 0-2 = -2$

$C_{31} = (2,-1).(2,-1) = (2)(2) + (-1)(-1) = 4+1 = 5$

$C_{32} = (2,-1).(1,-2) = (2)(1) + (-1)(-2) = 2+2 = 4$

$C_{33} = (2,-1).(3,-2) = (2)(3) + (-1)(-2) = 6+2 = 8$

$C_{34} = (2,-1).(0,2) = (2)(0) + (-1)(2) = 0-2 = -2$

Luego :

$$C_{3\times 4} = \begin{bmatrix} -8 & -7 & -13 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

23.4 DETERMINANTE

DEFINICION : sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$ de orden n, llamaremos determinante de la matriz A, al número real que está relacionado con los elementos a_{ij} de la matriz.

NOTACION : $|A|$, $\det(A)$ indican la determinante de la matriz cuadrada A

La definición formal de determinante es como sigue :

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

" La determinante es una función de $\mathbb{R}^{n\times n}$ en $\mathbb{R}$. "

Por INDUCCION, se tendrá :

1) Para $n=1$, $A = [a_{11}]$; entonces $|A| = a_{11}$

2) Para $n=2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3) Para $n=3$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; entonces :

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En general :

$$\text{si}\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A(1/j)}$$

$A(1/j)$ es submatriz de A eliminando la fila 1 y la j-ésima columna

FORMULA DE LAPLACE

OBSERVACION - La determinante de orden 3, se puede desarrollar por el método práctico de SARRUS :

$$\text{Así}\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (aei+dhc+gbf)-(dbi+ahf+gec)$$

El método de Sarrus, sólo se aplica a determinantes de 3×3.

EJEMPLO :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-12-4+12)-(-4+9-16) = 7$$

PROPIEDADES

1) $|I_n| = 1$, $|\theta_n| = 0$

2) $|A^T| = |A|$

3) $|AB| = |A||B|$

4) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

5) $|A^m| = |A|^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$

6) si se intercambian 2 filas o 2 columnas el determinante cambia de signo.

7) si una fila o columna se multiplica por una constante, entonces el determinante queda multiplicado por dicha constante.

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

8) si a una fila (columna) se le multiplica por una constante y se suma a otra fila (columna), el determinante NO VARIA.

9) si una fila o columna de la matriz tiene todos sus elementos nulos, el determinante es 0.

10) si 2 filas o columnas son proporcionales, el determinante es 0.

11) si $A=[a_{ij}]_n$ es TRIANGULAR , entonces el determinante es :

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots\cdots a_{nn}$$

12) $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{22} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix}$$

23.5 RANGO DE UNA MATRIZ.

DEFINICION: sea $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, diremos que el rango de A es P si existe una submatriz cuadrada B de A de orden P, tal que, $|B|\neq 0$ y el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A de orden mayor que B es 0.

NOTACION: si $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, denotamos $\rho(A)=P$ para indicar el rango de la matriz A.

PROPIEDADES: si $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

1) $\rho(A)\leq \min(m,n)$

2) $\rho(A^T)=\rho(A)$

3) si $A=[a_{ij}]_n$ implica $\rho(A)<n$, si y sólo si, $|A|=0$

23.5.1 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

FORMA PRÁCTICA DE HALLAR: EL RANGO DE UNA MATRIZ, LA INVERSA DE UNA MATRIZ, EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ Y LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Dado una matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, las transformaciones elementales que se hacen sobre las filas de A, son:

1) Permutar dos filas

2) multiplicar a una fila por un escalar.

3) Sumar a una fila el múltiplo de otra fila.

Combinando estas 3 operaciones elementales se reduce la matriz A hasta convertirla en otra matriz equivalente

$$\begin{bmatrix} I_P & N_{P\times(n-P)} \\ N_{(m-P)\times P} & N_{(m-P)\times(n-P)} \end{bmatrix}_{m\times n} = F.C.(A)$$

FORMA CANÓNICA DE LA MATRIZ A.

23.5.2 EQUIVALENCIA DE MATRICES. Diremos que $B_{m\times n}$ es equivalente a $A_{m\times n}$, sí y solo sí, B puede obtenerse efectuando un número finito de transformaciones elementales sobre A. NOTACION: $B\sim A$ se lee "B es equivalente a A"

23.5.3 Como $A\sim F.C.(A)$, entonces $\rho(A)=\rho(F.C.(A))=P=$ Nº de vectores canónicos = Nº de vectores fila no nulos.

En general, si $A\sim B$, entonces $\rho(A)=\rho(B)$.

NOTA — si los últimos elementos de la diagonal principal se convierten en cero es porque su correspondiente fila se ha reducido a VECTOR FILA NULO, esto indica que hemos concluido en reducir la matriz.

EJEMPLOS

a) Hallar el rango de $A=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Nuestro objetivo principal es que los elementos de la diagonal principal se conviertan en la unidad y los elementos que esten debajo y/o encima de los 1, sean ceros.

Veamos

1ª ITERACION

elemento pivote

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} (2) \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

DIAGONAL PRINCIPAL

1ª ITERACION: multiplicar por −1 la 2ª fila y permutar con la 1ª FILA.

2ª ITERACION: multiplicar por 2 a la 1ª fila y sumar a la 2ª fila; luego a la 3ª FILA.

3ª ITERACION: multiplicar por $\frac{1}{6}$ a la 2ª FILA.

4ª ITERACIÓN: multiplicar por (−1) la 2ª FILA y sumar a la 1ª FILA, luego multiplicar la 2ª fila por −3 y sumar a la 3ª FILA.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{6}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} (-1)(-3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONCLUSION

Los vectores filas no nulos son $\{(1,0,-1,1/3),(0,1,0,-1/3)\}$

Los vectores columnas canónicos son $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Portanto: $\rho(A)=2$.

23.5.2 MATRIZ NO SINGULAR: Una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]_n$ es NO SINGULAR $\Leftrightarrow \rho(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$.

23.6 INVERSA DE UNA MATRIZ

23.6.1 EXISTENCIA DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]_n$ tiene inversa $\Leftrightarrow \rho(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$

23.6.1 sea $A_n=[a_{ij}]$, $A^{-1}=B \Leftrightarrow AB=BA=I_n$, $A\neq\theta$

$\Leftrightarrow AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

A^{-1} = inversa de A

23.6.2 PROPIEDADES

1) $(A^{-1})^{-1}=A$

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

4) $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

5) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n \quad \forall n\in\mathbb{Z}^+$ donde $\begin{cases}A^0=I\\ A^n=A.A^{n-1}, n\in\mathbb{Z}^+\end{cases}$

6) $I^{-1}=I$, I = identidad

23.7 TEOREMA DE EXPANSION DE LAPLACE O METODO DE LOS MENORES COMPLEMENTARIOS

sea la matriz cuadrada $A_n=[a_{ij}]$, definimos :

a) $A(i/j)$ es la submatriz cuadrada que se obtiene eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna.

b) $|A(i/j)|$ es el i-j ésimo menor complementario.

c) $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}|A(i/j)|$ es i-j ésimo COFACTOR.

Ejemplo : sea $A_4=\begin{bmatrix}2&-3&-1&5\\-2&5&0&1\\3&0&7&0\\8&3&-2&4\end{bmatrix}$

a) $A(2/3)=\begin{bmatrix}2&-3&5\\3&0&0\\8&3&4\end{bmatrix}$

b) $|A(2/3)|=\begin{vmatrix}2&-3&5\\3&0&0\\8&3&4\end{vmatrix}=$

$(-1)^{2+1}(3)\begin{vmatrix}-3&5\\3&4\end{vmatrix}=81$

c) $\alpha_{23}=(-1)^{2+3}|A(2/3)|=$

$=-\begin{vmatrix}2&-3&5\\3&0&0\\8&3&4\end{vmatrix}=-81$

Conocido los conceptos a) , b) y c) ; estamos preparados para hallar el determinante de una matriz por menores complementarios.

Dado la matriz cuadrada $A_n=[a_{ij}]$, el determinante de A_n es el número real :

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1}+a_{i2}\alpha_{i2}+a_{i3}\alpha_{i3}+\cdots\cdots+a_{in}\alpha_{in} \quad — (1)$$

$$\text{ó } |A| = a_{1j}\alpha_{1j}+a_{2j}\alpha_{2j}+a_{3j}\alpha_{3j}+\cdots\cdots+a_{nj}\alpha_{nj} \quad — (2)$$

Donde (1) es el desarrollo por cualquier fila de la matriz y (2) es el desarrollo por cualquier columna.

<u>SUGERENCIA</u> .- Para calcular un determinante, por menores complementarios, conviene desarrollarse por la fila o columna que tenga más ceros.

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & 0 \\ 8 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-7)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{array}{|rrr|} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{array} - 7\begin{array}{|rrr|} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{array}$$

$$= 3\left[-53-(-14)\right] - 7\left[-14-230\right] = 1591 .$$

23.8 ADJUNTA DE UNA MATRIZ

DEFINICION : sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$ y sea $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i/j)|$ llamaremos ADJUNTA de A y denotaremos Adj (A) a la matriz : $[\alpha_{ij}]^T$, es decir :

$$\boxed{\text{Adj}(A) = [\alpha_{ij}]^T}$$, donde $[\alpha_{ij}] = \text{cof}A$

Adjunta de A es igual a la TRANSPUESTA del COFACTOR de A.

23.9 TEOREMA : Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$, tal que $|A| \neq 0$, entonces :

$$A.\text{Adj}(A) = |A|.I$$

determinante de la matriz A por la matriz identidad I.

producto de la matriz A por su adjunta.

PRUEBA

1) Se tiene $A = [a_{ij}]_n$ y $\text{Adj}(A) = [\alpha_{ij}]^T$

Donde a) $[\alpha_{ij}]$ es la matriz COFACTOR de A.

b) $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A(i/j)|$

elemento de $[\alpha_{ij}]_n$, es el determinante de la submatriz $A(i/j)$ que es resultado de anular la i-ésima fila y la j-ésima columna con signo positivo o negativo, segun sea $(-1)^{i+j}$.

c) $[\alpha_{ij}]^T$ es la TRANSPUESTA de $[\alpha_{ij}]$, por tanto : si α_{ij} es un elemento de $[\alpha_{ij}]$, entonces α_{ji} es un elemento de $[\alpha_{ij}]^T$.

cada fila se convierte en columna.

(2) El producto de A por Adj (A) es otra matriz $[C_{ij}]$, cuyos elementos C_{ij} son de la forma : $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{jk}$

Es decir $\boxed{A.\text{Adj}(A) = [C_{ij}] \text{, tal que } C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{jk}}$

Donde :

a) si $j = i \Rightarrow C_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{ik} = \sum (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \det(A) . \forall i$

b) si $j \neq i \Rightarrow C_{ij} = 0$

(3) Por tanto :

$$A.\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & |A| & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots \quad \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots \quad \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots 1 \end{bmatrix} = |A|.I$$

Sugerencia : Pruebe con una matriz A_3 .

23.10 COROLARIO : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}(A)$, si $|A| \neq 0$.

PRUEBA

1) si $|A| \neq 0$, por el teorema 23.9 , se tiene : $A.\text{adj}(A) = |A|.I$

2) Por definición de inversa : si A^{-1} es la inversa de A , implica que $A^{-1}A = A.A^{-1} = I$

3) Multiplicar por A^{-1} por izquierda en ambos miembros de (1)

$$A^{-1}\left(A.\,adj(A)\right) = A^{-1}\left(|A|.I\right)$$

$$\underbrace{(A^{-1}.A)}.adj(A) = |A|\,(A^{-1}I)$$

$$\underbrace{I\;\;.adj(A)} = |A|.\,A^{-1}\quad ,\text{pues } A^{-1}.I = A^{-1}$$

$$adj(A) = |A|.A^{-1}$$

$$\frac{1}{|A|}adj(A) = A^{-1}$$, pues $|A|$ es un escalar diferente de cero.

23.11 PROPIEDADES

P_1) $adj(I) = I$

P_2) $adj(A^T) = \left(adj(A)\right)^T$, si $|A| \neq 0$

P_3) $adj(A^{-1}) = \left(adj(A)\right)^{-1}$

P_4) $adj(AB) = adj(B).adj(A)$, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$

P_5) $adj(A^n) = \left(adj(A)\right)^n$

P_6) $adj(\lambda A) = \lambda^{n-1}\, adj(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

P_7) $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

P_8) $|adj(\lambda A)| = (\lambda^{n-1})^n\,|A|^{n-1}$

P_9) $|adj(A^n)| = |A^{n-1}|^n$

P_{10}) $|adj(adj A)| = |A|^{(n-1)^2}$

Sugerencia: éstas propiedades se demuestran aplicando el corolario 23.10 $adj(A) = |A|.A^{-1}$

24. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

24.1 **DEFINICION** – Un sistema de m– ecuaciones lineales con n–incógnitas, es un un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ es la matriz de las n–incognitas

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$, es la matriz de los términos independientes

$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$ es la matriz ampliada. (o aumentada) del sistema (*)

En forma matricial, el sistema (*) se escribe: $AX = B$

24.2 **SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS**

Dado la ecuación matricial $AX = B$, se tiene:

a) si $B = \theta_{m\times 1}$, entonces diremos que el sistema es homogéneo.

b) si $B \neq \theta$ " " " " es NO homogéneo.

24.3

METODOS PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES .

1 REGLA DE CRAMER

si $AX = B$ es un sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el cual $|A| \neq 0$; entonces existe una solución única X , dado por las fórmulas :

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{K=1}^{n} b_K \cdot \operatorname{cof} a_{Kj} \quad , \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n.$$

Prueba

(1) De $AX = B$, si $|A| \neq 0$, implica : $\boxed{X = A^{-1}B}$ .... (1*)

(2) Pero $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A)$, donde $\operatorname{Adj}(A) = [\alpha_{ij}]^T$

$$= \frac{1}{|A|} (\operatorname{cof} A)^T \qquad [\alpha_{ij}] = \underbrace{\operatorname{cof} A}_{\text{matriz de cofactores de A}}$$

(3) Reemplazar (2) en (1*) :

$$X = \frac{1}{|A|} (\operatorname{cof} A)^T B$$

(4) Cada componente de X , será :

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{K=1}^{n} b_K \cdot \operatorname{cof} a_{Kj} \quad , j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

$$\alpha_{kj} = \operatorname{cof} a_{kj} = (-1)^{k+j} |A(k/j)| .$$

el cofactor correspondiente al elemento a_{kj}, es el determinante de la SUBMATRIZ $A(K/j)$ que resulta de anular la fila K y la columna j , con signo $(-1)^{K+j}$

ó $\boxed{x_j = \frac{\det C_j}{\det A}}$

Donde :

$\sum_{K=1}^{n} b_k \cdot \operatorname{cof} a_{kj} = \det(C_j)$, C_j = matriz obtenida de A al reemplazar la columna j de A por la matriz columna B .

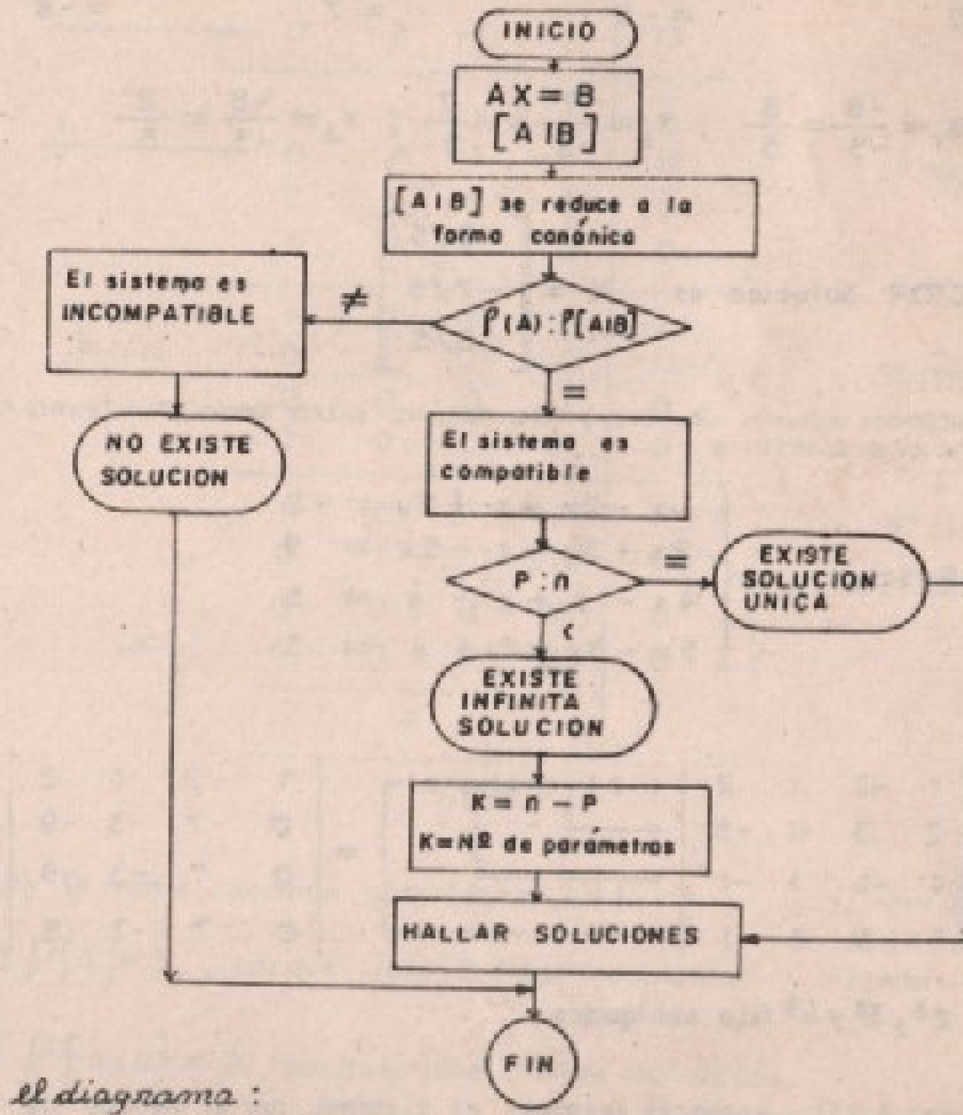
2 METODO DE GAUSS - JORDAN (Por transformaciones elementales)

Este método consiste en lo siguiente :

1^{ro}) Reducir la matriz ampliada $[A|B]$ en matriz canónica.

2^{do}) Discutir el sistema , en base a la reducción canónica de $[A|B]$.

Para discutir el sistema , tomar como referencia, el siguiente diagrama de flujo.



Segun el diagrama :

1º) *Reducir la matriz ampliada [A|B] a la forma canónica .*

2º) *De la forma canónica hallamos el rango de A y el rango de la ampliada [A|B] .*

3º) *Si el rango de A es diferente al rango de [A|B] , entonces el sistema es incompatible y por tanto no existe solución .*

Si $\rho(A) = \rho[A|B] = p$, entonces el sistema es compatible

4º) *Comparar p con n = número de incognitas :*

a) *Si p = n entonces existe solución única y hallamos la solución directamente de la matriz canónica .*

b) Si $p < n$, entonces existe infinita solución .

5º) Hallar $k = n - p$ que es el número de parámetros que tendrá el sistema . Despues hallamos las soluciones , directamente de la matriz canónica , reemplazando K variables por K parámetros.

EJEMPLO 1 (REGLA DE CRAMER)

$$\text{Resolver} \begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ 2x - y + 4z = 11 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

La regla de CRAMER se aplica sólo cuando el número de ecuaciones es igual al número de incognitas y $|A| \neq 0$.
veamos !

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\det C_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 11 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\det C_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= -5$ $\qquad = -8$ $\qquad = 7$ $\qquad = -8$

2) Luego : $x_1 = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$; $x_2 = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$; $x_3 = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$

El VECTOR Solución es $X = \begin{bmatrix} 8/5 \\ -7/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$.

EJEMPLO 2 (Método Gauss Jordan) Se aplica para todo sistema de ecuaciones lineales .

$$\text{Resolver} \begin{cases} x - 2y + z + 2u = -2 \\ 2x + 3y - z - 5u = 9 \\ 4x - y + z - u = 5 \\ 5x - 3y + 2z + u = 3 \end{cases}$$

SOLUCION

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)\ (-4)\ (-5)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0$,

pues la 2ª, 3ª y 4ª fila son iguales .

2) Como el $\det A = 0$, entonces resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan.

Para ello , seguimos los pasos que se han dado en el DIAGRAMA de FLUJO .

1º) Reducir la matriz ampliado $[A|B]$ a la forma canónica.

$$\xrightarrow{(-5)\ (-4)\ (-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -5 & 9 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \leftarrow \text{FILA PIVOT (fila 1)}$$

$$\xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -9 & 13 \\ 0 & 7 & -3 & -9 & 13 \\ 0 & 7 & -3 & -9 & 13 \end{array}\right] \quad \text{1ª ITERACION}$$

$$\text{por } \frac{1}{7} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{2ª ITERACION}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3/7 & -9/7 & 13/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{5ª ITERACION}$$

$$(*) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/7 & -4/7 & 12/7 \\ 0 & 1 & -3/7 & -9/7 & 13/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{4ª ITERACION} \;\; \text{MATRIZ CANÓNICA}$$

A , $[A|B]$

2º) Discutir la matriz canónica obtenida en (*)

ρ = RHO (letra griega)
$\rho[A]$ = rango de A
$\rho[A|B]$ = rango de [A|B]

a) $\rho[A] = 2$, porque tiene 2 filas no nulas

b) $\rho[A|B] = 2$, porque tiene 2 filas NO nulas .

c) Como $\rho[A] = \rho[A|B] = 2 = P$, entonces el sistema es compatible .

d) Comparar el rango $P = 2$ con el número de incognitas $n = 4$

$$\rho[A] < n$$
$$2 < 4$$

e) Como el rango es menor que el N° de incognitas , entonces existe infinita solución.

f) Hallar el número de parámetros $K = n - \rho(A)$

$$K = 4 - 2 = 2$$

Habrán dos parámetros , digamos : t y s que representan cualquier número real.

Las soluciones son expresados en términos de los parámetros.

En (✱) hacemos $\begin{cases} z = t \\ u = s \end{cases}$ y obtenemos :

$$x + 0y + \frac{1}{7}t - \frac{4}{7}s = \frac{12}{7} \Rightarrow x = -\frac{1}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{12}{7}$$

$$y - \frac{3}{7}t - \frac{9}{7}s = \frac{13}{7} \Rightarrow y = \frac{3}{7}t + \frac{9}{7}s + \frac{13}{7}$$

g) El conjunto solución, será :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{12}{7} \\ y = \frac{3}{7}t + \frac{9}{7}s + \frac{13}{7} \quad , \begin{matrix} t \in \mathbb{R} \\ s \in \mathbb{R} \end{matrix} \\ z = t \\ u = s \end{cases}$$

En forma de vector es :

$$X = \left(-\frac{1}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{12}{7}, \frac{3}{7}t + \frac{9}{7}s + \frac{13}{7}, t, s \right)$$

$$X = \frac{1}{7}\left(-t + 4s + 12, 3t + 9s + 13, 7t, 7s \right)$$

$$X = \frac{1}{7}\left[t(-1,3,7,0) + s(4,9,0,7) + (12,13,0,0) \right]$$

25. Problemas

(1) Sea A_n una matriz cuadrada, entonces AA^T es simétrica.

PRUEBA :

Debo probar que $(AA^T)^T = AA^T$

Veamos : $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T$
$= AA^T$

Por tanto : AA^T es simétrica

(2) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^T$ es simétrica.

PRUEBA :

Debo probar que $(A+A^T)^T = A + A^T$

Veamos :

$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T$
$= A^T + A$ //

(3) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A - A^T$ es antisimétrica.

PRUEBA

Debo probar : $(A-A^T)^T = -(A-A^T)$

Veamos :

$(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T$
$= A^T - A = -(A-A^T)$.

(4) Todo matriz cuadrada es igual a la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

PRUEBA

1. $A+A^T$ es simétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A+A^T)$ es sim.
2. $A-A^T$ es antisimétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A-A^T)$ es antisim.
3. Luego : $A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$

(5) Sea A una matriz cuadrada, Si A es involutiva entonces $\frac{1}{2}(I-A)$ es idempotente.

PRUEBA

Debo probar que $\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I-A)$

Veamos :

$\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I-A)(I-A)$
$= \frac{1}{4}(I.I - I.A - A I + A.A)$
$= \frac{1}{4}(I - A - A + A^2)$
$= \frac{1}{4}(I - 2A + I)$ pues $A^2 = I$ porque A es involutiva
$= \frac{1}{4}(2I - 2A)$
$= \frac{1}{2}(I-A)$.

Sobre Adjuntas

Del teorema :

$$A.\text{adj}(A) = |A|.I \begin{cases} A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) \\ \text{Adj}(A) = |A|.A^{-1} \end{cases}$$

(6) Probar : $\text{adj}(I) = I$

PRUEBA : $\text{adj}(I) = |I|.I^{-1}$
$= 1.I = I$

(7) Probar : $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}A)^T$, Si $|A| \neq 0$

PRUEBA :

$\text{adj}(A^T) = |A^T|(A^T)^{-1}$
$= |A|(A^{-1})^T$
$= (|A|A^{-1})^T$
$= (\text{adj}(A))^T$

pues $\begin{cases} |A^T| = |A| \\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \\ (\lambda A)^T = \lambda A^T \end{cases}$

(8) Probar : $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$, $|A| \neq 0$

PRUEBA

$\text{adj}(A^{-1}) = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$
$= |A|^{-1}(A^{-1})^{-1}$, pues $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
$= (|A|A^{-1})^{-1}$
$= (\text{adj}(A))^{-1}$

(9) Probar : $\text{adj}(AB) = \text{adj}B.\text{adj}A$, $\begin{matrix} |A| \neq 0 \\ |B| \neq 0 \end{matrix}$

PRUEBA

$\text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1}$
$= |A||B|(B^{-1}A^{-1})$
$= (|B|B^{-1})(|A|A^{-1})$
$= \text{adj}B.\text{adj}A$

(10) $\text{adj}(A^n) = (\text{adj}A)^n$

PRUEBA

$\text{adj}(A^n) = |A^n|(A^n)^{-1}$
$= |A|^n(A^{-1})^n$
$= (|A|A^{-1})^n$
$= (\text{adj}A)^n$

(11) Probar : $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}.\text{adj}(A)$; $\lambda \in \mathbb{C}$

$\text{adj}(\lambda A) = |\lambda A|(\lambda A)^{-1}$
$= \lambda^n|A|\lambda^{-1}A^{-1}$
$= \lambda^{n-1}(|A|A^{-1})$
$= \lambda^{n-1}.\text{adj}(A)$ //

⑫ Probar $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

PRUEBA

$$|adj(A)| = \left| |A|\,A^{-1} \right| = |A|^n\,|A^{-1}| = |A|^n\,|A|^{-1} = |A|^{n-1}$$

⑬ Probar $|adj(\lambda A)| = (\lambda^{n-1})^n\,|A|^{n-1}$

PRUEBA

$$\begin{aligned} |adj(\lambda A)| &= |\lambda^{n-1}\,adj(A)| && \text{por 11} \\ &= (\lambda^{n-1})^n\,|adj(A)| \\ &= (\lambda^{n-1})^n\,|A|^{n-1} && \text{por 12} \end{aligned}$$

⑭ Probar que $|adj(A^n)| = |A^{n-1}|^n$

PRUEBA

$$\begin{aligned} |adj(A^n)| &= |(adj(A))^n| && \text{por 10} \\ &= |adj(A)|^n && \text{pues } |A^n| = |A|^n \\ &= (|A|^{n-1})^n && \text{por 12} \\ &= |A^{n-1}|^n && \text{, pues } |A|^{n-1} = |A^{n-1}| \end{aligned}$$

⑮ Probar $|adj(adj A)| = |A|^{(n-1)^2}$

PRUEBA

Hallemos $adj(adj A)$:

$$\begin{aligned} adj(adj A) &= |adj A|\,(adj A)^{-1} \\ &= |A|^{n-1}\,(adj(A^{-1})) && \text{por 8} \\ &= |A|^{n-1}(|A^{-1}|\,(A^{-1})^{-1}) \\ &= |A|^{n-1}\cdot\frac{1}{|A|}\cdot A \\ &= |A|^{n-2}\cdot A \end{aligned}$$

Hallar el determinante :

$$\begin{aligned} |adj(adj A)| &= \left| |A|^{n-2}\cdot A \right| \\ &= (|A|^{n-2})^n\,|A| \\ &= |A|^{n^2-2n}\,|A| \\ &= |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2} \end{aligned}$$

//

⑯ Si A y B son matrices cuadradas de orden n y pose inversa, demostrar : $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

Prueba

1. Si A tiene inversa $\Rightarrow \exists A^{-1} / AA^{-1} = I = A^{-1}A$
2. Aplicar la propiedad : $IB = BI = B$
3. Partir del 1er miembro para llegar al 2do miembro :

$$\begin{aligned} (A+B)A^{-1}(A-B) &= (A+B)[A^{-1}(A-B)] \\ &= (A+B)[A^{-1}A - A^{-1}B] \\ &= (A+B)[I - A^{-1}B] \\ &= (A+B)I - (A+B)A^{-1}B \\ &= (A+B) - A(A^{-1}B) - B(A^{-1}B) \\ &= (A+B) - (AA^{-1})B - (BA^{-1})B \\ &= (A+B) - I.B - (BA^{-1})B \\ &= (A+B) - B.I - (BA^{-1})B \\ &= (A+B) - B(A^{-1}A) - (BA^{-1})B \\ &= I(A+B) - (BA^{-1})A - (BA^{-1})B \\ &= I(A+B) - (BA^{-1})(A+B) \\ &= (I - BA^{-1})(A+B) \\ &= (AA^{-1} - BA^{-1})(A+B) \\ &= (A-B)A^{-1}(A+B) \end{aligned}$$

⑰ Si $\begin{cases} AB = I = BA \iff B = A^{-1} \\ A^n = \Theta \end{cases}$

Demostrar : $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$

↑ indica : la inversa de $I-A$ es $I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$

PRUEBA

1. Si $I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ es la inversa de $I-A$, deberá cumplirse que : $\underbrace{(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}) = I}_{(*)}$ $\wedge$ $\underbrace{(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})(I-A) = I}_{(**)}$

2. Desarrollar (*) :

$$\begin{aligned} (I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}) &= I + A + \cdots + A^{n-1} - (A + A^2 + \cdots + A^n) \\ &= I - A^n \\ &= I - \Theta \\ &= I \end{aligned}$$

3. Desarrollar (**) :

$$\begin{aligned} (I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})(I-A) &= I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} - (A + A^2 + \cdots + A^n) \\ &= I - A^n \\ &= I - \Theta \\ &= I \end{aligned}$$

4. conclusión : $I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ es la inversa de $(I-A)$.

Es decir $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$.

⑱ Si A es una matriz cuadrada de orden "n" tal que $A^k = \Theta$, simplificar :

$$I + 2A + 3A^2 + 4A^3 + \cdots + (k-1)A^{k-2} + kA^{k-1}$$

SOLUCION :

1. Sea $S = I + 2A + 3A^2 + \cdots + (k-1)A^{k-2} + kA^{k-1}$
2. Multiplicar por $(I-A)$ a S :

$$\begin{aligned} (I-A)S &= I + 2A + 3A^2 + \cdots + kA^{n-1} - (A + 2A^2 + 3A^3 + \cdots + kA^k) \\ &= I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - k\underbrace{A^k}_{\Theta} \\ &= I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} \end{aligned}$$

$(I-A)S = (I-A)^{-1}$ por 17 : $I + A + \cdots + A^{k-1} = (I-A)^{-1}$

3. $\underbrace{(I-A)^{-1}(I-A)}_{I}S = (I-A)^{-1}(I-A)^{-1}$

$$\begin{aligned} IS &= ((I-A)^{-1})^2 \\ S &= [(I-A)^{-1}]^2 \end{aligned}$$

//

⑲ Si A y B son matrices cuadradas no singulares, entonces la inversa del producto A por B es igual al producto de las inversas de A y B en orden permutado.

PRUEBA

1. Si A es no singular, entonces A tiene inversa que denotamos por A^{-1} / $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. Si B es no singular, entonces B tiene inversa que denotamos por B^{-1}, tal que, $BB^{-1} = B^{-1}B = I$.
3. El enunciado afirma : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. Debo probar dos igualdades : $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ $\wedge$ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

Veamos :

a) $$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= A(I)A^{-1} \\ &= (AI)A^{-1} \\ &= AA^{-1} = I \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}(I)B \\ &= B^{-1}(IB) \\ &= B^{-1}B \\ &= I. \end{aligned}$$

5. Por tanto $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB. Es decir : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⑳ Sea $M = I - X(X^TX)^{-1}X^T$ con $X = [x_{ij}]_{n\times 1}$

Dado $p \in \mathbb{Z}^+$, simplificar :

$$I + M + M^2 + M^3 + M^4 + \cdots + M^p.$$

SOLUCION

1. $$\begin{aligned} M.M &= (I - x(x^Tx)^{-1}x^T)(I - x(x^Tx)^{-1}x^T) \\ &= I - x(x^Tx)^{-1}x^T - x(x^Tx)^{-1}x^T + x\underbrace{(x^Tx)^{-1}x^Tx}_{I}(x^Tx)^{-1}x^T \\ &= I - x(x^Tx)^{-1}x^T \underbrace{- x(x^Tx)^{-1}x^T + x(x^Tx)^{-1}x^T}_{\Theta} \\ &= I - x(x^Tx)^{-1}x^T \end{aligned}$$

$M^2 = M$

2. $$\begin{aligned} M^3 &= M.M^2 \\ &= M.M \\ &= M^2 = M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^p &= M.M^{p-1} \\ &= M.M \\ &= M^2 = M. \end{aligned}$$

3. Luego :

$$\begin{aligned} &I + M + M^2 + M^3 + \cdots + M^{p-1} = \\ &= I + \underbrace{M + M + M + \cdots + M}_{pM} \\ &= I + pM \end{aligned}$$

//

㉑ Si A, B, C son matrices cuadradas y se cumplen : $A = BC$ y $A + B = I$, hallar $AC - C$.

SOLUCION

1. De $A + B = I$
$\Rightarrow A = I - B$
2. $$\begin{aligned} AC &= (I - B)C \\ &= IC - BC \\ &= C - A \end{aligned}$$

$AC - C = -A$ //

(22) Sean A y B matrices simétricas.

(a) Demostrar que $A+B$ es simétrica

(b) Demostrar que AB es simétrica si y solo sí $AB = BA$.

PRUEBA

(a) Debo probar que $(A+B)^T = A+B$ para afirmar que $(A+B)$ es simétrica.

Veamos.

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$= A + B \quad , \text{pues} \begin{cases} A^T = A \\ B^T = B \end{cases} \text{, porque A y B son simétricas.}$$

(b) Probar: AB es simétrica $\Leftrightarrow AB = BA$

La prueba tiene dos partes:

($\Rightarrow$) Si AB es simétrica, entonces $AB = BA$

Prueba

1. Por hipótesis $\begin{cases} A = A^T & \text{, porque A es simétrica} \\ B = B^T & \text{, pues B es simétrica.} \end{cases}$

2. Por hipótesis: $(AB)^T = AB$, porque AB es simétrica.

3. Por otro lado: $(AB)^T = B^T A^T$
$$= B.A \quad \text{por 1.}$$

4. Por 2. y 3.
$$BA = (AB)^T = AB$$
Por tanto: $AB = BA$

($\Leftarrow$) Si $AB = BA$, entonces AB es simétrica.

PRUEBA

A partir de $AB = BA$, sebe probar que $(AB)^T = AB$

Veamos:

De $(AB) = (BA)$ le aplico transpuesta
$$(AB)^T = (BA)^T$$
$$= A^T B^T \quad , \text{pero} \begin{cases} A^T = A \\ B^T = B \end{cases}$$
$$= AB \ /\!/$$

(23) Demostrar que si $AB = AC$ y A es matriz no singular, entonces $B = C$

PRUEBA

1. Como A es no singular, entonces A tiene inversa que es A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

2. En $AB = AC$, multiplica por A^{-1}
$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$
$$I\,B = IC \Rightarrow B = C \ /\!/$$

(24) Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si A es inversible, entonces $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.

PRUEBA

Partir de $\det(A^{-1}BA)$, aplicar sucesivame la propiedad:
$\det(AB) = \det(A)\,\det(B)$

Veamos

$$\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1}(BA))$$
$$= \det A^{-1}.\det(BA)$$
$$= \det A^{-1}(\det B.\det A)$$

Como A es inversible entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
$$\left.\right\} = \frac{1}{\det A}\ \det B.\det(A)$$
$$= \det B \ /\!/$$

(25) Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 = A$, demostrar que:
$$(A+I)^K = I + (2^K - 1)A \quad \forall K \in \mathbb{Z}^+$$

PRUEBA

Por inducción:

1. Para $K = 1$:

El 1er miembro es $A + I$

El 2do miembro es $I + (2-1)A = I + A$ $\Big] =$ s

Para $K = 2$:

El 1er miembro es : $(A+I)^2 = A^2 + A + A + I$
$$= A + A + A + I$$
$$= 3A + I \quad , \text{pues } A^2 = A$$

El 2º miembro es : $I + (2^2 - 1)A = I + 3A$
$$= 3A + I$$

2. Para $K = n$ suponer que se cumple
$$(A+I)^n = I + (2^n - 1)A$$

3. Debo probar que se cumple para $K = n+1$, la igualdad $(A+I)^{n+1} = I + (2^{n+1} - 1)A$

Veamos:
$$(A+I)^{n+1} = (A+I)(A+I)^n$$
$$= (A+I)(I + (2^n - 1)A)$$
$$= A.I + (2^n - 1)A^2 + I + (2^n - 1)A$$
$$= A + (2^n - 1)A + I + (2^n - 1)A$$
$$= I + (A + (2^n - 1)A + (2^n - 1)A)$$
$$= I + (1 + 2^n - 1 + 2^n - 1)A$$
$$= I + (2.2^n - 1)A$$
$$= I + (2^{n+1} - 1)A \ /\!/$$

(26) Determinar las matrices $A_{2\times2}$ tales que $A^2 = \Theta$.

SOLUCION

1. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$

porque:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}}_{A^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Theta}$$

2. Igualando los elementos de A^2 con los elementos de Θ:
$$\begin{cases} a^2+bc = 0 & \Rightarrow c = -\frac{a^2}{b} \\ ab+bd = 0 & \Rightarrow b(a+d) = 0 \Rightarrow b = 0 \ \vee\ d = -a \\ ca+dc = 0 & \Rightarrow c(a+d) = 0 \Rightarrow c = 0 \ \vee\ d = -a \\ cb+d^2 = 0 & \Rightarrow cb + a^2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{a^2}{b} \end{cases}$$

3. Luego: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$ $\forall a, b \neq 0$

Se cumple $trA = 0$. Si $b = 0 \Rightarrow a = 0$

(27) Hallar la forma general de las matrices cuadradas de orden 2 que satisfacen $A^2 = I$.

SOLUCION : En el problema 26 hacemos:
$$\begin{cases} a^2+bc = 1 & \Rightarrow c = \frac{1-a^2}{b} \\ ab+bd = 0 & \Rightarrow b(a+d) = 0 \Rightarrow b = 0 \ \vee\ d = -a \\ ca+dc = 0 & \Rightarrow c(a+d) = 0 \Rightarrow c = 0 \ \vee\ d = -a \\ cb+d^2 = 1 & \Rightarrow cb + a^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1-a^2}{c} \end{cases}$$

Luego:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R}, b \neq 0, b \in \mathbb{R}$$
$tr(A) = 0$

(28) Hallar una matriz A de orden 2×2 tal que: $A^2 = -I$

SOLUCION: Es similar a 27.

La forma general de A es:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \quad \text{Si } a = 0, b = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$trA = 0$.

(29) Sea la matriz $A_{n\times n}$, tal que, $tr(AA^T) = 0$. Probar que $A = \Theta$.

PRUEBA

1. Sea $A = [a_{ij}]$ y $A^T = [b_{ij}] \,/\, b_{ij} = a_{ji} \ \forall i \ \forall j$

2. $A.A^T = C = [c_{ij}] \,/\, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

3. Los elementos de la diagonal de C, son: $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$

4. La traza de AA^T es:
$$tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$$

5. Como $tr(AA^T) = 0$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = 0$$
$$\Rightarrow c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn} = 0$$
$$(a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2) + (a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2) + \cdots + (a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2) = 0$$

que es lo mismo:
$$\sum a_{ij}^2 = 0 \quad \forall i \ \forall j$$

y esto se cumple, sólo cuando los $a_{ij} = 0$ $\forall i \ \forall j$.

6. Por tanto: $A = \Theta$.

(30) $\forall$ A, B matrices cuadradas, probar que:

a) $tr(AB) = tr(BA)$

b) $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$, $\forall B$ invertible.

PRUEBA de a)

1. $AB = [a_{ij}][b_{ij}] = C = [c_{ij}] \,/\, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

2. $BA = [b_{ij}][a_{ij}] = D = [d_{ij}] \,/\, d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$

3. En 1. los elementos de la diagonal son $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$ y por tanto la traza de AB será:
$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k}^{n} a_{ik} b_{ki}\right)$$

4. En 2. los elementos de la diagonal de BA son $d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$

y $tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}\right)$

5. Se cumple: $\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \Leftrightarrow tr(AB) = tr(BA)$

Pues:
$$\begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\ c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + \cdots + a_{3n}b_{n3} \\ \vdots \\ c_{nn} = a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{cases}$$
$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = d_{11} + d_{22} + d_{33} + \cdots + d_{nn}$$

b) Queda como ejercicio

(31) Sean A y B matrices simétricas. Demostrar que AB es simetrica, sí y solo sí, A y B son permutables

PRUEBA

($\Rightarrow$) si AB es simétrica, implica que A y B son permutables.

Debo probar que $BA = AB$

Veamos:

1. Si AB es simétrica $\Rightarrow (AB)^T = AB$
2. Por hipótesis $\begin{cases} A \text{ es simétrica } \Rightarrow A = A^T \\ B \text{ es simétrica } \Rightarrow B = A^T \end{cases}$
3. Luego: $BA = B^TA^T = (AB)^T = AB$ //

($\Leftarrow$) Si A y B son permutables, implica que AB es simétrica.

Debo probar que $(AB)^T = AB$

Veamos:

1. Por hipótesis $\begin{cases} A = A^T \\ B = B^T \end{cases}$ porque A y B son simétricas.
2. Si A y B son permutables $\Rightarrow BA = AB$
3. Pero: $(AB)^T = B^TA^T$
$= BA$ por 1
$= AB$ por 2. //

(32) Demostrar que la matriz $A_{n\times n}$ es involutiva, sí y sólo sí, $(I-A)(I+A) = \theta$

PRUEBA

($\Rightarrow$) Si A es involutiva implica que, $(I-A)(I+A) = \theta$

Veamos:

1. Si A es involutiva $\Rightarrow A^2 = I$
2. Al desarrollar: 1

$(I-A)(I+A) = I^2 + IA - AI - A^2$
$= I + A - A - I$
$= \theta$ //

($\Leftarrow$) si $(I-A)(I+A) = \theta$, implica que $A^2 = I$

Veamos:

1. Al desarrollar:

$(I-A)(I+A) = I^2 + IA - AI - A^2$
$= I + A - A - A^2$
$= I - A^2$

2. Como $I - A^2 = \theta$
$\Rightarrow A^2 = I$, lo cual indica que A es involutiva.

(33) Demostrar que A y B son permutables, sí y sólo sí, $A - aI$ y $B - aI$ son permutables, cualquiera que sea el escalar a.

PRUEBA

($\Rightarrow$) Si $AB = BA \Rightarrow (A-aI)(B-aI) = (B-aI)(A-aI)$

Veamos:

$(A-aI)(B-aI) = A(B-aI) - aI(B-aI)$
$= AB - A(aI) - \underline{aIB} + a^2I^2$

Pero $AB = BA$:
$= BA - \underline{aIB} - aIA + a^2I^2$
$= BA - B(aI) - aIA + a^2I^2$
$= B(A-aI) - aI(A-aI)$
$= (B-aI)(A-aI)$

($\Leftarrow$) si $A-aI$ y $B-aI$ son permutables, implica que A y B permutan.

Veamos:

como $A-aI$ y $B-aI$ permutan, entonces se cumple que:

$(A-aI)(B-aI) = (B-aI)(A-aI)$
$AB - A(aI) - aI(B) + a^2I^2 = BA - B(aI) - aI(A) + a^2I^2$
$AB - aA - aB + a^2I = BA - aB - aA + a^2I$
$= BA - aA - aB + a^2I$
$AB = BA$

indica que A y B permutan.

(34) Demostrar que si A es no singular e idempotente entonces $A = I$.

PRUEBA

1. Si es no singular, entonces $|A| \neq 0$ y por lo tanto $A \neq \theta$.
2. Si A es idempotente, entonces $A^2 = A$
3. De $A^2 = A$
$\Rightarrow A^2 - A = \theta$
$\Rightarrow A(A-I) = \theta$

como $A \neq \theta$, entonces $A - I = \theta$
$\Rightarrow A = I$.

(35) Demostrar que si $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ son matrices idempotentes y permutables entonces AB es idempotente

PRUEBA

Debo probar que $(AB)^2 = AB$

Veamos:

Por hipótesis, se tiene:

1. A y B son idempotentes $\Rightarrow \begin{cases} A^2 = A \\ B^2 = B \end{cases}$

2. A y B son permutables $\Rightarrow AB = BA$
3. $(AB)^2 = (AB)(AB)$

	$= (BA)(AB)$	por 2
	$= B(AA)B$	ASOCIATIVA
	$= BA^2B$	
	$= BAB$	por 1.
	$= (BA)B$	ASOCIATIVA
	$= (AB)B$	por 2
	$= A(BB)$	ASOCIATIVA
	$= AB^2$	
	$= AB$	por 1.

(36) Demostrar que si A es idempotente y B es ortogonal, entonces B^TAB es idempotente.

PRUEBA

Debo probar que $(B^TAB)^2 = B^TAB$

Hipótesis $\begin{cases} 1.\ A \text{ es idempotente} \Leftrightarrow A^2 = A \\ 2.\ B \text{ es ORTOGONAL} \Leftrightarrow BB^T = I \end{cases}$

3. $(B^TAB)^2 = (B^TAB)(B^TAB)$
$= B^TA(BB^T)AB$
$= B^TA\,I\,AB$
$= B^TAAB$
$= B^TA^2B$
$= B^TAB$ //

(37) Demostrar, si $A^2 = A$ y $A + B = I$, entonces $A^2 = B$ y $AB = BA = \theta$

DEMOSTRACION

1. De $A+B = I$

$A(A+B) = AI \quad \wedge \quad (A+B)A = IA$
$A^2 + AB = A \quad \quad A^2 + BA = A$
$A + AB = A \quad \quad A + BA = A$
$AB = \theta \quad \wedge \quad BA = \theta$

2. De $A+B = I$

$B(A+B) = BI \quad \wedge \quad (A+B)B = IB$
$\underbrace{BA}_{} + B^2 = B \quad \quad \underbrace{AB}_{} + B^2 = B$
$\theta + B^2 = B \quad \quad \theta + B^2 = B$
$B^2 = B \quad \wedge \quad B^2 = B$

(38) Demostrar, si $A+B = I$ y $AB = \theta$, entonces A y B son idempotentes.

Demostración:

Debo probar que $\begin{cases} A^2 = A \\ B^2 = B \end{cases}$

Veamos:

De $A+B = I$

$A(A+B) = AI \quad \wedge \quad (A+B)B = IB$
$A^2 + \underbrace{AB}_{\theta} = A \quad \quad \underbrace{AB}_{\theta} + B^2 = B$
$A^2 = A. \quad \quad B^2 = B.$

(39) Demostrar, si $AB = A$ y $BA = B$; entonces A, B, A^T, B^T; son idempotentes.

Demostración

Se debe probar $\begin{cases} A^2 = A \\ B^2 = B \\ (A^T)^2 = A^T \\ (B^T)^2 = B^T \end{cases}$

Veamos:

1. De $A = AB$
$A^2 = (AB)(AB)$
$= A(BA)B$
$= ABB$
$= (AB)B$
$= AB$
$= A$

2. De $B = BA$
$B^2 = (BA)(BA)$
$= B(AB)A$
$= BAA$
$= (BA)A$
$= BA$
$= B$

De $\begin{cases} A = AB \Rightarrow A^T = (AB)^T = B^TA^T \\ B = BA \Rightarrow B^T = (BA)^T = A^TB^T \end{cases}$

3. $(A^T)^2 = (B^TA^T)(B^TA^T)$
$= B^T(A^TB^T)A^T$
$= B^T(BA)^TA^T$
$= B^TB^TA^T$
$= B^T(B^TA^T)$
$= \underbrace{B^T A^T}_{}$
$= A^T$

4. $(B^T)^2 = (A^TB^T)(A^TB^T)$
$= A^T(B^TA^T)B^T$
$= A^T A^T B^T$
$= A^T(A^TB^T)$
$= \underbrace{A^T B^T}_{}$
$= B^T$.

(40) Demostrar que si A es simétrica, entonces B^TAB es simétrica cualquiera que sea $B_{n\times n}$.

Demostración:

Debo probar: $(B^TAB)^T = B^TAB$.

Veamos:

$(B^TAB)^T = (B^T(AB))^T$
$= (AB)^T(B^T)^T$
$= (B^TA^T)B$
$= B^TA^TB$
$= B^TAB$. A es simétrica $\Leftrightarrow A^T = A$

41 Sean A y B matrices cuadradas de orden m, tales que, $AB = BA$

a) Demostrar que $A^K B = BA^K \quad \forall K \in \mathbb{Z}^+$

b) Demostrar que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^K \quad \forall n \geq 2$

<u>PRUEBA de a)</u> Por inducción:

1. Si $K = 1 \Rightarrow AB = BA$, que es verdadero por dato
2. Si $K = n$, suponer que se cumple: $A^n B = BA^n$
3. Para $K = n+1$ debe cumplirse: $A^{n+1}B = BA^{n+1}$
Partir de $A^{n+1}B$ y aplicar sucesivamente los pasos 2. y 1.
Veamos:

$$\begin{aligned} A^{n+1}B &= AA^nB \\ &= A(A^nB) \\ &= A(BA^n) && \text{por 2} \\ &= (AB)A^n \\ &= (BA)A^n && \text{por 1} \\ &= B(AA^n) && \text{asociativa} \\ &= BA^{n+1} \quad // \end{aligned}$$

<u>PRUEBA de b)</u> Por inducción:

1. Si $n=2$

El 1er miembro: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$
$= A(A+B) + B(A+B)$
$= A^2 + AB + BA + B^2$
$= A^2 + AB + AB + B^2$

El 2do miembro:
$$\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} A^{2-K} B^K = \binom{2}{0}A^2 + \binom{2}{1}AB + \binom{2}{2}B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

2. Si $n = h$, suponer que se cumpla:
$$(A+B)^h = \sum_{K=0}^{h} \binom{h}{k} A^{h-K} B^K = \binom{h}{0}A^h + \binom{h}{1}A^{h-1}B + \binom{h}{2}A^{h-2}B^2 + \dots + \binom{h}{h}B^h$$

3. Para $n = h+1$:
$$\begin{aligned} (A+B)^{h+1} &= (A+B)^h(A+B) \\ &= \left[\tbinom{h}{0}A^h + \tbinom{h}{1}A^{h-1}B + \tbinom{h}{2}A^{h-2}B^2 + \dots + \tbinom{h}{h}B^h\right](A+B) \\ &= \tbinom{h}{0}A^{h+1} + \underline{\tbinom{h}{1}A^hB} + \dots + \tbinom{h}{h}B^hA + \underline{\tbinom{h}{0}A^hB} + \dots + \tbinom{h}{h}B^{h+1} \\ &= \tbinom{h}{0}A^{h+1} + \left[\tbinom{h}{1}+\tbinom{h}{0}\right]A^hB + \left[\tbinom{h}{2}+\tbinom{h}{1}\right]A^{h-1}B^2 + \dots + \tbinom{h}{h}B^{h+1} \\ &= \tbinom{h+1}{0}A^{h+1} + \tbinom{h+1}{1}A^hB + \tbinom{h+1}{2}A^{h-1}B^2 + \dots + \tbinom{h+1}{h+1}B^{h+1} \\ &= \sum_{K=0}^{h+1} \tbinom{h+1}{K} A^{h+1-K} B^K \quad // \end{aligned}$$

42 Sea A una matriz cuadrada de orden 2 tal que $A^2 = I$.
Probar que $\rho(A+I) + \rho(I-A) = 2$.

<u>Prueba</u>

1. Segun el problema 27, si $A^2 = I$, se ha encontrado que A tiene la forma: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}-\{0\}$
2. Si $a = b = 1$, tendremos $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$
3. Donde:

a) $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \rho(A+I) = 1$

b) $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \rho(I-A) = 1$

4. Luego: $\rho(A+I) + \rho(I-A) = 1 + 1 = 2$

CASO GENERAL: Sea A una matriz $n \times n$, tal que $A^2 = I$, probar que $\rho(A+I) + \rho(I-A) = n$.

43 Sea A una matriz 2×2, tal que, $AB = BA$ $\forall B_{2\times2}$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $A = \lambda I$.

<u>Solución</u>

1. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$
2. $AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma+nc & mb+nd \\ pa+qc & pb+qd \end{bmatrix}$

3. Como $AB = BA$, se obtiene el sigte sistema:
$$\begin{cases} am + bp = ma + nc \\ an + bq = mb + nd \\ cm + dp = pa + qc \\ cn + dq = pb + qd \end{cases} \qquad \begin{cases} na + (q-m)b - nd = 0 \\ pb - nc = 0 \\ pa + (q-m)c - pd = 0 \\ pb - nc = 0 \end{cases}$$
$a = ?,\ b = ?\ c = ?\ d = ?$

4. Resolver el sistema por Gauss-Jordan. Se reduce a 3 ecuaciones:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} n & q-m & 0 & -n & 0 \\ 0 & p & -n & 0 & 0 \\ p & 0 & q-m & -p & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & (q-m)/n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & -n & 0 & 0 \\ p & 0 & q-m & -p & 0 \end{array}\right] (-p)$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & (q-m)/n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & -n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{n}(q-m) & q-m & 0 & 0 \end{array}\right] \tfrac{1}{p}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & (q-m)/n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -n/p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{n}(q-m) & q-m & 0 & 0 \end{array}\right] -\tfrac{(q-m)}{n},\ \tfrac{p}{n}(q-m)$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & (q-m)/p & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -n/p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5. Es compatible el sistema y $\exists_n$ infinitas soluciones, Hay: $4-2 = 2$ parámetros
$$\begin{cases} a = -\frac{q-m}{p}t + s \\ b = \frac{n}{p}t \\ c = t,\ d = s \end{cases} \quad \Rightarrow \text{si } \underset{s\neq0}{t=0} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = sI.$$

44 Sea A una matriz triangular con componentes iguales a 1, en la diagonal: $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sea $N = A - I_3$. Demostrar que $N^{3+1} = \Theta$. Nótese que $A = I + N$. Demostrar que A es invertible y que su inverso es: $(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3$

<u>SOLUCION</u>:

1. $N = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. Hallemos el producto: $NNNN = N^4$

$$\underset{N}{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{N^2}{\begin{matrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \quad \overset{N^3}{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \quad \overset{N^4}{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$$
$$\underset{N}{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{N}{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{N}{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

3. Se cumple: $N^{3+1} = N^4 = \Theta$
4. Se cumple que la inversa de $A = I + N$, es:
$$(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
5. Comprobemos por el método de Gauss-Jordan la inversa de A
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-a)$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-c),\ -(b-ac)$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

CASO GENERAL: Sea A una matriz triangular con componentes iguales a 1, en la diagonal:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \underset{I_n}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}} + \underset{N}{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}$$
Sea $N = A - I_n$. Demostrar que $N^{n+1} = \Theta$. Notese que $A = I + N$. Demostrar que A es invertible y que su inversa es $(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots (-1)^n N^n$.

45 Sean B y C matrices cuadradas de orden n tales que $C^2 = \Theta$ y $BC = CB$; demostrar que, si $A = B + C$ entonces:
$A^{K+1} = B^K(B + (K+1)C) \quad \forall K \geq 1$.

<u>PRUEBA</u> (Por inducción)

1. Para $K = 1$

El 1er miembro es $A^{1+1} = A.A$
$$\begin{aligned} &= (B+C)(B+C) = B(B+C) + C(B+C) \\ &= B^2 + BC + CB + C^2 \\ &= B^2 + BC + BC + \Theta \qquad \text{dato: } CB = BC,\ C^2 = \Theta \\ &= B^2 + 2BC \end{aligned}$$
El 2do miembro coincide cuando $K=1 \Rightarrow = B(B+2C)$

2. Suponer que para $K = h$, $h > 1$ se cumple: $A^{h+1} = B^h(B + (h+1)C)$
3. Para $K = h+1$ se tiene:
$$\begin{aligned} A^{(h+1)+1} &= A^{h+1}.A \\ &= [B^h(B+(h+1)C)][B+C] \\ &= [B^h(B+(h+1)C)]B + [B^h(B+(h+1)C)]C \\ &= [B^h(B^2+(h+1)CB)] + [B^h(BC+(h+1)\underset{\Theta}{C^2})] \\ &= [B^h(B^2+(h+1)BC)] + B^hBC \\ &= [B^h.B(B+(h+1)C)] + B^{h+1}C \\ &= [B^{h+1}(B+(h+1)C)] + B^{h+1}C \\ &= B^{h+1}(B+(h+1)C+C) \\ &= B^{h+1}(B+(h+2)C) \quad // \end{aligned}$$

(46) Sabiendo que $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, hallar A^n $\forall n\geq 2$

SOLUCION

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}}_{A^2}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&1+2+3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}}_{A^3}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1&3&1+2+3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&1+2+3+4\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Podemos inducir que:

$$A^n=\begin{bmatrix}1&n&1+2+3+4+\dots+n\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n&\frac{(1+n)n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(47) Las matrices A y B de $\mathbb{R}^{m\times m}$ son tales que A y (AB−BA) son permutables. Demostrar que:

$$(AB-BA)A^n=A^n(AB-BA)\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

PRUEBA (Por inducción):

1. $n=1$: $(AB-BA)A=A(AB-BA)$ es verdero según hipótesis.

2. $n=h$: $(AB-BA)A^h=A^h(AB-BA)$ es V.

3. $n=h+1$ se tiene:

$$\begin{aligned}(AB-BA)A^{h+1}&=(AB-BA)A^hA\\&=A^h(AB-BA)A\quad\text{por 2.}\\&=A^h\,A\,(AB-BA)\quad\text{por dato}\\&=A^{h+1}(AB-BA)\end{aligned}$$

(48) Probar que $\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\,\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\,\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos(n\theta)&p\,\text{sen}(n\theta)\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}(n\theta)&\cos(n\theta)\end{bmatrix}$ $\forall n\geq 2$, $n\in\mathbb{Z}$

PRUEBA (Por induccion)

1. Si $n=2$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta&p(\cos\theta\,\text{sen}\theta+\cos\theta\,\text{sen}\theta)\\-\frac{1}{p}(\text{sen}\theta\cos\theta+\text{sen}\theta\cos\theta)&-\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&p\,\text{sen}2\theta\\-\frac{1}{2}\,\text{sen}2\theta&\cos 2n\end{bmatrix}$$

2. Para $n=h$, suponer que se cumple: $\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^h=\begin{bmatrix}\cos(h\theta)&p\,\text{sen}(h\theta)\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}(h\theta)&\cos(h\theta)\end{bmatrix}$

3. $n=h+1$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^{h+1}=\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^h\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(h\theta)&p\,\text{sen}(h\theta)\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}(h\theta)&\cos(h\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&p\,\text{sen}\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(h\theta)\cos\theta-\text{sen}(h\theta)\text{sen}\theta&p(\cos(h\theta)\text{sen}\theta+\text{sen}(h\theta)\cos\theta)\\-\frac{1}{p}(\text{sen}(h\theta)\cos\theta+\cos(h\theta)\text{sen}\theta)&-\text{sen}(h\theta)\text{sen}\theta+\cos(h\theta)\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(h+1)\theta&p\,\text{sen}(h+1)\theta\\-\frac{1}{p}\,\text{sen}(h+1)\theta&\cos(h+1)\theta\end{bmatrix}\ //$$

(49) Las matrices A y B de $\mathbb{R}^{m\times m}$ son tales que A y (AB−BA) son permutables. Demostrar que $A^nB-BA^n=nA^{n-1}(AB-BA)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Prueba (Por inducción)

1. Si $n=1$, se tiene: $AB-BA=1.A^0(AB-BA)$
   $=AB-BA$ que es Verdadero, $A^0=I$

2. Si $n=h$, suponer que sea verdadero: $A^hB-BA^h=hA^{h-1}(AB-BA)$

3. Si $n=h+1$:

$$\begin{aligned}A^{h+1}B-BA^{h+1}&=AA^hB-BA^{h+1}\\&=AA^hB-ABA^h+ABA^h-BA^{h+1}\quad\text{Sumar y restar }ABA^h\\&=A(A^hB-BA^h)+(AB-BA)A^h\\&=A\,hA^{h-1}(AB-BA)+A^h(AB-BA)\quad\text{Por 2 y (47)}\\&=hA^h(AB-BA)+A^h(AB-BA)=(h+1)A^h(AB-BA)\ //\end{aligned}$$

Sistema de Ecuaciones Lineales

(50) Discutir y analizar, según los valores de K, el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+(K+1)y+z=0\\x+y+(K+1)z=0\\(K+1)x+y+z=0\end{cases}$$

SOLUCION

Cuando el N° de incog. = N° de ecua., conviene discutir el determinante de la matriz de los coeficientes.

1. $\det A=\begin{vmatrix}1&K+1&1\\1&1&K+1\\K+1&1&1\end{vmatrix}=\left[1+1+(K+1)^3\right]-\left[K+1+K+1+K+1\right]$
   $=K^2(K+3)$.

2. Analizar el sistema de ecuaciones, según los valores del determinante:

a) Si $\det A=K^2(K+3)\neq 0\Leftrightarrow K\neq 0\vee K\neq -3$, entonces: $\rho[A]=3=\rho[A|B]$ y por tanto el sistema es compatible.

Además: N° de incog = rango = 3, entonces tiene única solucion.

Como el sistema es homogéneo, la solución es trivial, es decir $x=y=z=0$

b) Si $\det A=K^2(K+3)=0\Leftrightarrow K=0\vee K=-3$, analizamos para cada caso:

b₁) Si $K=0\Rightarrow$ el sistema es $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$

Se ha reducido a una sola ecuación con 3 incógnitas $\{x+y+z=0$, donde:

$A=[1\ 1\ 1]$, $[A|B]=[1\ 1\ 1\ 0]$.

Así, deducimos: $\rho[A]=\rho[A|B]=1\Rightarrow$ el sistema es compatible.

Como $1<3\Rightarrow$ habrán $3-1=2$ parámetros e infinitas soluciones $\begin{cases}x=-s-t\\y=s\\z=t\end{cases}$ $t,s\in\mathbb{R}$

b₂) Si $K=-3\Rightarrow$ el sistema es $\begin{cases}x-2y+z=0\\x+y-2z=0\\-2x+y+z=0\end{cases}$

Reducir la matriz ampliada a la forma canónica:

$$\left[\begin{array}{ccc|l}1&-2&1&0\\1&1&-2&0\leftarrow -f_1+f_2\\-2&1&1&0\leftarrow 2f_1+f_3\\\hline1&-2&1&0\\0&3&-3&0\leftarrow \text{por }\frac{1}{3}\\0&-3&3&0\end{array}\right]\qquad\left[\begin{array}{ccc|l}1&-2&1&0\leftarrow 2f_2+f_1\\0&1&-1&0\\0&-3&3&0\leftarrow 3f_2+f_1\\\hline0&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

MATRIZ CANÓNICA

Analizando la matriz canónica:

i) $\rho[A]=\rho[A|B]=2\Rightarrow$ el sistema es compatible.

ii) $2<3\Rightarrow$ existe infinita solución

iii) $3-2=1\Rightarrow$ habrá un parámetro.

haciendo $z=t$, el conjunto solución será: $\begin{cases}x-t=0\\y-t=0\end{cases}$

$$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

(51) Resolver: $\begin{cases}ax+by+2z=1\\ax+(2b-1)y+3z=1\\ax+by+(b+3)z=2b-1\end{cases}$

Solución:

1. $\det A=\begin{vmatrix}a&b&2\\a&2b-1&3\\a&b&b+3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\leftarrow -f_1+f_2\\\leftarrow -f_1+f_3\end{matrix}$

$$=\begin{vmatrix}a&b&2\\0&b-1&1\\0&0&b+1\end{vmatrix}=a(b-1)(b+1)$$

2. Analizando el valor del determinante:

a) Si $\det A=a(b-1)(b+1)\neq 0\Leftrightarrow b\neq 0\vee b\neq 1\vee b\neq -1$

entonces el sistema tiene solucion única: $x=\frac{5-b}{a(b+1)}$, $y=\frac{-2}{b+1}$, $z=\frac{2(b-1)}{b+1}$

b) Si $\det A=a(b-1)(b+1)=0$

$\Leftrightarrow a=0\vee b=1\vee b=-1$.

hacemos el siguiente análisis:

b₁) Si $a=0\wedge \underset{\substack{\uparrow\\\text{valor que anula el numerador de }x\text{ en a)}}}{b=5}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=-\frac{1}{3}\\z=4/3\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

La matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{cc|l}5&2&1\leftarrow \text{por }\frac{1}{5}\\9&3&1\\5&8&9\\\hline1&2/5&1/5\\9&3&1\leftarrow -9f_1+f_2\\5&8&9\leftarrow -5f_1+f_3\\\hline1&4/5&1/5\\0&-3/5&-4/5\leftarrow \text{por }-\frac{5}{3}\\0&6&8\\\hline1&2/5&1/5\leftarrow -\frac{2}{5}f_2+f_1\\0&1&4/3\\0&6&8\leftarrow -6f_2+f_3\\\hline1&0&-1/3\\0&1&4/3\\0&0&0\end{array}\right]\ *$$

MATRIZ CANÓNICA

De la matriz canónica deducimos:

i) $\rho[A]=2=\rho[A|B]\Rightarrow$ el sistema es compatible.

ii) $2<3\Rightarrow\exists$ infinita solución.

iii) $3-2=1\Rightarrow$ Hay un parámetro.

Hacer $x=t$, obtenemos de *:

$$y=-\frac{1}{3}$$

$$z=\frac{4}{3}.$$

b_2) Si $a=0$, $b\neq 1$, $b\neq 5$ $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

b_3) Si $b=1 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-at \\ z=0 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Dichos valores se hallan despues de analizar la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|l} a & 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \leftarrow -f_1+f_2 \\ a & 1 & 4 & 1 \leftarrow -f_1+f_3 \\ \hline a & 1 & 2 & 1 \leftarrow -2f_2+f_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \leftarrow -2f_2+f_3 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (**)$$

Filas: I, II. Columnas: x, y, z.

De (**) deducimos:

i) $\rho[A]=2=\rho[A|B]$ $\Rightarrow$ el sist. es comp.

ii) $2<3$ $\Rightarrow \exists$ infinita solución.

ii) $3-2=1$ parámetro.

Hacer $x=t$

De I: $at+y=1$ $\Rightarrow y=1-at$

De II: $z=0$.

b_4) Si $b=-1$ $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Dicho resultado se obtiene, despues de reducir la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|l} a & -1 & 2 & 1 \\ a & -3 & 3 & 1 \leftarrow -f_1+f_2 \\ a & -1 & 2 & -3 \leftarrow -f_1+f_3 \\ \hline a & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \leftarrow \text{por } -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline a & -1 & 2 & 1 \leftarrow f_2+f_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline a & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) (\alpha)$$

De (α) deducimos:

$\rho[A]=2$

$\rho[A|B]=3$ $\neq$

por tanto, el sistema es incompatible.

NOTA: Los valores particulares de a y b que han sido objeto de análisis en b_1), b_2), b_3) y b_4) se han obtenido de igualar a cero el numerador y el denominador en las soluciones de la parte a).

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

52) $\begin{cases} (5\lambda+1)x + 2\lambda y + (4\lambda+1)z = 1+\lambda \\ (4\lambda-1)x + (\lambda-1)y + (4\lambda-1)z = -1 \\ 2(3\lambda+1)x + 2\lambda y + (5\lambda+2)z = 2-\lambda \end{cases}$

R. $\det A = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$. Si $\lambda=1$, $\lambda=-1$, el sistema es incompatible. Si $\lambda=0$, la solución depende de un parámetro.

53) $\begin{cases} (2c+1)x - cy - (c+1)z = 2c \\ 3cx - (2c-1)y - (3c-1)z = c+1 \\ (c+2)x - y - 2cz = 2 \end{cases}$

R. $\det A = 3(c+1)(c-1)^2$. Si $c=-1$, el sistema es incompatible. Si $c=1$, la solución depende de dos parámetros.

54) $\begin{cases} 2(\lambda+1)x + 3y + \lambda z = \lambda+4 \\ (4\lambda-1)x + (\lambda+1)y + (2\lambda-1)z = 2\lambda+2 \\ (5\lambda-4)x + (\lambda+1)y + (3\lambda-4)z = \lambda-1 \end{cases}$

R. $\det A = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Si $\lambda=2$, $\lambda=3$, el sistema es incompatible.

Si $\lambda=1$, la solución depende de un parámetro.

55) $\begin{cases} (3\alpha-1)x + 2\alpha y + (3\alpha+1)z = 1 \\ 2\alpha x + 2\alpha y + (3\alpha+1)z = \alpha \\ (\alpha+1)x + (\alpha+1)y + 2(\alpha+1)z = \alpha^2 \end{cases}$

R. $\det A = (\alpha-1)^2(\alpha+1)$. Si $\alpha=-1$ el sistema es incompatible. Si $\alpha=1$, la solución depende de dos parámetros.

56) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$

R. Si $a\neq b\neq c \Rightarrow x=\dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$, $y=\dfrac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}$

$z=\dfrac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}$

Si $a=b$; $a\neq c$; $d=a$ ó $d=c$, las soluciones dependen de un parámetro.

Si $b=c$; $a\neq b$, $d=a$ ó $d=b$, las soluciones dependen de un parámetro.

Si $a=c$; $a\neq b$, $d=a$, $d=b$, las soluciones dependen de un parámetro.

Si $a=b=c=d$, las soluciones dependen de dos parámetros.

En todos los demas casos no tiene soluciones.

57) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$

Solución:

$x_1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}t$

$x_2=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}t$

$x_3=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}t$

$x_4=t$.

Determinantes

58) Aplicando propiedades, calcular:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \\ 0 & b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a+b & 2x \\ a & x & 2x & a+b \\ b-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} a & a+b & 2x \\ x & 2x & a+b \\ b-a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-a)\begin{vmatrix} a+b & 2x \\ 2x & a+b \end{vmatrix} = (b-a)^2\left[(a+b)^2-4x^2\right]$$

$= (b-a)^2(a+b-2x)(a+b+2x)$.

59) Usando únicamente propiedades, demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Solución:

1. Multiplicar a la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª columnas por a, b, c y d respectivamente:

$$=\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ -ab & ab & cd & -cd \\ -ac & -bd & ac & bd \\ -ad & bc & -bc & ad \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ -ab+ab+cd-cd & ab & cd & -cd \\ -ac-bd+ac+bd & -bd & ac & bd \\ -ad+bc-bc+ad & bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & ab & cd & -cd \\ 0 & -bd & ac & bd \\ 0 & bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{abcd}\begin{vmatrix} ab & cd & -cd \\ -bd & ac & bd \\ bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$=\frac{bcd(a^2+b^2+c^2+d^2)}{abcd}\begin{vmatrix} a & d & -c \\ -d & a & b \\ c & -b & a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & d & -c \\ -d & a & b \end{matrix}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)}{a}\left[a^3-bcd+bcd-(-ac^2-ab^2-ad^2)\right]$$

$$=\frac{1}{a}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^3+ac^2+ab^2+ad^2)$$

$$=\frac{1}{a}(a^2+b^2+c^2+d^2)\,a\,(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

60) Probar que:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

SOLUCION

$$= a_0\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 & \cdots & a_n/a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 & \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & \frac{a_0x+a_1}{a_0} & a_2/a_0 & a_3/a_0 & \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\frac{a_0(a_0x+a_1)}{a_0}\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 & & a_n/a_0 \\ 0 & 1 & \frac{a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} & \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & -1 & x & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a_0(a_0x+a_1)}{a_0}\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 & & a_n/a_0 \\ 0 & 1 & \frac{a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} & & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & 0 & \frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} & \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a_0(a_0x+a_1)}{a_0}\frac{(a_0x^2+a_1x+a_2)}{a_0x+a_1}\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 & \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & 1 & \frac{a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} & \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_3}{a_0x^2+a_1x+a_2} & \cdots & \frac{a_n}{a_0x^2+a_1x+a_2} \\ 0 & 0 & -1 & x & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & x \end{vmatrix}$$

En forma sucesiva, se va factorizando hasta convertir en matriz triangular en el que todos los elementos de la diagonal son unos y por tanto $\det A = 1$.

$$= a_0\left(\frac{a_0x+a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{a_0x+a_1}\right)\left(\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{a_0x^2+a_1x+a_2}\right)\cdots\left(\frac{a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}}{a_0x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}}\right)\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}}\right)(1)$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n .$$

(61) Calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & -1 \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \cdots & h \end{vmatrix}$$

Solución: Para hallar la forma general, vamos a inducir tomando un determinante de orden 4×4.

$$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 \\ hx^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 \\ x^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x+h & -1 & 0 \\ x^2 & x^2+hx & h & -1 \\ x^3 & x^3+hx^2 & hx & h \end{vmatrix} = h(x+h)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & 0 \\ x^2 & x & h & -1 \\ x^3 & x^2 & hx & h \end{vmatrix}$$

$$h(x+h)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+h & -1 \\ x^3 & x^2 & x^2+hx & h \end{vmatrix} = h(x+h)(x+h)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & -1 \\ x^3 & x^2 & x & h \end{vmatrix} = h(x+h)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x & x+h \end{vmatrix} = h(x+h)^3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}}_{1}$$

$$= h(x+h)^3 .$$

En general: $|A| = h(x+h)^{n-1}$, si el orden de A es $n\times n$.

(62)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \cdots 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \cdots x & x \\ 1 & x & 0 & x \cdots x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & x \cdots 0 & x \\ 1 & x & x & x \cdots x & 0 \end{vmatrix} (-x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & -x \end{vmatrix} = (-x)(-x)\cdots(-x)\begin{vmatrix} 0 & -1/x & -1/x & -1/x & -1/x \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}x^{n-1}\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & \cdots & -\frac{1}{x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}x^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x} = (-1)^{n-1}x^{n-1}(n-1)\frac{1}{x} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2} .$$

(63) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \text{ donde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

R: $\det A = n^{\frac{n}{2}}\, i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}$

SOLUCION

1. Aplicar la propiedad: $|AB| = |A||B|$

   En este caso $B=A \Rightarrow |AA| = |A||A| \Rightarrow |A^2| = |A|^2$

2. El número complejo $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$ es la raíz primitiva de la ecuación $x^n=1$, por tanto, sus raíces son $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$ y se cumplen $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots+\varepsilon^{n-1}$, $\varepsilon^n = 1$.

   Además:

$$\text{Si } m \geq n \Rightarrow \varepsilon^m = \begin{cases} 1, & \text{si } m = \dot{n} \\ \varepsilon, & \text{si } m = \dot{n}+1 \\ \varepsilon^2, & \text{si } m = \dot{n}+2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{n-1}, & \text{si } m = \dot{n}+(n-1) \end{cases}$$

3. Vamos a calcular los determinantes para $n = 2, 3, 4, 5$

   Veamos:

Para $n=2$

$$\Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 2^2 \qquad \Rightarrow \Delta_2^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow \Delta_2 = \pm 2$$

$$\Delta_2 = -2$$

donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{2}$
$= -1$
$\varepsilon^2 = 1$ y $1+\varepsilon = 1-1 = 0$

Para $n=3$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1+1+1 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 & 1+\varepsilon^3+\varepsilon^6 \\ 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 & 1+\varepsilon^3+\varepsilon^6 & 1+\varepsilon^4+\varepsilon^8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3^3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} = -3^3$$

donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

$1+\varepsilon+\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$

$$\Rightarrow \Delta_3^2 = -3^3$$
$$\Rightarrow \Delta_3 = \pm 3^{3/2} i$$
$$\Delta_3 = -3^{3/2} i$$

Para $n=4$

$$\Delta_4^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2+2\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 2+2\varepsilon^2 & 0 & 4 \\ 2+2\varepsilon^2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2+2\varepsilon^2 \end{vmatrix} = 4^4(-1)$$

$$\Rightarrow \Delta_4^2 = -4^4$$
$$\Delta_4 = -4^2 i$$

DONDE $\varepsilon = \cos 2\pi/4 + i\,\text{sen}\, 2\pi/4$, $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3 = 0$, $\varepsilon^4 = 1$, $\varepsilon^2 = -1$

Para $n=5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon^4 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \varepsilon^8 \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \varepsilon^{12} \\ 1 & \varepsilon^4 & \varepsilon^8 & \varepsilon^{12} & \varepsilon^{16} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5^5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5^5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5^5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5^5$$

Donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}$, $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4 = 0$, $\varepsilon^5 = 1$ $\qquad \Rightarrow \Delta_5^2 = 5^5 \Rightarrow \Delta_5 = -5^{5/2}$

(64) DEFINICIÓN: Si $A=[a_{ij}]_n$ es matriz cuadrada, el determinante $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ se denomina polinomio característico y las raíces de $\det(\lambda I-A)=0$ se llaman autovalores

Dado la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

a) Hallar el polinomio característico asociado a la matriz A.

b) Hallar los autovalores.

Solución:

a) $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$

$$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

b) $f(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1\,,\ \lambda_2=-1\,,\ \lambda_3=3$

PROPIEDADES:

1. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A$

2. $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)$.

(65) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}=0$$

solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}(-1)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & x-x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & x-x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & 0 & x-x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-x_n \end{vmatrix}=$$

$$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)=0$$

$$\Rightarrow x=x_1\,,\ x=x_2\,,\ \ldots\,,\ x=x_{n-1}\,,\ x=x_n.$$

(66) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}(-1) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix}=b_1b_2b_3$$

(67) Resolver: $AX=B$, donde

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCION

1. En $AX=B$ si A es no singular, entonces existe A^{-1} por tanto se puede multiplicar en ambos miembros por A^{-1}, por la izquierda:

$$A^{-1}AX=A^{-1}AB \Rightarrow X=A^{-1}B.$$

2. Hallar A^{-1} por el método de Gauss Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = A^{-1}$$

3. Hallar $X=A^{-1}B$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(68) Resolver $(z+1)^n=\cos 2na+i\,\text{sen}\,2na$, $a\in\mathbb{R}$ y calcular $\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$.

SOLUCION

PASO 1 Hallar las raíces:

De $(z+1)^n=\cos 2na+i\,\text{sen}\,2na$

$$z+1=\sqrt[n]{\cos 2na+i\,\text{sen}\,2na}$$
$$=\text{cis}\left[\frac{2na+2k\pi}{n}\right]$$
$$=\text{cis}\left[2a+\frac{2k\pi}{n}\right]$$
$$=\text{cis}\,\alpha_k \qquad \text{donde } \alpha_k=2a+\frac{2k\pi}{n}$$

$$z=-1+\cos\alpha_k+i\,\text{sen}\,\alpha_k \qquad \boxed{\frac{\alpha_k}{2}=a+\frac{k\pi}{n}}$$
$$=-(1-\cos\alpha_k)+i\,\text{sen}\,\alpha_k$$
$$=-2\,\text{sen}^2\frac{\alpha_k}{2}+i\,2\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_k}{2}$$
$$z_k=2i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\left[\cos\frac{\alpha_k}{2}+i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\right]$$
$$=2i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\,\text{cis}\frac{\alpha_k}{2}$$

PASO 2 Factorizar la ecuación:

$$(z+1)^n=\cos 2na+i\,\text{sen}\,2na$$

teniendo en cuenta:

a) $\prod_{k=0}^{n-1}\text{cis}\frac{\alpha_k}{2}=\text{cis}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k}{2}\right]$

$$=\text{cis}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$
$$=\text{cis}\left[na+\frac{\pi}{n}\,\frac{n(n-1)}{2}\right]$$
$$=\text{cis}\left[na+\frac{\pi}{n}(n-1)\right]$$

b) $i^{1-n}=\left[\text{cis}\frac{\pi}{2}\right]^{1-n}=\text{cis}\left((1-n)\frac{\pi}{2}\right)$.

Veamos:

$$(z+1)^n-(\cos 2na+i\,\text{sen}\,2na)=\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)$$
$$=\prod_{k=0}^{n-1}\left(z-2i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\,\text{cis}\frac{\alpha_k}{2}\right)$$

PASO 3 Dar a z el valor adecuado que nos permita hallar $\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}$.

Si $z=0$, obtenemos:

$$1-\cos 2na-i\,\text{sen}\,2na=\prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\,\text{cis}\frac{\alpha_k}{2}\right)$$

$$2\,\text{sen}^2\frac{2na}{2}-i\,2\,\text{sen}\frac{2na}{2}\cos\frac{2na}{2}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\,\text{cis}\frac{\alpha_k}{2}\right)$$

$$2\,\text{sen}^2(na)-i\,2\,\text{sen}(na)\cos(na)=(-2i)^n\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\prod_{k=0}^{n-1}\text{cis}\frac{\alpha_k}{2}$$

$$-2i\,\text{sen}(na)\left[\cos(na)+i\,\text{sen}(na)\right]=\quad ''$$

$$-2i\,\text{sen}(na)\,\text{cis}(na)=(-2i)^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\right)\text{cis}\left(na+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

$$(-2i)^{1-n}\,\text{sen}(na)\,\text{cis}\left[na-na-\frac{\pi}{2}(n-1)\right]=\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}$$

$$(-2i)^{1-n}\,\text{sen}(na)\,\text{cis}\left((1-n)\frac{\pi}{2}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}$$

$$(-2)^{1-n}\,i^{1-n}\,\text{sen}(na)\,\text{cis}\left[(1-n)\frac{\pi}{2}\right]=\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}$$

$$(-2)^{1-n}\,\underline{\text{cis}}\left[(1-n)\frac{\pi}{2}\right]\text{sen}(na)\,\underline{\text{cis}}\left[(1-n)\frac{\pi}{2}\right]=\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}$$

$$(-2)^{1-n}\,\text{cis}\left[(1-n)\frac{\pi}{2}\right]=\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\ //$$

(69) a) Resolver: $x^{2n}+ix^n-1=0$

b) Hallar $\prod_{k=0}^{n-1}\text{sen}(12k+7)\frac{\pi}{12n}\ \text{sen}(12k+1)\frac{\pi}{12n}$

SOLUCION

PASO 1 Hallar las raíces de la ecuación $x^{2n}+ix^n-1=0$

$$x^{2n}+ix^n-1=0$$
$$x^{2n}+ix^n+\left(\frac{i}{2}\right)^2=1+\left(\frac{i}{2}\right)^2$$
$$\left(x^n+\frac{i}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$x^n+\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^n=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$x=\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$ donde $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ $\quad |z|=1$, $\theta=\frac{11\pi}{6}$

$x_k=\text{cis}\left[\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{n}\right]$

$=\text{cis}\frac{(12k+11)\pi}{6n}$, $\alpha_k=\frac{(12k+11)\pi}{6n}$

$x_k=\text{cis}\,\alpha_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$

V

$x^n+\frac{i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^n=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$x=\sqrt[n]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$ donde $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$x_k=\text{cis}\left[\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{n}\right]$ $\quad |z|=1$, $\theta=\frac{7\pi}{6}$

$x_k=\text{cis}\frac{(12k+7)\pi}{6n}$, $\beta_k=\frac{(12k+7)\pi}{6n}$

$x_k=\text{cis}\,\beta_k$ $\quad k=0,1,\ldots,n-1$

b) Para hallar el producto $\prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}\frac{(12k+11)\pi}{12n}\operatorname{sen}\frac{(12k+7)\pi}{12n}$, seguir dos pasos : factorizar la ecuación $x^{2n}+ix^n+1=0$ y dar un valor adecuado a la variable x. veamos :

FACTORIZAR :

$$x^{2n}+ix^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\operatorname{cis}\alpha_k)\prod_{k=0}^{n-1}(x-\operatorname{cis}\beta_k)$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}(x-\cos\alpha_k-i\operatorname{sen}\alpha_k)\prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\beta_k-i\operatorname{sen}\alpha_k)$$

PARA $x=1$:

$$1^{2n}+i\,1^n-1=\prod_{k=1}^{n-1}(\underbrace{1-\cos\alpha_k}-i\operatorname{sen}\alpha_k)\prod_{k=0}^{n-1}(\underbrace{1-\cos\beta_k}-i\operatorname{sen}\beta_k$$

$$1+i-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(2\operatorname{sen}^2\tfrac{\alpha_k}{2}-i2\operatorname{sen}\tfrac{\alpha_k}{2}\cos\tfrac{\alpha_k}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(2\operatorname{sen}^2\tfrac{\beta_k}{2}-i2\operatorname{sen}\tfrac{\beta_k}{2}\cos\tfrac{\beta_k}{2}\right)$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\Big(-2i\operatorname{sen}\tfrac{\alpha_k}{2}\underbrace{\left[\cos\tfrac{\alpha_k}{2}+i\operatorname{sen}\tfrac{\alpha_k}{2}\right]}_{\operatorname{cis}\frac{\alpha_k}{2}}\Big)\prod_{k=0}^{n-1}\Big(-2i\operatorname{sen}\tfrac{\beta_k}{2}\underbrace{\left[\cos\tfrac{\beta_k}{2}+i\operatorname{sen}\tfrac{\beta_k}{2}\right]}_{\operatorname{cis}\frac{\beta_k}{2}}\Big)$$

$$i=(-2i)^{2n}\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha_k}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\beta_k}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{cis}\left[\tfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha_k}{2}\cos\tfrac{\beta_k}{2}=\frac{i}{(-2i)^{2n}\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{cis}\left[\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]}=\frac{i}{(-1)^n2^{2n}\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{cis}\left[\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]}=\frac{i}{(-1)^n2^{2n}\operatorname{cis}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\pi}{2n}(4k+3)\right]\right]}$$

$$=\frac{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{(-1)^n2^{2n}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}(2n+1)}$$

$$=(-1)^n2^{-2n}\underbrace{\operatorname{cis}[-n\pi]}_{(-1)^n}=2^{-2n}$$

Donde :

1) $\frac{\alpha_k}{2}+\frac{\beta_k}{2}=\frac{(12k+11)\pi}{12n}+\frac{(12k+7)\pi}{12n}=\frac{\pi}{2n}(4k+3)$

2) $\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right)=\operatorname{cis}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right)\right]=\operatorname{cis}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}(4k+3)\right]$

$=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}(2n+1)$, pues $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}(4k+3)=\frac{\pi}{2n}\left[4\sum_{k=0}^{n-1}k+3n\right]$

$=\frac{\pi}{2n}\left[4\frac{(n-1)n}{2}+3n\right]$

$=\frac{\pi}{2}(2n+1)$

3) $i=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

4) $\frac{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}(2n+1)}=\operatorname{cis}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(2n+1)\right]$

$=\operatorname{cis}(-n\pi)$

$=(-1)^n$

(70) Resolver : $(x+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^n+(x+\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)^n=0$

SOLUCIÓN :

1) Se tiene $\begin{cases}\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta=\operatorname{cis}\theta=e^{i\theta}\\ \cos\theta-i\operatorname{sen}\theta=\operatorname{cis}(-\theta)=e^{-i\theta}\end{cases}$

2) La ecuación por resolver será :

$(x+e^{i\theta})^n=-(x+e^{-i\theta})^n$

$\Rightarrow\left[\frac{x+e^{i\theta}}{x+e^{-i\theta}}\right]^n=-1$

$\frac{x+e^{i\theta}}{x+e^{-i\theta}}=\sqrt[n]{-1}$, donde $z=-1$ $\begin{cases}|z|=1\\ \alpha=\pi\end{cases}$

$\frac{x+e^{i\theta}}{x+e^{-i\theta}}=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$

$=\operatorname{cis}\alpha_k$

$x+e^{i\theta}=\operatorname{cis}\alpha_k(x+e^{-i\theta})$

$x-x\operatorname{cis}\alpha_k=e^{-i\theta}\operatorname{cis}\alpha_k-e^{i\theta}$

$x(1-\operatorname{cis}\alpha_k)=e^{-i\theta}\operatorname{cis}\alpha_k-e^{i\theta}$

$x=\frac{e^{-i\theta}\operatorname{cis}\alpha_k-e^{i\theta}}{1-\operatorname{cis}\alpha_k}$

$x=\frac{2i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k-2\theta}{2}\right)\operatorname{cis}\frac{\alpha_k}{2}}{-2i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\alpha_k}{2}}$

$x_k=-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k-2\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}}\Rightarrow\boxed{x_k=-\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n}-\theta\right]}{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)}{2n}}\quad k=0,1,2,\dots,n-1}$

Donde :

a) $1-\operatorname{cis}\alpha_k=1-\cos\alpha_k-i\operatorname{sen}\alpha_k$

$=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_k}{2}-i\,2\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_k}{2}$

$=-2i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\left[\cos\frac{\alpha_k}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\right]$

$=-2i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\alpha_k}{2}$

b) $e^{-i\theta}\cdot\operatorname{cis}\alpha_k-e^{i\theta}=e^{-i\theta}\cdot e^{i\alpha_k}-e^{i\theta}$

$=e^{i(\alpha_k-\theta)}-e^{i\theta}$

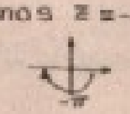
$=\cos(\alpha_k-\theta)+i\operatorname{sen}(\alpha_k-\theta)-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$

$=[\cos(\alpha_k-\theta)-\cos\theta]+i[\operatorname{sen}(\alpha_k-\theta)-\operatorname{sen}\theta]$

$=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha_k-2\theta}{2}+i2\cos\frac{\alpha_k}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha_k-2\theta}{2}$

$=2i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k-2\theta}{2}\left[\cos\frac{\alpha_k}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k}{2}\right]=2i\operatorname{sen}\frac{\alpha_k-2\theta}{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\alpha_k}{2}$

NOTA : Si la ecuación $(x+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^n+(x+\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)^n=0$, se expresa de la forma: $\left[\frac{x+e^{-i\theta}}{x+e^{i\theta}}\right]^n=-1\Rightarrow\frac{x+e^{-i\theta}}{x+e^{i\theta}}=\sqrt[n]{-1}$, donde consideramos $z=-1$ $\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=-\pi\end{cases}$



obtenemos $x_k=-\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}+\theta\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}$.

(71) Hallar $A=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{2k}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+i}{\sqrt2}\right]^{-2k}\right]$

Solución :

1. $\left[\frac{1+i}{\sqrt2}\right]^{2k}=\left[\frac{(1+i)^2}{(\sqrt2)^2}\right]^k=\left[\frac{1+2i+i^2}{2}\right]^k=\left[\frac{1+2i-1}{2}\right]^k=i^k$

2. $\left[\frac{1+i}{\sqrt2}\right]^{-2k}=\left[\frac{(1+i)^2}{(\sqrt2)^2}\right]^{-k}=\left[\frac{1+2i-1}{2}\right]^{-k}=i^{-k}$

3. $A=\left[\sum_{k=1}^{n}i^k\right]\left[\sum_{k=1}^{n}i^{-k}\right]=\left[i\,\frac{1-i^n}{1-i}\right]\left[i^{-1}\,\frac{1-i^{-n}}{1-i^{-1}}\right]=\left[\frac{i^n-1}{i-1}\right]^2\frac{i}{i^n}\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{1-1}{i-1}\right]^2\frac{i}{1}=0\ , & \text{si } n=4\\ \left[\frac{i-1}{i-1}\right]^2\frac{i}{i}=1\ , & n=\dot4+1\\ \left[\frac{-1-1}{i-1}\right]^2\frac{i}{-1}=2\ , & n=\dot4+2\\ \left[\frac{-i-1}{i-1}\right]^2\frac{i}{-i}=1\ , & n=\dot4+3\end{cases}$

(72) Probar que $\prod_{k=1}^{4n}i^k=\begin{cases}-1\ , & \text{si } n \text{ es impar.}\\ 1\ , & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$

PRUEBA :

Si n es impar : $n=2m+1\Rightarrow\prod_{k=1}^{4(2m+1)}i^k=i.i^2i^3\dots\dots i^{4(2m+1)}=i^{1+2+3+\dots+4(2m+1)}$

$=i^{[1+4(2m+1)][4(2m+1)]/2}$

$=i^{2(2m+1)}\cdot i^{8(2m+1)}=(-1)(1)$

$=-1$

Si n es par : $n=2m\Rightarrow\prod_{k=1}^{4(2m)}i^k=i.i^2i^3\dots\dots i^{4(2m)}=i^{1+2+3+\dots+4(2m)}$

$=i^{[1+4(2m)][4(2m)]/2}$

$=i^{4m}\,i^{4(8m)}=(1)(1)=1$

(73) Si w es la raíz primitiva de $x^9-1=0$, con $w\neq1$

a) Calcular $\sum_{k=1}^{4}(w^k+w^{-k}+2)^2$

b) Demostrar que $\sum_{k=1}^{4}\cos^4\left(\frac{k\pi}{9}\right)=\frac{19}{16}$

Solución de a)

Si w es raiz primitiva de $x^9-1=0$, entonces $\underset{k=0,1,\dots,8}{w^k} = \cos\frac{2k\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{9}$

$$w = \cos\frac{2\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9} = e^{i\frac{2\pi}{9}}$$

donde : $1+w+w^2+\dots+w^8=0$, $w^9=1$.

Luego : $$\sum_{k=1}^{4}(w^k+w^{-k}+2)^2 = \sum_{k=1}^{4}(w^{2k}+w^{-2k}+4+2w^kw^{-k}+2w^k.2+2w^{-k}.2)$$

$$= \sum_{k=1}^{4}(w^{2k}+w^{-2k}+4+2+4w^k+4w^{-k})$$

$$= \sum_{k=1}^{4}(w^{2k}+w^{-2k}+4(w^k+w^{-k})+6)$$

$$= w^2+w^4+w^6+w^8+w^{-2}+w^{-4}+w^{-6}+w^{-8}+4[w+w^2+w^3+w^4+w^{-1}+w^{-2}+w^{-3}+w^{-4}]+24$$

$$= \frac{1}{w^8}\Big[\underbrace{w^{10}+w^{12}+w^{14}+w^{16}}+w^6+w^4+w^2+w\Big]+4\,\frac{1}{w^4}\Big[\underbrace{w^5+w^6+w^7+w^8+w^3+w^2+w+1}_{-w^4}\Big]+24$$

$$= \frac{1}{w^8}\Big[\underbrace{w+w^3+w^5+w^7+w^6+w^4+w^2+w}_{-w^8}\Big]+4\,\frac{1}{w^4}\big[-w^4\big]+24 = -1-4+24 = 19$$

Solución de b)

De $w^k = \cos\frac{2k\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{9} = e^{i\frac{2k\pi}{9}} = \Big[\underbrace{e^{i\frac{k\pi}{9}}}_{\varepsilon^k}\Big]^2$ deducimos :

$$\varepsilon^k = e^{ik\pi/9} = \cos\frac{k\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{9}$$

$$\varepsilon^{-k} = e^{-ik\pi/9} = \cos\frac{k\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{9}$$

$$\varepsilon^k+\varepsilon^{-k} = 2\cos\frac{k\pi}{9}$$

$$(\varepsilon^k+\varepsilon^{-k})^4 = 16\cos^4\frac{k\pi}{16}$$

$$[\varepsilon^{2k}+2\varepsilon^k\varepsilon^{-k}+\varepsilon^{-2k}]^2 = 16\cos^4\frac{k\pi}{16}$$

$$(\varepsilon^{2k}+\varepsilon^{-2k}+2)^2 = 16\cos^4\frac{k\pi}{16}$$

$$\frac{(w^k+w^{-k}+2)^2}{16} = \cos^4\frac{k\pi}{16}$$

$$\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{4}(w^k+w^{-k}+2)^2 = \sum_{k=1}^{4}\cos^4\frac{k\pi}{16}$$

$$\frac{19}{16} = \sum_{k=1}^{4}\cos^4\frac{k\pi}{16} \,//$$

4/01/92
M.L.C.

(13) Reducir $E = \sum_{k=0}^{n}\Big[\binom{n}{k}\Big(\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}z^q\Big)\Big]$

donde : $|z|=2$, $\text{Arg}\,z = \theta \in [0,\pi]$

SOLUCION :

1) $$E = \sum_{k=0}^{n}\Big[\binom{n}{k}\Big(\underbrace{\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}z^q}_{(1+z)^k}\Big)\Big]$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+k)^k}$$

$$= [1+(1+z)]^n$$

$$= [2+z]^n \text{ ....(1*)}$$

2) Como $|z|=2 \Rightarrow z = |z|e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$

3) Sustituir 2) en (1*) :

$$E = [2+2e^{i\theta}]^n$$

$$= 2^n(1+e^{i\theta})^n \text{ ....(3*)}$$

4) Pero : $1+e^{i\theta} = \underbrace{1+\cos\theta}+\underbrace{i\,\text{sen}\theta}$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\Big[\cos\frac{\theta}{2}+i\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\Big]$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\,.\,e^{i\theta/2}$$

5) Sustituir 4) en (3*) :

$$E = 2^n\Big(2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\Big)^n$$

$$= 2^n.\,2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\,e^{in\theta/2}$$

$$\boxed{E = 2^{2n}\cos^n\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{n\theta}{2}}, \quad \begin{matrix}0\le\theta\le\pi\\ 0\le\frac{n\theta}{2}\le\frac{n\pi}{2}\end{matrix}}$$

(14) a) Hallar las raices de la ecuación $(x+1)^{2n}+(x-1)^{2n}=0$

b) Reducir $E = \prod_{k=0}^{2n-1}\text{cotg}\,(2k+1)\frac{\pi}{4n}$

SOLUCION DE a)

1) Hallemos las "2n" raices de la ecuación :

$$(x+1)^{2n}+(x-1)^{2n}=0$$

$$\Rightarrow \Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^{2n} = -1 \quad , \; x\ne 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \sqrt[2n]{-1} \quad , \text{hacer } z=-1 \;\begin{cases}|z|=1\\ \theta=\pi\end{cases}$$

$$= \underbrace{|z|}_{1}^{1/2n}\underbrace{\Big[\cos\Big(\frac{\pi+2k\pi}{2n}\Big)+i\,\text{sen}\Big(\frac{\pi+2k\pi}{2n}\Big)\Big]}_{\text{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \text{cis}\Big(\frac{\pi+2k\pi}{2n}\Big) \quad , \; k=0,1,2,\dots,2n-1.$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \text{cis}\,\alpha_k \qquad \text{hacer} : \alpha_k = \frac{\pi+2k\pi}{2n}$$

Despejar x :

$$x+1 = x\,\text{cis}\alpha_k - \text{cis}\alpha_k$$

$$x(1-\text{cis}\alpha_k) = -1-\text{cis}\alpha_k$$

$$x(-1+\text{cis}\alpha_k) = 1+\text{cis}\alpha_k$$

$$x = \frac{1+\text{cis}\alpha_k}{-1+\text{cis}\alpha_k}$$

$$= \frac{1+\cos\alpha_k+i\,\text{sen}\alpha_k}{-1+\cos\alpha_k+i\,\text{sen}\alpha_k}$$

$$= \frac{(1+\cos\alpha_k)+i\,\text{sen}\alpha_k}{-(1-\cos\alpha_k)+i\,\text{sen}\alpha_k}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha_k}{2}+i\,2\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_k}{2}}{-2\,\text{sen}^2\frac{\alpha_k}{2}+i\,2\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_k}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha_k}{2}\Big[\cancel{\cos\frac{\alpha_k}{2}+i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}}\Big]}{2i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}\Big[\cancel{\cos\frac{\alpha_k}{2}+i\,\text{sen}\frac{\alpha_k}{2}}\Big]}$$

$$x_k = \frac{1}{i}\,\text{cotg}\frac{\alpha_k}{2} \quad , \; k=0,1,2,\dots,2n-1.$$

$$\boxed{x_K = -i\,\text{cotg}\left(\frac{\pi+2K\pi}{4n}\right) \quad , K=0,1,2,\dots,2n-1}$$

2) Factorizar el polinomio :

$$(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} = \prod_{K=0}^{2n-1}\left[x + i\,\text{cotg}\left(\frac{\pi+2K\pi}{4n}\right)\right]$$

3) Buscar un valor adecuado para "x" que nos permita hallar el valor de E.

Para $x=0$, obtenemos :

$$(0+1)^{2n}+(0-1)^{2n} = \prod_{K=0}^{2n-1}\left[0+i\,\text{cotg}(2K+1)\frac{\pi}{4n}\right]$$

$$= i^{2n-1+1}\prod_{K=0}^{2n-1}\text{cotg}(2K+1)\frac{\pi}{4n}$$

$$= i^{2n}\prod_{K=0}^{2n-1}\text{cotg}(2K+1)\frac{\pi}{4n}$$

$$2 = (-1)^n\prod_{K=0}^{2n-1}\text{cotg}(2K+1)\frac{\pi}{4n}$$

$$2(-1)^n = \prod_{K=0}^{2n-1}\text{cotg}(2K+1)\frac{\pi}{4n} \;.$$

(75) Si n es multiplo de 4 , calcular:

$$N = \sum_{K=1}^{2n}(1-i)^{3K} \quad , D = \prod_{K=1}^{2n}(1+i)^{2K}$$

SOLUCIN

1) En N , en primer lugar hallar :

$$z = (1-i)^3 = 1-3i+3i^2-i^3$$
$$= 1-3i-3+i = -2-2i$$

2) $$\sum_{K=1}^{2n} z^K = z\,\frac{1-z^{2n}}{1-z} \quad \text{, donde } z=-2(1+i)$$
$$z^2 = 8i$$
$$= -2(1+i)\frac{1-(8i)^n}{1-(-2-2i)} \quad , \text{si } n=\dot{4} \Rightarrow i^n = 1$$
$$= \frac{-2}{13}(5+i)(1-8^n)$$

3) En D , en primer lugar hallar

$$w = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1$$
$$w = 2i$$

4) $$\prod_{K=1}^{2n} w^K = w.w^2w^3\dots\dots w^{2n}$$
$$= w^{1+2+3+\dots+2n} = w^{\frac{(1+2n)2n}{2}}$$
$$= w^{(1+2n)n}$$

Si $n=\dot{4}$ $\Rightarrow$
$$= \left[(2i)^n\right]^{1+2n}$$
$$= 2^{n(1+2n)}$$

(76) Demostrar que : $\cos(n\cos^{-1}x) = \sum_{q=0}^{P/2}\sum_{K=0}^{q}\binom{n}{2q}\binom{q}{K}(-1)^{K+q}X^{n+2K-2q}$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

donde $x\neq 0$ y P es el mayor entero menor o igual que n .

SOLUCION

Para resolver este problema se requiere aplicar los sigtes conceptos :

I. Teorema de Moivre : $(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)$.

II. Binomio de Newton para el desarrollo de $(a+ib)^n$; $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$

$$(a+ib)^n = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}a^{n-K}(ib)^K \quad \text{, donde K es par o impar}$$

$$= \underbrace{\sum_{K\in N_2}\binom{n}{K}a^{n-K}(ib)^K}_{Re(a+ib)^n} + \underbrace{\sum_{K\in N_1}\binom{n}{K}a^{n-K}(ib)^K}_{i\,Im(a+ib)^n}$$

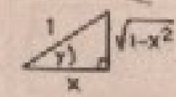
donde : N_1 = {impares positivos menores o iguales que n} $=\{1,3,5,\dots\}=\{2q-1/q\in\mathbb{N}^+\}$

N_2 = {pares no negativos menores o iguales que n} $=\{0,2,4,\dots\}=\{2q/q\in\mathbb{N}\}$

Veamos :

1) Llamemos $\begin{cases} C = \cos(n\cos^{-1}x) \\ S = \text{sen}(n\cos^{-1}x)\end{cases}$

2) $C+iS = \cos(n\cos^{-1}x) + i\,\text{sen}(n\cos^{-1}x)$, si $y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\cos y$



$\text{sen}\,y = \sqrt{1-x^2}$

$$= \cos(ny) + i\,\text{sen}(ny)$$
$$= (\cos y + i\,\text{sen}\,y)^n \quad \dots\dots\dots \text{segun I.}$$
$$= \sum_{K\in N_2}\binom{n}{K}(\cos y)^{n-K}(i\,\text{sen}\,y)^K + \sum_{K\in N_1}\binom{n}{K}(\cos y)^{n-K}(i\,\text{sen}\,y)^K$$
$$= \underbrace{\underbrace{\sum_{q=0}\binom{n}{2q}(\cos y)^{n-2q}(i\,\text{sen}\,y)^{2q}}_{Re(\cos y+i\,\text{sen}\,y)^n}}_{C} + \underbrace{\sum_{q=1}\binom{n}{2q-1}(\cos y)^{n-2q+1}(i\,\text{sen}\,y)^{2q-1}}_{i\,Im(\cos y+i\,\text{sen}\,y)^n}$$

3) Nos interesa hallar C

$$C = \sum_{q=0}\binom{n}{2q}(\cos y)^{n-2q}(i\,\text{sen}\,y)^{2q}$$
$$= \sum_{q=0}\binom{n}{2q}X^{n-2q}\underbrace{(i\sqrt{1-x^2})^{2q}}_{i^{2q}(1-x^2)^q}$$

donde : $i^{2q}=(i^2)^q=(-1)^q$

$$C = \sum_{q=0}\binom{n}{2q}X^{n-2q}(-1)^q\sum_{K=0}^{q}\binom{q}{K}(-x^2)^K$$
$$= \sum_{q=0}\binom{n}{2q}X^{n-2q}(-1)^q\sum_{K=0}^{q}\binom{q}{K}(-1)^K x^{2K}$$
$$= \sum_{q=0}\binom{n}{2q}\sum_{K=0}^{q}\binom{q}{K}(-1)^{K+q}X^{n+2K-2q}$$

(77) Calcular $E = \prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{K\pi}{n}\cos\left(\frac{4K+1}{4n}\right)\pi.\cos\left(\frac{4K+3}{4n}\right)\pi$, n impar

a partir de la ecuación $x^{3n}-x^{2n}+x^n-1=0$

SOLUCION : Este tipo de problema se resuelve con tres pasos : hallar las raíces, factorizar el polinomio , y buscar un valor adecuado para X .

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Hallar las raíces del polinomio : $x^{3n}-x^{2n}+x^n-1$

Para ello , factorizamos :

$$x^{3n}-x^{2n}+x^n-1 = x^{2n}(x^n-1)+(x^n-1)$$
$$= (x^n-1)(x^{2n}+1)$$
$$= (x^n-1)(x^n+i)(x^n-i)$$

Pero : $(x^n-1)(x^n+i)(x^n-i)=0$

$\Rightarrow \quad x^n-1=0 \quad \vee \quad x^n+i=0 \quad \vee \quad x^n-i=0$

1.1) De $x^n - 1 = 0$

$\Rightarrow x^n = 1$

$x = \sqrt[n]{1}$

$$\boxed{x_K = \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{n}\right) \quad K = 0, 1, \dots, n-1}$$

1.2) De $x^n - i = 0$

$\Rightarrow x^n = i$

$x = \sqrt[n]{i}$

$$\boxed{x_K = \text{cis}\left(\frac{\pi/2 + 2K\pi}{n}\right) \quad K = 0, 1, \dots, n-1}$$

1.3) De $x^n + i = 0$

$\Rightarrow x^n = -i$

$x = \sqrt[n]{-i}$

$$\boxed{x_K = \text{cis}\left(\frac{3\pi/2 + 2K\pi}{n}\right) \quad K = 0, 1, \dots, n-1}$$

Las raíces del polinomio son las halladas en : 1.1 , 1.2 , 1.3 .

PASO 2 Factorizar el polinomio :

$$(2*) \cdots \quad x^{3n} - x^{2n} + x^n - 1 = \prod_{K=0}^{n-1}\left(x - \text{cis}\left(\frac{2K\pi}{n}\right)\right)\prod_{K=0}^{n-1}\left(x - \text{cis}\left(\frac{1+4K}{n}\right)\pi\right)\prod_{K=0}^{n-1}\left(x - \text{cis}\left(\frac{3+4K}{n}\right)\pi\right)$$

PASO 3 Buscar un valor adecuado para x que nos permita hallar **E** .

No conviene con $x = 1$, porque anula al primer miembro de $(2*)$ para todo "n" impar .

Pero con $x = -1$, no se anula el primer miembro

Probemos con $x = -1$ en 2* con "n" impar :

$$(3*) \underbrace{(-1)^{3n} - (-1)^{2n} + (-1)^n - 1}_{-4} = \prod_{K=0}^{n-1}\Big(-1 - \text{cis}\underbrace{\left(\frac{2K\pi}{n}\right)}_{\alpha_K}\Big)\prod_{K=0}^{n-1}\Big(-1 - \text{cis}\underbrace{\left(\frac{1+4K}{n}\right)\pi}_{\beta_K}\Big)\prod_{K=0}^{n-1}\Big(-1 - \text{cis}\underbrace{\left(\frac{3+4K}{n}\right)\pi}_{\theta_K}\Big)$$

Simplificar cada factor :

$$\prod_{K=0}^{n-1}(-1 - \text{cis}\,\alpha_K) = \prod_{K=0}^{n-1}(-1 - \cos\alpha_K - i\,\text{sen}\,\alpha_K)$$

$$= \prod_{K=0}^{n-1}(-(1 + \cos\alpha_K) - i\,\text{sen}\,\alpha_K)$$

$$= \prod_{K=0}^{n-1}\left(-2\cos^2\frac{\alpha_K}{2} - i\,2\,\text{sen}\frac{\alpha_K}{2}\cos\frac{\alpha_K}{2}\right)$$

$$= \prod_{K=0}^{n-1}\Big[-2\cos\frac{\alpha_K}{2}\underbrace{\left(\cos\frac{\alpha_K}{2} + i\,\text{sen}\frac{\alpha_K}{2}\right)}_{\text{cis}\frac{\alpha_K}{2}}\Big]$$

$$= (-2)^n\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{\alpha_K}{2}\underbrace{\prod_{K=0}^{n-1}\text{cis}\frac{\alpha_K}{2}}$$

$$= \quad " \quad \text{cis}\left(\sum_{K=0}^{n-1}\frac{\alpha_K}{2}\right)$$

$$= \quad " \quad \text{cis}\left(\sum_{K=0}^{n-1}\frac{K\pi}{n}\right)$$

$$= (-2)^n\prod_{K=0}^{n-1}\cos\left(\frac{K\pi}{n}\right)\text{cis}\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$\prod_{K=0}^{n-1}(-1 - \text{cis}\,\beta_K) = \prod_{K=0}^{n-1}(-1 - \cos\beta_K - i\,\text{sen}\,\beta_K)$$

$$= (-2)^n\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{\beta_K}{2}\,\text{cis}\left(\sum_{K=0}^{n-1}\frac{\beta_K}{2}\right)$$

$$= \quad " \quad \text{cis}\left(\sum_{K=0}^{n-1}\frac{(1+4K)\pi}{4n}\right)$$

$$= \quad " \quad \text{cis}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)$$

$$= (-2)^n\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{(1+4K)\pi}{4n}\,.\,\text{cis}\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)$$

$$\prod_{K=0}^{n-1}(-1 - \text{cis}\,\theta_K) = \prod_{K=0}^{n-1}(-1 - \cos\theta_K - i\,\text{sen}\,\theta_K)$$

$$= (-2)^n\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{\theta_K}{2}\,\text{cis}\left(\sum_{K=0}^{n-1}\frac{\theta_K}{2}\right)$$

$$= \quad " \quad \text{cis}\left(\sum_{K=0}^{n-1}\frac{(3+4K)\pi}{4n}\right)$$

$$= \quad " \quad \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$$

$$= (-2)^n\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{(3+4K)\pi}{4n}\,\text{cis}\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)$$

Donde : 1) $\sum_{K=0}^{n-1}\frac{K\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\sum_{K=0}^{n-1}K = \frac{\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)\pi}{2}$

2) $\sum_{K=0}^{n-1}\frac{(1+4K)\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n}\sum_{K=0}^{n-1}(1+4K) = \frac{\pi}{4n}\left(n + 4\frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{(2n-1)\pi}{4}$

3) $\sum_{K=0}^{n-1}\frac{(3+4K)\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n}\sum_{K=0}^{n-1}(3+4K) = \frac{\pi}{4n}\left(3n + 4\frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(2n+1)$

Sustituir en (3*) :

$$-4 = \underbrace{(-2)^{3n}\prod_{K=0}^{n-1}\cos\left(\frac{K\pi}{n}\right)\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{(1+4K)\pi}{4n}\prod_{K=0}^{n-1}\cos\frac{(3+4K)\pi}{4n}}_{E}\ \text{cis}\underbrace{\left[\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{2} - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right]}_{\frac{(3n-1)\pi}{2}}$$

$\Rightarrow -4 = (-2)^{3n}E\,\text{cis}\frac{(3n-1)\pi}{2}$

$\Rightarrow E = -2^{2-3n}$, n = impar

Donde : $\text{cis}\frac{(3n-1)\pi}{2} = \text{cis}(3m-2)\pi = \text{cis}(3m\pi) = \text{cis}(m\pi) = (-1)^m = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$.

$n = \text{impar} = 2m-1 \Rightarrow m = \frac{n+1}{2}$

Obras del autor

1. TEORIA DE LOS CONJUNTOS : lógica , conjuntos , relación binaria , inducción
2. NUMEROS REALES : intervalos , inecuaciones , cotas .
3. RELACIONES Y FUNCIONES DE $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$
4. LIMITES Y CONTINUINAD
5. CALCULO DIFERENCIAL : las derivada y sus aplicaciones
6. CALCULO INTEGRAL : Metodos de integral , areas .
7. VECTORES EN $\mathbb{R}^3$: módulo , producto escalar , producto vectorial , triple producto , ángulo entre dos vectores .
8. ALGEBRA LINEAL : espacios vectores , matrices , sistema de ecuaciones lineales , transformaciones lineales , espacio cociente , vectores propios .
9. CALCULO SUPERIOR : derivadas parciales , multiplicadores de Lagrange , aplicaciones a la microeconomía , doble integral .
10. PROBABILIDADES PARTE I : eventos , espacio muestral , Bayes .
11. PROBABILIDADES PARTE II : función de densidad , E[x] , Var[x] .
12. PROBABILIDADES PARTE III : distribuciones discretas y continuas .
13. INFERENCIA ESTADISTICA : muestreo , distribuciones muestrales .
14. RECTAS Y PLANOS EN $\mathbb{R}^3$.
15. NUMEROS COMPLEJOS : polinomios , ecuaciones polinómicas , matrices , determinantes , sistema de ecuaciones lineales .