UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

Semestre: **2023 – *A***

PRÁCTICA DIRIGIDA DE NÚMEROS REALES

AXIÓMAS DE LOS NUMEROS REALES

ADICIÓN

$A1$: CLAUSURA O CERRADURA

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene: $(a+b) \in \mathbb{R}$

$A2$: CONMUTATIVA

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene: $a+b=b+a$

$A3$: ASOCIATIVA

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene: $(a+b)+c=a+(b+c)$

$A4$: ELEMENTO NEUTRO ADITIVO

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists 0 \in \mathbb{R} : a+0=a+0=a$

$A5$: ELEMENTO INVERSO ADITIVO

Dado $a \in \mathbb{R}$, $\exists (-a) \in \mathbb{R} : a+(-a)=(-a)+a=0$

MULTIPLICACÍON

$M1$: CLAUSURA O CERRADURA

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene: $(a.b) \in \mathbb{R}$

$M2$: CONMUTATIVA

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene: $a.b=b.a$

$M3$: ASOCIATIVA

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene: $(a.b).c=a.(b.c)$

$M4$: ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists 1 \in \mathbb{R} : a.1=a.1=a$

$M5$: ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO

Dado $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $\exists (a)^{-1} \in \mathbb{R} : a.(a)^{-1}=(a)^{-1}.a=1$

DISTRIBUTIVA

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$D1$: $(a+b).c=a.c+b.c$

$D2$: $a.(b+c)=a.b+a.c$

AXIÓMAS DE ORDEN

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{O1}$: **TRICOTOMÍA**

Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a > b$, $a = b$ o $a < b$

$\boldsymbol{O2}$: **MONOTONÍA DE LA ADICIÓN**

Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a + c < b + c$

$\boldsymbol{O3}$: **MONOTONÍA DE LA MULTIPLICACIÓN**

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a.c < b.c$

$\boldsymbol{O4}$: **TRANSITIVIDAD**

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

2. Demuestre que el elemento neutro aditivo es único.

3. Demuestre que el elemento inverso aditivo es único.

4. Demuestre que el elemento neutro multiplicativo es único.

5. Demuestre que el elemento inverso multiplicativo es único.

6. Si $a \in \mathbb{R}$, demostrar que $a.0 = 0$

7. Si $a \in \mathbb{R}$, demostrar que $-a = (-1).a$

8. Si $ab \neq 0$, demuestre que $(ab)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$

9. Si $a.c = b.c$, con $c \neq 0$, entonces $a = b$

10. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, demuestre que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

11. Si $a^2 + b^2 = 1$, entonces $-\sqrt{2} \leq a + b \leq \sqrt{2}$

12. Si $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$, entonces $a.c + b.d \leq 1$

13. Si $\forall x \in \mathbb{R}$ y n par . Demuestre que

$$\frac{x^n}{x^{2n} + 1} \leq \frac{1}{2}$$

14. Si $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$a.b + b.c + a.c \leq a^2 + b^2 + c^2$$

15. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, demuestre que

$$\frac{a + b}{a + b + 1} \leq \frac{a}{b + 1} + \frac{b}{a + 1}$$

16. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que

$$(a.b + c.d)(a.c + b.d) \geq 4a.b.c.d$$

17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Pruebe la desigualdad

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

18. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+ \; y \; \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Pruebe que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

19. Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$. Pruebe la desigualdad

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

20. Si $a > 0$, $b > 0$, $3a \neq 5b$. Demuestre que

$$\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$$

21. Sea a, b y c números reales positivos. Pruebe la desigualdad

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

22. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, pruebe que

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8a.b.c$$

23. Si $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$(|a| + |b|)(|b| + |c|)(|a| + |c|) \geq 8|a.b.c|$$

24. Para $|a.b.c| \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, demuestre que

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \geq \frac{9}{|a| + |b| + |c|}$$

25. Si $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$|a|^3 + |b|^3 + |c|^3 \geq \frac{|a.b|(a+b) + |a.c|(a+c) + |b.c|(b+c)}{2}$$

26. Si $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$a^2.b^2 + b^2.c^2 + a^2.c^2 \geq a.b.c(a+b+c)$$

27. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y distintos entre sí. Pruebe que

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{(a.b + b.c + a.c)^{\frac{1}{2}}}{3} > (a.b.c)^{\frac{1}{3}}$$

28. Si a, b, c son cantidades positivas. Demuestre que

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+c^2}{a+c} \geq a+b+c$$

29. Demostrar que

$$a \leq b \leq c \quad \Longrightarrow \quad |b| \leq |a|+|c|$$

30. Probar que

$$|a|+|b| \geq 2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$$

31. Demostrar que

$$|x|+|y| = \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \,\wedge\, y=0$$

32. Probar que

$$|a|+|b|=|a-b| \quad \Leftrightarrow \quad a.b \leq 0$$

33. Demostrar que

$$a, b \in \mathbb{R} \;, a^2+b^2=1 \quad \Longrightarrow \quad |a+b| \leq \sqrt{2}$$

34. Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}-\{0\}$

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \geq \sqrt{2}$$

35. $x, y, z \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $x+y+z=1$. Pruebe la desigualdad

$$\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{x.z}{y} \geq 1$$

36. Sea $a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$. Pruebe la desigualdad.

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$$

37. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales. Demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i . b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

$$\boldsymbol{Desigualdad\ de\ Cauchy-Schwarz}$$

Bellavista, 1 de setiembre del 2023