MATEMATIKA 1 – KB, přípravné úlohy 1 k semestrální zkoušce

1A) Zjistěte, zda výroková formule

$$\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)\big) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r)$$

je tautologie / kontradikce / splnitelná a v případě splnitelné formule ji převeďte na disjunktivní normální tvar.

1B) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2) Firma má 25 zaměstnanců, z toho 12 zaměstnanců má řidičský průkaz, 8 zaměstnanců má svářečský průkaz. 10 zaměstnanců nevlastní ani jeden z těchto průkazů. Kolik zaměstnanců firmy má svářečský i řidičský průkaz?

3) Na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je definována relace $R = \{(x, y) \in A^2;\ |x - y| = 3 \vee x = y\}$. Zjistěte, zda se jedná o relaci ekvivalence, a pokud ano, určete třídy rozkladu.

4A) Užitím Gaussovy eliminační metody řešte soustavu 4 rovnic o 4 neznámých

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 4, \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 13x_4 &= 19, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9. \end{aligned}$$

4B) Rozhodněte, zda báze vektorového prostoru matic $\mathbb{R}^{2\times 2}$ může být tvořena maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) Ve vektorovém prostoru $V = P_2$ polynomů nejvýše druhého stupně určete souřadnice polynomů $P(x) = x^2 - 5x + 4$ a $R(x) = x + 1$ vzhledem k bázi $B = \big(2, -x + 1, x^2 - 3x + 4\big)$.

6) Jsou dány vektorové podprostory $U_1 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$ a $U_2 = \langle (0, 1, -1), (1, 2, 0) \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete průnik $U_1 \cap U_2$ a součet $U_1 + U_2$ těchto podprostorů a množiny generátorů průniku a součtu podprostorů U_1 a U_2.

Stručná řešení a výsledky úloh

1A) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$q \Rightarrow \neg r$	L $p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$	P $p \wedge \neg r$	$L \Leftrightarrow P$	
1	1	1	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	$p \wedge q \wedge r$
1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$p \wedge q \wedge \neg r$
1	0	1	0	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
0	1	1	0	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	0	0	
0	0	1	0	1	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	0	0	

Vzhledem k pravdivostním hodnotám v předposledním sloupci je daná výroková formule splnitelná.
Disjunktivní normální forma: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

1B) Dokazujeme tvrzení $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1+4+9+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

I. $n=1$: $L=1$, $P=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$, $L=P$.

II. Předpokládáme platnost tvrzení pro $n=k$, tj.

$$1+4+9+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

a dokážeme platnost tvrzení pro $n=k+1$, tj.

$$1+4+9+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Užitím indukčního předpokladu dostáváme: $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

$L=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\dfrac{k(2k^2+3k+1)+6k^2+12k+6}{6}=\dfrac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$,

$P=\dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\dfrac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$, takže $L=P$ a rovnost platí pro každé $n\in\mathbb{N}$.

2) Označme Z množinu všech 25 zaměstnanců, R množinu 12 zaměstnanců s řidičským průkazem, S množinu 8 zaměstnanců se svářečským průkazem, $(R\cup S)'$ množinu 10 zaměstnanců nevlastnících ani jeden z obou průkazů.

Platí tedy $|Z|=25$, $|R|=12$, $|S|=8$, $|(R\cup S)'|=10$. Protože $|Z|=|R\cup S|+|(R\cup S)'|$, dostáváme odtud $|R\cup S|=25-10=15$.

Podle principu inkluze a exkluze je $|R\cup S|=|R|+|S|-|R\cap S|$, odkud $|R\cap S|=12+8-15=5$, takže řidičský i svářečský průkaz má 5 zaměstnanců firmy.

3) $R=\{(x,y)\in A^2;\ |x-y|=3\vee x=y\}$, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,5),(5,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

R je reflexivní: $(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\in R$,

R je symetrická: $(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\in R$,

R je tranzitivní: $(1,4)\in R\wedge(4,1)\in R\Rightarrow(1,1)\in R$, $(4,1)\in R\wedge(1,4)\in R\Rightarrow(4,4)\in R$, $\dots$, $(6,3)\in R\wedge(3,6)\in R\Rightarrow(6,6)\in R$.

Relace R je tedy relace ekvivalence.

Protože $R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}\cup\{(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\}\cup\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}$, jsou třídy rozkladu $\mathcal{R}=R/\!\sim\colon\{1,4\},\ \{2,5\},\ \{3,6\}$.

4A) Provedeme přímý a zpětný chod Gaussovy eliminační metody:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}2&-1&-1&3&1\\2&-1&0&-2&4\\8&-4&1&-13&19\\6&-3&-1&-1&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}2&-1&-1&3&1\\0&0&1&-5&3\\0&0&5&-25&15\\0&0&2&-10&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}2&-1&-1&3&1\\0&0&1&-5&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Počet parametrů $n-h=2$ – např. $x_2=s$, $x_4=t$.

Z 2. řádku matice ve stupňovitém tvaru dostáváme $x_3=3+5t$

a z 1. řádku máme $x_1=(1+x_2+x_3-3x_4)/2=(1+s+3+5t-3t)/2=2+s/2+t$.

Řešení je tedy tvaru $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(2+s/2+t,s,3+5t,t)^{\mathrm{T}}$, $s,t\in\mathbb{R}$.

4B) Pro matice A,B,C,D ověříme, zda rovnice $\alpha\cdot A+\beta\cdot B+\gamma\cdot C+\delta\cdot D=O_2$ má pouze triviální řešení $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$. Porovnáním stejnolehlých prvků (tj. prvků na pozicích $(1,1),(1,2),(2,1)$ a $(2,2)$) na obou stranách maticové rovnice obdržíme homogenní soustavu 4 rovnic o 4 neznámých: $\beta+2\gamma+3\delta=0$, $\alpha+2\beta+3\gamma=0$, $2\alpha+3\beta+\delta=0$, $3\alpha+\gamma+2\delta=0$. Užitím GEM dostáváme:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\2&3&0&1&0\\3&0&1&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&-1&-6&1&0\\0&-6&-8&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&-4&4&0\\0&0&4&20&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&24&0\end{array}\right).$$

Zpětným chodem obdržíme pouze triviální řešení $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, Matice A,B,C,D jsou tedy lineárně nezávislé a protože $\dim\mathbb{R}^{2\times 2}=4$, tvoří bázi tohoto vektorového prostoru.

5) Pro souřadnice (p_1, p_2, p_3) polynomu $P(x) = x^2 - 5x + 4$ ve vektorovém prostoru $V = P_2$ polynomů nejvýše druhého stupně vzhledem k bázi $B = \big(2, -x+1, x^2 - 3x + 4\big)$ platí rovnice

$$x^2 - 5x + 4 = p_1 \cdot 2 + p_2(-x+1) + p_3(x^2 - 3x + 4) = p_3 x^2 + (-p_2 - 3p_3)x + 2p_1 + p_2 + 4p_3 .$$

Podobně pro souřadnice (r_1, r_2, r_3) polynomu $R(x) = x + 1$ vzhledem k bázi B platí rovnice

$$x + 1 = r_1 \cdot 2 + r_2(-x+1) + r_3(x^2 - 3x + 4) = r_3 x^2 + (-r_2 - 3r_3)x + 2r_1 + r_2 + 4r_3 .$$

Obě soustavy lze řešit současně GEM: $\left(\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, odkud zpětným chodem dostáváme, že obě soustavy lineárních rovnic mají jediné řešení $p_3 = 1$, $p_2 = 5 - 3p_3 = 2$ a $p_1 = (4 - p_2 - 4p_3)/2 = -2/2 = -1$, $r_3 = 0$, $r_2 = -1 - 3r_3 = -1$ a $r_1 = (1 - r_2 - 4r_3)/2 = 2/2 = 1$, takže $P(x)_B = (-1, 2, 1)$ a $R(x)_B = (1, -1, 0)$.

Na závěr můžeme provést zkoušku správnosti výpočtu: $(-1)\cdot 2 + 2(-x+1) + (x^2 - 3x + 4) = x^2 - 5x + 4$, $1 \cdot 2 - 1(-x+1) + 0 \cdot (x^2 - 3x + 4) = x + 1$.

6) Pro vektory $\boldsymbol{x}$ z průniku podprostorů U_1 a U_2 musí platit $\boldsymbol{x} = \alpha_1(1,0,0) + \beta_1(0,1,1)$ a zároveň $\boldsymbol{x} = \alpha_2(0,1,-1) + \beta_2(1,2,0)$, odkud $\alpha_1(1,0,0) + \beta_1(0,1,1) = \alpha_2(0,1,-1) + \beta_2(1,2,0)$. Z rovnosti 1. až 3. složek dostaneme soustavu 3 rovnic o 4 neznámých $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$, kterou řešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Protože $n - h = 4 - 3 = 1$, obdržíme zpětným chodem parametrické řešení s 1 parametrem – např. $\beta_2 = t \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha_2 = -\beta_2 = -t$, $\beta_1 = \alpha_2 + 2\beta_2 = t$, $\alpha_1 = \beta_2 = t$. Průnikem $U_1 \cap U_2$ je VP $\{t(1,0,0) + t(0,1,1) = -t(0,1,-1) + t(1,2,0)\} = \{(t,t,t)\}$, generátorem je vektor $(1,1,1)$.

Součet VPP $U_1 + U_2$ je lineární obal $\langle U_1 \cup U_2 \rangle$. Získáme ho tak, že generátory obou VPP zapíšeme do řádků matice, upravíme ji na stupňovitý tvar a nenulové řádky určují generátory součtu VPP.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generátory vektorového prostoru $U_1 + U_2$, kterým je prostor $\mathbb{R}^3$, jsou tedy např. vektory $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ anebo také odpovídající tři původní vektory $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$.

MATEMATIKA 1 – KB, <u>přípravné úlohy 2</u> k semestrální zkoušce

---

1A) Zjistěte, zda výroková formule

$$\big(p \Rightarrow (\neg q \vee p)\big) \wedge (q \vee \neg p)$$

je tautologie / kontradikce / splnitelná a v případě splnitelné formule ji převeďte na disjunktivní normální tvar.

1B) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

2) Sportovní soutěže se účastní celkem 14 týmů. Výsledek soutěže je dán tím, které tři týmy obsadí 1., 2. a 3. místo (záleží na pořadí) a které dva týmy sestoupí do nižší soutěže (nezáleží na pořadí). Kolik je možných výsledků soutěže?

3) Na množině $\mathbb{Q}$ je definována relace $R = \left\{ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right);\ ad = bc \right\}$. Tedy např. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\right) \in R$, neboť $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Dokažte, že R je relace ekvivalence.

4A) Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & a \\ 1 & 15 & b & 24 \end{pmatrix}$ v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$.

4B) Rozhodněte, zda báze vektorového prostoru P_3 polynomů stupně nejvýše 3 může být tvořena polynomy

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1,\quad Q(x) = x^3 - x,\quad R(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2,\quad S(x) = x^3 + x - 6.$$

5) Ukažte, že vektory $P(x) = 1 - x^2 + x^3$, $Q(x) = 1 + x^2 + x^3$, $R(x) = 1 - x - x^3$ jsou lineárně nezávislé. Doplňte je vhodným vektorem ze standardní báze vektorového prostoru P_3 polynomů stupně nejvýše 3 na bázi B vektorového prostoru P_3. Určete souřadnice vektoru $S(x) = 1 - x + 3x^2 - 2x^3$ vzhledem k takto zvolené bázi B.

6) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektorové podprostory $U_1 = \langle (1,1,1,0), (2,3,2,1) \rangle$ a $U_2 = \langle (2,3,2,3), (1,1,1,2) \rangle$. Určete dimenzi a bázi součtu $U_1 + U_2$ a průniku $U_1 \cap U_2$ podprostorů U_1 a U_2.

<u>Stručná řešení a výsledky úloh</u>

1A) $(p \Rightarrow (\neg q \vee p)) \wedge (q \vee \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \vee p$	L: $p \Rightarrow (\neg q \vee p)$	P: $q \vee \neg p$	$L \wedge P$	
1	1	0	0	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$p \wedge q$
1	0	0	1	1	1	0	0	
0	1	1	0	0	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\neg p \wedge q$
0	0	1	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\neg p \wedge \neg q$

Vzhledem k pravdivostním hodnotám v předposledním sloupci je daná výroková formule splnitelná.
Disjunktivní normální forma: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

1B) Dokazujeme tvrzení $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1+2+4+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1$

I. $n=1$: $L=1$, $P=2-1=1$, $L=P$.

II. Předpokládáme platnost tvrzení pro $n=k$, tj.

$$1+2+4+\cdots+2^{k-1} = 2^k - 1$$

a dokážeme platnost tvrzení pro $n=k+1$, tj.

$$1+2+4+\cdots+2^{k-1}+2^k = 2^{k+1}-1.$$

Užitím indukčního předpokladu dostáváme:

$$(1+2+4+\cdots+2^{k-1})+2^k = (2^k-1)+2^k = 2\cdot 2^k - 1 = 2^{k+1}-1.$$

Tvrzení pro $n=k+1$ je tak dokázáno, takže $1+2+4+\cdots+2^{n-1} = 2^n-1$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

2) Úlohu lze řešit dvěma způsoby:

a) Nejprve určíme, kolika způsoby lze vybrat ze 14 týmů 3 medailisty, a pak určíme, kolika způsoby lze ze zbylých 11 týmů vybrat 2 sestupující: $V_3(14)\cdot\binom{11}{2} = \dfrac{14!}{(14-3)!}\cdot\dfrac{11!}{(11-2)!\,2!} = 120120.$

b) Nejprve určíme, kolik způsoby lze ze 14 týmů vybrat 2 sestupující, a potom, kolika způsoby lze z 12 nejlepších týmů vybrat 3 medailisty: $\binom{14}{2}\cdot V_3(12) = \dfrac{14!}{(14-2)!\,2!}\cdot\dfrac{12!}{(12-3)!} = 120120.$

3) Relace $R = \left\{\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right);\ ad=bc\right\}$ je:

1. reflexivní, protože $\left(\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right)\in R$ právě tehdy, když $ab=ba$,

2. symetrická, protože je-li $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)\in R$, pak $ad=bc$, takže $da=cb$, tj. $cb=da$, odkud $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)\in R$,

3. tranzitivní, protože pokud $\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)\in R \wedge \left(\frac{c}{d},\frac{e}{f}\right)\in R$, potom platí $ad=bc \wedge cf=de$; z těchto vztahů plyne, že $\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$ a $\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$, odkud $\dfrac{a}{b}=\dfrac{e}{f}$, tj. $af=be$, takže $\left(\frac{a}{b},\frac{e}{f}\right)\in R$.

Celkem jsme tak dokázali, že R je relace ekvivalence.

4A) $$\begin{pmatrix}1&0&5&-1\\0&3&-2&5\\2&9&4&a\\1&15&b&24\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&5&-1\\0&3&-2&5\\0&9&-6&a+2\\0&15&b-5&25\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&5&-1\\0&3&-2&5\\0&0&0&a-13\\0&0&b+5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&5&-1\\0&3&-2&5\\0&0&b+5&0\\0&0&0&a-13\end{pmatrix}.$$

Tedy $h(A)=2$ pro $a=13$ a $b=-5$, $h(A)=3$, je-li $a=13$ a $b\neq-5$, anebo je-li $a\neq 13$ a $b=-5$, $h(A)=4$, je-li $a\neq 13$ a $b\neq -5$.

4B) Lineární kombinaci daných polynomů $P(x)=x^3-x^2+x-1$, $Q(x)=x^3-x$, $R(x)=2x^3-x^2-x+2$, $S(x)=x^3+x-6$ položíme rovnu nulovému polynomu

$$\alpha(x^3-x^2+x-1)+\beta(x^3-x)+\gamma(2x^3-x^2-x+2)+\delta(x^3+x-6)=0\quad[=0x^3+0x^2+0x+0]$$

a zjistíme, zda koeficienty $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$. Pokud ano, pak jsou polynomy lineárně nezávislé. Protože $\dim P_3=4$, pak by v tomto případě tvořily bázi vektorového prostoru P_3. Porovnáním koeficientů u třetích až nultých mocnin obdržíme homogenní soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých, kterou vyřešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&0\\-1&0&-1&0&0\\1&-1&-1&1&0\\-1&0&2&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&0\\0&1&1&1&0\\0&-2&-3&0&0\\0&1&4&-5&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&-1&2&0\\0&0&3&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Protože řešení soustavy je netriviální [např. při volbě $\delta=t$, $t\in\mathbb{R}$, je $\gamma=2t$, $\beta=-3t$, $\alpha=-2t$] jsou polynomy $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ lineárně závislé takže netvoří bázi vektorového prostoru P_3.

5) Vektory $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když polynomická rovnice $\alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma R(x) = 0$ má pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Příslušnou soustavu 4 rovnic (porovnáváme koeficienty u nulté až třetí mocniny) o 3 neznámých α, β, γ není nutné řešit zvlášť. Matice této homogenní soustavy by vznikla tak, že bychom vektory koeficientů $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, -1, 0, -1)$ daných polynomů $P(x) = 1 - x^2 + x^3$, $Q(x) = 1 + x^2 + x^3$, $R(x) = 1 - x - x^3$ zapsali do sloupců. Místo toho, abychom řešili pouze tuto soustavu, bude výhodnější, když za tyto tři sloupce zapíšeme sloupce vektorů standardní báze $1, x, x^2, x^3$ prostoru P_3. Obdržíme tak matici typu 4/7, kterou převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

První čtyři sloupce, které vznikly úpravou sloupcových vektorů koeficientů polynomů $P(x) = 1 - x^2 + x^3$, $Q(x) = 1 + x^2 + x^3$, $R(x) = 1 - x - x^3$ a sloupcového vektoru koeficientů polynomu $E_1(x) = 1$ standardní báze prostoru P_3, jsou lineárně nezávislé, takže tvoří hledanou bázi B.
Souřadnice (a, b, c, d) polynomu $S(x) = 1 - x + 3x^2 - 2x^3$ vzhledem k bázi B určíme jako řešení rovnice $aP(x) + bQ(x) + cR(x) + dE_1(x) = S(x)$. Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin obdržíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Zpětným chodem dostáváme: $d = 1$, $c = 1$, $2b = 4 - c - d \Rightarrow b = 1$, $a = 1 - b - c - d = -2$, takže hledané souřadnice vektoru $S(x)$ vzhledem k bázi B jsou $S(x)_B = (-2, 1, 1, 1)$.

Na závěr lze provést zkoušku: $(-2)(1-x^2+x^3)+(1+x^2+x^3)+(1-x-x^3)+1 = 1-x+3x^2-2x^3$.

6) Součet VPP $U_1 + U_2$ je lineární obal jejich sjednocení. Získáme ho tak, že generátory obou VPP zapíšeme do řádků matice, upravíme ji na stupňovitý tvar a nenulové řádky určují bázi součtu VPP.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenzí VPP $U_1 + U_2$ je počet lineárně nezávislých řádků, tedy $\dim(U_1 + U_2) = 3$. Bází VPP $U_1 + U_2$ jsou vektory $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$ anebo také tři původní vektory $(1, 1, 1, 0)$, $(2, 3, 2, 1)$, $(2, 3, 2, 3)$.

Pro vektory $\boldsymbol{x}$ z průniku VPP $U_1 \cap U_2$ musí platit $\boldsymbol{x} = a_1(1, 1, 1, 0) + a_2(2, 3, 2, 1)$ a zároveň $\boldsymbol{x} = a_3(2, 3, 2, 3) + a_4(1, 1, 1, 2)$, odkud $a_1(1, 1, 1, 0) + a_2(2, 3, 2, 1) = a_3(2, 3, 2, 3) + a_4(1, 1, 1, 2)$.
Z rovnosti 1. až 4. složek vektorů dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, kterou vyřešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení soustavy závisí na 1 parametru: $a_4 = t \in \mathbb{R}$, $a_3 = -a_4 = -t$, $a_2 = a_3 = -t$, $a_1 = 2a_3 + a_4 - 2a_2 = t$, takže $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$. Průnikem VPP $U_1 \cap U_2$ je VP $\{t(1, 1, 1, 0) - t(2, 3, 2, 1) = -t(2, 3, 2, 3) + t(1, 1, 1, 2)\} = \{(-t, -2t, -t, -t);\ t \in \mathbb{R}\}$, bází je vektor $(1, 2, 1, 1)$.

MATEMATIKA 1 – KB, <u>přípravné úlohy 3</u> k semestrální zkoušce

---

1A) Zjistěte, zda výroková formule

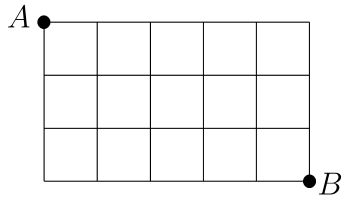
$$\big(p \Rightarrow (\neg q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow r)\big)$$

je tautologie / kontradikce / splnitelná. Splnitelnou formuli převeďte na disjunktivní normální tvar.

1B) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$7 \,|\, (8^n - 1).$$

2) Turista se chce v centru města, které je tvořeno bloky domů, dostat z bodu A do B. Přitom se může pohybovat jen na jih (dolů) nebo na východ (vpravo). Kolik takových cest existuje?



3) Určete maticovou reprezentaci M_R a vlastnosti relace $R = \{(x,x),(x,y),(y,y),(z,x),(z,y),(z,z)\}$ na množině $A = \{x,y,z\}$. Zjistěte, zda relace R je ekvivalence nebo uspořádání.

4A) Užitím minimálního počtu maticových operací vypočtěte A^{10}, jestliže $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4B) Rozhodněte, zda báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ může být tvořena uspořádanými čtveřicemi

$$\boldsymbol{s} = (0,1,2,1), \quad \boldsymbol{t} = (1,0,1,2), \quad \boldsymbol{u} = (2,1,0,1), \quad \boldsymbol{v} = (0,0,4,4).$$

5) Ukažte, že vektory $\boldsymbol{u} = (2,1,0,3)$, $\boldsymbol{v} = (-1,1,1,2)$, $\boldsymbol{w} = (1,0,-4,1)$ jsou lineárně nezávislé. Doplňte je vhodným vektorem ze standardní báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ na bázi B vektor. prostoru $\mathbb{R}^4$. Určete souřadnice vektoru $\boldsymbol{z} = (1,1,-3,3)$ vzhledem k takto zvolené bázi B.

6) Ve vektorovém prostoru P_3 polynomů nejvýše třetího stupně jsou dány vektorové podprostory $U = \langle (x^3 + x^2 - x + 1), (x^3 + 2x - 2) \rangle$ a $V = \langle (x^2 - x + 1), (-x^3 + x^2 + 2x - 1) \rangle$. Určete dimenzi a bázi součtu $U + V$ a průniku $U \cap V$ vektorových podprostorů U a V.

<u>Stručná řešení a výsledky úloh</u>

1A) $(p \Rightarrow (\neg q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow r))$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	L $p \Rightarrow (\neg q \vee r)$	R $p \Rightarrow \neg q$	S $p \Rightarrow r$	P $R \vee S$	$L \Leftrightarrow P$
1	1	1	0	1	1	0	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$
1	0	1	1	1	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
1	0	0	1	1	1	1	0	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	1	1	0	1	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	1	0	0	0	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$

Vzhledem k pravdivostním hodnotám v předposledním sloupci je daná výroková formule tautologie.

1B) Dokazujeme tvrzení $\forall n \in \mathbb{N}\colon 7 \mid (8^n - 1)$. I. $n = 1$: $7 \mid (8^1 - 1)$, tj. $7 \mid 7$.

II. Předpokládáme platnost tvrzení pro $n = k$, tj. $7 \mid (8^k - 1)$, tj. že existuje takové $m \in \mathbb{N}$, že $8^k - 1 = 7m$, a dokážeme platnost tvrzení pro $n = k + 1$, tj. že $7 \mid (8^{k+1} - 1)$. Toto tvrzení je ekvivalentní s tvrzením, že existuje takové $r \in \mathbb{N}$, že $8^{k+1} - 1 = 7r$.

Abychom získali mocninu 8^{k+1}, vynásobíme rovnici $8^k - 1 = 7m$, která je indukčním předpokladem, číslem 8. Dostaneme tak rovnici $8^{k+1} - 8 = 56m$. Nyní zapíšeme levou stranu rovnice ve tvaru $8^{k+1} - 1$, který je součástí dokazovaného tvrzení. Dosáhneme toho tak, že k oběma stranám rovnice $8^{k+1} - 8 = 56m$ přičteme 7. Obdržíme tak rovnici $8^{k+1} - 1 = 56m + 7$. Tato rovnice je již v potřebném tvaru $8^{k+1} - 1 = 7r$, kde $r = 8m + 1$, takže vztah $7 \mid (8^n - 1)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

2) Označíme-li J cestu směrem na jih podél jednoho bloku a V cestu na směrem na východ podél jednoho bloku, potom každá cesta z bodu A do B bude tvořena 3 úseky J a 5 úseky V. Například to může být cesta $JVJVVJVV$ nebo $VVJVJVJV$. Každou cestu lze tedy charakterizovat výběrem 3 z 8 možných pozic pro umístění písmena J. Počet všech cest tak je $C_3(8) = \binom{8}{3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$.

Jinou možností řešení je užití permutací s opakováním: $P_{3,5}(8) = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = 8 \cdot 7 = 56$.

3) Protože $R = \{(x,x),(x,y),(y,y),(z,x),(z,y),(z,z)\}$, je $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Relace R je reflexivní, protože $(x,x),(y,y),(z,z) \in R$. Matice M_R má na hlavní diagonále samé jedničky.
2. Relace R není symetrická, protože např. $(x,y) \in R$, ale $(y,x) \notin R$. Matice M_R není symetrická.
3. Relace R je antisymetrická, protože v M_R je na symetrických pozicích vždy jen jedna jednička.
4. Relace R je tranzitivní, neboť $(z,x) \in R \wedge (x,y) \in R \Rightarrow (z,y) \in R$. Užitím booleovského násobení matic ověříme inkluzi $R^2 \subset R$. Platí totiž rovnost dokazující tranzitivitu relace R

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_R.$$

Protože R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, je relací uspořádání na množině $A = \{x,y,z\}$.

4A) $A^{10} = (A^2 \cdot A^2 \cdot A)^2$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 \cdot A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \\ 13 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{10} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 62 & 32 & 0 \\ 93 & 0 & 32 \end{pmatrix}$.

4B) Lineární kombinaci daných vektorů $\boldsymbol{s} = (0,1,2,1)$, $\boldsymbol{t} = (1,0,1,2)$, $\boldsymbol{u} = (2,1,0,1)$, $\boldsymbol{v} = (0,0,4,4)$ položíme rovnu nulovému vektoru

$$\alpha(0,1,2,1) + \beta(1,0,1,2) + \gamma(2,1,0,1) + \delta(0,0,4,4) = (0,0,0,0)$$

a zjistíme, zda jsou všechny koeficienty $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ rovny nule. Pokud ano, pak jsou dané vektory lineárně nezávislé, pokud ne, pak jsou lineárně závislé. Protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, pak by v prvém případě tvořily bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Porovnáním koeficientů u jednotlivých složek vektorů obdržíme homogenní soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých, kterou vyřešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Protože řešení soustavy je netriviální [např. při volbě $\delta = k$, $k \in \mathbb{R}$, je $\gamma = k$, $\beta = -2k$, $\alpha = -k$] jsou dané vektory $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lineárně závislé, takže netvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

5) Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když rovnice $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w} = (0,0,0,0)$ má pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Příslušnou soustavu 4 rovnic (porovnáváme 4 složky vektorů) o 3 neznámých α, β, γ není nutné řešit zvlášť. Matice této homogenní soustavy by vznikla tak, že bychom vektory $\boldsymbol{u} = (2,1,0,3)$, $\boldsymbol{v} = (-1,1,1,2)$, $\boldsymbol{w} = (1,0,-4,1)$ zapsali do sloupců. Místo toho, abychom řešili pouze tuto soustavu, bude výhodnější, když za tyto tři sloupce zapíšeme sloupce vektorů standardní báze prostoru $\mathbb{R}^4$. Obdržíme tak matici typu 4/7, kterou převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 27 & -2 & -11 \end{array}\right).$$

První čtyři sloupce, které jsme získali úpravou sloupcových vektorů $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} = (2,1,0,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = (-1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = (1,0,-4,1)^{\mathrm{T}}$ a sloupcového vektoru $\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^4$, jsou lineárně nezávislé, takže tvoří hledanou bázi B.

Souřadnice (a,b,c,d) vektoru $\boldsymbol{z} = (1,1,-3,3)$ vzhledem k bázi B jsou řešením rovnice $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} + d\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{z}$. Porovnáním složek vektorů obdržíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Zpětným chodem obdržíme řešení $d = 1$, $c = 1$, $b = c = 1$, $a = 1 - b = 0$. Máme tak $\boldsymbol{z}_B = (0,1,1,1)$.
Na závěr lze provést zkoušku: $0 \cdot (2,1,0,3) + (-1,1,1,2) + (1,0,-4,1) + (1,0,0,0) = (1,1,-3,3)$.

6) Součet VPP $U + V$ je lineární obal jejich sjednocení. Získáme ho tak, že generátory obou VPP (koeficienty u mocnin jednotlivých polynomů) zapíšeme do řádků matice, kterou upravíme na stupňovitý tvar a nenulové řádky určují bázi součtu VPP.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimenzí VPP $U + V$ je počet lineárně nezávislých řádků, tedy $\dim(U + V) = 4$. Bází VPP $U + V$ jsou tak polynomy $x^3 + x^2 - x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x - 1$ a 1 anebo také všechny čtyři polynomy generující VPP U a V.

Pro vektory $\boldsymbol{x} \in U \cap V$ platí: $\boldsymbol{x} = a_1(1,1,-1,1) + a_2(1,0,2,-2)$ a $\boldsymbol{x} = a_3(0,1,-1,1) + a_4(-1,1,2,-1)$, odkud $a_1(1,1,-1,1) + a_2(1,0,2,-2) = a_3(0,1,-1,1) + a_4(-1,1,2,-1)$.

Z rovnosti 1. až 4. složek vektorů dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, kterou řešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení je jen triviální $a_i = 0$, $i = 1,2,3,4$, takže průnik $U \cap V = \{(0,0,0,0)\}$, což plyne i z lineární nezávislosti daných polynomů, tedy $\dim(U \cap V) = 0$. Nulový vektor je lineárně závislý, takže není splněn požadavek na bázi.

MATEMATIKA 1 – KB, přípravné úlohy 4 k semestrální zkoušce

1A) Zjistěte, zda výroková formule

$$p \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$$

je tautologie / kontradikce / splnitelná. Splnitelnou formuli převeďte na disjunktivní normální tvar.

1B) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$31 \,|\, (5^{n+1} + 6^{2n-1}).$$

2) Určete počet různých 6-znakových hesel, které lze vytvořit z 10 znaků — z 5 číslic $1, 2, 3, 4, 5$ a z 5 písmen A, B, C, D, E, jestliže
i) žádný znak se nemůže opakovat [např. $1EA43B$],
ii) heslo obsahuje 4 písmena a 2 číslice (v lib. pořadí, znaky se mohou opakovat) [např. $2AAC2D$],
iii) heslo začíná číslicí a obsahuje aspoň 1 písmeno (znaky se mohou opakovat) [např. $51B1A1$].

3) Je dána množina $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Určete výčtem prvky relace $R = \{(x, y) \in A^2;\ |x| \le y\}$ a její základní vlastnosti.

4A) Zjistěte, zda čtvercová matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ je kořenem polynomu $P(x) = x^3 - 4x^2 - 8x + 14$, tj. ověřte maticovou rovnost $A^3 - 4A^2 - 8A + 14E_3 = O_3$.

4B) Rozhodněte, zda báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^2$ může být tvořena uspořádanými dvojicemi

$$\boldsymbol{a} = (1, -1),\ \ \boldsymbol{b} = (1 - \mathrm{j}, 1),\ \ \boldsymbol{c} = (\mathrm{j}, 1 - \mathrm{j}),\ \ \boldsymbol{d} = (1 + \mathrm{j}, 1 + \mathrm{j}).$$

5) Určete nějakou bázi vektorového podprostoru $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reálných čtvercových matic 2. řádu. Tuto bázi doplňte pomocí vhodných vektorů standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ na bázi B.
Určete souřadnice vektoru $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k takto zvolené bázi B.

6) Jsou dány vektorové podprostory $U = \langle (0, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1) \rangle$ a $V = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Určete dimenzi a bázi součtu $U + V$ a průniku $U \cap V$ těchto podprostorů.

Stručná řešení a výsledky úloh

1A) $p \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$

L: p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	P: $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$	$L \Leftrightarrow P$	
1	1	0	1	0	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$p \wedge q$
1	0	1	0	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$p \wedge \neg q$
0	1	0	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\neg p \wedge q$
0	0	1	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\neg p \wedge \neg q$

Vzhledem k pravdivostním hodnotám v předposledním sloupci je daná výroková formule tautologie. Disjunktivní normální forma, kterou není nutné určovat, by byla tvaru

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

1B) Dokazujeme tvrzení $\forall n \in \mathbb{N}\colon 31 \,|\, (5^{n+1} + 6^{2n-1})$. I. $n = 1$: $31 \,|\, (5^2 + 6^1)$, tj. $31 \,|\, 31$.
II. Předpokládáme platnost tvrzení pro $n = k$, tj. $31 \,|\, (5^{k+1} + 6^{2k-1})$, a dokážeme platnost tvrzení pro $n = k + 1$, tj. že $31 \,|\, (5^{(k+1)+1} + 6^{2(k+1)-1})$.
Výraz $5^{(k+1)+1} + 6^{2(k+1)-1}$ je třeba zapsat pomocí výrazu z indukčního předpokladu, tedy užitím výrazu $5^{k+1} + 6^{2k-1}$. První exponenciální výraz $5^{(k+1)+1}$ proto zapíšeme ve tvaru $5 \cdot 5^{k+1}$ a druhý výraz $6^{2(k+1)-1} = 6^{(2k-1)+2}$ ve tvaru $36 \cdot 6^{2k-1}$, tj. ve tvaru $(5 + 31)6^{2k-1}$. Lze tedy psát

$$5^{(k+1)+1} + 6^{2(k+1)-1} = 5 \cdot 5^{k+1} + (5 + 31)6^{2k-1} = 5(5^{k+1} + 6^{2k-1}) + 31 \cdot 6^{2k-1}.$$

Sčítanec $31 \cdot 6^{2k-1}$ je dělitelný 31 a podle indukčního předpokladu je i sčítanec $5(5^{k+1} + 6^{2k-1})$ dělitelný 31, takže vztah $31 \,|\, (5^{n+1} + 6^{2n-1})$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

2) i) $V_6(10) = \dfrac{10!}{(10-6)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ hesel … vybíráme (bez opakování) libovolných 6 z celkem10 znaků,

ii) $C_2(6) \cdot V_2'(5) \cdot V_4'(5) = \dbinom{6}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^4 = 234375$ hesel … 2 pozice ze 6 pro umístění 2 číslic vybíráme $C_2(6)$ způsoby, číslice lze při jejich možném opakování vybrat $V_2'(5)$ způsoby a na zbývající 4 pozice lze při možném opakování vybrat písmena $V_4'(5)$ způsoby,

iii) $V_1(5) \cdot V_5'(10) - V_6'(5) = 5 \cdot 10^5 - 5^6 = 484375$ hesel … číslici na první pozici vybereme $V_1(5)$ způsoby a k ní na dalších 5 pozic vybíráme libovolné znaky při možném opakování $V_5'(10)$ způsoby, ale pak odečteme při možném opakování počet $V_6'(5)$ hesel tvořených samými číslicemi.

3) Relace R (vztah $|x| \le y$) má prvky $(-2, 2), (-1, 1), (-1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2)$.
1. Relace R není reflexivní, protože vztah $|x| \le x$ platí jen pro $x \ge 0$; např. $(-2, -2) \notin R$.
2. Relace R není symetrická, protože např. $(-2, 2) \in R$, ale $(2, -2) \notin R$.
3. Relace R je antisymetrická, protože v matici v M_R je na symetrických pozicích nejvýše jedna 1.
4. Relace R je tranzitivní, neboť $|x| \le y \wedge |y| \le z \Rightarrow |x| \le z$.
Inkluzi $R^2 \subset R$, odpovídající tranzitivitě relace R, lze ověřit i užitím booleovského násobení matic relace R:

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = M_R\,.$$

Protože relace R mj. není reflexivní, nemůže být ani ekvivalencí ani uspořádáním na množině $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

4A) Abychom mohli určit levou stranu maticové rovnice $A^3 - 4A^2 - 8A + 14E_3 = O_3$, je třeba nejprve určit 2. mocninu matice A, tedy matici $A^2 = A \cdot A$, a 3. mocninu matice A, tj. matici $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 0&2&1\\ 3&4&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 0&2&1\\ 3&4&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10&18&8\\ 3&8&3\\ 6&18&14 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 10&18&8\\ 3&8&3\\ 6&18&14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&2&3\\ 0&2&1\\ 3&4&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34&88&56\\ 12&34&20\\ 48&104&50 \end{pmatrix}.$$

Odtud $A^3 - 4A^2 - 8A + 14E_3 =$

$$= \begin{pmatrix} 34&88&56\\ 12&34&20\\ 48&104&50 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 10&18&8\\ 3&8&3\\ 6&18&14 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1&2&3\\ 0&2&1\\ 3&4&1 \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} = O_3\,,$$

takže matice A je kořenem polynomu $P(x) = x^3 - 4x^2 - 8x + 14$.

4B) Protože každé komplexní číslo v algebraickém tvaru $a+b\mathrm{j}$ lze zapsat jako uspořádanou dvojici (a, b), lze uspořádanou dvojici komplexních čísel $(a+b\mathrm{j}, c+d\mathrm{j})$ zapsat jako uspořádanou čtveřici reálných čísel (a, b, c, d). Pro dané vektory $\boldsymbol{a} = (1, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1-\mathrm{j}, 1)$, $\boldsymbol{c} = (\mathrm{j}, 1-\mathrm{j})$, $\boldsymbol{d} = (1+\mathrm{j}, 1+\mathrm{j})$ zapsané jako uspořádané čtveřice, tedy pro vektory $\boldsymbol{a} = (1, 0, -1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{d} = (1, 1, 1, 1)$, ověříme, zda rovnice $\alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{b} + \gamma \cdot \boldsymbol{c} + \delta \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$, tj. rovnice

$$\alpha(1, 0, -1, 0) + \beta(1, -1, 1, 0) + \gamma(0, 1, 1, -1) + \delta(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0),$$

má pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Porovnáním prvních až čtvrtých složek vektorů na obou stranách vektorové rovnice obdržíme homogenní soustavu 4 rovnic o 4 neznámých.
Tuto homogenní soustavu rovnic vyřešíme Gaussovou eliminační metodou (nulový sloupec pravých stran píšeme jen u první a poslední matice):

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Zpětným chodem obdržíme pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ jsou tedy lineárně nezávislé. Protože $\dim \mathbb{C}^2 = 4$, tvoří dané vektory bázi vektorového prostoru $\mathbb{C}^2$.

5) Báze podprostoru U je tvořena lineárně nezávislými maticemi. Označme matice podprostoru U takto: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jejich lineární nezávislost zjistíme tak, že zapíšeme prvky matic do sloupců a určíme, které sloupce jsou lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

K lineárně nezávislým maticím A, B přidáme bázické matice M_3 a M_4, jejichž prvky zapsané do sloupců jsou vektory $(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ a $(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$. Řešení maticové rovnice $aA + bB + cM_3 + dM_4 = M$ získáme užitím GEM:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

je $a = 2, b = -2, c = -1, d = -1$, takže $M_{\mathcal{B}} = (2, -2, -1, -1)$.
O správnosti výpočtu se lze přesvědčit zkouškou: $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Součet VPP $U + V$ je lineární obal jejich sjednocení. Získáme ho tak, že generátory obou VPP zapíšeme do řádků matice, upravíme ji na stupňovitý tvar a nenulové řádky určují bázi součtu VPP.

$$\left(\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dimenzí VPP $U + V$ je počet LN řádků, tedy $\dim(U + V) = 3$. Bází $U + V$ jsou vektory $(2,1,1,2)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,-1)$ anebo také tři původní vektory $(0,1,0,1)$, $(2,1,1,2)$, $(0,1,1,0)$.

Pro vektory $\boldsymbol{x} \in U \cap V$ platí $\boldsymbol{x} = a(0,1,0,1) + b(2,1,1,2) + c(2,0,1,1)$ a také $\boldsymbol{x} = d(0,1,1,0) + e(1,0,1,0)$, odkud $a(0,1,0,1) + b(2,1,1,2) + c(2,0,1,1) = d(0,1,1,0) + e(1,0,1,0)$.
Z rovnosti prvních až čtvrtých složek vektorů dostaneme soustavu rovnic, kterou řešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$n - h = 5 - 3 = 2$ parametry: $d = t \in \mathbb{R}$, $0 = 2d + e$, odkud $e = -2t$, $c = s \in \mathbb{R}$, $b + c = d + e$, odkud $b = -s - t$, $a + b = d$, odkud $a = t - (-s - t) = s + 2t$, takže průnikem VPP $U \cap V$ je VP $\{t(0,1,1,0) - 2t(1,0,1,0)\} = \{(-2t, t, -t, 0)\}$ [pro kontrolu: $\{(s+2t)(0,1,0,1) + (-s-t)(2,1,1,2) + s(2,0,1,1)\} = \{(-2t, t, -t, 0); t \in \mathbb{R}\}$], bází je např. vektor $(2,-1,1,0)$, odkud $\dim(U \cap V) = 1$.