Arkadiusz Ułanowski, 320747, grupa 6, projekt 1, zadanie 42

Problematyka. Wprowadzenie

Zdefiniujmy obszar $D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na całym zbiorze D_f. **Problem:** przybliżyć numerycznie wartość całki

$$\iint\limits_{D_f} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Wykorzystamy pomocniczy operator ϕ. Niech $K := [-1;1]\times[-1;1]$ i niech $\phi : \mathfrak{R}(D_f) \to \mathfrak{R}(K)$ jest operatorem takim, że $(\phi(f))(x,y) = f(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$. Prawdziwe są wówczas następujące:

1. ϕ przypisuje funkcji f R-całkowalnej w całej swojej dziedzinie D_f pewną funkcję g R-całkowalną w całej swojej dziedzinie K,

2. wartość całki

$$\iint\limits_{K} g(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} g(x,y)\,dx\right)\,dy = \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} g(x,y)\,dy\right)\,dx \tag{2}$$

   jest dwukrotnością wartości całki (1).

Zatem, równoważnie, zamiast przybliżać (1), możemy przybliżyć (2) i podzielić wynik przez 2. Takie podejście ma istotne korzyści – ponieważ K jest 2-wymiarowym prostokątem, możemy zamienić całkę podwójną na całki iterowane i bezpośrednio zaimplementować znaną kwadraturę.

Konstrukcja kwadratury Newtona 3/8

Do rozwiązania postawionego wcześniej problemu zastosujemy wzór Newtona 3/8 ze względu na każdą zmienną. Przypomnijmy jego wyprowadzenie. Niech f będzie funkcją jednnej zmiennej rzeczywistej, całkowalnej w całej swojej dziedzinie $D = [a;b]$.

Twierdzenie: Niech $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$, $x_3 = b$, $y_i := f(x_i)$, $p_i := (x_i, y_i)$. Wtedy istnieje dokładnie jeden wielomian jednej zmiennej taki, że jednocześnie przechodzi przez każdy z punktów p_0, p_1, p_2, p_3, a także jest stopnia nie większego niż 3.

Pomysł: znajdźmy ten wielomian, potraktujmy go jako przybliżenie funkcji f, a całkę z niego – jako przybliżenie całki z funkcji f. Taki sposób przybliżania całki nazywamy kwadraturą Newtona 3/8. Realizacja opisanego tu zadania końcowo doprowadzi nas do wzoru:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right), \tag{3}$$

a od rozwiązania problemu dzielą nas jeszcze dwie własności. Po pierwsze: ponieważ zachodzi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, przedział całkowania możemy rozbić na mniejsze podprzedziały, na każdym zastosować wzór (3) i zsumować wyniki, otrzymując pewne przybliżenie całki. Taką kwadraturę nazywamy kwadraturą złożoną. Po drugie, całkę podwójną po K daje się zapisać jako całkę pojedynczą z całki pojedynczej, tak jak w (2). Przybliżenie całki podwójnej możemy zatem uzyskać zastępując każdą z tych całek pojedynczych kwadraturami złożonymi, które będą je przybliżać.

W mojej implementacji, przybliżając (2), przedziały całkowania dzielę na podprzedziały równej długości, gdzie liczbę podprzedziałów przy obliczaniu całki iterowanej po x oznaczam przez m, tę przy obliczaniu całki iterowanej po y – przez n. Do wspólnej analizy skutków wyboru tej metody – zapraszam do kolejnej sekcji raportu.

Eksperymenty numeryczne

Badanie rzędu kwadratury

Rzędem kwadratury nazywamy liczbę $d \in \mathbb{N}$ taką, że kwadratura jest dokładna (tj. ma zerowy błąd względem faktycznej wartości całki) dla wszystkich wielomianów stopni mniejszych od d, ale istnieje wielomian stopnia d, dla którego kwadratura jest niedokładna. Spójrzmy na wyniki (zaokr. do siódmego miejsca po przecinku) dla wielomianów kolejnych stopni:

$f(x,y)$	dokł.	$m=n=1$	$m=7, n=1$	$m=1, n=7$	$m=19, n=35$
1	2	2	2	2	2
$x+2y+1$	2	2	2	2	2
$3xy+6x^2+9y^2-6y$	5	5	5	5	5
$3xy^2+6x^3+9y^3-6y^2$	-2	-2	-2	-2	-2
$3xy^3+6x^4+9y^4-6y$	2	2.2222222	2.0889444	2.1333704	2.0000011

Wyniki dokładne dla wielomianów stopnia do 3. włącznie i niedokładne dla wielomianu 4. stopnia potwierdzają powszechnie znany fakt, że kwadratura Newtona 3/8 jest rzędu 4. Dla wielomianów stopnia do 3. włącznie liczba podprzedziałów nie zmienia wyniku, gdyż w każdym z nich kwadratura stanowi dokładną wartość całki. Dla funkcji $3xy^3+6x^4+9y^4-6y$ błąd kwadratury maleje wraz ze wzrostem liczby podprzedziałów.

Badanie zbieżności kwadratury

Zależność błędu kwadratury od liczby podprzedziałów rozważymy na funkcji $f(x,y)=e^{x+y}$, za każdym razem podwajając liczbę podprzedziałów w obu wymiarach. $\iint_{D_f} e^{x+y}\,dx\,dy = e - \frac{1}{e}$, a przez ϵ_k oznaczę błąd bezwzględny wartości kwadratury obliczonej w $MATLAB$ie, gdy $m = n = 2^k$, od $e - \frac{1}{e}$. Wtedy obserwujemy:

k	$m=n=2^k$	ϵ_k	$\epsilon_{k-1}/\epsilon_k$
0	1	$5.24573 * 10^{-3}$	nie dotyczy
1	2	$3.53357 * 10^{-4}$	14.84540
2	4	$2.25208 * 10^{-5}$	15.69028
3	8	$1.41452 * 10^{-6}$	15.92113
4	16	$8.85172 * 10^{-8}$	15.98019
5	32	$5.53402 * 10^{-9}$	15.9951
6	64	$3.46002 * 10^{-10}$	15.9942
7	128	$2.14668 * 10^{-11}$	16.11798
8	256	$1.36735 * 10^{-12}$	15.69958
9	512	$2.00817 * 10^{-12}$	0.68089

Wzrost k z 8 do 9 jest jedynym przypadkiem, że błąd się zwiększył – stawiam tu hipotezę taką, że sumowanie wartości funkcji w dużej liczbie ułamkowych węzłów (czyli de facto podnoszenie przybliżenia liczby niewymiernej do potęg ułamkowych) w reprezentacji komputerowej prowadzi do dużego nagromadzenia się błędów obliczeń.

Poza tym obserwujemy, że skalowanie liczby podprzedziałów w obu wymiarach przez stałą (w naszym przypadku 2, liczba węzłów zmienia się ok. 4-krotnie) również zmniejsza błąd razy mniej więcej stałą (co widać po podobnych ilorazach kolejnych błędów). Inaczej: błąd kwadratury jest odwrotnie proporcjonalny do liczby podprzedziałów lub też maleje liniowo z liczbą podprzedziałów.