Глава 2

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВАЖНОСТЬ ДЛЯ ДВУХ КРИТЕРИЕВ

В этой главе закладываются основы теории относительной важности критериев. Прежде всего, дается определение понятия относительной важности для двух критериев и изучаются его простейшие свойства. Центральный результат главы — теорема 2.5, которая показывает, каким образом информацию о том, что один критерий важнее другого критерия с заданным коэффициентом относительной важности, можно использовать для сужения множества Парето.

Здесь также обсуждаются различные типы шкал и обосновывается применимость упомянутой теоремы 2.5 к любым задачам многокритериального выбора с критериями, значения которых измеряются в произвольных количественных шкалах.

2.1. Определение и свойства относительной важности

1. Исходная задача многокритериального выбора. Последующее рассмотрение будет посвящено задаче многокритериального выбора, включающей

– множество возможных решений X;

– векторный критерий $f = \left(f_1, f_2, ..., f_m\right)$;

– отношение предпочтения $\succ_X$.

Следует отметить, что многие вопросы приобретают более простой вид, если их формулировать и решать в терминах векторов. Как было отмечено в предыдущей главе, практически все результаты, полученные в терминах решений, можно легко переформулировать в терминах векторов и обратно. Поэтому в дальнейшем изложении часто будет рассматриваться *задача многокритериального выбора в терминах векторов*, содержащая

– множество возможных векторов Y, $Y \subset R^m$,

– отношение предпочтения $\succ$, заданное на пространстве R^m.

Напомним, что множество возможных векторов определяется равенством

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\},$$

а отношение предпочтения $\succ$ представляет собой продолжение на все пространство R^m отношения предпочтения $\succ_Y$, естественным образом

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \quad \text{для } x',\ x'' \in X$$

связанного с отношением предпочтения $\succ_X$, заданном на множестве возможных решений X.

Всюду далее будем предполагать выполненными аксиомы 1–3, сформулированные в предыдущей главе. В этих условиях

– отношение $\succ$, заданное на всем критериальном пространстве R^m, иррефлексивно и транзитивно (а значит, асимметрично);

– выполняется аксиома Парето (в терминах векторов), согласно которой для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, таких что [1]) $y' \geq y''$, имеет место соотношение $y' \succ y''$, т. е.

$$y' \geq y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''. \qquad (2.1)$$

ЛПР имеет возможность сравнивать любые два вектора y', y'' критериального пространства R^m с помощью иррефлексивного и транзитивного отношения $\succ$. При этом может реализоваться один и только один из следующих трех случаев

– $y' \succ y''$, т. е. y' предпочтительнее y'';

– $y'' \succ y'$, т. е. y'' предпочтительнее y';

– не выполняется ни соотношение $y' \succ y''$, ни соотношение $y'' \succ y'$.

Иначе говоря, ЛПР из произвольной пары векторов может выбрать первый вектор, либо второй. Реализация третьего случая (несравнимость по отношению $\succ$) означает либо отказ от выбора (когда из двух данных векторов ни один не выбирается), либо полный выбор (в этом случае оба вектора оказываются выбранными).

2. Мотивация основного определения. Введем множество номеров критериев

$$I = \{1, 2, \ldots, m\}$$

и рассмотрим наиболее простую задачу выбора из двух векторов $y', y'' \in R^m$ с минимальным числом различных компонент.

Если векторы y' и y'' имеют лишь одну различную компоненту, например, $y'_i \neq y''_i$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s \in I \setminus \{i\}$, то справедливо соотношение $y' \geq y''$, либо $y'' \geq y'$. Отсюда, на основании аксиомы 3, соответственно следует $y' \succ y''$ либо $y'' \succ y'$.

[1]) Напомним, что справедливость неравенства $y' \geq y''$ означает одновременное выполнение неравенств $y' \geqq y''$, $y' \neq y''$.

Таким образом, в данном простейшем случае выбор из двух векторов однозначно определяется аксиомой 3.

Теперь предположим, что векторы y' и y'' имеют не одну, а две различные компоненты:

$$y'_i \neq y''_i,\ \ y'_j \neq y''_j;\ \ y'_s = y''_s \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

причем одновременное выполнение равенств $y'_i = y'_j$, $y''_i = y''_j$ невозможно. Тогда реализуется один и только один из следующих четырех случаев:

1) $y'_i > y''_i$, $y'_j > y''_j$; 2) $y''_i > y'_i$, $y''_j > y'_j$;

3) $y'_i > y''_i$, $y''_j > y'_j$; 4) $y''_i > y'_i$, $y'_j > y''_j$.

Предположим, что ЛПР из двух данных векторов сделало свой выбор, т. е. имеет место одно и только одно их следующих двух соотношений: $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$. Без ограничения общности в силу симметричности можно считать, что верно первое соотношение $y' \succ y''$. Спрашивается, каким образом можно объяснить сделанный ЛПР выбор?

Если реализовался первый из указанных выше четырех случаев, то истинность соотношения $y' \succ y''$ вытекает из аксиомы Парето. Второй вариант невозможен, так как в этом случае благодаря аксиоме Парето выполнено соотношение $y'' \succ y'$, несовместимое в силу асимметричности $\succ$ с соотношением $y' \succ y''$.

Рассмотрим оставшиеся две возможности. В силу симметричности двух последних вариантов ограничимся рассмотрением третьего. Выполнение неравенства $y'_i > y''_i$ означает, что с точки зрения i-го критерия вектор y' для ЛПР более предпочтителен, чем y''. С другой стороны, с точки зрения j-го критерия в силу $y''_j > y'_j$ вектор y' предпочтительнее вектора y''. В итоге имеется два взаимопротиворечивых условия и возникает вопрос: почему в указанной ситуации наличия противоречащих друг другу высказываний все-таки был сделан выбор в пользу вектора y' против y''? Что послужило причиной такого выбора?

По-видимому, одним из наиболее разумных объяснений этому факту может служить следующее: в рассматриваемом противоречивом случае i-й критерий для ЛПР был важнее j-го критерия и поэтому, несмотря на «проигрыш» по менее важному j-му критерию при выборе y', этот вектор был признан более предпочтительным, чем y'', так как он приводит к «выигрышу» по более важному i-му критерию при условии равенства всех остальных компонент.

Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к выводу, что при выборе первого из данной пары векторов (т. е. при выполнении $y' \succ y''$) в случае реализации четвертой из указанных выше ситуаций $y''_i > y'_i$, $y'_j > y''_j$ для ЛПР j-й критерий оказался важнее i-го критерия.

3. Определение относительной важности. Приведенные выше рассуждения, относящиеся к простейшей задаче выбора из произвольной пары векторов, логически обосновывают введение следующего определения, которое будет играть основополагающую роль в дальнейшем изложении.

Определение 2.1. Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$. Будем говорить, что *i-й критерий важнее j-го критерия с заданными положительными параметрами* w_i^*, w_j^*, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполняется

$$y'_i > y''_i,\ \ y''_j > y'_j,\ \ y'_s = y''_s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{i, j\};$$
$$y'_i - y''_i = w_i^*,\ \ y''_j - y'_j = w_j^*,$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Иначе говоря, для ЛПР i-й критерий важнее j-го, если всякий раз при выборе из пары векторов ЛПР готово пожертвовать определенным количеством w_j^* по менее важному j-му критерию ради получения дополнительного количества w_i^* по более важному i-му критерию при условии сохранения всех остальных значений критериев.

При этом соотношение между числами w_i^* и w_j^* позволяет количественно оценить указанную степень важности. Введем соответствующее определение.

Определение 2.2. Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$, и i-й критерий важнее j-го критерия с положительными параметрами w_i^* и w_j^*. В этом случае положительное число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*}$$

будем называть *коэффициентом относительной важности* для указанной пары критериев.

Очевидно, $0 < \theta_{ij} < 1$. Этот коэффициент показывает долю потери по менее важному критерию, на которую согласно пойти ЛПР, в сравнении с суммой потери и прибавки по более важному

критерию. Если коэффициент θ_{ij} близок к единице, то это означает, что ЛПР за относительно небольшую прибавку по более важному i-му критерию готово платить довольно большой потерей по менее важному j-му критерию. Такое положение соответствует ситуации, когда i-й критерий имеет сравнительно высокую степень важности по сравнению с j-м критерием. В случае, когда этот коэффициент вблизи нуля, ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии получения существенной прибавки по более важному критерию. Это означает, что степень важности i-го критерия сравнительно невысока; данное положение и находит свое выражение в малом значении коэффициента относительной важности. Если $\theta_{ij} = 1/2$, то ЛПР готово согласиться на определенную прибавку по более важному критерию за счет потери по менее важному критерию при условии, что величина потери в точности совпадает с величиной прибавки.

Необходимо добавить, что отмеченная выше степень относительной важности критериев, а значит и величина коэффициента относительной важности θ_{ij}, находится в прямой зависимости от типа шкалы, в которой измеряется тот или иной критерий. Подробнее об этом пойдет речь в разд. 2.4.

4. Свойства относительной важности. Изучим свойства введенного выше определения относительной важности критериев.

Теорема 2. 1. *Пусть отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам 2 и 3. Если i-й критерий важнее j-го критерия с положительными параметрами w_i^*, w_j^*, то i-й критерий будет важнее j-го критерия с любой парой положительных параметров w'_i, w'_j, удовлетворяющих неравенствам $w'_i > w_i^*$, $w'_j < w_j^*$. Иначе говоря, если i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ij}, то i-й критерий будет важнее j-го критерия с любым меньшим, чем θ_{ij}, коэффициентом относительной важности.*

⮙ Выберем произвольно два положительных числа w'_i, w'_j и два вектора $y', y'' \in R^m$, для которых выполнены соотношения

$$y'_i - y''_i = w'_i > w_i^*, \quad y''_j - y'_j = w'_j < w_j^*,$$
$$y'_s = y''_s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{i, j\}$$

и докажем, что $y' \succ y''$.

Введем положительные числа z_i и z_j следующим образом:

$$z_i - y''_i = w_i^*, \quad y''_j - z_j = w_j^*.$$

В силу $w_i' > w_i^*$, $w_j' < w_j^*$ имеем $y_i' > z_i$ и $y_j' > z_j$. Кроме того, очевидно, $y_j'' > z_j$.

Рассмотрим вектор $z' \in R^m$ вида

$$z_i' = z_i,\ z_j' = z_j,\ z_s' = y_s' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Для этого вектора выполнено

$$y_i' > z_i',\ y_j' > z_j',\ y_s' = z_s' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Отсюда согласно аксиоме Парето получаем $y' \succ z'$.

Далее, из соотношений

$$z_i' - y_i'' = w_i^*, \quad y_j'' - z_j' = w_j^*, \quad z_s' = y_s'' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

на основании того, что критерий i-й критерий важнее j-го критерия с параметрами w_i^*, w_j^*, приходим к соотношению $z' \succ y''$. Это соотношение вместе с полученным ранее $y' \succ z'$ благодаря транзитивности отношения $\succ$ ведет к требуемому результату $y' \succ y''$.

Вторая часть теоремы, выраженная в терминах коэффициентов относительной важности, непосредственно вытекает из доказанного выше.⮟

Содержание теоремы 2.1 вполне согласуется с интуитивными представлениями об относительной важности критериев. А именно, если ЛПР готово пойти на потерю в размере w_j^* по менее важному j-му критерию ради получения выигрыша в размере w_i^* по более важному i-му критерию, то это ЛПР, очевидно, должно согласиться как на меньшие потери w_j' $(w_j' < w_j^*)$, так и на больший выигрыш w_i' $(w_i' > w_i^*)$.

Опираясь на определение относительной важности критериев и теорему 2.1, проанализируем возникающие возможности соотношений важности для произвольной пары различных критериев f_i, f_j.

Может иметь место один и только один из следующих трех случаев:

1) хотя бы одно положительное число из интервала $(0, 1)$ является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием и хотя бы одно — не является таковым;

2) ни одно положительное число из интервала $(0, 1)$ не является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием. В этом случае будем говорить, что *i-й критерий ни в коей мере не является более важным, чем j-й критерий*;

3) любое положительное число из интервала $(0, 1)$ является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием. В этом случае будем говорить, что *i-й критерий несравнимо важнее* (*несравнимо более важен*) *j-го критерия*.

Разберем первый случай более подробно. Если хотя бы одно число $\theta_{ij} \in (0, 1)$ является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием, то в соответствии с теоремой 2.1 любое меньшее число в пределах указанного интервала также является коэффициентом относительной важности для рассматриваемой пары критериев. Образуем два непересекающихся множества A и B. К первому множеству причислим все числа интервала $(0, 1)$, которые являются коэффициентами относительной важности для данной пары критериев. Очевидно, $A \neq \varnothing$. Второе множество B составим из всех тех чисел указанного интервала, которые не являются коэффициентами относительной важности. При этом по условию $B \neq \varnothing$. Ясно, что $A \cup B = (0, 1)$, причем неравенство $a < b$ выполняется для всех $a \in A$, $b \in B$. Это означает, что множества A и B образуют сечение интервала $(0, 1)$. В таком случае в соответствии с принципом Дедекинда существует единственное число $\bar{\theta}_{ij} \in (0, 1)$, производящее указанное сечение. Это число можно назвать *предельным коэффициентом относительной важности* i-го критерия по сравнению с j-м критерием.

Следует отметить, что само число $\bar{\theta}_{ij}$ может как оказаться коэффициентом относительной важности, так и не быть таковым. Иначе говоря, может реализоваться любой из двух возможных случаев $\bar{\theta}_{ij} \in A$ или $\bar{\theta}_{ij} \notin A$.

5. Связь с лексикографическим отношением. Между отношением $\succ$ и лексикографическим [1] отношением имеется определенная связь, которая в терминах упорядоченного набора несравнимо более важных критериев раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 2.2. *Заданное на пространстве R^m бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2 и 3, является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо важнее второго,*

[1] Напомним, что определение лексикографического отношения можно найти в разд. 1.2.

второй — несравнимо важнее третьего, ..., ($m-1$)-й критерий несравнимо важнее m-го критерия.

⮙ Необходимость. Пусть отношение $\succ$ является лексикографическим. В этом случае для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ истинны высказывания

1) $y_1' > y_1'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

2) $y_1' = y_1'',\ y_2' > y_2'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

3) $y_1' = y_1'',\ y_2' = y_2'',\ y_3' > y_3'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

....

m) $y_i' = y_i'',\ i = 1, 2, ..., m-1;\ y_m' > y_m'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$.

Из первого высказывания следует, что для двух произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполнено $y_1' > y_1'',\ y_2' < y_2''$, $y_3' = y_3'', ..., y_m' = y_m''$, имеет место соотношение $y' \succ y''$. Это означает, что первый критерий несравнимо важнее второго критерия.

Аналогично из второго высказывания можно прийти к выводу, что второй критерий несравнимо важнее третьего критерия, ..., из предпоследнего высказывания вытекает несравнимо большая важность ($m-1$)-го критерия по сравнению с m-м критерием.

Достаточность. Чтобы избегнуть громоздких рассмотрений, эту часть доказательства проведем лишь для случая трех критериев, т. е. при $m = 3$.

Выберем два произвольных вектора $y', y'' \in R^3$, для которых верно неравенство $y_1' > y_1''$. Для доказательства справедливости высказывания 1) следует убедиться в том, что $y' \succ y''$.

Если дополнительно с неравенством $y_1' > y_1''$ выполнено $y_2' \geqq y_2''$ и $y_3' \geqq y_3''$, то благодаря аксиоме Парето имеем $y' \succ y''$.

Пусть вместе с неравенством $y_1' > y_1''$ имеют место неравенства $y_2' < y_2'',\ y_3' \geqq y_3''$. Рассмотрим вектор $y^1 = (y_1', y_2', y_3'')$. Для него в силу несравнимо большей важности первого критерия по сравнению со вторым получаем соотношение $y^1 \succ y''$. Но $y' \geqq y^1$, а значит либо $y' = y^1$ и тогда верно $y' \succ y''$, либо $y' \geq y^1$. Во втором случае благодаря аксиоме Парето имеем $y' \succ y^1$, что вместе с полученным ранее соотношением $y^1 \succ y''$ на основании транзитивности отношения $\succ$ влечет соотношение $y^1 \succ y''$.

Перейдем к рассмотрению случая $y_1' > y_1'',\ y_2' = y_2'',\ y_3' < y_3''$. Введем вектор $y^2 = (y_1', y_2'' - 1, y_3'')$. В силу несравнимо бóльшей важности первого критерия по сравнению со вторым для него выполняется $y^2 \succ y''$. Но для вектора y' благодаря несравнимо большей важности второго критерия по сравнению с третьим имеет место соотношение $y' \succ y^2$, которое вместе с соотношением $y^2 \succ y''$ приводит к требуемому соотношению $y^1 \succ y''$.

Если же $y_1' > y_1'',\ y_2' > y_2'',\ y_3' < y_3''$, то для вектора $y^3 = (y_1'', y_2', y_3')$ благодаря несравнимо большей важности второго критерия по сравнению с третьим выполнено соотношение $y^3 \succ y''$. С другой стороны, верно неравенство $y' \geq y^3$, а значит согласно аксиоме Парето и соотношение $y' \succ y^3$, что вместе с $y^3 \succ y''$ влечет соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим последний возможный случай $y_1' > y_1'',\ y_2' < y'',$ $y_3' < y_3''$. Для вектора $y^4 = (y_1', y_2' - 1, y_3'')$ из-за несравнимо большей важности первого критерия по сравнению со вторым верно соотношение $y^4 \succ y''$. Используя несравнимо большую важность второго критерия по сравнению с третьим и аксиому Парето, получим соотношение $y' \succ y^4$, которое вместе с $y^4 \succ y''$ вновь повлечет за собой выполнение соотношения $y' \succ y''$.

Тем самым, истинность высказывания 1) установлена. При помощи аналогичных рассуждений устанавливается справедливость высказывания 2). Последнее высказывание 3) имеет место в силу аксиомы 3.⮛

2.2. Требование инвариантности отношения предпочтения

1. Отношения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования. Напомним определение инвариантного отношения, данное в разд. 1.2. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве R^m называют *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ из выполнения соотношения $y' \Re y''$ следует соотношение $(\alpha y' + c) \Re (\alpha y'' + c)$ для любого вектора $c \in R^m$ и всякого положительного числа α. Иначе говоря, отношение $\Re$ является инвариантным относительно положительного линейного преобразования, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) аддитивность: $y' \Re y'',\ c \in R^m \quad \Rightarrow \quad (y' + c) \Re (y'' + c)$;

2) однородность: $y' \Re y'',\ \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha y') \Re (\alpha y'')$.

Отношения неравенств $>, \geqq, >$, заданные на пространстве R^m, дают простейшие примеры инвариантных бинарных отношений. Нетрудно понять, что лексикографическое отношение (см. разд. 1.2) также относится к классу инвариантных бинарных отношений.

Во многих практически важных задачах многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ можно считать инвариантным относительно линейного положительного преобразования. В соответствии с этим в дополнение к сформулированным выше аксиомам 1–3 добавим еще одну, которая далее понадобится для построения содержательной теории относительной важности критериев.

Аксиома 4 (инвариантность отношения предпочтения). *Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Признаком инвариантности отношения $\succ$ является наличие у него свойств аддитивности и однородности. Иными словами, для любой пары векторов y', y'' R^m, связанных соотношением $y' \succ y''$, должно выполняться как соотношение $(y' + c) \succ (y'' + c)$ для любого вектора $c \in R^m$, так и соотношение $\alpha y' \succ \alpha y''$ для любого положительного числа α.

2. Конусные отношения. Важный с точки зрения последующего изложения пример инвариантных бинарных отношений дает класс конусных отношений. Однако прежде чем формулировать определение конусного отношения необходимо ввести некоторые вспомогательные понятия из выпуклого анализа.

Множество $A, A \subset R^m$, называют *выпуклым*, если оно вместе с каждой парой своих точек содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Иными словами, подмножество A пространства R^m выпукло, если для всех пар точек $y', y'' \in A$ и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено соотношение $\lambda y' + (1 - \lambda)\, y'' \in A$. Множество $K, K \subset R^m$, называется *конусом*, если для каждой точки $y \in K$ и любого положительного числа α выполняется включение $\alpha\, y \in K$. Конус, являющийся выпуклым, именуют *выпуклым конусом*. Иначе говоря, выпуклое множество является *выпуклым конусом*, если оно вместе с каждой своей точкой содержит и весь луч, исходящий их начала координат (в общем случае без самого начала) и проходящий через данную точку. При этом начало координат (вершина конуса) может как принадлежать, так и не принадлежать данному конусу. Можно проверить, что сумма любых двух (и более) элементов выпуклого конуса всегда принадлежит данному конусу. Конус K называют *острым*, если не существует такого ненулевого вектора $y \in K$, для которого выполняется включение $-y \in K$. Не являющийся острым конус обязательно содержит, по крайней мере, одну прямую, проходящую через начало координат (вместе с самим началом или же без него).

Множество L всех решений (векторов $x \in R^m$) однородного линейного неравенства $\langle c, x \rangle = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \geqq 0$, где c — фиксированный ненулевой вектор пространства R^m, пред-

ставляет собой некоторый выпуклый конус (его называют *замкнутым полупространством*).

▲ Действительно, из $\langle c, x \rangle \geqq 0$ следует справедливость неравенства $\langle \alpha c, x \rangle = \langle c, \alpha x \rangle \geqq 0$ для любого положительного множителя α. Значит, L — конус. Убедимся, что это выпуклый конус. С этой целью возьмем две произвольные точки x' и x'' конуса L. Для них выполнены неравенства $\langle c, x' \rangle \geqq 0$ и $\langle c, x'' \rangle \geqq 0$. Умножим первое неравенство на произвольное число $\lambda \in [0, 1]$, а второе — на $1 - \lambda$. Складывая почленно полученные неравенства, придем к неравенству $\lambda \langle c, x' \rangle + (1 - \lambda)\langle c, x'' \rangle = \langle c, \lambda x' + (1 - \lambda)\, x'' \rangle \geqq 0$, устанавливающему выпуклость конуса L.▼

Следует отметить, что замкнутое полупространство не является острым конусом, поскольку вместе с ненулевым вектором $\bar{x}$, удовлетворяющим равенству $\langle c, \bar{x} \rangle = 0$, содержит и вектор $-\bar{x}$, так как умножение указанного равенства на -1 не нарушает его выполнение.

Если же вместо одного неравенства рассматривать некоторую систему, содержащую определенное конечное число подобного рода неравенств, то множеством решений этой системы однородных линейных неравенств также будет выпуклый конус, представляющий собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Его называют *многогранным* (*полиэдральным*) *конусом*. В общем случае этот конус не является острым.

Пусть задан некоторый набор векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p \in R^m$. Нетрудно проверить, что совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций данных векторов (т. е. все векторы вида $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_p a^p$, где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ неотрицательны), образует некоторый выпуклый (*конечнопорожденный*) конус K в пространстве R^m. В этом случае говорят, что набор векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ *порождает* выпуклый конус K и пишут $K = \operatorname{cone}\{a^1, a^2, \ldots, a^p\}$. На основании теории двойственности выпуклого анализа (см. [28], [31]) любой конечнопорожденный конус представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т. е. является многогранным конусом. Последний результат принципиально важен для доказательств формулируемых далее теорем, посвященных учету информации об относительной важности критериев.

Одномерные грани (т. е. лучи, а также векторы, порождающие эти лучи) называют *ребрами* выпуклого конуса. Известно [28], что любой острый выпуклый замкнутый конус, не совпадающий с началом координат, порождается своими ребрами.

Если выпуклый конус задан в виде решений некоторой однородной системы линейных неравенств, то все его ребра в принципе можно найти, например, методом перебора, рассматривая все возможные подсистемы определенного числа линейных уравнений, получающиеся из исходной системы неравенств заменой всех знаков неравенств равенствами (по этому поводу см. [4]).

Неотрицательный ортант R_+^m пространства R^m, определяемый равенствами

$$R_+^m = \left\{ y \in R^m \mid y \geq 0_m \right\} = \left\{ y \in R^m \mid y \geq 0_m \right\} \setminus \left\{ 0_m \right\},$$

представляет собой выпуклый острый конус (без вершины), который порождается единичными ортами этого пространства. На плоскости (т. е. при $m = 2$) этот ортант имеет вид прямого угла, совпадающего с первой четвертью (рис. 2.1). Он порождается единичными ортами $e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$ и является результатом пересечения правой и верхней замкнутых полуплоскостей (без начала координат).

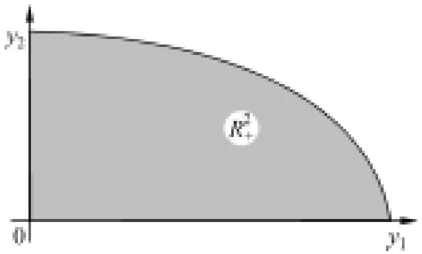

Рис. 2.1.

Еще некоторые два острых плоских конуса K_1 и K_2 изображены на рис 2.2.

Верхняя полуплоскость представляет собой замкнутое полупространство, т. е. выпуклый конус, не являющийся острым. Более подробно с выпуклыми множествами и конусами можно ознакомиться в [4, 28, 31].

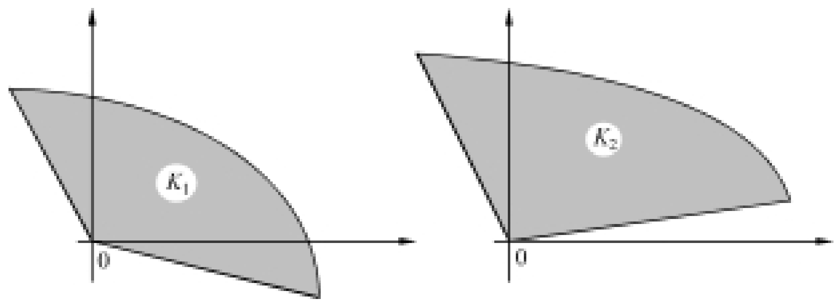

Рис. 2.2.

Определение 2.3. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве R^m (т. е. $\Re \subset R^m \times R^m$), называют *конусным отношением*, если существует такой конус K, $K \subset R^m$, что для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ справедлива эквивалентность

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad y' - y'' \in K.$$

Нередко правую часть эквивалентности записывают в виде $y' \in y'' + K$ (см. рис. 2.3).

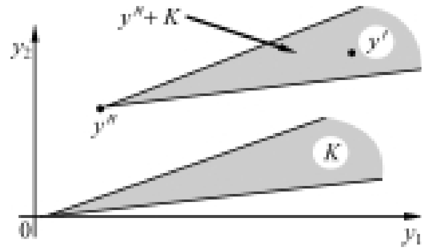

Рис. 2.3.

Отношения неравенств $>$ и $\geq$, рассматриваемые на пространстве R^m, представляют собой некоторые конусные отношения с конусами $R_>^m = \left\{ y \in R^m \mid y > 0_m \right\}$ и R_+^m соответственно.

Оказывается, всякое бинарное отношение, удовлетворяющее аксиомам 2 и 4, будет конусным отношением. Этот факт устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.3. *Любое иррефлексивное, транзитивное и инвариантное относительно линейного положительного преобразования бинарное отношение* $\Re$, *заданное на пространстве* R^m, *является конусным отношением с острым выпуклым конусом, не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного типа является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования отношением, заданным на* R^m.

⮙ Пусть $\Re$ является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования бинарным отношением, заданным на R^m. Докажем, что $\Re$ — конусное отношение. Для этого введем множество

$$K = \{ y \in R^m \,|\, y \Re 0_m \}.$$

Благодаря свойству однородности отношения $\Re$ множество K является конусом. Кроме того, для произвольной пары векторов $y', y'' \in R^m$ на основании свойства аддитивности имеем

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \Re 0_m \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \in K.$$

Таким образом, отношение $\Re$ действительно является конусным с конусом K. Необходимо проверить, что конус K — выпуклый, острый и не содержит начало координат.

Если $0_m \in K$, то по определению конуса K выполнено $0_m \Re 0_m$, что не совместимо с требованием иррефлексивности отношения $\Re$. Значит, конус K не содержит начало координат.

Для доказательства выпуклости конуса K выберем произвольно два вектора $y', y'' \in K$ и число $\alpha \in (0, 1)$ (заметим, что значения $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ можно исключить из последующей проверки). Благодаря свойству однородности отношения $\Re$ из соотношений $y' \Re 0_m$ и $y'' \Re 0_m$ получаем $\alpha y' \Re 0_m$ и $(1 - \alpha) y'' \Re 0_m$ соответственно. Из первого соотношения в силу аддитивности имеем $(\alpha y' + (1 - \alpha) y'') \Re (1 - \alpha) y''$. Теперь на основании транзитивности $\Re$ из второго и последнего соотношений получаем $(\alpha y' + (1 - \alpha) y'') \Re 0_m$, или $(\alpha y' + (1 - \alpha) y'') \in K$, что устанавливает выпуклость конуса K.

Для того чтобы убедиться, что конус K является острым, предположим противное: существует ненулевой вектор $y \in K$, для которого выполняется соотношение $-y \in K$. Для этого вектора имеем $y \Re 0_m$ и $-y \Re 0_m$. Отсюда в силу аддитивности $\Re$ следует $(y - y) \Re (-y) \Re 0_m$, что благодаря транзитивности отношения $\Re$ приводит к соотношению $0_m \Re 0_m$, несовместимому с иррефлексивностью $\Re$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\Re$ — произвольное конусное отношение с острым выпуклым конусом K, не содержащим начало координат. Убедимся в том, что оно является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Это отношение действительно иррефлексивно, так как в противном случае конус K содержал бы начало координат.

Проверим транзитивность отношения предпочтения. Для этой цели выберем произвольную тройку векторов $y', y'', y''' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям $y' \Re y''$ и $y'' \Re y'''$. Последние два соотношения можно переписать в виде $y' - y'' \in K$ и $y' - y''' \in K$, откуда следует, что имеются два определенных элемента конуса K. Поскольку сумма любых двух элементов выпуклого конуса принадлежит данному конусу, из двух последних соотношений получаем $y' - y'' \in K$, или, что то же самое, $y' \Re y''$. Полученное доказывает транзитивность отношения $\Re$.

Инвариантность отношения $\Re$ вытекает из справедливости соотношений

$$y' \Re y'' \Leftrightarrow y' - y'' \in K \Leftrightarrow (y' + c) - (y'' + c) \in K \Leftrightarrow \Leftrightarrow (y' + c) \Re (y'' + c),$$

$$y' \Re y'' \Leftrightarrow y' - y'' \in K \Leftrightarrow \alpha(y' - y'') \in K \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha y' - \alpha y'' \in K \Leftrightarrow \alpha y' \Re \alpha y''$$

для всех векторов $c \in R^m$ и любых положительных чисел α.⮟

Следствие 2.1. *Любое бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам* 2, 3 *и* 4, *является конусным с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант R^m_+ и не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного типа удовлетворяет аксиомам* 2, 3 *и* 4.

⮝ Бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2–4, является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Необходимость. На основании теоремы 2.3 остается убедиться, что конус K данного бинарного отношения $\succ$ включает неотрицательный ортант. В силу леммы 1.3 предыдущей главы выполняется аксиома Парето (в терминах векторов)

$$y' \geq y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y'',$$

которая может быть переписана в виде

$$y' - y'' \in R^m_+ \quad \Rightarrow \quad y' - y'' \in K.$$

Поскольку разность $y' - y''$ может быть любым вектором неотрицательного ортанта R^m_+, то последняя импликация означает выполнение включения $R^m_+ \subset K$.

Достаточность. Если конусное отношение порождается острым выпуклым конусом (без нуля), то в силу теоремы 2.3 соответствующее ему конусное отношение является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования (т. е. аксиомы 2 и 4 выполнены). А так как этот конус содержит неотрицательный ортант R^m_+, то соответствующее конусное отношение, кроме того, удовлетворяет аксиоме Парето. Нетрудно понять, что из справедливости аксиомы Парето вытекает выполнение аксиомы 3. Следовательно, рассматриваемое конусное отношение удовлетворяет всем аксиомам 2–4.⮟

В соответствии со следствием 2.1, бинарные отношения, удовлетворяющие аксиомам 2–4 (напоминаем, что эти аксиомы предполагаются выполненными), допускают простую геометрическую интерпретацию — они являются конусными отношениями с острыми, выпуклыми конусами без начала координат, причем эти конусы разве что шире неотрицательного ортанта R^m_+.

2.3. Использование информации об относительной важности критериев для сужения множества Парето

1. Упрощение основного определения. Определение 2.1, данное в разд. 2.1, придает точный смысл выражению «i-й критерий важнее j-го критерия». В этом определении присутствуют два числовых параметра, с помощью которых вводится коэффициент относительной важности критериев, измеряющий степень относительной важности.

Для того чтобы проверить, действительно ли i-й критерий важнее j-го, в соответствии с определением 2.1 необходимо предложить ЛПР для сравнения бесконечное число пар векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям

$$y_i' > y_i'',\ \ y_j'' > y_j',\quad y_s' = y_s'' \quad \text{для всех} \ \ s \in I \setminus \{i, j\};$$
$$y_i' - y_i'' = w_i^*,\ \ y_j'' - y_j' = w_j^* \tag{2.2}$$

при некоторых положительных параметрах w_i^*, w_j^*. Если для любой пары указанных векторов первый вектор y' всякий раз оказывается предпочтительнее второго y'', то по определению 2.1 это будет означать, что i-й критерий важнее j-го с числовым коэффициентом относительной важности

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*}, \tag{2.3}$$

принадлежащим интервалу (0, 1).

Совершенно очевидно, что на практике подобную проверку осуществить невозможно из-за бесконечного числа сравниваемых пар векторов. На самом деле такая проверка в условиях инвариантности отношения предпочтения и не требуется. Все может быть сведено к сравнению лишь одной пары векторов y', y'', для которой выполнено (2.2). Об этом свидетельствует следующий результат.

Теорема 2.4. *Благодаря инвариантности отношения предпочтения $\succ$ можно считать, что в определении* 2.1 *векторы y', y'' фиксированы. В частности, в этом определении можно положить*

$$y_i' = w_i^*,\ \ y_j' = -w_j^* \ \ \textit{и} \ \ y_s' = 0 \ \ \textit{для всех} \ s \in I \setminus \{i,j\},\quad y'' = 0_m,$$

или

$$y_i' = \left(1 - \theta_{ij}\right),\ \ y_j' - \theta_{ij} \ \ \textit{и} \ \ y_s' = 0 \quad \textit{для всех} \ s \in I \setminus \{i,j\},\quad y'' = 0_m,$$

где θ_{ij} — коэффициент относительной важности критериев.

⮙ Рассмотрим два произвольных вектора y' и y'', для которых выполнены соотношения (2.2). Очевидно,

$$y_i' > y_i'' \quad \Leftrightarrow \quad y_i' - y_i'' > 0,$$
$$y_j'' > y_j' \quad \Leftrightarrow \quad y_j'' - y_j' > 0.$$

Обозначим $\bar{y}_i = y_i' - y_i'' = w_i^*$, $\bar{y}_j = y_j' - y_j'' = -w_j^*$. В силу аддитивности отношения предпочтения $\succ$, справедливо

$$y' \succ y'' \quad \Leftrightarrow \quad \left(y' - y''\right) \succ 0_m \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y} \succ 0_m,$$

где вектор $\bar{y}$ имеет только две отличные от нуля компоненты — i-ю и j-ю, которые равны $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$ соответственно. Полученное означает, что общее определение 2.1 эквивалентно «частному» определению 2.1, в котором $y' = \bar{y}$ и $y'' = 0_m$.

Из полученного сразу следует, что в определении 2.1 векторы y', y'' можно считать не произвольными, а фиксированными.

Докажем оставшуюся часть теоремы. Соотношение $\bar{y} \succ 0_m$ для указанного выше вектора $\bar{y}$ благодаря свойству однородности отношения предпочтения $\succ$ эквивалентно соотношению $\alpha\bar{y} \succ 0_m$ для любого положительного числа α. В частности, если взять $\alpha = -\dfrac{\theta_{ij}}{\bar{y}_j}$ и обозначить $\hat{y} = \alpha\bar{y}$, то получим

$$\hat{y}_i = \alpha\bar{y}_i = -\frac{\theta_{ij}\bar{y}_i}{\bar{y}_j} = \frac{\theta_{ij} w_i^*}{w_j^*} = \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} = 1 - \theta_{ij},$$

$$\hat{y}_j = \alpha\bar{y}_j = -\frac{\theta_{ij}\bar{y}_j}{\bar{y}_j} = -\theta_{ij},$$

$$\hat{y}_s = \alpha\bar{y}_s = \alpha 0 = 0 \ \ \text{для всех} \ s \in I \setminus \{i,j\}.$$

Поэтому соотношение $\bar{y} \succ 0_m$ эквивалентно соотношению $\hat{y} \succ 0_m$, где

$$\hat{y}_i = 1 - \theta_{ij},\ \ \hat{y}_j = -\theta_{ij};\ \ \hat{y}_s = 0 \ \ \text{для всех} \ s \in I \setminus \{i,j\}. ⮛ \tag{2.4}$$

Как указано выше, отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Опираясь на теорему 2.4, сформулируем новое, более простое определение относительной важности, которое эквивалентно определению 2.1.

Определение 2.4. Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$. Говорят, что *i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ij} \in (0, 1)$, если для вектора $\hat{y} \in R^m$ вида (2.4) выполнено соотношение $\hat{y} \succ 0_m$.

В соответствии с определением 2.4 для того чтобы проверить, действительно ли i-й критерий является важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij} \in (0, 1)$, достаточно убедиться, что вектор $\hat{y}$ вида (2.4) предпочтительнее нулевого вектора, т. е. достаточно проверить справедливость одного соотношения $\hat{y} \succ 0_m$. Например, если вектор $(0.7, -0.3, 0)$ оказывается для ЛПР более предпочтительным, чем $(0, 0, 0)$, то первый критерий для этого ЛПР важнее второго с коэффициентом относительной важности $\theta_{12} = 0.3$.

2. Сужение множества Парето на основе информации о том, что один критерий важнее другого. Следующая теорема показывает, каким образом информация об относительной важности одного критерия в сравнении с другим позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

Теорема 2.5 (в терминах векторов). *Предположим, что отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам 1–4 и i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ij} \in (0, 1)$. *Тогда для любого непустого множества выбираемых оценок* $\operatorname{Sel} Y$ *имеют место включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\hat{Y}) \subset P(Y), \tag{2.5}$$

где $P(\hat{Y})$ *— множество парето-оптимальных оценок в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений X и «новым» векторным критерием* $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m)$ *(т. е.* $\hat{Y} = \hat{f}(X)$*), компоненты которого вычисляются по формулам*

$$\hat{f}_j = \theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j, \quad \hat{f}_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\}. \tag{2.6}$$

⮝ Обозначим через K острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$. По условию доказываемой теоремы и в соответствии с определением 2.4 для вектора $\hat{y}$, определяемого равенствами (2.4), выполнено соотношение $\hat{y} \succ 0_m$. Это соотношение равносильно включению $\hat{y} \in K$. Таком образом, вектор $\hat{y}$ принадлежит конусу K, определяющему конусное отношение предпочтения $\succ$.

Введем в рассмотрение набор единичных ортов $e^1, e^2, \ldots, e^m$ пространства R^m; s-я компонента вектора e^s равна единице, а все остальные — нулю, $s = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через M выпуклый конус (без нуля), порожденный набором линейно независимых [1]) векторов

$$e^1, \ldots, e^{i-1}, \hat{y}, e^{i+1}, \ldots, e^m. \tag{2.7}$$

Конус M совпадает с множеством всех векторов, представимых в виде линейных комбинаций

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda_i \hat{y} + \lambda_{i+1} e^{i+1} + \ldots + \lambda_m e^m$$

векторов набора (2.7) с неотрицательными, одновременно не равными нулю числовыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Проверим, что конус M — острый. Если это не так, то должен найтись ненулевой вектор $y \in M$, для которого $-y \in M$. В соответствии со сказанным выше имеем

$$y = \lambda_1' e^1 + \ldots + \lambda_{i-1}' e^{i-1} + \lambda_i' \hat{y} + \lambda_{i+1}' e^{i+1} + \ldots + \lambda_m' e^m,$$

$$-y = \lambda_1'' e^1 + \ldots + \lambda_{i-1}'' e^{i-1} + \lambda_i'' \hat{y} + \lambda_{i+1}'' e^{i+1} + \ldots + \lambda_m'' e^m,$$

причем все коэффициенты линейных комбинаций неотрицательны и каждый из наборов чисел $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_m'$ и $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots, \lambda_m''$ одновременно в нуль не обращается. Поскольку сумма двух элементов конуса принадлежит данному конусу, то, складывая два последних равенства, получим

$$0_m = (\lambda_1' + \lambda_1'') e^1 + \ldots + (\lambda_{i-1}' + \lambda_{i-1}'') e^{i-1} + (\lambda_i' + \lambda_i'') \hat{y} + \\ + (\lambda_{i+1}' + \lambda_{i+1}'') e^{i+1} + \ldots + (\lambda_m' + \lambda_m'') e^m,$$

где среди коэффициентов линейной комбинации, записанных в скобках, по крайней мере один обязательно отличен от нуля. Однако, благодаря линейной независимости векторов (2.7) из последнего равенства следует, что все коэффициенты указанной линейной комбинации равны нулю. Полученное противоречие свидетельствует о том, что конус M — действительно острый.

Теперь докажем, что конус M совпадает с множеством ненулевых решений следующей системы линейных неравенств

[1]) Набор векторов (2.7) действительно образует линейно независимую систему, так как ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен m.

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\},$$
$$\theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j \geqq 0. \tag{2.8}$$

С этой целью найдем фундаментальную совокупность решений [1]) системы неравенств (2.8) и убедимся, что она совпадает с набором векторов (2.7).

Для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (2.8) рассмотрим соответствующую систему линейных уравнений

$$y_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\},$$
$$\theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j = 0, \tag{2.9}$$

которая может быть переписана в виде [2])

$$\langle e^s, y\rangle = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\},$$
$$\langle \tilde{y}, y\rangle = 0\,, \tag{2.10}$$

где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_m)$, причем

$$\tilde{y}_i = \theta_{ij}, \quad \tilde{y}_j = 1-\theta_{ij}, \quad \tilde{y}_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i,j\}.$$

Число уравнений системы (2.10) равно m. Вследствие линейной независимости произвольного набора из $m-1$ векторов, полученного из $e^1, ..., e^{j-1}, \tilde{y}, e^{j+1}, ..., e^m$ удалением какого-то одного вектора, для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (2.8) достаточно просмотреть ненулевые решения каждой подсистемы из $m-1$ уравнений системы (2.10). При этом среди них следует отобрать векторы, удовлетворяющие системе линейных неравенств (2.8).

Станем удалять из системы (2.10) по одному уравнению и искать ненулевые решения получающейся в результате такого удаления «укороченной» системы. Если из (2.10) удалить последнее уравнение, то, например, вектор e^j будет ненулевым решением полученной «укороченной» системы. Удаляя уравнение $\langle e^s, y\rangle = 0$ (при $s \neq i$), в качестве ненулевого решения «укороченной» системы можно взять вектор e^s. Если же удалить уравнение $\langle e^i, y\rangle = 0$, то, как нетрудно проверить, получающаяся «укороченная» система имеет ненулевое решение $\hat{y}$. В итоге приходим к фундаментальной совокупности решений $e^1, ..., e^{i-1}, \hat{y}, e^{i+1}, ..., e^m$ системы линейных неравенств (2.8). Эта фундаментальная совокупность совпадает с набором векторов (2.7), порождающих конус M конусного отношения предпочтения $\succ$. Следовательно, конус M совпадает с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (2.8).

Как было указано в начале доказательства теоремы, имеет место включение $\hat{y} \in K$. В силу следствия 2.1 справедливо соотношение $R^m_+ \subset K$. Конус R^m_+ порождается набором единичных векторов $e^1, e^2, ..., e^m$. Так как K — выпуклый конус, то он вместе с векторами (2.7) заведомо содержит и все ненулевые неотрицательные линейные комбинации векторов (2.7), т. е. $M \subset K$. В итоге приходим к включениям

$$R^m_+ \subset M \subset K,$$

из которых следует

$$\operatorname{Ndom} Y \subset P(\hat{Y}) \subset P(Y), \tag{2.11}$$

где

$$P(\hat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

— множество недоминируемых элементов множества Y относительно конусного отношения с конусом M.

Пусть $x, x^* \in X$, $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$ и $f(x) \neq f(x^*)$. На основании доказанного выше совпадения конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (2.8) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда вектор $y = f(x) - f(x^*)$ является ненулевым решением системы (2.8), т. е.

$$\begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(x^*) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{j-1}(x) - f_{j-1}(x^*) \\ \theta_{ij}\left(f_i(x) - f_i(x^*)\right) + \left(1-\theta_{ij}\right)\left(f_j(x) - f_j(x^*)\right) \\ f_{j+1}(x) - f_{j+1}(x^*) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x^*) - f_m(x^*) \end{pmatrix} \geq 0_m\,.$$

[1]) *Общее* (т. е. произвольное) *решение* системы линейных неравенств имеет вид линейной комбинации определенной конечной совокупности решений этой системы с неотрицательными коэффициентами (см. [4], с. 243). При этом *фундаментальная совокупность решений* системы линейных неравенств — это минимальная (по количеству) подобная совокупность решений.

[2]) Напомним, что символ $\langle a, b\rangle$ для m-мерных векторов a и b означает их *скалярное произведение*, т. е. $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$.

Последнее неравенство можно переписать в виде $\widehat{f}(x) - \widehat{f}(x^*) \in R_+^m$ или $\widehat{f}(x) \geq \widehat{f}(x^*)$. Следовательно, соотношение $y - y^* \in M$ для векторов $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$ равносильно неравенству $\widehat{f}(x) \geq \widehat{f}(x^*)$. Отсюда следует, что множество $P(\widehat{Y})$, участвующее в (2.11), совпадает с множеством парето-оптимальных векторов многокритериальной задачи, в которой множество возможных решений есть X, а векторный критерий — $\widehat{f}$ вида (2.6).

Для завершения доказательства остается заметить, что в условиях доказываемой теоремы на основании леммы 1.2 верно включение $\mathrm{Sel}\, Y \subset \mathrm{Ndom}\, Y$. С учетом этого из включений (2.11) вытекают включения (2.5), которые требовалось установить.∀

В соответствии с принципом Эджворта–Парето (см. раздел 1.4) все выбираемые векторы должны содержаться во множестве Парето или, что то же самое, любой парето-оптимальный вектор может оказаться выбранным. Если в задаче многокритериального выбора имеется дополнительная информация о том, что какой-то один из критериев важнее другого, то, в соответствии с теоремой 2.5, на основе этой информации множество Парето может быть сужено без потери выбираемых векторов. Иначе говоря, некоторые векторы из множества Парето можно удалить, так как они заведомо не должны быть выбранными. Осуществленное таким образом *сужение множества Парето* на основе информации об относительной важности критериев в некоторых задачах может существенно облегчить последующий поиск выбираемых векторов.

Справедливости ради следует отметить, что в определенных случаях (в особенности, когда коэффициент относительной важности близок к нулю, а значит, критерии f_j и $\widehat{f}_j$ почти равны друг другу) указанного выше сужения может и не произойти из-за совпадения множеств Парето относительно «старого» и «нового» векторных критериев, т. е. $P(\widehat{Y}) = P(Y)$. Можно сказать, что в таких случаях имеющаяся информация об относительной важности критериев не является содержательной.

В терминах решений доказанная теорема принимает следующий вид.

Теорема 2.5 (в терминах решений). *Предположим, что отношение предпочтения* $\succ$ *удовлетворяет аксиомам* 1–4 *и i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ij} \in (0, 1)$. *Тогда для любого непустого множества выбираемых решений* $\mathrm{Sel}\, X$ *имеют место включения*

$$\mathrm{Sel}\, X \subset P_{\widehat{f}}(X) \subset P_f(X), \tag{2.12}$$

где $P_{\widehat{f}}(X)$ *— множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений* X *и «новым» векторным критерием* $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_m)$, *компоненты которого вычисляются по формулам* (2.6).

Рис. 2.4 иллюстрирует доказанную теорему.

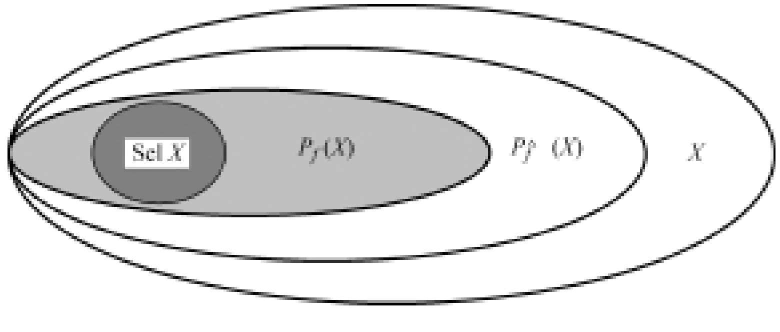

Рис. 2.4.

Комментируя последнюю теорему, прежде всего, следует обратить внимание на ее универсальность, проявляющуюся в том, что в ней отсутствуют какие бы то ни было требования к множеству возможных решений X векторному критерию f. Это говорит о том, что она применима к любой задаче многокритериального выбора, в которой выполнены аксиомы 1–4. При этом множество возможных решений (и векторов) может состоять как из конечного, так и бесконечного числа элементов, а функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ могут быть какими угодно — нелинейными, невыпуклыми, невогнутыми и даже не обладать свойством непрерывности. Ограничения в условиях теоремы 2.5 накладываются лишь на поведение ЛПР — оно должно в процессе выбора вести себя «достаточно разумно» в том смысле, что его отношение предпочтения обязано удовлетворять аксиомам 1–4.

Далее, формула (2.6) для пересчета «нового» критерия $\widehat{f}$ на основе «старого» f чрезвычайно проста. В соответствии с ней «новый» векторный критерий из «старого» получается заменой менее важного критерия f_j на выпуклую комбинацию критериев f_i и f_j с коэффициентом относительной важности θ_{ij}. Все остальные «старые» критерии сохраняются. Нетрудно видеть, что при подобном «пересчете» j-го критерия многие полезные с точки зрения оптимизации свойства критериев f_i и f_j сохраняются. Например, если указанные критерии являются непрерывными, вогнутыми, выпуклыми или линейными, то новый критерий $\hat{f}_j$ так же будет обладать соответствующими свойствами.

Наиболее простой вид формула (2.6) принимает в случае линейных критериев. Сформулируем соответствующий результат.

Следствие 2.2. *Если дополнительно к предположениям теоремы 2.5 добавить условие $X \subset R^n$ и требование линейности критериев f_i и f_j, т. е.*

$$f_k(x) = \langle c^k, x\rangle = \sum_{l=1}^{n} c_l^k x_l, \quad k = i, j,$$

где $c^k = \left(c_1^k, c_2^k, ..., c_n^k\right)$, *то новый j-й критерий будет иметь вид* $\hat{f}_j(x) = \langle \hat{c}, x\rangle$, *где*

$$\hat{c} = \theta_{ij} c^i + (1-\theta_{ij})c^j. \tag{2.13}$$

Этот результат немедленно вытекает из формулы (2.6) с учетом линейности скалярного произведения векторов пространства R^m.

Равенство (2.13) имеет наглядную интерпретацию в случае, когда множеством возможных решений является подмножество двумерного векторного пространства, т. е. когда $X \subset R^2$ (рис. 2.5).

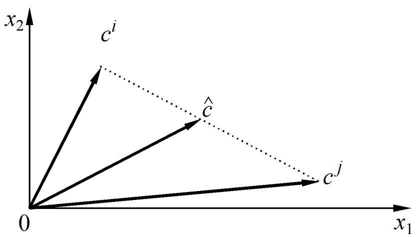

Рис. 2.5.

Чем ближе коэффициент относительной важности θ_{ij} к нулю, тем ближе конец вектора $\hat{c}$ к концу вектора c^j. При увеличении θ_{ij} в пределах интервала (0, 1) вектор c^i, соответствующий более важному критерию, как бы «притягивает» к себе вектор $\hat{c}$, соответствующий новому j-му критерию. В случае $\theta_{ij} = 0.5$ конец вектора c будет располагаться в центре отрезка соединяющего концы двух векторов c^i и c^j. Если же коэффициент относительной важности близок к единице, то вектор $\hat{c}$ будет мало отличаться от c^i, а значит векторный критерий $\hat{f}$ будет содержать два почти одинаковых критерия f_i. Тем самым, влияние менее важного критерия f_j, которому соответствует вектор c^j, на решение задачи многокритериального выбора практически исчезнет.

3. Геометрические аспекты. В задачах многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется

в процессе выбора, как правило, полностью не известно. В настоящей книге считается, что оно лишь подчиняется аксиомам 1–4. В этих условиях согласно теореме 2.3 отношение предпочтения $\succ$ является конусным с (неизвестным) острым выпуклым конусом K, не содержащим начало координат. Более того, в силу следствия 2.1 конус K содержит неотрицательный ортант, т. е. $R_+^m \subset K$. Отсюда вытекает включение $\operatorname{Ndom} Y \subset P(Y)$, что вместе с (1.7) дает

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(Y). \tag{2.14}$$

Последнее включение выражает собой принцип Эджворта–Парето, согласно которому выбор следует производить в пределах множества Парето. Как было указано в первой главе, этот принцип применим в любой задаче многокритериального выбора, удовлетворяющей аксиомам 1–3. Иначе его можно сформулировать так: *множество Парето представляет собой определенную оценку сверху для множества выбираемых векторов.*

Теперь предположим, что помимо аксиом 1–4, которым удовлетворяет рассматриваемая задача многокритериального выбора, имеется дополнительная информация о том, что i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij} \in (0, 1)$. Наличие такой информации на геометрическом языке означает, что указан вектор $\hat{y} \in R^m$ вида (2.4), для которого выполняется включение $\hat{y} \in K$. Таким образом, теперь известно, что конус K кроме неотрицательного ортанта содержит еще и вектор $\hat{y}$, расположенный за пределами неотрицательного ортанта.

Рассмотрим конус M, совпадающий с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций векторов $e^1, ..., e^{i-1}, \hat{y}, e^{i+1}, ..., e^m$, который был введен при доказательстве теоремы 2.5. В ходе доказательства были установлены включения $R_+^m \subset M \subset K$, причем $M \neq R_+^m$. Из этих включений следует

$$\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y \subset \operatorname{Ndom}_M Y \subset P(Y),$$

где

$$\operatorname{Ndom} Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in K\},$$

$$\operatorname{Ndom}_M Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\},$$

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in R_+^m\}.$$

Отсюда получаем новую, более точную, чем (2.14), оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов:

$$\mathrm{Sel}\, Y \subset \mathrm{Ndom}_M Y.$$

При этом чем более широким по сравнению с неотрицательным ортантом R_+^m является конус M, тем более узким можно ожидать множество $\mathrm{Ndom}_M Y$ по сравнению с $P(Y)$.

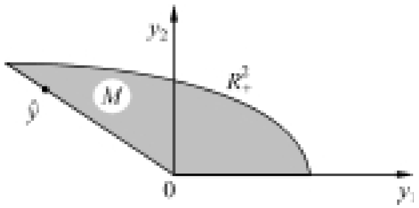

Рис. 2.6.

Итак, наличие указанной дополнительной информации об относительной важности критериев дает возможность выделить в неизвестном конусе K более широкую часть, чем R_+^m (рис. 2.6), и на основании этого построить более точную оценку сверху для множества выбираемых векторов по сравнению с той, которая гарантируется принципом Эджворта–Парето.

Пример 2.1. Пусть $m = 2$, $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$, причем

$$y^1 = 4{,}1;\ y^2 = 3{,}2;\ y^3 = 1{,}3.$$

Здесь все три возможных вектора являются парето-оптимальными, т. е. принцип Эджворта–Парето не позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

Предположим, что имеется дополнительная информация о том, что первый критерий важнее второго с коэффициентом относительной важности 0.5. На геометрическом языке это означает, что $\hat{y} = (0.5; -0.5) \in K$.

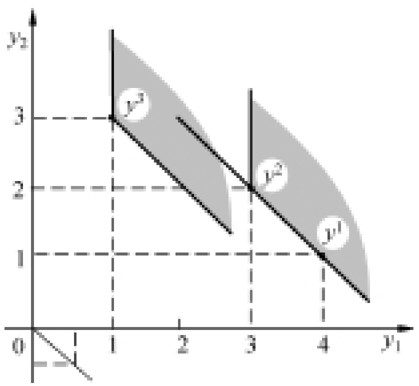

Рис. 2.7.

На рис. 2.7 изображены данные три возможных вектора и конус M, транслированный в точки, соответствующие второй и третьей возможным векторам. Видно, что ни первый, ни второй вектор не могут оказаться выбранными, так как для них существуют доминирующие их векторы:

$$y^2 \in y^3 + M, \quad y^1 \in y^2 + M.$$

Следовательно, единственным выбранным может оказаться первый вектор y^1. Иными словами, если множество выбираемых векторов в данной задаче не пусто, то оно состоит из единственного первого вектора.

К тому же самому выводу можно прийти, если воспользоваться результатом теоремы 2.5. В самом деле, согласно формуле (2.6) новый второй критерий принимает вид $0.5\,y_1 + 0.5\,y_2$ и, как легко найти,

$$\widehat{Y} = \{(4,\, 2.5),\, (3,\, 2.5),\, (1,\, 2)\}.$$

Парето-оптимальным в этом множестве является только один первый вектор. Значит, он (и только он) может оказаться выбранным при условии, что выбираемые векторы существуют.

2.4. Шкалы критериев и инвариантность измерений

1. Количественные и качественные шкалы. Как было указано ранее, все критерии $f_1, f_2, \ldots, f_m$, участвующие в постановке задачи многокритериального выбора, принимают числовые значения. Тем самым, включение $y_i = f_i(x) \in R$ выполняется для любого $x \in X$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, m$. Для строгой постановки математической задачи многокритериального выбора этих сведений о критериях вполне достаточно.

Однако когда речь идет о той или иной прикладной задаче, числовые значения критериев представляют собой результаты измерения в некоторой шкале. Например, если рассматриваемый критерий выражает стоимость проекта, прибыль или затраты, то все эти величины могут быть выражены в рублях, миллионах рублей, долларах, евро или каких-то других денежных единицах. При измерении длин предметов результаты, как известно, получают в метрах, дюймах, футах, ярдах и т. п. Для указания временного промежутка используют часы, секунды, годы, миллионы лет и т. д. Таким образом, при решении конкретных прикладных задачи значения критериев измеряются в пределах той или иной шкалы и выражаются в определенных единицах измерения.

Существуют различные типы шкал измерения. Когда требуется подсчитать число предметов, людей, вещей и т. п., используется так называемая *абсолютная шкала*. В этой шкале жестко зафиксировано начало отсчета (нуль) и масштаб измерения (единица). Два разных (измеряющих) человека, независимо друг от друга выполнив измерения (подсчет) в этой шкале одних и тех же количеств, должны получить абсолютно идентичные результаты. Можно также сказать, что в этой шкале существует единственная для всех измеряющих единица измерения.

При измерении такой физической характеристики, как масса предмета, используют различные единицы измерения. Как известно, масса предмета может быть выражена в килограммах, фунтах, тоннах, пудах и т. д. Здесь фиксированным для всех измеряющих оказывается лишь начало отсчета — нуль, который соответствует отсутствию какой-либо массы, тогда как масштаб измерения может оказаться различным для разных измеряющих. Тем самым, результаты измерений y_i' и y_i'' одного и того же предмета для двух различных измеряющих, пользующихся разными единица измерений, могут отличаться на некоторый фиксированный положительный множитель α_i, т. е. $y_i' = \alpha_i\, y_i''$. В этом случае говорят, что результаты измерений определяются с точностью до преобразования вида $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i$, $\alpha_i > 0$. Шкала подобного типа называется *шкалой отношений*. Название этой шкалы связано с тем, что при измерении в этой шкале независимо от единицы измерения отношения измерений будут одинаковыми для различных измеряющих. Действительно, пусть один измеряющий для двух объектов получил два числа y_i' и y_i'', а другой для тех же объектов — $\tilde{y}_i'$ и $\tilde{y}_i''$ соответственно. Поскольку $\tilde{y}_i' = \alpha_i\, y_i'$ и $\tilde{y}_i'' = \alpha_i\, y_i''$ при некотором $\alpha_i > 0$, то выполняются равенства

$$\frac{\tilde{y}'_i}{\tilde{y}'_i} = \frac{\alpha_i\, y_i'}{\alpha_i\, y_i''} = \frac{y_i'}{y_i''},$$

которые и означают сохранение отношений измерений для различных измеряющих в шкале отношений. Таким образом, если какой-то измеряющий пришел к выводу, что, например, масса одного предмета в два раза больше массы другого, то и другой измеряющий (использующий другие единицы измерения) должен прийти к тому же самому выводу. Это свидетельствует о том, что, при сравнении результатов измерения в шкале отношений, высказывание «во столько-то раз больше (меньше)» является осмысленным.

Нетрудно понять, что измерение таких величин, как прибыль, затраты и т. п., выраженных в единицах какой-либо валюты, также следует производить в шкале отношений.

Еще одна шкала измерений характеризуется заданием масштаба измерений и нефиксированным (для различных измеряющих) началом отсчета. Примером такой шкалы может служить шкала летоисчисления — переход от одного летоисчисления к другому осуществляется изменением начала отсчета. Говоря более точно, *шкалой разностей* называется такая шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до преобразования $\phi_i(y_i) = y_i + c_i$, где c_i — фиксированное число. Измерения в этой шкале характеризуются сохранением разностей между двумя разными измерениями, выполненными различными измеряющими. Другими словами, для измерений, выполненных в шкале разностей, осмысленным является высказывание «на столько-то больше (меньше)». Например, продолжительность правления Николая II, вычисленная как в Григорианском, так и юлианском (или каком-то другом) календаре будет одна и та же.

Шкалой интервалов называется шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до (инвариантны относительно) линейного положительного преобразования $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i + c_i$, где $\alpha_i > 0$ и c_i — фиксированные числа. Типичным примером такой шкалы может служить шкала температур. Как известно, для измерения температуры имеются, например, шкалы Цельсия, Фаренгейта и Кельвина. Переход от результатов измерений в одной шкале к результатам в другой происходит по формулам вида $\tilde{y}_i = \alpha_i\, y_i + c_i$.

Шкала интервалов характеризуется тем, что у каждого измеряющего может быть свое начало отсчета и свой масштаб измерения. При этом для измерений, выполненных в шкале интервалов различными измеряющими, будут сохраняться отношения разностей:

$$\frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_i'}{\tilde{y}_i'' - \tilde{y}_i'''} = \frac{\alpha_i\, y_i + c_i - \left(\alpha_i\, y_i' + c_i\right)}{\alpha_i\, y_i'' + c_i - \left(\alpha_i\, y_i''' + c_i\right)} = \frac{y_i - y_i'}{y_i'' - y_i'''}.$$

Все перечисленные выше шкалы — абсолютную, отношений, разностей и интервалов относят к *количественным шкалам*. Понятно, что результаты измерения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования $\tilde{y}_i = \alpha_i\, y_i + c_i$, будут инвариантны и относительно преобразований вида $\tilde{y}_i = a_i y_i$ и $\tilde{y}_i = y_i + c_i$. По этой причине среди количественных шкал наиболее «общей» оказывается шкала интервалов. Поэтому все утверждения, полученные для измерений, выполненных в шкале интервалов, будут иметь место и для измерений в шкалах отношений и разностей (тем более, для абсолютной шкалы).

Кроме количественных существуют *качественные шкалы*. Типичным представителем качественной шкалы является *порядковая шкала*, в которой результаты измерений определяются с точность до преобразований вида $\phi_i(y_i)$, где ϕ_i — произвольная строго возрастающая функция. Примерами такой шкалы могут служить шкала твердости минералов Мосса, шкала упорядочения по важности выполнения работ, различные балльные шкалы. В порядковых шкалах не фиксируется начало отсчета, может быть различным масштаб измерений, причем, образно говоря, даже величина деления при переходе от одной отметки к другой у различных измеряющих может оказаться разной. Для результатов измерений в порядковой шкале лишены смысла высказывания «во столько-то раз больше (меньше)», «на столько-то единиц больше (меньше)». Здесь имеет смысл только отношение «больше—меньше». Следует отметить, что существуют и другие качественные шкалы (см., например, [10, 27]).

Все утверждения, полученные для результатов измерений, выполненных в качественной шкале, имеют место и для количественных шкал, тогда как обратное не верно. Поэтому количественные шкалы по сравнению с качественными оказываются «богаче» в том смысле, что для них могут быть получены более богатые по содержанию утверждения, хотя и для менее широкого класса задач.

2. Инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования критериев. Напомним определение множества Парето (в терминах векторов):

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}.$$

Выполнение неравенства $y \geq y^*$, участвующего в определении множества Парето, означает справедливость покомпонентных неравенств $y_i \geqq y_i^*$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, причем по крайней мере для одного номера i последнее неравенство является строгим.

Пусть ϕ_i — строго возрастающая числовая функция одной переменной, заданная на всей числовой оси, т. е.

$$y_i > y' \quad \Leftrightarrow \quad \phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$$

для $y_i, y_i' \in R$. Очевидно, выполнение равенства $y_i = y_i'$ для строго возрастающей функции ϕ_i равносильно выполнению равенства $\phi_i(y_i) = \phi_i(y_i')$. Далее, для такой функции в соответствии с ее определением неравенство $y_i > y_i'$ имеет место тогда и только тогда, когда верно неравенство $\phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$.

Полученное означает, что определение множества Парето по существу не изменится, если к значениям критериев применить строго возрастающее преобразование. Иными словами, множество Парето оказывается инвариантным относительно указанного преобразования, а значит, *понятие множества Парето можно использовать во всех тех случаях*, *когда измерения критериев производятся*, *по крайней мере*, *в порядковой* (тем более, в любой количественной) *шкале.*

3. Инвариантность результатов теоремы 2.5 относительно линейного положительного преобразования критериев. Центральный результат второй главы — это теорема 2.5, которая показывает каким образом информацию об относительной важности критериев можно использовать для сужения множества Парето. Как было указано в предыдущем разделе, основой этого сужения являются включения

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{2.15}$$

где $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений X и «новым» векторным критерием $\widehat{f} = \left(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, ..., \widehat{f}_m\right)$ (т. е. $\widehat{Y} = \widehat{f}(X)$), компоненты которого вычисляются по формулам

$$\widehat{f}_j = \theta_{ij} f_i + \left(1 - \theta_{ij}\right) f_j, \ \widehat{f}_s = f_s \text{ для всех } s \in I \setminus \{j\}. \tag{2.16}$$

Поскольку рассматриваемый в книге количественный подход предполагает измерение значений критериев в количественных шкалах, то несомненный практический интерес представляет установление инвариантности включений (2.15) относительно линейного положительного преобразования критериев. Заметим, что если бы такой инвариантности на самом деле не было, то это означало бы невозможность применение предлагаемого подхода при решении практических многокритериальных задач с количественными критериями.

Теорема 2.6. *Включения* (2.15) (*а также* (2.12)) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев.*

⮙ Прежде всего заметим, что множество выбираемых векторов Sel Y определено таким образом, что оно подчиняется лишь аксиоме 1, не содержащей никаких упоминаний о критериях. Значит, оно не зависит от выбора шкал критериев и является инвариантным относительно любого преобразования критериев.

В предыдущем пункте была установлена инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования. Линейное положительное преобразование является частным случаем строго возрастающего преобразования. Поэтому множество Парето $P(Y)$ из (2.15) инвариантно относительно линейного положительного преобразования критериев. Для доказательства инвариантности множества Парето $P(\widehat{Y})$ достаточно убедиться в инвариантности строгого неравенства $f_j = \theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j \geq \theta_{ij}\bar{y}_i + (1-\theta_{ij})\bar{y}_j = \bar{f}_j$, содержащего новый j-й критерий, поскольку проверка инвариантности соответствующих неравенств для произвольного критерия f_i, $i \neq j$, производится так же элементарно, как в предыдущем пункте.

Сначала напомним определение коэффициента относительной важности критериев:

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} = \frac{y_j'' - y_j'}{y_i' - y_i'' + y_j'' - y_j'}.$$

Здесь $y_k' = f_k(x')$, $y_k'' = f_k(x'')$ $(k = i, j)$, причем w_i^*, w_j^* — фиксированные числа.

Теперь заменим y_k на $\tilde{y}_k = \alpha_k y_k + c_k$ $(\alpha_k > 0)$, $k = i, j$, в формуле $\widehat{f}_j = \theta_{ij} y_i + (1 - \theta_{ij}) y_j$, задающей новый j-й критерий. В результате этой замены получим преобразованный новый критерий вида

$$\widehat{\widetilde{f}}_j = \frac{\alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i + \alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j} \cdot (\alpha_i y_i + c_i) +$$

$$+\left(1 - \frac{\alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i + \alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}\right) \cdot (\alpha_j y_j + c_j).$$

После упрощения приходим к следующему выражению

$$\widehat{\widetilde{f}}_j = \alpha_i \alpha_j \frac{w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} y_i + \alpha_i \alpha_j \frac{w_i^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} y_j + C, \quad (2.17)$$

где константа

$$C = c_i \alpha_j \frac{w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} + c_j \alpha_i \frac{w_i^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*}$$

не зависит от y_i, y_j.

Теперь предположим, что неравенство

$$\widehat{f}_j = \theta_{ij} y_i + (1 - \theta_{ij}) y_j = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} y_i + \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} y_j >$$

$$> \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \bar{y}_i + \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} \bar{y}_j = \theta_{ij} \bar{y}_i + (1 - \theta_{ij}) \bar{y}_j = \bar{f}_j \qquad (2.18)$$

выполняется для произвольных чисел y_i, y_j, $\bar{y}_i, \bar{y}_j$. Принимая во внимание (2.17), после умножения на положительное число

$$\alpha_i \alpha_j \frac{w_i^* + w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*}$$

и прибавления константы C к обеим частям (2.18), получим неравенство

$$\widehat{\widetilde{f}}_j > \overline{\widetilde{f}}_j = \alpha_i \alpha_j \frac{w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} \bar{y}_i + \alpha_i \alpha_j \frac{w_i^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} \bar{y}_j + C. \quad (2.19)$$

Следовательно, из выполнения неравенства (2.18) вытекает неравенство (2.19). Нетрудно понять, что из выполнения неравенства (2.19) аналогичным образом можно прийти к неравенству (2.18). Это означает, что рассматриваемые два неравенства эквивалентны. ⋎

Из доказательства последней теоремы видно, что коэффициент относительной важности θ_{ij} не является инвариантным относительно линейного положительного преобразования критериев. Более того, можно легко проверить, что он не является инвариантным и относительно преобразований вида $\tilde{y}_k = a_k y_k$ и $\tilde{y}_k = y_k + c_k$, $k = i, j$. Это свидетельствует о том, что *для различных измеряющих (различных ЛПР) коэффициенты относительной важности критериев будут различными, даже если они решают одну и ту же задачу выбора, имеют одинаковые предпочтения и выполняют измерения в шкале одного и того же типа.* И в этом нет никакого противоречия, поскольку указанные ЛПР могут использовать различные единицы измерения для одних и тех же критериев.

В самом деле, пусть, например, два лица, принимающие решения, производят измерения значений первого критерия в единицах валюты и с точки зрения предпочтений ведут себя совершенно одинаковым образом, но одно из них производит расчет в долларах, а другое — в рублях. Предположим далее, что измерение значений второго критерия осуществляется обоими ЛПР в абсолютной шкале (например, число штук выпускаемых заводом изделий). Для ЛПР, работающего с долларами и готового за добавку в \$ 1000 пожертвовать 10 изделиями, коэффициент относительной важности первого критерия в сравнении со вторым составит

$$\theta'_{12} = \frac{10}{1000 + 10} \approx 0.01.$$

Второе ЛПР, оперирующее с рублями (если оно ведет себя так же как первое ЛПР), должно быть готово за 30000 руб. добавки по первому критерию пожертвовать тем же самым количеством изделий (10 штук) по второму критерию, поскольку один доллар (на момент принятия решения) приблизительно равен тридцати рублям. Поэтому для второго ЛПР коэффициент относительной важности будет равен

$$\theta''_{12} = \frac{10}{30000 + 10} \approx 0.00033,$$

что значительно меньше, чем у первого. Но именно так и должно быть, поскольку для первого ЛПР единица валюты является существенно более «дорогой», чем для второго.