Глава 5

ПОЛНОТА ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Здесь дается теоретическое обоснование предлагаемого далее метода последовательного сужения множества компромиссов на основе конечного набора информации об относительной важности критериев. Изложение данной главы является наиболее сложным в математическом отношении, поэтому она без ущерба для понимания дальнейшего материала может быть пропущена читателями, не имеющими соответствующей подготовки.

Существо полученных здесь результатов можно выразить следующим образом: информация об относительной важности критериев полна в том смысле, что только на ее основе для любой задачи определенного достаточно широкого класса можно с любой степенью точности определить неизвестное множество недоминируемых векторов (недоминируемых решений). Если же число возможных векторов конечно, то множество недоминируемых векторов может быть построено точно и полностью. Таким образом, научившись выявлять информацию об относительной важности из ЛПР, можно успешно находить множество недоминируемых решений и векторов, не привлекая информации никакого другого типа.

При изложении результатов этой главы были использованы некоторые идеи из книги [3].

5.1. Предварительное рассмотрение

1. Постановка задачи. Наличие информации об относительной важности критериев, состоящей в том, что некоторая группа критериев важнее другой группы, позволяет удалить определенные парето-оптимальные векторы как заведомо неприемлемые и, тем самым, получить более точную оценку сверху (аппроксимацию) для множества выбираемых векторов, чем множество Парето. Если же такой информации имеется некоторый конечный набор, то можно надеяться, что с его помощью удастся построить еще более точную (более узкую) оценку сверху. Из общих соображений ясно, что, располагая все большим набором подобного рода информации, можно строить все более точную оценку сверху. В связи с этим, возникает следующий вопрос: каковы границы использования конечного набора различной информации об относительной важности критериев?

Прежде чем продолжить рассмотрение, отметим следующее. Благодаря лемме 1.2 множество выбираемых векторов должно содержаться в множестве недоминируемых векторов. Более того, имея дело с классом задач многокритериального выбора, ограниченных рамками аксиом 1–4, ясно, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых векторов. Иными словами, информация об отношении предпочтения ЛПР и наличие набора критериев, удовлетворяющих аксиомам 1–4, не позволяют исключить как заведомо неприемлемый ни один из недоминируемых векторов. Поэтому самой узкой оценкой сверху для множества выбираемых векторов в рассматриваемой модели будет множество недоминируемых векторов. По этой причине мы будем далее говорить об аппроксимации (приближении) не множества выбираемых, а множества недоминируемых векторов.

Более точно поставленный выше вопрос можно сформулировать следующим образом: *возможно ли, используя лишь конечный набор информации об относительной важности критериев, получить сколь угодно точное представление о неизвестном множестве недоминируемых векторов*? Оказывается, на этот вопрос в принципе можно ответить положительно. В принципе — так как придется несколько сузить класс рассматриваемых задач многокритериального выбора, уже ограниченных рамками аксиом 1–4.

Ниже будет показано, что для определенного класса задач многокритериального выбора нужно лишь научиться успешно извлекать и грамотно использовать информацию об относительной важности критериев. Этого вполне достаточно для того, чтобы, по крайней мере, теоретически получить сколь угодно точное представление о неизвестном множестве недоминируемых векторов (и недоминируемых решений). Такое положение свидетельствует о важной роли информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений.

2. Геометрические аспекты. Сформулируем поставленный выше вопрос в геометрических терминах.

В соответствии с определением 3.3 наличие информации об относительной важности одной группы критериев по сравнению с другой группой означает, что указан вектор $u \in N^m$, имеющий

по крайней мере одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты, для которого выполняется соотношение $u \succ 0_m$. В том случае, когда имеется конечный набор подобного типа информации, соответственно получаем набор таких векторов $u^i \in N^m$, что верно $u^i \succ 0_m$, $i = 1, 2, ..., k$. Если набор векторов непротиворечив (точнее говоря, непротиворечивым является набор пар векторов u^i, 0_m, $i = 1, 2, ..., k$), то выпуклый конус M, порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k$, представляет собой совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций этих векторов и является острым выпуклым конусом (без нуля). Он задает конусное отношение, обозначаемое далее $\succ_M$.

Поставленный в предыдущем пункте вопрос о полноте информации об относительной важности критериев теперь в геометрических терминах примет следующую форму: насколько близким к неизвестному отношению предпочтения $\succ$ можно получить отношение $\succ_M$, используя лишь различного рода конечные непротиворечивые наборы векторов $u^1, u^2, ..., u^k$. Другими словами, *имеется ли принципиальная возможность за счет выбора указанного набора векторов сколь угодно точно приблизить отношение $\succ_M$ к неизвестному отношению предпочтения $\succ$*?

Для упрощения последующего решения поставленный вопрос переведем в плоскость конусов отношений и сформулируем его так: *возможно ли за счет выбора набора векторов $u^1, u^2, ..., u^k$ получить конус M сколь угодно близким к неизвестному конусу K*[1])? При этом число векторов k не фиксировано и может быть любым конечным числом.

Конус K является произвольным острым выпуклым конусом и не содержит нуля. Что касается конуса M, то он принадлежит тому же классу, что и K, т. е. так же является острым, выпуклым и не содержит нуля. Однако в отличие от K конус M порожден конечным числом векторов, а, значит, он — конечнопорожденный, т. е. многогранный (см. [4, 28]). В такой постановке вопрос о полноте информации об относительной важности критериев имеет много общего с известной в выпуклом анализе задачей аппроксимации произвольного выпуклого компактного множества многогранником. Как известно, эта задача имеет положительное решение — произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество можно сколь угодно точно аппроксимировать (приблизить) многогранником. Поэтому есть все основания

[1]) Напоминаем, что K — острый выпуклый конус отношения $\succ$.

надеяться, что аналогичный вопрос, сформулированный для конусов (когда произвольный выпуклый конус нужно аппроксимировать многогранным конусом) найдет свое положительное решение. Но для того чтобы получить это решение, прежде всего необходимо договориться об измерении расстояния между выпуклыми конусами.

3. Расстояние между конусами. Пусть A и B — произвольные непустые выпуклые подмножества пространства R^m. Как известно, *хаусдорфово расстояние* (см. [11]) между данными множествами обозначается $\operatorname{dist}(A, B)$ и определяется формулой

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{r \in R_+ \mid A \subset (B)_r,\ B \subset (A)_r\},$$

где R_+ означает множество положительных вещественных чисел и

$$(A)_r = \bigcup_{y \in A} U_r(y), \qquad (B)_r = \bigcup_{y \in B} U_r(y),$$

а $U_r(y)$ $(r > 0)$ — замкнутый шар в пространстве R^m с центром в y и радиусом r:

$$U_r(y) = \{z \in R^m \mid \|z - y\| \leqq r\},$$

Символом $\|a\|$ здесь обозначена евклидова норма (длина) вектора $a \in R^m$, т. е.

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2}\,.$$

В частном случае, когда A и B — одноэлементные множества (a) и (b) соответственно, хаусдорфово расстояние между ними совпадает с евклидовым и равно норме разности этих векторов, т. е. $\|a - b\|$.

Следующий результат показывает, что непосредственное применение хаусдорфова расстояния для измерения расстояния между выпуклыми конусами наталкивается на определенные трудности, которые, впрочем, далее будут преодолены.

Лемма 5.1. *Пусть K_1 и K_2 — произвольные два выпуклые конуса в пространстве R^m, не содержащие начало координат, причем $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_2$, где черта сверху означает замыкание множества* [1]). *Тогда имеет место равенство*

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) = +\infty.$$

[1]) Операция *замыкания множества* состоит в присоединении к нему всех его граничных точек.

⮝ Из неравенства $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_2$ следует, что найдется точка $y \in R^m$, такая что $y \in \bar{K}_1$, $y \notin \bar{K}_2$, либо найдется такая точка $y \in R^m$, для которой $y \in \bar{K}_2$, $y \notin \bar{K}_1$. Для определенности продолжим рассмотрение первого случая, так как второй разбирается аналогично.

Из соотношений $y \in \bar{K}_1$, $y \notin \bar{K}_2$ вытекает существование такой точки y', что $y' \neq 0_m$ и $y' \in K_1$, $y' \notin \bar{K}_2$. Рассмотрим луч (частный случай конуса), исходящий из начала координат и проходящий через y'. Обозначим этот луч l. Для него выполнены соотношения $l \subset K_1$, $l \not\subset \bar{K}_2$.

Норма $\|y' - y\|$, как функция переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, непрерывна и ограничена снизу на конусе K_2. Поэтому найдется предельная для множества K_2 точка $\hat{y} \in R^m$, для которой выполняется равенство

$$\inf_{y \in K_2} \|y' - y\| = \|y' - \hat{y}\|,$$

причем $\hat{y} \neq y'$. Выберем на луче l последовательность точек $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$y^k = ky',\ k = 1, 2, \ldots$$

Для точек этой последовательности имеем

$$\inf_{y \in K_2} \|y^k - y\| = \inf_{y \in K_2} \|ky' - y\| = k \inf_{y \in K_2} \left\|y' - \frac{y}{k}\right\| =$$
$$= k \inf_{ky \in K_2} \|y' - y\| = k\,\|y' - \hat{y}\| \underset{k \to \infty}{\to} +\infty,$$

откуда немедленно следует требуемое равенство $\operatorname{dist}(K_1, K_2) = = +\infty$. ⮟

В соответствии с доказанной леммой хаусдорфово расстояние между двумя «существенно несовпадающими» конусами (замыкания которых не совпадают) всегда равно $+\infty$. Поэтому измерять близость конусов бинарных отношений с помощью хаусдорфова расстояния не представляется возможным.

Пусть K означает выпуклый конус в пространстве R^m, а Y — подмножество того же пространства. Введем множество

$$Y_z = \{y \in \mid y - z \in K\}$$

для каждого $z \in Y$. Если существует такая положительная константа r, что для любого $z \in Y$ выполняется неравенство

$$\sup_{y \in Y_z} \| y - z \| \leq r,$$

то множество Y называют *K-ограниченным*. Нетрудно проверить, что всякое ограниченное множество является K-ограниченным, тогда как обратное утверждение в общем случае места не имеет.

Теперь пусть Y есть множество возможных векторов, а K — выпуклый конус конусного отношения предпочтения $\succ$. Предположим, что имеет место соотношение $y' \succ y''$ для векторов $y', y'' \in R^m$. Это равносильно выполнению включения $y' - y'' \in K$. Если допустить, что множество Y является K-ограниченным, то справедливо неравенство $\| y' - y'' \| \leqq r$ или, что то же самое, верно включение

$$y' - y'' \in R \cap U_r(0_m).$$

Таким образом, для K-ограниченного множества возможных векторов Y истинна эквивалентность

$$y' - y'' \in K \ \Leftrightarrow \ y' - y'' \in K \cap U_r(0_m).$$

Это означает, что для K-ограниченного множества Y вопрос близости конусов равнозначен вопросу близости лишь тех частей конусов, которые расположены в шаре $U_r(0_m)$.

Приведенные рассуждения обосновывают введение следующего определения. *Расстояние между конусами K_1 и K_2* будем обозначать $d_r(K_1, K_2)$; оно определяется формулой

$$d_r(K_1, K_2) = \operatorname{dist}(K_1 \cap U_r(0_m), K_2 \cap U_r(0_m)), \tag{5.1}$$

где r — некоторое (достаточно большое) положительное число. Введенное расстояние обладает стандартными свойствами метрики (см. [11]):

1) $d_r(K_1, K_2) \geqq 0$,
2) $d_r(K_1, K_2) = 0 \ \Leftrightarrow \ \bar{K}_1 = \bar{K}_2$,
3) $d_r(K_1, K_2) = d_r(K_2, K_1)$,
4) $d_r(K_1, K_3) \leqq d_r(K_1, K_2) + d_r(K_2, K_3)$

для любых выпуклых конусов K_1, K_2, K_3.

5.2. Первая теорема о полноте

1. Постановка математической задачи. Бинарное отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе принятия решений, благодаря аксиомам 2–4 является конусным с острым выпуклым конусом K без начала координат. Поэтому пусть имеется произвольный острый выпуклый конус K, $K \subset R^m$, который не содержит начало координат и в силу аксиомы Парето включает неотрицательный ортант R^m_+. Следует заметить, что в общем случае конус K не является многогранным.

Как указано в предыдущем разделе, наличие конечного набора информации об относительной важности критериев равносильно заданию некоторого непротиворечивого конечного набора векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k \in N^m$, которые вместе с единичными ортами $e^1, e^2, \ldots, e^m$ порождают многогранный конус M, содержащийся в конусе K.

Математическая постановка рассматриваемого вопроса выглядит следующим образом: *возможно ли за счет выбора набора указанных выше векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k$ (при этом число k векторов конечно, но не фиксировано) добиться того, чтобы расстояние $d_r(K, M)$ между конусами K и M было сколь угодно малым?*

Ответ на поставленный вопрос дается в следующей теореме.

2. Первая теорема о полноте.

Теорема 5.1 (в терминах аппроксимации конусов). *Пусть K — произвольный острый выпуклый конус, не содержащий начала координат, и такой, что $K \subset R^m$, $K \supset R^m_+$, $K \neq R^m_+$. Выберем и зафиксируем произвольное положительное r. Тогда для любого положительного числа ε найдется такой конечный набор векторов*

$$\left\{u^i\right\}_{i=1}^k \subset R^m, \ u^i \in N^m \ \cap \ K \ \cap \ U_r(0_m), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

что

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\left\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k\right\}\right) < \varepsilon, \tag{5.2}$$

где $\operatorname{cone}\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k\}$ *— выпуклый конус, порожденный конечным набором векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k$.*

Более того, при этом можно считать, что компоненты всех векторов u^i являются рациональными числами.

⮙ Примем обозначения

$$\widehat{K} = K \ \cap \ U_r(0_m), \ \operatorname{int}\widehat{K} = \operatorname{int} K \ \cap \ \operatorname{int} U_r(0_m).$$

Зафиксируем произвольное положительное ε. Введем $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}}$ — сеть пространства R^m. Через $\Pi(y)$ будем обозначать замкнутый m-мерный куб этой сети с центром в точке $y \in R^m$.

Выделим все кубы данной сети, пересекающиеся с множеством $\operatorname{int}\widehat{K}$. Благодаря ограниченности этого множества, число выделенных кубов конечно. Обозначим их через $\Pi(y^1)$, $\Pi(y^2)$, ..., $\Pi(y^i)$ и пусть

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi(y^j)\,.$$

По построению $\operatorname{int}\widehat{K} \subset \Pi$. На самом деле имеет место включение $\widehat{K} \subset \Pi$. Действительно, если это не так, то в силу замкнутости множества Π найдется такая точка $\hat{y} \in \widehat{K}$, что она не принадлежит Π вместе с некоторой своей окрестностью $\operatorname{int}U(\hat{y})$. Если соединить отрезком точку $\hat{y}$ с какой-нибудь точкой из $\operatorname{int}\widehat{K}$, то на основании теоремы 6.1 из [28] получим, что все внутренние точки указанного отрезка принадлежат $\operatorname{int}\widehat{K}$. Из этих внутренних точек множества $\widehat{K}$ выберем какую-нибудь в пределах окрестности $\operatorname{int}U(\hat{y})$ и обозначим ее через y'. Для нее получаем $y' \in \operatorname{int}\widehat{K}$, $y' \notin \Pi$, что противоречит включению $\operatorname{int}\widehat{K} \subset \Pi$. Таким образом, Π — покрытие множества $\widehat{K}$.

В каждом пересечении $\Pi(y^j) \cap \operatorname{int}\widehat{K}$ можно выбрать точку u^j с рациональными компонентами, $j = 1, 2, ..., l$. Введем выпуклую оболочку [1]) всех таких точек u^j и обозначим ее P. Это множество представляет собой некоторый многогранник.

Так как $\widehat{K}$ — выпуклое множество и $u^j \in \widehat{K}$, $j = 1, 2, ..., l$, то $P \subset \widehat{K}$, а значит и

$$P \subset (\widehat{K})_{\varepsilon}. \tag{5.3}$$

С другой стороны, найдутся точки, одновременно принадлежащие $\widehat{K}$ и не принадлежащие Π. Поскольку Π — покрытие $\widehat{K}$, то каждая из этих точек удалена от P не более чем на длину диагонали куба введенной сети, т. е. на $\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому заведомо

[1]) *Выпуклой оболочкой* данного множества называют наименьшее выпуклое множество, содержащее это множество.

выполняется включение $\widehat{K} \subset (P)_{\varepsilon}$, которое вместе с (5.3) влечет неравенство

$$\operatorname{dist}\left(\widehat{K}, P\right) < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Нетрудно понять, что

$$P \subset \left(\operatorname{cone}\{P\}\right) \cap U_r(0_m) \subset \widehat{K}.$$

Поэтому из (5.4) следует

$$\operatorname{dist}\left(\widehat{K}, \operatorname{cone}\left\{u^1, u^2, ..., u^l\right\} \cap U_r(0_m)\right) < \varepsilon\,. \tag{5.5}$$

В свою очередь, из (5.5) в силу $R^m_+ \subset K$ получаем неравенство

$$\operatorname{dist}\left(\widehat{K}, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^l\} \cap U_r(0_m)\right) < \varepsilon.$$

Оно совпадет с доказываемым неравенством (5.2), если из векторов $u^1, u^2, ..., u^l$ удалить все «лишние», т. е. те, которые принадлежат неотрицательному ортанту R^m_+, и оставшийся набор векторов обозначить $u^1, u^2, ..., u^k$.∀

Как известно, компьютер может оперировать только с рациональными числами, поскольку для задания иррационального числа в десятичной форме требуется бесконечное число разрядов. Поэтому информацию об относительной важности критериев будем называть *машинно реализуемой*, если все компоненты набора векторов, задающих эту информацию, являются рациональными числами. Поскольку всякий вектор из множества N^m задает определенную количественную информацию об относительной важности критериев, то полученный результат в терминах теории относительной важности критериев может быть переформулирован следующим образом.

Теорема 5.1 (в терминах информации об относительной важности критериев). *С помощью конечного набора машинно реализуемой информации об относительной важности критериев можно получить сколь угодно точное представление* (*точность оценивается формулой* (1)) *о конусе любого бинарного отношения предпочтения, удовлетворяющего аксиомам* 2–4.

5.3. Вторая теорема о полноте

1. Пример. В предыдущем разделе было установлено, что при определенных условиях конус неизвестного отношения предпочтения можно сколь угодно точно аппроксимировать «изнутри» многогранным конусом, соответствующим некоторому конечному набору информации об относительной важности критериев. Следует отметить, что близость конусов двух данных отношений (измеряемая расстоянием по формуле (5.1)) в общем случае не влечет близость самих бинарных отношений, а, значит, и множеств недоминируемых векторов, построенных на основе этих отношений. Подтверждение тому — следующий простой пример.

Пример 5.1. Пусть $m = 2$, плоское множество возможных векторов (точек) имеет вид отрезка

$$Y = \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1, y_2 \geqq 0, \quad y_1 + y_2 = 1\},$$

а острый выпуклый конус K задается равенством

$$K = \text{cone}\,\{(1, 0),\ (-1, 1)\}.$$

Здесь точка $(0, 1) \in Y$ доминирует (имеется в виду доминирование относительно конусного отношения с конусом K) над всеми остальными точками выделенного на рис. 5.1 отрезка, соединяющего эту точку с точкой $(0, 1)$. В частности, выполнено соотношение $(0, 1) \succ (1, 0)$, так как $(0, 1) - (1, 0) = (-1, 1) \in K$.

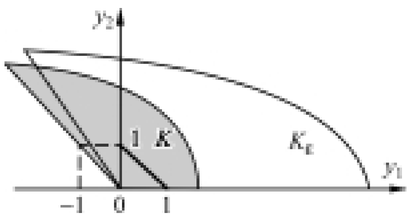

Рис. 5.1.

Теперь немного изменим K. Вместо него рассмотрим конус

$$K_\varepsilon = \text{cone}\,\{(1, 0), (-1, 1 + \varepsilon)\},$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ (см. рис. 5.1). Выбирая положительное число ε достаточно малым, конус K_ε можно сделать сколь угодно близким к конусу K (измеряя близость при помощи расстояния по формуле (5.1)). С другой стороны, каким бы малым положительное ε не выбрать, конусное отношение с конусом K_ε не будет близким к отношению с конусом K, поскольку для последнего множество недоминируемых точек будет состоять из одной точки $(0, 1)$ отрезка, соединяющего $(0, 1)$ и $(1, 0)$, а для отношения с конусом K_ε (при любом $\varepsilon \in (0, 1)$) множество недоминируемых точек будет составлять весь указанный отрезок.

2. Вторая теорема о полноте. Анализ примера 5.1 показывают, что если конус K не является открытым множеством, то при «небольшом» изменении этого конуса соответствующее ему множество недоминируемых точек может изменяться значительно. Однако если ограничиться отношениями предпочтения с открытыми конусами, то множество недоминируемых точек относительно произвольного отношения, удовлетворяющего всем указанным в теореме 5.1 свойствам, может быть получено как предел последовательности множеств недоминируемых точек относительно некоторых конусных отношений, построенных на основе набора машинно реализуемой информации об относительной важности критериев. Точнее говоря, имеет место следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть K — открытый острый выпуклый конус, не содержащий начала координат и $K \supset R^m_+$, $K \neq R^m_+$. Допустим, что множество Y является K-ограниченным. Тогда существует такая последовательность векторов*

$$\left\{u^s\right\}_{s=1}^{\infty}, \ u^s \in N^m \ \cap \ K, \quad s = 1, 2, \ldots$$

с рациональными компонентами, что имеет место сходимость

$$\text{Ndom}_{\succ_s} Y \to \text{Ndom}\, Y \ \text{ при } s \to \infty, \tag{5.6}$$

где $\succ_s$ — конусное отношение, порожденное острым выпуклым конусом cone $\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^s\}$ *без начала координат*, $s = 1, 2, \ldots$

Замечание. Сходимость в формуле (5.6) последовательности множеств недоминируемых векторов означает так называемую «поточечную» сходимость множеств, определяемую следующим образом: точка (вектор) $y^* \in Y$ принадлежит предельному множеству (т. е. $y^* \in \text{Ndom}\, Y$) тогда и только тогда, когда существует такое натуральное s_0, что включение $y^* \in \text{Ndom}_{\succ_s} Y$ имеет место для всех натуральных $s > s_0$.

⮙ Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Применяя доказательство теоремы 5.1, при $n = 1$ получим существование набора векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k$, для которых

$$d_r\left(K, \text{cone}\left\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k\right\}\right) < 1.$$

При $n = 2$ аналогично найдется, вообще говоря, другой набор векторов $u^{k+1}, \ldots, u^{k+p}$, для которых

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^{k+1}, u^{k+2}, ..., u^{k+p}\}\right) < \frac{1}{2}.$$

Поскольку при «расширении» конуса $\operatorname{cone}\{u^{k+1},...,u^{k+p}\}$ за счет добавления полученных ранее образующих $u^1, u^2, ..., u^k \in K$ расстояние между K и указанным способом «расширенным» конусом $\operatorname{cone}\{u^1, ..., u^k, u^{k+1}, ..., u^{k+p}\}$ становится разве что меньше, то

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k, u^{k+1}, u^{k+2}, ..., u^{k+p}\}\right) < \frac{1}{2}.$$

Рассуждая подобным образом, придем к существованию такой последовательности векторов $\left\{u^s\right\}_{s=1}^{\infty}$, что для каждого натурального n найдется номер s_n, при котором верно неравенство

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^s\}\right) < \frac{1}{n}, \quad s = s_n, s_n+1,... \tag{5.7}$$

Введем конусы

$$C_s = \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^s\}, \quad s = 1, 2, ...$$

Очевидно, $C_s \subset C_{s+1} \subset K$, $s = 1, 2, ...$ Кроме того, в соответствии с неравенством (5.7) для любого n существует номер s_n, при котором справедливы неравенства

$$d_r\left(K, C_s\right) < \frac{1}{n}, \quad s = s_n, s_n+1, ...$$

Отсюда сразу следует, что для любой точки $z \in \operatorname{int}\widehat{K}$, где $\widehat{K} = K \cap U_r(0_m)$, найдется такой номер s_0, что включение $z \in C_s$ будет выполнено для всех $s = s_0, s_0+1, ...$

Перейдем к доказательству сходимости (5.6) недоминируемых множеств. Если $y^* \in Y$ и $y^* \in \operatorname{Ndom} Y$, то по определению множества недоминируемых точек найдется точка $y \in Y$, для которой $y - y^* \in K$. Отсюда, используя условие теоремы о K-ограниченности множества Y, получаем $y - y^* \in \widehat{K}$. Так как K — открытый конус, то можно считать, что $z = y - y^* \in \operatorname{int}\widehat{K}$ (в противном случае, в качестве такой внутренней точки z можно взять, например, $0.5(y-y^*) \in \operatorname{int}\widehat{K}$). Тогда, как указано выше, существует

такой номер s_0, что включение $z = y - y^* \in C_s$ будет выполнено для всех номеров $s = s_0, s_0+1, ...$ Это влечет $y^* \notin \operatorname{Ndom}_{\succ_s} Y$ для всех указанных s. Поэтому всякая точка множества Y, не принадлежащая множеству $\operatorname{Ndom} Y$, не может являться предельной точкой последовательности множеств $\operatorname{Ndom}_{\succ_s} Y$, $s = 1, 2, ...$

С другой стороны, любая точка из $\operatorname{N dom} Y$ заведомо принадлежит указанному пределу последовательности множеств, так как включения $C_s \subset C_{s+1} \subset K$ влекут $\operatorname{Ndom} Y \subset \operatorname{Ndom}_{\succ_s} Y$ при всех $s = 1, 2, ...$

Тем самым, соотношение (5.6), а вместе с ним и теорема 5.2 доказаны. ⮟

3. Случай конечного множества возможных оценок. Когда множество возможных векторов состоит из конечного числа элементов, для точного определения множества недоминируемых векторов (с конусным отношением, у которого конус K — открытый) достаточно располагать лишь определенным конечным набором информации об относительной важности критериев. Об этом свидетельствует следующая ниже теорема. Она имеет важное значение в рамках подхода, развиваемого в данной книге, поскольку теоретически обосновывает исключительную значимость теории относительной важности критериев в вопросах построения множества недоминируемых векторов (недоминируемых решений). В соответствии с этой теоремой, для задач многокритериального выбора определенного класса, используя лишь информацию об относительной важности критериев, можно точно найти множество недоминируемых векторов (и недоминируемых решений).

Теорема 5.3. *Если дополнительно к предположениям теоремы* 5.2 *добавить, что множество возможных векторов* Y — *конечное*[1]), *то существует такой конечный набор* p *векторов* $\left\{u^i\right\}_{i=1}^{p} \subset N^m$ *с рациональными компонентами, что*

$$\operatorname{Ndom} Y = \operatorname{Ndom}_{\succ_p} Y,$$

где $\succ_p$ *конусное отношение с выпуклым конусом* $\operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^p\}$.

[1]) При этом K-ограниченность множества возможных векторов можно не предполагать, так как конечное множество ограничено, а значит и K-ограничено.

⮙ Пусть множество допустимых векторов Y — конечно и имеет вид $Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}$. Для каждого $y^i \in Y$ введем конечное множество

$$Z_i = \{z \in Y \mid \text{существует такой } y \in Y, \text{ что } z = y - y^i \in K\},$$
$$i = 1, 2, ..., N.$$

Благодаря тому, что K — открытое множество, найдется номер s_i, для которого $Z_i \subset C_s$ при всех $s = s_i, s_i + 1, ...,$ где C_s — конусы, введенные в ходе доказательства теоремы 5.2. Положим $p = \max\{s_1, s_2, ..., s_N\}$. Для этого номера в силу вложенности конусов $C_s \subset C_{s+1}$, $s = 1, 2, ...,$ имеем

$$Z_i \subset C_p \text{ для всех } i = 1, 2, ..., N.$$

Выберем два произвольных вектора $y^i, y^j \in Y$. Если имеет место включение $y^j - y^i \in K$, то выполняется $y^j - y^i \in Z_i \subset C_p$, а значит и $y^j - y^i \in C_p$. Обратно, если верно включение $y^j - y^i \in C_p$, то в силу вложенности $C_p \subset K$ выполнено включение $y^j - y^i \in K$. Таким образом, истинна эквивалентность

$$y^j - y^i \in K \;\Leftrightarrow\; y^j - y^i \in C_p,$$

которая устанавливает равенство конусных отношений с конусами K и C_p. ⮛