Автоматика и телемеханика, № 3, 2007

Моделирование поведения и интеллекта

PACS 89.75.-k

© 2007 г. **Ю.М. ВОЛИН**, канд. техн. наук,
Г.М. ОСТРОВСКИЙ, д-р техн. наук
(**ГНЦ НИФХИ** им. Л.Я. Карпова, Москва)

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрена проблема многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности, которая возникает на этапе проектирования технологического процесса. Неопределенность связана с неточностью математических моделей и некоторой неопределенностью условий, в которых будет реализовываться процесс. Рассмотрено обобщение хорошо известных методов многокритериальной оптимизации на случай учета неопределенности. При этом будет учитываться возможность использования управляющих переменных на этапе функционирования для компенсации эффекта неопределенности.

1. Введение

Проблема многокритериальной оптимизации (МКО) возникает во многих разделах науки и техники [1–4]. Здесь рассмотрена проблема МКО в случае проектирования химико-технологических процессов (ХТП). Во многих случаях ХТП не может быть оценена исходя только из одного критерия, и возникает необходимость использования нескольких конфликтующих критериев. Это могут быть экономический критерий, критерий оценки влияния на окружающую среду, критерий оценки работы системы управления. Так, в [5] использован подход МКО для оптимизации ХТП на основе двух критериев – экономического и критерия оценки работы системы управления. В [6] рассмотрена МКО нефтехимического производства.

К сожалению, решение этой проблемы усложняется из-за наличия неточных математических моделей и неточности оценки будущего состояния ХТП. Это приводит к необходимости решения задачи МКО в условиях неопределенности. Задача проектирования ХТП формулируется следующим образом

$$\begin{aligned} &\min_{d,z}(f_1(d,z,\theta),\ldots,f_p(d,z,\theta)), \\ &g_j(d,z,\theta)\le 0, \quad j=1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где d есть n_d – вектор конструктивных переменных, z – n_z-вектор управляющих переменных и θ – n_z-вектор неопределенных параметров ($\theta \in T$), T – область неопределенности. Пусть требуется минимизировать p (возможно конфликтующих) критериев $f_i(d,z,\theta)$. В задаче имеются m проектных ограничений $g_j(d,z,\theta)$. Конструктивные переменные (объем реактора, поверхность теплообмена в теплообменнике и др.) являются постоянными на этапе функционирования ХТП. Управляющие переменные (температура, давление, расход и др.) могут меняться на этапе функционирования и поэтому могут быть использованы для управления процессом.

Задача оптимизации в условиях неопределенности, когда имеется только один критерий $f(d,z,\theta)$, – это двухэтапная задача оптимизации (ДЭЗО), имеющая вид [7]

$$f_1 = \min_d E_\theta\{f^*(d,\theta)\}, \tag{1.2}$$

$$\chi_1(d) \le 0, \tag{1.3}$$

где $E_\theta\{f^*(d,\theta)\}$ – математическое ожидание величины $f^*(d,\theta)$ по области T. Величина $f^*(d,\theta)$ определяется решением задачи

$$f^*(d,\theta) = \min_z f(d,z,\theta), \tag{1.4}$$

$$g_j(d,z,\theta) \le 0, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Будем называть задачу (4) *внутренней задачей оптимизации*. Функция гибкости $\chi_1(d)$ имеет вид

$$\chi_1(d) \equiv \max_{\theta\in T}\min_{z\in Z}\max_{j\in J} g_j(d,z,\theta). \tag{1.5}$$

Можно отметить следующие две работы, в которых рассматривается двухстадийная задача многокритериальной оптимизации ХТП в условиях неопределенности. Палазоглу и Аркун [8] рассматривают эту задачу с использованием экономического критерия и критерия, оценивающего динамику процесса. В [9] исследована компромиссная задача, в которой в качестве критериев использовались ожидаемая стоимость процесса и его гибкость.

Здесь рассматривается обобщение хорошо известных методов – метода усредненного критерия (УК) [6], свертки Гермейера (СГ) [4], метода ε-ограничений [10] на случай учета неопределенности. При этом учитывается возможность настройки управляющих переменных на этапе функционирования для компенсации эффекта неопределенности.

2. Обзор некоторых методов многокритериальной оптимизации

Если значения неопределенных параметров известны на этапе проектирования, тогда вектор неопределенных параметров θ в задаче (1.1) считается известным и (1.1) становится обычной задачей МКО. Будем называть эту задачу *номинальной* задачей МКО. Для простоты удалим θ из задачи (1.1) и введем обозначение $x = (d,z)$. Одна из основных задач МКО – построение множества Парето (МП), которое определяется следующим образом: точка $\overline{x}(g(\overline{x}) \le 0)$ принадлежит МП, если нельзя найти такую точку $\overline{\overline{x}}(g(\overline{\overline{x}}) \le 0)$, в которой, по крайней мере, для одного критерия j выполняются неравенства [4]

$$f_j(\overline{\overline{x}}) < f_j(\overline{x}),$$
$$f_i(\overline{\overline{x}}) \le f_i(\overline{x}), \quad i = 1,\ldots,p, \quad i \ne j.$$

Это означает, что в любой точке МП нельзя улучшить ни один критерий, не ухудшая остальные.

Имеется много методов решения проблемы МКО и построения МП. Рассмотрим коротко следующие методы: метод усредненного критерия (УК) [6] , метод свертки Гермейера (СГ)[4], метод ε-ограничений [10]. Все эти методы сводят проблему МКО к однокритериальной задаче оптимизации. Можно отметить следующие два подхода к такому сведению. Первый подход (используемый в методах УК и СГ) использует некоторую свертку первоначальных критериев $f_1(x), \dots, f_p(x)$, $i = 1, \dots, p$ для формулирования однокритериальной задачи оптимизации. Во втором подходе (используемом в методе ε-ограничений) один из первоначальных критериев используется как критерий оптимизации в однокритериальной задаче, а остальные используются как ограничения. В дальнейшем будем предполагать, что во всех задачах *минимизация понимается в глобальном смысле*, т.е. *минимизируемая функция имеет единственный глобальный минимум*.

Метод усредненного критерия.

В методе УК каждому критерию $f_i(x)$ назначается весовой коэффициент a_i, отражающий его важность относительно других критериев. Результирующая задача записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&f^{1*} = \min_x f^1(x, a),\\
&g(x) \le 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&f^1(x, a) = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i(x),\\
&a_i \ge 0; \quad \sum_{i=1}^{p} a_i = 1.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ – m-вектор левых частей ограничений и $a = (a_1, \dots$ $\dots, a_p)$ – вектор весовых коэффициентов. Пусть $\overline{x}$ есть решение задачи (2.1). Точка $[\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_p]$, где $\overline{f}_i = f_i(\overline{x})$, принадлежит МП [5]. Изменяя величины весовых коэффициентов a_i и решая соответствующую задачу (2.1), можно получить различные точки МП.

Метод свертки Гермейера.

При использовании метода СГ [4], как и в предыдущем случае, каждому $f_i(x)$ назначается весовой коэффициент a_i. Однако в данном случае минимизируется наихудший из взвешенных критериев. Однокритериальная задача в данном случае записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&f^{2*}(a) = \min_x f^2(x, a),\\
&g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \dots, m,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где $f^2(x, a) = \max\limits_{i \in J}(a_i f_i(x))$, $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i = 1$, $a_i \ge 0$ J – множество p чисел: $J = (1, \dots, p)$. Можно показать, что эта задача может быть сведена к задаче [6]

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} y,\\
&\max_i a_i f_i(x) \le y, \quad i = 1, \dots, p,\\
&g(x) \le 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Метод ε-ограничений [10].

В этом случае решаем следующие p задач:

$$
\begin{aligned}
&f_k^{(p)} = \min_x f_k(x),\\
&g(x) \le 0,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где $k = 1, \ldots, p$. Предположим, что $\left[x^{(k)}, f_k^{(p)}\right]\left(f_k^{(p)} = f_k(x^{(k)})\right)$ есть единственное глобальное решение задачи. Следующий шаг состоит в решении однокритериальной задачи, в которой один из критериев (например, p-й критерий) используется как целевая функция, а остальные используются как дополнительные ограничения. Таким образом, решается следующая задача

$$\begin{aligned} &\min_x f_p(x), \\ &g(x) \le 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$f_j(x) \le \varepsilon_j \quad i = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{2.7}$$

где величины $\varepsilon_i > 0$ суть параметры, удовлетворяющие следующим условиям

$$f_k^{(p)} \le \varepsilon_k, \quad k = 1, \ldots, p-1.$$

Пусть $\overline{x}$ есть решение задачи (2.6). Известно, что точка $[\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_p]$, где $\overline{f}_i = f_i(\overline{x})$, принадлежит МП.

3. Неполная информация относительно неопределенных параметров на этапе проектирования

Здесь рассматривается случай, когда на этапе функционирования имеется достаточно экспериментальной информации для определения точных значений неопределенных параметров. В то же время на этапе проектирования известно только то, что неопределенные параметры принадлежат некоторой области неопределенности T. Чтобы сформулировать задачу МКО в данном случае надо учесть наличие неопределенности на этапе проектирования и возможность настройки управляющих переменных на этапе функционирования на основе экспериментальных данных, характеризующих состояние процесса в каждый момент времени. Рассмотрим обобщения метода УК, метода СГ, метода ε-ограничений, учитывающие эти особенности. Результирующая однокритериальная задача может быть решена методом, описанным в [11, 12].

Очевидный подход (будем называть его *прямым* подходом) к формулированию задачи в данном случае состоит в следующем. С использованием номинальной МКО конструируется однокритериальная задача, которая затем используется для построения двухэтапной задачи оптимизации (2). Следующий шаг состоит в решении полученной двухэтапной задачи оптимизации при различных значениях параметров, связанных с данным методом МКО (например, для метода УК этими параметрами являются параметры a) для построения МП. Этот подход был использован в [8] на основе метода ε-ограничений. Здесь покажем, что эта стратегия в случае использования методов СГ и ε-ограничений приводит к недостаточно эффективному ХТП.

Следующий общий подход будет использоваться при обобщении методов УК и СГ. Сначала с помощью метода УК или СГ преобразуем каждый критерий $f_i(d, z, \theta)$ в новый критерий $\overline{f}_i(d, a)$, зависящий только от конструктивных переменных d и параметров a, используемых в методах УК и СГ. Используя опять метод УК или СГ, можно свернуть новые критерии в один критерий. В дальнейшем методы УК и СГ будем называть методами свертки. Рассмотрим следующую задачу, которая будет решаться на этапе функционирования для каждой реализации вектора неопределенных параметров θ:

$$\begin{aligned} &\min_z f(f_1, \ldots, f_p, a), \\ &g(d, z, \theta) \le 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $f(f_1, \ldots, f_p, a)$ – свертка p критериев $f_1, \ldots, f_p$, которая конструируется с помощью методов УК или СГ (см. (2.2), (2.3)).

Пусть $z^*(d, \theta, a)$ есть решение задачи (3.1) при фиксированных d, θ и a; тогда $f_i(d, z^*(d, \theta, a), \theta)$ есть величина i-го критерия при этих d, θ, a. Будем строить $\overline{f}_i(d, a)$ как математическое ожидание величины $f_i(d, z^*(d, \theta, a), \theta)$ по переменным θ:

$$\overline{f}_i(d, a) = \int_T f_i(d, z^*(d, \theta, a), \theta)\rho(\theta)d\theta, \tag{3.2}$$

где $\rho(\theta)$ – функция плотности распределения вероятности θ. Таким образом, в качестве $\overline{f}_i(d, a)$ используется среднее (ожидаемое) значение i-го критерия, которое он получит на этапе функционирования.

Опять будем использовать тот же самый метод свертки для построения одного обобщенного критерия из функций $\overline{f}_i(d, a)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ (при этом берем те же значения параметров a, которые использовались при построении свертки $f(f_1, \ldots, f_p, a)$). Решая однокритериальную задачу с использованием построенного обобщенного критерия для всех значений a, удовлетворяющих условию (2.2), построим некоторое множество (поверхность) для функций $\overline{f}_i(d, a)$ $i = 1, 2, \ldots, p$ в пространстве $\overline{f}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Лицо, принимающее решение (ЛПР), должно использовать это множество для окончательного выбора значений конструктивных переменных d. Обозначим это множество через МЛПР.

Поясним значение этого множества. Предположим, что из инженерных соображений выбрана точка $[\overline{d}, \overline{a}]$, из МЛПР как решение задачи МКО. Рассмотрим некоторый момент времени на этапе функционирования. Пусть этому моменту времени соответствует значение $\theta = \theta^l$. Управляющие переменные в этот момент времени определяются решением задачи (3.1) при $\theta = \theta^l$, $a = \overline{a}$, и $d = \overline{d}$. Таким образом, полученное решение соответствует одной из точек обычного МП для функций $f_i(\overline{d}, z, \theta^l)$, т.е. для первоначальных критериев, соответствующих данному моменту $(\theta = \theta^l)$. Решение $\overline{f}_i(\overline{d}, \overline{a})$ $i = 1, 2, \ldots, p$, которое будет получено в процессе решения задачи (2.1) или (2.3) с использованием критериев $\overline{f}_i(d, \overline{a})$, $i = 1, \ldots, p$, будет принадлежать обычному МП этих функций. Таким образом, окончательное решение будет принадлежать обычному МП для функций, каждая из которых является средним (ожидаемым) значением i-го критерия на этапе функционирования. Ясно, что это решение может быть реализовано, так как в каждый момент времени на этапе функционирования решается задача (3.1) и решение этой задачи $z^*(d, \theta, \overline{a})$ используется для конструирования функций $\overline{f}_i(d, a)$. Будем использовать этот подход для решения задач МКО с использованием методов свертки (УК, СГ).

4. Обобщенный метод усредненного критерия

Сформулируем задачу (3.1), используя взвешенную сумму (2.2) как критерий оптимизации, таким образом

$$\begin{aligned} & f^{1*}(d, \theta, a) = \min_z f^1(d, z, \theta, a) = \min_z \sum_{i=1}^p a_i f_i(d, z, \theta), \\ & g(d, z, \theta) \le 0, \\ & \sum_{k=1}^p a_k = 1, \quad a_k \ge 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Пусть $z^*(d,\theta,a)$ есть решение этой задачи. Тогда функции $\overline{f}_i(d,a)$ имеют вид (3.2). Новые критерии $\overline{f}_i(d,a)$, $i=1,2,\ldots,p$ не зависят от управляющих переменных z. Это позволяет опять использовать метод УК относительно этих критериев. Тогда получаем следующую задачу:

$$\min_d \overline{f}(d,a), \tag{4.2}$$

где

$$\overline{f}(d,a)=\sum_{k=1}^{p} a_k \overline{f}_k(d,a). \tag{4.3}$$

Таким образом, получена двухуровневая задача оптимизации, так как для вычисления значения $\overline{f}_k(d,a)$ надо использовать функцию $z^*(d,\theta,a)$, которая получается решением задачи (4.1). Это очень сложная вычислительная задача, поскольку для вычисления целевой функции в задаче (4.2) надо вычислять p многомерных интегралов (3.2) для каждого значения вектора d. В связи с этим сведем эту задачу к более простой. Подставим в $\overline{f}(d,a)$ (4.3) выражения для $\overline{f}_i(d,a)$ (см.(3.2)):

$$\overline{f}(d,a)=\sum_{k=1}^{p} a_k E\{f_k(d,z^*(d,\theta,a),\theta)\}=\sum_{k=1}^{p} a_k \int_T f_k(d,z^*(d,\theta,a),\theta)\rho(\theta)d\theta.$$

Поскольку операции суммирования и интегрирования являются перестановочными, изменим порядок выполнения этих операций

$$\overline{f}(d,a)=\int_T \left[\sum_{k=1}^{p} a_k f_k(d,z^*(d,\theta,a),\theta)\right]\rho(\theta)d\theta. \tag{4.4}$$

Член в квадратных скобках есть оптимальное значение целевой функции задачи (4.1). Поэтому выражение (4.4) может быть переписано в виде

$$\overline{f}(d,a)=\int_T \min_z \left(\sum_{k=1}^{p} a_k f_k(d,z,\theta)/g(d,z,\theta)\le 0\right)\rho(\theta)d\theta. \tag{4.5}$$

Воспользуемся соотношением (П.1). В соответствие с этим соотношением порядок выполнения операций суммирования и интегрирования можно изменять при удовлетворении условия (П.2). Поскольку интеграл является бесконечной суммой и значение z, соответствующее некоторому θ, не зависит от значений z, соответствующих другим значениям θ (т.е. условие (П.2) выполняется), то в данном случае операции интегрирования и минимизации являются перестановочными. Изменяя порядок выполнения этих операций, получим

$$\overline{f}(d,a)=\min_{z(\theta)}\int_T \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(d,z(\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta,$$
$$g(d,z(\theta),\theta)\le 0\ \forall\,\theta\in T.$$

Здесь $z\ (\theta)$ является многомерной функцией параметров θ. Подставляя выражение для $\overline{f}(d,a)$ в (4.2), получим

$$\min_{d,z(\theta)}\int_T \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(d,z(\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta, \tag{4.6}$$

$$g(d,z(\theta),\theta)\le 0\ \forall\,\theta\in T. \tag{4.7}$$

Интересно отметить, что в данном случае нам необходимо вычислять только один многомерный интеграл для каждых d и z (θ). Используя какую-либо квадратурную формулу [13], можно получить дискретный вариант этой задачи

$$\begin{aligned} &\min_{d,z^i} \sum_{i\in I_1} w_i \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(d, z^i, \theta^i), \\ &g_j(d, z^i, \theta^i) \le 0 \quad i \in I_1, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где θ^i, w_i $(i \in I_1)$ – узловые точки и весовые коэффициенты соответственно, I_1 – множество номеров узловых точек, $z^i = z(\theta^i)$. Чтобы гарантировать выполнение ограничений (4.7), надо добавить условие гибкости (1.3) [7]. Тогда окончательно задача примет вид

$$\begin{aligned} &\min_{d,z^i} \sum_{i\in I_1} w_i \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(d, z^i, \theta^i), \\ &g(d, z^i, \theta^i) \le 0 \quad i \in I_1, \quad j = 1, \dots, m, \\ &\chi_1(d) \le 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Следует отметить, что функции плотности распределения вероятности часто не известны для промышленных процессов. В этом случае узловые точки и весовые коэффициенты должны быть заданы исходя из инженерных соображений. Задача (4.9) имеет вид дискретного варианта ДЭЗО, в которой задача (4.1) является внутренней задачей оптимизации. Метод «разбиения и границ» для решения этой задачи был предложен в [11].

Предположим, ЛПР выбрало точку $[\overline{d}, \overline{a}]$ на МЛПР. Это означает, что если задача (4.1) решается в каждый момент времени на этапе функционирования, тогда среднее значение критерия $f_i(\overline{d}, z, \theta)$ на этапе функционирования будет равно $\overline{f}_i(\overline{d}, \overline{a})$. Отметим, что если использовать прямой подход к формулированию задачи МКО в условиях неопределенности на основе метода УК, то получим задачу (4.6). Таким образом, в данном случае прямой подход дает тот же самый результат, что и обобщенный метод УК.

5. Обобщенный метод Гермейера

В данном случае формулируем задачу (3.1), используя метод СГ

$$\begin{aligned} &f^{2*}(d, \theta, a) = \min_{z} f^2(d, z, \theta, a), \\ &g(d, z, \theta) \le 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$f^2(d, z, \theta, a) = \max_{k}(a_k f_k(d, z, \theta)),$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_k = 1, \quad a_k \ge 0$$

и k может принимать любые значения $1, 2, \dots, p$. Пусть $z^*(d, \theta, a)$ есть решение этой задачи. Тогда функции $\overline{f}_i(d, a)$ имеют вид (3.2). Новые критерии $\overline{f}_i(d, a)$, $i =$

$= 1, 2, \ldots, p$ не зависят от управляющих переменных z и можем использовать метод СГ относительно этих критериев. В этом случае надо решать следующую задачу:

$$\overline{f}^{2*}(a) = \min_d \overline{f}^2(d, a), \tag{5.2}$$

где

$$\overline{f}^2(d, a) = \max_k a_k \overline{f}_k(d, a).$$

Как и в предыдущем случае получилась очень сложная двухуровневая задача оптимизации, требующая для нахождения целевой функции вычисления p многомерных интегралов для каждого d. К сожалению, для упрощения этой задачи нельзя использовать тот же самый путь, который использовался в предыдущем случае. В связи с этим рассмотрим задачу

$$\overline{\overline{f}}^{\,2*}(a) = \min_d \overline{\overline{f}}^{\,2}(d, a), \tag{5.3}$$

где

$$\overline{\overline{f}}^{\,2}(d, a) = \int\limits_T \left[\max_k a_k f_k(d, z^*(d, \theta, a), \theta)\right] \rho(\theta) d\theta. \tag{5.4}$$

Существует следующее неравенство

$$\max_k \sum_i f_k(x, i) \leq \sum_i \max_k f_k(x, i).$$

Так как с помощью какой-либо квадратурной формулы интеграл может быть аппроксимирован некоторой суммой, то имеем

$$\max_k a_k \int\limits_T f_k(d, z^*(\theta), \theta) \rho(\theta) d\theta \leq \int\limits_T \max_k a_k f_k(d, z^*(\theta), \theta) \rho(\theta) d\theta.$$

Таким образом,

$$\overline{f}^{\,2}(d, a) \leq \overline{\overline{f}}^{\,2}(d, a) \forall d, \forall a.$$

Отсюда имеем

$$\overline{f}^{2*}(a) \leq \overline{\overline{f}}^{\,2*}(a). \tag{5.5}$$

Следовательно, $\overline{\overline{f}}^{\,2*}(a)$ есть верхняя граница оптимального значения целевой функции задачи (5.2), которая используется для построения МЛПР. Член в квадратных скобках в правой части формулы (5.4) есть оптимальное значение целевой функции задачи (5.1). Поэтому можно переписать формулу (5.4) следующим образом

$$\overline{\overline{f}}^{\,2}(d, a) = \int\limits_T \min_z \left[\max_k a_k f_k(d, z, \theta) / g(d, z, \theta) \leq 0\right] \rho(\theta) d\theta. \tag{5.6}$$

Поменяем порядок выполнения операций интегрирования и минимизации, так как для любого θ оптимальное значение z не зависит от значений z, соответствующих другим значениям θ. В результате получим

$$\overline{\overline{f}}^{\,2}(d, a) = \min_{z(\theta)} \int\limits_T \left[\max_k a_k f_k(d, z(\theta), \theta)\right] \rho(\theta) d\theta,$$
$$g(d, z(\theta), \theta) \leq 0, \quad \forall \theta \in T.$$

Подставляя это выражение для $\overline{\overline{f}}^{\,2}(d,a)$ в (5.3), получим

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{f}}^{\,2*}(d)=\min_{d,z(\theta)}\int_T\left[\max_k a_k f_k(d,z(\theta),\theta)\right]\rho(\theta)d\theta,\\ &g_j(d,z(\theta),\theta)\le 0,\quad j=1,\dots,m,\quad \forall\theta\in T.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Чтобы гарантировать выполнение ограничений в этой задаче надо добавить к ней ограничение (1.3). Опять используя какую-либо квадратурную формулу, получим дискретный вариант этой задачи:

$$\begin{aligned}&\min_{d,z^i}\sum_{i\in I_1}w_i\max_k a_k f_k(d,z^i,\theta^i),\\ &g(d,z^i,\theta^i)\le 0,\quad j=1,\dots,m,\quad i\in I_1,\\ &\chi_1(d)\le 0.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Эта задача может быть сведена к задаче

$$\begin{aligned}&\min_{d,z^i,y^i}\sum_{i\in I_1}w_iy_i,\\ &g(d,z^i,\theta^i)\le 0,\quad j=1,\dots,m,\quad i\in I_1,\\ &\max_k a_k f_k(d,z^i,\theta^i)\le y^i,\quad k=1,\dots,p,\\ &\chi_1(d)\le 0,\end{aligned}\tag{5.9}$$

где y^i, $i\in I_1$ – новые вспомогательные переменные. Используя следующее эквивалентное соотношение

$$\max_{x\in X}\varphi(x)\le 0\Leftrightarrow\varphi(x)\le 0,\quad \forall x\in X\tag{5.10}$$

преобразуем задачу (5.9) к следующему виду:

$$\begin{aligned}&\min_{d,z^i,y^i}\sum_{i\in f_2}w_iy_i,\\ &g_j(d,z^i,\theta^i)\le 0,\quad j=1,\dots,m\quad i\in I_1,\\ &a_kf_k(d,z^i,\theta^i)\le y^i,\quad k=1,\dots,p,\\ &\chi_1(d)\le 0.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Таким образом, задача (5.7) дает верхнюю оценку целевой функции задачи (5.2). Среднее значение каждого критерия имеет вид (3.2), в котором $z^*(d,\theta,a)$ есть решение задачи (5.1). Ясно, что если применить прямой подход для формулирования МКО, используя СГ метод, то получим ДЭЗО в форме (5.3), в которой $\overline{\overline{f}}^{\,2}(d,a)$ имеет вид (5.6). Таким образом, прямой подход может дать только верхнюю границу величины $\overline{f}^2(d,a)$ (см. (5.5)). Следовательно, использование прямого подхода не дает оптимальную конструкцию ХТП.

6. Обобщенный метод ε-ограничений

Здесь сформулируем двухэтапные аналоги задач (2.5) и (2.6). Аналог задачи (2.5) есть обычная однокритериальная задача оптимизации в условиях неопределенности:

$$\begin{aligned}&f_k^{(p)}=\min_d E\{f_k^*(d,\theta)\},\\ &\chi_1(d)\le 0,\end{aligned}\tag{6.1}$$

где $f_k^*(d,\theta)$ получается решением задачи

$$
(6.2) \qquad \begin{aligned} & f_k^*(d,\theta) = \min_z f_k(d,z,\theta), \\ & g(d,z,\theta) \le 0. \end{aligned}
$$

Пусть $z_k^*(d,\theta)$ есть решение этой задачи и $d^{(k)}$ – решение задачи (6.1). Следовательно, оптимальное значение целевой функции задачи (6.1) может быть записано в виде

$$
E\left\{f_k(d^{(k)}, z_k^*(d^{(k)},\theta),\theta)\right\}.
$$

Для двухэтапного аналога задачи (2.6) для $p=2$ внутренняя задача оптимизации будет иметь вид

$$
(6.3) \qquad \begin{aligned} & f_2^*(d,\theta) = \min_z f_2(d,z,\theta), \\ & g(d,z,\theta) \le 0. \end{aligned}
$$

Пусть $z_2^*(d,\theta)$ есть решение этой задачи. Сформулируем аналог ограничения (2.7). Заметим, что величина

$$
(6.4) \qquad \overline{f}_1 = E\{f_1(d, z_2^*(d,\theta),\theta)\}
$$

есть среднее значение первого критерия, когда в каждый момент времени на этапе функционирования решается задача (6.3). Отсюда естественно потребовать, чтобы величина (6.4) не превышала ε_1. Другими словами, должно выполняться следующее неравенство:

$$
E\{f_1(d, z_2^*(d,\theta),\theta)\} \le \varepsilon_1.
$$

Окончательно, двухэтапный аналог задачи (11) при $p=2$ имеет вид

$$
(6.5) \qquad \begin{aligned} & f_2 = \min_d E\{f_2^*(d,\theta)\}, \\ & \chi_1(d) \le 0, \\ & E\{f_1(d, z_2^*(d,\theta),\theta)\} \le \varepsilon_1. \end{aligned}
$$

Подставляя в задачу (6.5) выражение для математического ожидания и учитывая, что $z_2^*(d,\theta)$ есть решение задачи (6.3), получим

$$
(6.6) \qquad \begin{aligned} & f_2 = \min_d \int_T \min_z \{f_2(d,z,\theta)/g(d,z(\theta),\theta) \le 0)\rho(\theta)d\theta, \\ & \chi_1(d) \le 0, \end{aligned}
$$

$$
(6.7) \qquad E\{f_1(d,z(\theta),\theta)\} - \varepsilon_1 \le 0.
$$

Решение этой задачи крайне затруднительно, так как требует решения задачи (6.3) в каждой точке θ. Чтобы преодолеть этот недостаток, изменим порядок выполнения операций интегрирования и минимизации в целевой функции этой задачи:

$$
(6.8) \qquad \overline{f}_2 = \min_{d,z(\theta)} \int_T f_2(d,z(\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta,
$$

$$
\begin{aligned} & g(d,z(\theta),\theta) \le 0, \quad \forall\, \theta \in T, \\ & \chi_1(d) \le 0, \end{aligned}
$$

$$
(6.9) \qquad \int_T f_1(d,z(\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta - \varepsilon_1 \le 0.
$$

Задачи (6.6) и (6.6) не эквивалентны, так как в задаче (6.6) переменные $z(\theta)$, соответствующие различным точкам θ, не являются независимыми (они связаны соотношением (6.7)). Поэтому в соответствие с (П.3) существует следующее неравенство:

$$f_2 \le \overline{f}_2.$$

Таким образом, задача (6.6) дает верхнюю границу целевой функции задачи (6.6).

Рассмотрим теперь метод последовательных приближений, который позволит получить точное решение задачи (6.6).

Шаг 1. Положить $k = 1$. Задать начальные приближения для управляющих переменных $z_2^{(0)}(\theta)$ и малую величину $\varepsilon > 0$.

Шаг 2. Решить задачу

$$\overline{f}_2 = \min_d \int_T f_2^*(d,\theta)\rho(\theta)d\theta, \tag{6.10}$$

$$\chi_1(d) \le 0,$$

$$\int_T f_1(d, z_2^{(k-1)}(d^{(k-1)},\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta \le \varepsilon_1. \tag{6.11}$$

Пусть $d^{(k)}$ есть решение этой задачи. Поскольку величина $f_2^*(d,\theta)$ есть оптимальное значение целевой функции задачи (6.3), которая должна решаться для каждого θ, то после решения задачи (6.10) на k-й итерации получим вектор-функцию $z_2^{(k)}(d^{(k)},\theta)$. При этом $z_2^{(k-1)}(d^{(k-1)},\theta)$ есть вектор управляющих переменных, полученных на предыдущей итерации.

Шаг 3. Если

$$\left| f_2^{(k)} - f_2^{(k-1)} \right| \le \varepsilon \left| f_2^{(k)} \right|,$$

тогда решение задачи (6.6) получено, в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Положить $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Решение задачи (6.10) крайне затруднительно, так как оно требует решения задачи (6.3) в каждой точке θ. Поэтому преобразуем задачу (6.10). Так как ограничение (6.11) связывает только переменные d, то в отличие от задачи (6.6) переменные $z(\theta)$, соответствующие различным точкам θ, являются независимыми. Следовательно, можно менять порядок выполнения операций интегрирования и минимизации в целевой функции этой задачи. Таким образом, получим

$$\overline{f}_2 = \min_{d,z(\theta)} \int_T f_2(d, z(\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta,$$

$$g(d,z(\theta),\theta) \le 0, \quad \forall\theta \in T,$$

$$\chi_1(d) \le 0,$$

$$\int_T f_1(d, z_2^{(k-1)}(\theta),\theta)\rho(\theta)d\theta \le \varepsilon_1.$$

Для решения этой задачи можно использовать метод решения ДЭЗО, предложенный в [11]. Далее мы будем называть рассмотренный метод обобщенным методом ε-ограничений.

Обозначим через $\overline{\varepsilon}_1$ минимально возможное значение ε_1, при котором задача (6.5) имеет решение. Это означает, что ε_1 должно удовлетворять условию

$$\varepsilon_1 \ge \overline{\varepsilon}_1. \tag{6.12}$$

Легко найти нижнюю оценку величины $\overline{\varepsilon}_1$. Действительно, так как $f_1^{(2)}$ есть решение задачи (6.1) для $k = 1$, то справедливо неравенство

$$f_1^{(2)} = E\{f_1(d, z_1^*(d,\theta), \theta)\} \le E\{f_1(d, z_2^*(d,\theta), \theta)\}.$$

Поэтому $f_1^{(2)}$ есть нижняя оценка величины $\overline{\varepsilon}_1$ ($f_1^{(2)} \le \overline{\varepsilon}_1$). Используя какую-либо квадратурную формулу, получим дискретный вариант задачи (6.6)

$$\begin{aligned}
&\min_{d,z^i} \sum_{i\in I_1} w_i f_2(d, z^i, \theta^i),\\
&g_j(d, z^i, \theta^i) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad i \in I_1,\\
&\sum_{i\in I_1} w_i f_1(d, z^i, \theta^i) \le \varepsilon_1,\\
&\chi_1(d) \le 0,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

где θ^iи $w_i, i \in I_1$ – аппроксимационная точка и весовой коэффициент соответственно. Решая задачу (6.6) для различных значений ε_1, можно построить МЛПР для $p = 2$.

7. Сравнение прямого и обобщенного метода ε-ограничений

Сравним прямой и обобщенный метод ε-ограничений, при $p = 2$. При прямом методе внутренняя задача оптимизации формулируется как однокритериальная задача оптимизации с помощью метода ε-ограничений. Для определенности будем использовать $f_2(d, z, \theta))$ как целевую функцию и функцию $f_1(d, z, \theta)$ для конструирования ограничения $f_1(d, z, \theta) - \varepsilon_1 \le 0$. В этом случае внутренняя задача оптимизации будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\overline{f}_2^*(d,\theta) = \min_z f_2(d, z, \theta),\\
&g_j(d, z, \theta) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m,\\
&g_{m+1}(d, z, \theta, \varepsilon_1) \le 0,
\end{aligned}$$

где $g_{m+1} = f_1(d, z, \theta) - \varepsilon_1$. В этом случае ДЭЗО имеет вид

$$\begin{aligned}
&\overline{\overline{f}}_2 = E\{f_2^*(d,\theta)\},\\
&\overline{\chi}_1(d, \varepsilon_1) \le 0.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Заметим, что

$$\chi_1(d, \varepsilon_1) \equiv \max_{\theta\in T} \min_z \max_{j\in\overline{J}} g_j\,(d, z, \theta)\,, \quad \overline{J} = (1, \ldots, m+1).$$

Обозначим через $\overline{\overline{\varepsilon}}_1$ минимально возможное значение ε_1, при котором задача (7.1) имеет решение. Это означает, что

$$\varepsilon_1 \ge \overline{\overline{\varepsilon}}_1. \tag{7.2}$$

Покажем, что для ε_1, удовлетворяющего условиям (6.12) и (7.2) верно следующее неравенство

$$\overline{f}_2 \le \overline{\overline{f}}_2. \tag{7.3}$$

Используя тот же подход, который был использован при сведении задачи (4.2) к задаче (4.6), можно свести задачу (7.1) к виду

$$\overline{\overline{f}}_2 = \min_{d,z(\theta)} \int_T f_2(d, z(\theta), \theta)\rho(\theta)d\theta, \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} &g(d, z(\theta), \theta) \le 0 \quad \forall\theta \in T,\\ &f_1(d, z(\theta), \theta) \le \varepsilon_1 \quad \forall\theta \in T, \qquad (7.5)\\ &\overline{\chi}_1(d) \le 0. \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$\chi_1(d) \le \overline{\chi}_1(d). \tag{7.6}$$

Рассмотрим такие величины $[d, z(\theta)]$, которые удовлетворяют условию (7.5). Тогда имеем

$$\int_T f_1(d, z(\theta), \theta)\rho(\theta)d\theta \le \varepsilon_1 \int_T \rho(\theta)d\theta \le \varepsilon_1.$$

Если неравенство (7.5) удовлетворяется, то неравенство (6.9) также удовлетворяется. Из этого факта и неравенства (7.6) следует, что допустимая область задачи (6.8) включает в себя допустимую область задачи (7.4). Отсюда следует неравенство (7.3). Таким образом, обобщенный метод ε-ограничений дает лучший результат по сравнению с прямым методом ε-ограничений.

8. Сравнение методов

Обобщенный метод УК позволяет получить некоторые точки МЛПР с помощью решения задачи (4.8), (4.9). Однако для получения всех точек МЛПР требуется выпуклость области, ограниченной МЛПР. Обобщенный метод СГ требует решения крайне трудоемкой двухуровневой задачи (5.2). Чтобы преодолеть это затруднение, приходится решать задачу (5.8), которая дает только верхнюю оценку оптимального значения целевой функции задачи (5.2). В то же время можно получить точное решение с помощью обобщенного метода ε-ограничений.

9. Вычислительный эксперимент

Здесь хотим иллюстрировать влияние неопределенности на проблему многокритериальной оптимизации и сравнить различные подходы к решению этой задачи. Рассмотрим систему реактор-сепаратор (рис. 1), которая состоит из реактора идеального смешения и сепаратора (2) [14]. В реакторе происходит необратимая, первого порядка реакция Денбига

$$A \xrightarrow{k_R} B \xrightarrow{k_R} R$$

$$A \xrightarrow{k_X} X$$

$$B \xrightarrow{k_Y} Y.$$

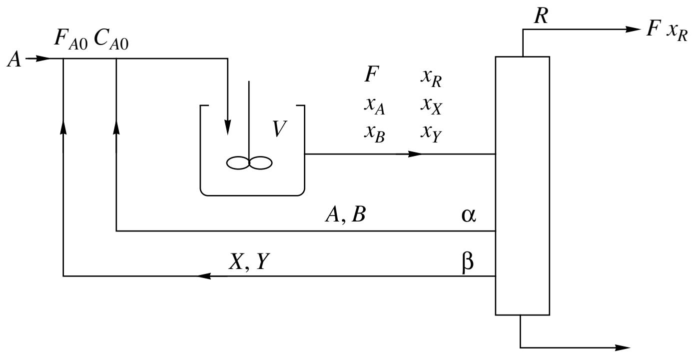

Рис. 1. Система реактор-сепаратор.

Входной поток содержит только вещество A с концентрацией C_{A0}. Пусть расход входного потока равен F_{A0}. Выходной поток из реактора, содержащий пять компонент A, B, R, X и Y, имеет расход F. Предполагается, что происходит идеальное выделение вещества R вверху колонны. Снизу колонны часть α компонент A и B и часть β компонент X и Y смешивается с входным потоком и подается обратно в реактор.

Статическая модель процесса имеет вид

$$\begin{aligned}
&F_{A0} - x_A F(1-\alpha) - V(k_B + k_X)c_{A0}x_A = 0\\
&-Fx_B(1-\alpha) + Vc_{A0}[k_B x_A - (k_R + k_Y)x_B] = 0\\
&-Fx_X(1-\beta) + Vc_{A0}k_X x_A = 0\\
&-Fx_Y(1-\beta) + Vc_{A0}k_Y x_B = 0\\
&-Fx_R + Vc_{A0}k_R x_B = 0\\
&x_A + x_B + x_R + x_X + x_Y - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Будем предполагать, что реактор работает изотермически. В качестве конструктивной переменной выбираем объем V реактора (размерности м^3); в качестве управляющих переменных выбираются α и β. Потребуем, чтобы выходной поток вещества R удовлетворял условию

$$F_R - Fx_R \le 0,$$

где F_R – заданная величина. Кроме того, потребуется выполнение следующих ограничений

$$\begin{aligned}
&12 \le V \le 16\\
&0 \le \alpha \le 1, \quad 0 \le \beta \le 1,\\
&0 \le x \le 1, \quad i = \{A, B, R, X, Y\}\\
&10 \le F \le 1000.
\end{aligned}$$

Коэффициенты модели имеют значения

$$k_B = 0{,}4\,\text{ч}^{-1}, \quad k_R = 0{,}14\,\text{ч}^{-1}, \quad k_X = 0{,}02\,\text{ч}^{-1}, \quad k_X = 0{,}01\,\text{ч}^{-1},$$

$$F_{A0} = 100\,\text{моль/ч}, \quad c_{A0} = 100\,\text{моль/м}^3, \quad F_R = 70\,\text{моль/ч}.$$

Целевая функция имеет вид

$$\begin{aligned}
&f_1 = c_1 V + c_2[\alpha F(x_A + x_R) + \beta F(x_X + x_Y)],\\
&c_1 = \$10/\text{м}^3, \quad c_2 = \$0{,}125/\text{моль}.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

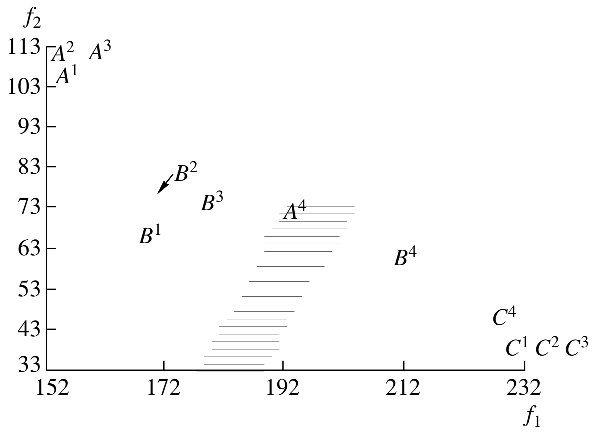

Рис. 2. Множество Парето для номинальных значений неопределенных параметров и МЛПР в случае учета неопределенности.

Первый член в (9.1) есть стоимость реактора, а второй член – эксплуатационные затраты на рецикл. Предположим, что вектор неопределенных параметров состоит из констант скоростей реакций: $\theta = [k_B, k_R, k_X, k_Y]$. Интервал неопределенности для каждой константы скорости реакции составляет 20% в обе стороны от номинального значения. Мы предполагаем, что продукты Xи Y наносят вред окружающей среде, поэтому будем решать задачу с двумя критериями минимизации – f_1 и f_2,

$$f_2 = 10F(x_X + x_Y).$$

Вначале, используя методы УК, СГ и ε-ограничений, было построено МП для случая, когда неопределенные параметры принимают номинальные значения. В результате получили одну и ту же кривую $A^1B^1C^1$ (рис. 2). Для случая, когда неопределенность учитывается, построено МЛПР с использованием обобщенных методов УК (задача (4.9)) и ε-ограничений (кривая $A^2B^2C^2$) (задача (6.5)). В случае метода СГ решена задача (5.11), которая дает только верхнюю оценку (кривая A^3 B^3 C^3). С использованием прямого метода ε-ограничений (задача (7.1)) построено МЛПР (кривая $A^4B^4C^4$). В этом случае $\overline{\overline{\varepsilon}}_1 = 190$ (ср. с $\overline{\varepsilon}_1 = 158$).

Из рис. 2 видно, что для любых $\overline{f}_1 \geq 190$ кривая $A^4B^4C^4$ лежит выше кривой $A^2B^2C^2$. Это означает, что для одной и той же величины $\overline{f}_1$ ожидаемый выход вредных продуктов, полученный обобщенным методом ε-ограничений, будет меньше выхода этих же продуктов, полученного прямым методом ϵ-ограничений. Таким образом, обобщенный метод ε-ограничений позволяет получить лучшее решение по сравнению с прямым методом ε-ограничений. Кроме того, прямой метод ε-ограничений может получить решение только в интервале значений критерия $\overline{f}_1$ [190, 232], а обобщенный метод ε-ограничений – интервале значений критерия $\overline{f}_2$ [158, 232].

10. Заключение

Получены обобщения метода усредненного критерия, метода Гермейера и метода ε-ограничений на случай учета неопределенности в многокритериальной задаче оптимизации. Эти обобщения существенно используют возможность настройки управляющих переменных на этапе функционирования. Показано, что эти методы имеют преимущество по сравнению с прямым методом многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и x^i есть подвектор вектора x. Пусть подвекторы x^i ($i = 1, \ldots, N\}$ не имеют общих переменных ($x^i \cap x^j = 0, \forall\, i, j = 1, \ldots, N$). Тогда имеет место следующее равенство

$$\text{(П.1)}\qquad \min_x \left\{ \sum_{i=1}^{N} f_i\left(x^i\right)/g_i\left(x^i\right) \le 0, \quad i = 1, \ldots, N \right\} = \sum_{i=1}^{N} \min_{x_i} \{f_i(x^i)/g_i(x^i) \le 0\}$$

при условии

$$\text{(П.2)}\qquad x^i \cap x^j = 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, N.$$

Равенство (П.1) верно, так как каждая минимизация в левой части проводится по своим собственным переменным. Таким образом, при выполнении (П.2) операции минимизации и суммирования перестановочны.

Рассмотрим теперь случай, когда подвекторы $x^i (i = 1, \ldots, N)$ имеют общие переменные. Легко показать, что имеет место следующее неравенство

$$\text{(П.3)}\qquad \min_x \left\{ \sum_{i=1}^{N} f_i\left(x^i\right)/g_i\left(x^i\right) \le 0,\ i = 1, \ldots, N \right\} \ge \sum_{i=1}^{N} \min_{x_i} \left\{ f_i(x^i)/g_i\left(x^i\right) \le 0 \right\},$$

$$\text{(П.4)}\qquad \exists x^i \cap x^j \ne 0,\ i, j = 1, \ldots, N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полищук Л.И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. Новосибирск: Наука, 1989.
2. *Caballero R., Ruiz F., Steuer R.E.* Advances in multiple objective and goal programming. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
4. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, Физматлит, 1982.
5. *Luyben M.L., Floudas C.A.* Analysing the interaction of design and control: 1. A multiobjective framework and application to binary distillation synthesis // Comput. Chem. Eng. 1994. V. 18. P. 933.
6. *Sophos A., Rodstein F., Stephanopoulos C.* Multi-objective analysis in modeling the petrochemical Industry // Chem. Eng. Sci. 1980. V. 35. P. 2415.
7. *Halemane K.P., Grossmann I.E.* Optimal Process Design under Uncertainty // AIChE J. 1983. V. 29. P. 425–433.
8. *Palazoglu A., Arkun Y.* Design of chemical plants with multiregime capabilities and robust dynamic operability characteristics // Comput. Chem. Eng. 1987. V. 11. P. 205.
9. *Chakraborty A., Linninger A.A.* Plant-wide waste management. 2. Decision making under uncertainty. Ind. Eng. Chem. Res. 2003. V. 42. P. 357.
10. *Haimes Y., Hall W.A., Friedman N.J.* Multi-objective optimization in water resource systems: the surrogate worth trade-off method. Amsterdam: Elsevier, 1975.
11. *Волин Ю.М., Островский Г.М.* Оптимизация технологических процессов в условиях частичной неопределенности исходной информации // АиТ. 1995. № 12. С. 85–98.
12. *Волин Ю.М., Островский Г.М.* Анализ гибкости сложных технических систем в условиях неопределенности // АиТ. 2002. № 17. С. 92–106.
13. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
14. *Grossmann I.E., Sargent R.W.H.* Optimum design of chemical plants with uncertain parameters // AIChE J. 1978. V. 4. P. 1021–1028.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 14.09.2005