4	0.018	0.013	0.018	0.020	0.026
5	0.031	0.028	0.034	0.037	0.044
6	0.036	0.033	0.040	0.044	0.052
7	0.167	0.147	0.163	0.171	0.189
8	0.333	0.325	0.344	0.355	0.380
ОС	0.189	-0.006	0.148	0.230	0.411

Таким образом, результаты тестирования разработанной методики расчета нечетких рангов свидетельствуют об отсутствии эффекта интенсивного роста ширины итоговых нечетких интервалов. Наблюдается совершенно противоположный эффект сужения ширины интервалов, на первый взгляд, противоречащий исходным методологическим принципам оперирования с неопределенностями. Однако при более детальном анализе ситуации можно заметить, что в тех случаях, когда операции возведения в дробную степень и деления приводят к уменьшению обычных четких чисел, применение их к нечетким числам, построенным на базисе исходных четких, уменьшает ширину результатов.

Можно заметить, что сама семантика слова «деление» подразумевает какое-то дробление или уменьшение. Интересно отметить, что операция вычитания в интервальной и нечетко-интервальной арифметике всегда приводит к росту ширины итоговых интервалов, что, впрочем, и не удивительно, если проанализировать ситуацию вычитания из положительного числа отрицательной величины.

Разработанные методики ранжирования частных критериев на основе четких и нечетко-интервальных матриц парных сравнений, а также возведения в нечеткие степени, реализованы на языке C++ и являются составной частью программного обеспечения, реализующего базовую методику формирования многокритериальных оценок качества функционирования сложных систем.

2.2.2. Проблема формирования обобщенного критерия

В постановке задач многокритериальной оптимизации центральное место занимают вопросы сравнения частных критериев и задания требований к возможным соотношениям их значений в точке оптимума, т.е. требований к оптимальности решения, на основании которых формируется глобальный критерий качества [24].

В [132] эти вопросы рассмотрены без учета различий между критериями и ограничениями, которые одинаковым образом участвуют в формировании глобального показателя качества в случае, если они описаны функциями желательности.

В рамках рассматриваемого подхода к описанию критериев вопросы их сравнения решаются просто и естественно, поскольку степень удовлетворения критерию в той или иной точке пространства возможных решений численно характеризуется значениями его функций желательности в этих точках. Если A и B – критерии, заданные своими функциями желательности $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $x \in X$, то точка x_1 удовлетворяет критериям A и B в одинаковой степени, если $\mu_A(x_1) = \mu_B(x_1)$ и точка x_2 удовлетворяет критерию A в большей степени, чем критерию B, если $\mu_A(x_2) > \mu_B(x_2)$. Сформулированный способ сравнения частных критериев будем использовать в качестве основы формирования свертки критериев.

При формулировке задачи многокритериальной оптимизации в качестве требования к оптимальности решения в [132] вводится условие обязательного удовлетворения всем частным критериям и ограничениям, т.е. в. точке оптимума все функции желательности должны быть отличными от нуля. Также требуется, чтобы в оптимуме критерии удовлетворялись в максимально возможной степени. Иными словами, полагается нежелательным, чтобы значение обобщенного критерия возрастало при улучшении ряда показателей качества за счет ухудшения остальных. В терминологии теории принятия решений последнее требование эквивалентно условию принадлежности точки оптимума множеству Парето [24].

Анализ способов формирования глобального показателя качества на основе сформулированных требований к оптимальности в [132] проводится, начиная с простейшего случая двух равнозначимых частных критериев. Для этого случая в [132] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. Пусть на множестве X заданы равноценные частные критерии A и B, описываемые функциями желательности $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $x \in X$, имеющими единственные максимумы в точках x_A и x_B соответственно. При этом выполняются соотношения:

$$\mu_A(x_A) > \mu_B(x_A), \qquad \mu_B(x_B) > \mu_A(x_B)\,. \tag{2.20}$$

Тогда в точке оптимума будет достигаться максимум функции

$$\mu_C(x) = \min\,(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in X, \tag{2.21}$$

которую можно рассматривать как свертку частных критериев A и B, описывающую обобщенный критерий эффективности C.

В точке оптимума при этом реализуется максимум пересечения частных критериев. Графическая иллюстрация теоремы представлена на рис. 2.22.

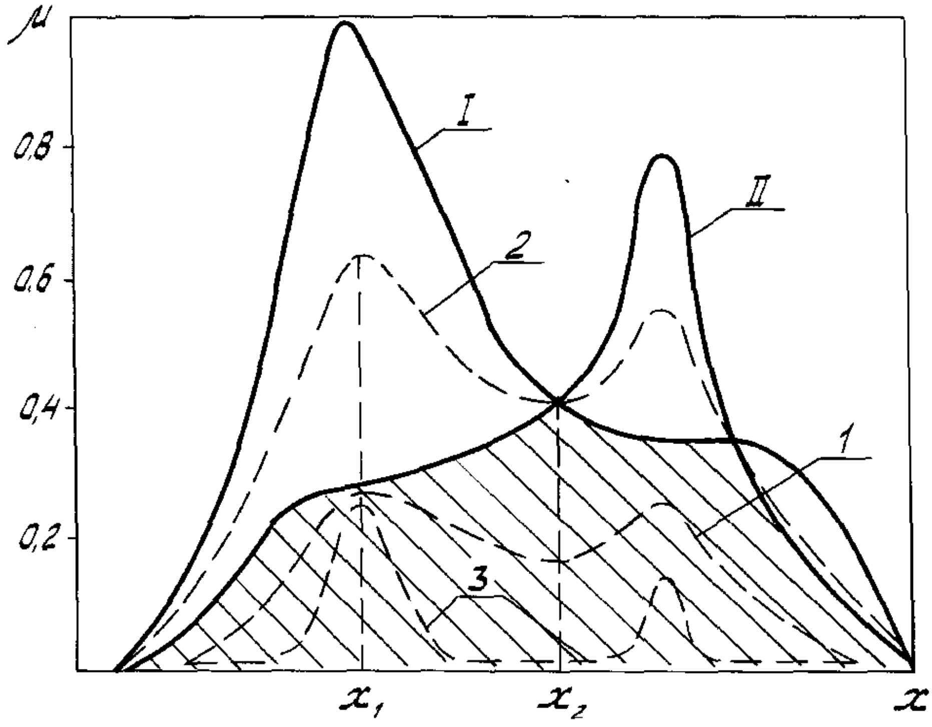

Рис. 2.22. Способы свертки равнозначимых частных критериев:
I - $\mu_A(x)$; II - $\mu_B(x)$; 1 - $\mu_C(x) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$; 2 - $\mu_C(x) = 0.5\mu_A(x) + 0.5\mu_B(x)$;
3 - $\mu_C(x) = \max(0,\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$; x_1 – точка оптимума для вариантов 1, 2, 3;
x_2 – точка оптимума для пересечения $\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Как видно из рис. 2.22, даже широко распространенные аддитивная и мультипликативная свертки не позволяют получить оптимум, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1.

Отметим, что по условиям теоремы 2.1 необходимо выполнение условий (2.20), но не требуется нормированности функции желательности. Нарушение требований (2.20) может привести к тому, что максимум функции $\mu_C(x)$ не будет достигаться ни в одной из точек пересечения кривых $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$. (рис. 2.23).

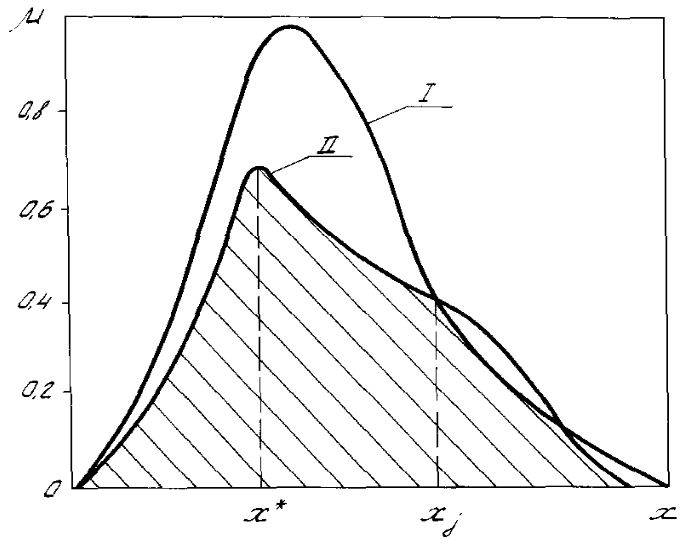

Рис. 2.23. Пересечение критериев и точки оптимума при нарушении условий (2.20): I - μ_A (x); II - μ_B (x).

В этом случае в точке оптимума реализуется лишь требование максимального удовлетворения обоим критериям без соблюдения условия их равноценности в точке оптимума. Подобная ситуация является типичной для многих задач, где функции желательности, получаемые опосредованно, например, как μ (x) = μ (f(x)), могут вести себя немонотонно, иметь несколько максимумов.

Из доказанной в [132] теоремы 2.1 следует, что свертка частных критериев вида (2.21) обеспечивает при решении задачи удовлетворение всем сформированным требованиям к оптимальности решения. Следует отметить, что в рассматриваемом простейшем случае только свертка (2.21) обеспечивает получение оптимума, удовлетворяющего этим требованиям.

Рассмотрим еще одно важное свойство свертки вида (2.21). Если интерпретировать μ_C (x) как функцию принадлежности множеству $C = A \cap B$, образованному пересечением множеств A и B, и рассматривать оптимум как точку, обладающую наибольшей степенью принадлежности области пересечения частных критериев, то в этом случае единственным приемлемым способом задания пересечения множеств A и B следует опять признать свертку (2.21). Действительно, в предельном случае $A = B$ естественно потребовать $A \cap A = A$ или μ_C (x) = μ_A (x), т.е. должен выполняться закон идемпотентности.

В этом случае ни аддитивный, ни мультипликативный, ни какой другой способ пересечения нечетких множеств, содержащий арифметические операции над функциями принадлежности, не обеспечивают идемпотентности. Важно отметить, что только свертка