ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 8, с. 1356–1363

УДК 519.658.4

О ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1)]

© 2004 г. Л. Г. Гурин

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: gurinlg@ccas.ru

Поступила в редакцию 22.10.2002 г.
Переработанный вариант 03.10.2003 г.

Рассматриваются некоторые подходы, позволяющие сводить многокритериальные оптимизационные задачи в условиях неопределенности к обычным многокритериальным оптимизационным задачам. Последовательно рассматриваются случаи, когда неопределенность порождается влиянием неопределенного фактора, влиянием случайного фактора и одновременным влиянием неопределенного и случайного факторов. Библ. 12. Фиг. 1.

Ключевые слова: многокритериальные задачи оптимизации, условия неопределенности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оценивая что-либо, мы пользуемся критериями, которые имеют как числовую, так и качественную форму. Так, оценивая тот или иной товар, мы можем узнать его цену, вес, плотность, внешний вид, удобство использования, качество изготовления и т.п. Надо также сказать, что в жизни мы очень редко при оценке чего-либо пользуемся только одним критерием. Чаще всего при этом мы руководствуемся сразу несколькими критериями, например цена, вес, скорость выполнения каких-то операций, внешний вид, качество изготовления и т.п.

Второй момент, существенный при проведении оценок, состоит в том, что на оцениваемый объект или процесс воздействуют факторы, порождающие неопределенности в оценках. Как правило, эти неопределенности порождаются влиянием случайных и неопределенных факторов (см. [1]). Так, например, оценивая тот или иной товар, мы часто не можем знать о наличии в нем скрытых дефектов, можем лишь предположительно оценить срок службы этого товара и т.п.

В настоящей работе рассмотрим некоторую систему критериев, с помощью которых осуществляется оценка и выбор наилучшего объекта среди всех допустимых объектов, причем этот выбор осуществляется только на основе совокупности значений критериев, характеризующих объект. Предполагается, что все критерии имеют числовую форму. Предполагается, кроме того, что на критерии влияют порождающие неопределенность факторы, природу которых будем далее конкретизировать.

Пусть

$$u \in U, \tag{1.1}$$

где u – параметр, задающий объект, а U – множество объектов, из которых надлежит осуществлять выбор. Пусть также

$$\lambda \in \Lambda \tag{1.2}$$

есть фактор, влияющий на оценку и порождающий ее неопределенность, а Λ – множество возможных значений этого фактора. Пусть, кроме того, задано целое число $k > 0$ и k числовых критериев вида

$$J_i = J_i(u, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{1.3}$$

Будем также предполагать, что лицо, принимающее решение (ЛПР), стремится выбором u, удовлетворяющим условию (1.1), придать всем критериям (1.3) наибольшее возможное значение. Если множество Λ состоит из одной точки, эта задача является обычной многокритериальной оптимизационной задачей (см. [2]–[4]).

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00345 а).

В данной работе мы рассмотрим некоторые обобщения на случай задачи (1.1)–(1.3) понятия оптимальности по Парето и понятия полуэффективной точки (см. [5], [6]). Заметим, что полуэффективные точки иногда называют точками, оптимальными по Слейтеру [6]. В [6] на основе представлений о понятии гарантированного результата получена классификация задач векторного минимакса и максимина. Векторный минимакс и максимин рассматривались также в [3] и в некоторых других работах. Здесь мы не касаемся вопросов, связанных с векторным минимаксом и максимином.

2. ОБОБЩЕННО ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПАРЕТО И ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛУЭФФЕКТИВНЫЕ ТОЧКИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ФАКТОРЫ

Предположим, что λ, удовлетворяющий условию (1.2), является неопределенным фактором. Будем также предполагать, что

$$\forall u \in U \ \text{ и } \ \forall i \ \{\inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) > -\infty, \ \sup_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) < +\infty\}.$$

Введем обозначения $D_i(u) = \{r \in \mathbb{R}^1 \mid r = J_i(u, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$,

$$\overline{w}_i(u) = \sup_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda), \quad \underline{w}_i(u) = \inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Сравнивать разные управления u_i, $i = 1, 2$, значит тем или иным образом сравнивать множества $D(u_i)$, $i = 1, 2$. Такое сравнение можно производить различными способами. Так как в данной работе рассматриваются подходы к решению многокритериальных оптимизационных задач в условиях неопределенности путем сведения их к обычным многокритериальным задачам, то такое сравнение этих множеств означает переход от системы критериев вида (1.3) к системе критериев вида

$$w_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Одним из способов построения такой системы критериев является их построение по формуле

$$w_i(u) = \alpha_i \underline{w}_i(u) + (1 - \alpha_i)\overline{w}_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.2}$$

где параметры $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, либо назначает ЛПР, либо они определяются с помощью экспертного оценивания. Ниже будем в основном использовать свертки (2.2), в которых $\alpha_i = 1$ $\forall i$. Возможны и другие подходы к построению системы критериев (2.1).

Далее будем в многокритериальной оптимизационной задаче вида (1.1)–(1.3) решение u^* называть обобщенно оптимальной по Парето (соответственно, обобщенно полуэффективной) точкой, если она является оптимальной по Парето (соответственно, полуэффективной) точкой в обычном смысле для многокритериальной оптимизационной задачи (2.1), (1.1). Таким образом, для нахождения обобщенно оптимальных по Парето (обобщенно полуэффективных) точек в задаче (1.1)–(1.3) надлежит сначала перейти к системе сверток (2.1) и после этого для новой задачи (2.1), (1.1) применить какой-либо метод нахождения оптимальных по Парето (полуэффективных) точек. Рассмотрим некоторые используемые при этом подходы.

Для того чтобы найти какую-нибудь точку, оптимальную по Парето, иногда используют экономическую свертку критериев с весами $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку оптимальные по Парето решения задачи (2.1), (1.1), и только они, являются обобщенно оптимальными по Парето решениями в задаче (1.1)–(1.3), то этот метод в нашем случае переходит в поиск решения задачи

$$\sup_{u \in U} \sum_{i=1}^{k} \delta_i \left(\inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) \right). \tag{2.3}$$

Если же требуется найти какую-нибудь обобщенную полуэффективную точку в задаче (1.1)–(1.3), то можно в задаче (2.3) использовать веса $\delta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\Sigma_{i=1}^{k} \delta_i > 0$.

Рассмотрим другие подходы к решению обычных задач многокритериальной оптимизации (см. [2], [3]) и попытаемся их перенести на случай нахождения решений в задаче (1.1)–(1.3). Одним из часто используемых подходов является переход к задаче вида

$$\sup_{u \in U} \min_{i = 1, 2, \ldots, k} \delta_i \left(\inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) \right), \tag{2.4}$$

где $\delta_i > 0 \quad \forall i$ – определенные тем или иным способом весовые коэффициенты. Так, например, если предположить, что

$$J_i^* = \sup_{u \in U} \inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) < +\infty, \quad J_i^- = \inf_{u \in U} \inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) < -\infty,$$

$$J_i^* - J_i^- > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

то метод поиска компромиссных решений (см., например, [2, гл. 1, § 2, формула (12)]) приводит после очевидных преобразований к задаче вида (2.4) при $\delta_i = \rho_i/(J_i^* - J_i^-)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Еще одним методом поиска решений многокритериальных оптимизационных задач является метод, использующий ограничения на критерии (см. [3]). В нашем случае он переходит в следующий подход. Пусть $1 \le q \le k$ – некоторый номер и заданы числа ε_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $i \ne q$. Тогда приходим к задаче

$$\sup_u \inf_{\lambda \in \Lambda} J_q(u, \lambda) \tag{2.5}$$

при ограничениях

$$u \in U, \quad \inf_{\lambda \in \Lambda} J_i(u, \lambda) \ge \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad i \ne q. \tag{2.6}$$

Рассмотрим следующий

Пример 1. Пусть $k = 2$, $U = [-1, 1]$, $\Lambda = [0, 1]$, $J_1 = u^2 + \lambda u$, $J_2 = -u^2 + \lambda u$. Тогда, используя (2.2) при $\alpha_i = 1$, $i = 1, 2$, получаем

$$w_1(u) = \begin{cases} u^2, & u \ge 0, \\ u^2 + u, & u < 0, \end{cases} \qquad w_2(u) = \begin{cases} -u^2, & u \ge 0, \\ -u^2 + u, & u < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим поведение кривой $(w_1(u), w_2(u))$ при $u \in [-1, 1]$. Эта кривая представлена на фигуре. При $u \in [0, 1]$ имеем $w_2(u) = -w_1(u)$, и при этих u наша кривая пробегает отрезок прямой, соединяющий точки (0, 0) и (1, –1). Это – отрезок (0, A).

Пусть $u \in [-1, 0]$. Так как $w_2(u)$, как функция от u, монотонно возрастает и пробегает отрезок [–2, 0], то соотношение $w_2 = -u^2 + u$ можно разрешить относительно u. В результате получим $u = 0.5 - \sqrt{0.25 - w_2}$. Подставляя это выражение в соотношение $w_1 = u^2 + u$, выводим

$$w_1 = 1 - w_2 - 2\sqrt{0.25 - w_2}.$$

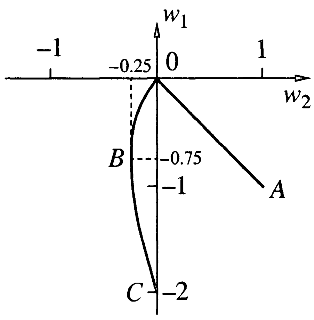
Нетрудно видеть из последнего соотношения, что w_1 как функция от w_2 является выпуклой функцией, аргумент которой меняется на отрезке [–2, 0], причем $w_1(-2) = w_1(0) = 0$, на интервале (–2, 0) она отрицательна и ее минимум, равный –0.25, достигается в точке $w_2 = -0.75$ (точка B на фигуре).

Посмотрев на эту кривую, нетрудно увидеть, что оптимальными по Парето будут лишь те значения (w_1, w_2), которые получаются при $u \in [0, 1]$. Эти же точки будут и полуэффективными.

Если в этом примере для нахождения оптимальных по Парето точек применим экономическую свертку критериев (2.3), то в качестве ответов получим либо $u = 1$, либо $u = 0$. Лишь в одном случае, когда веса критериев равны между собой и равны 0.5, а функция

$$0.5w_1(u) + 0.5w_2(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le 1, \\ u, & -1 \le u < 0, \end{cases}$$

множество ее максимумов совпадает с [0, 1], т.е. с множеством точек, оптимальных по Парето. Если к этой задаче применим метод ограничений на критерии (2.5), (2.6), то в результате получим все точки, оптимальные по Парето.



Фигура.

Наконец, если для нахождения оптимальных по Парето точек воспользуемся методом (2.4), то при любых $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$, в качестве ответа получим $u = 0$. Дело в том, что $w_2(0) = 0$ и $w_2(u) < 0$ при $u \neq 0$. Так как $w_1(0) = 0$, то оптимальным решением задачи (2.4) в примере 1 может быть только $u = 0$.

3. ОБОБЩЕННО ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПАРЕТО И ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛУЭФФЕКТИВНЫЕ ТОЧКИ. СЛУЧАЙНЫЙ ФАКТОР

Рассмотрим снова задачу (1.1)–(1.3), но теперь предположим, что λ – случайная величина с известным распределением, Λ – область ее определения. Предположим, что ЛПР стремится путем выбора u получить в среднем за многократные повторения ситуации принятия решения как можно большие значения всех критериев (1.3). В этом случае естественно перейти к новой системе критериев

$$\bar{w}_i(u) = \mathbb{E}(J_i(u, \lambda)), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.1}$$

где $\mathbb{E}(\cdot)$ – операция взятия математического ожидания. При этих предположениях задача свелась к обычной многокритериальной оптимизационной задаче с системой критериев (3.1).

Чтобы найти какую-нибудь оптимальную по Парето точку в построенной задаче с использованием экономической свертки критериев, придется решать следующую задачу стохастического программирования (см. [7]):

$$\sup_{u \in U} \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{k} \delta_i J_i(u, \lambda)\right\}.$$

Распространяя метод (2.4) на этот случай, приходим к более сложной максиминной задаче стохастического программирования:

$$\sup_{u \in U} \min_{i = 1, 2, \ldots, k} \delta_i \mathbb{E}(J_i(u, \lambda)).$$

Аналогично можно распространить на этот случай метод (2.4), (2.5), использующий ограничения на критерии. Для этого надо в них операцию минимизации по $\lambda \in \Lambda$ заменить на операцию взятия математического ожидания.

Рассмотрим постановку задачи многокритериальной оптимизации при наличии случайных факторов, не связанную с понятием математического ожидания. Эту постановку обсудим на примере задачи максимизации одного критерия $J(u, \lambda)$ при выполнении ограничений (1.1), (1.2).

Пусть задана величина p, $0 < p < 1$, которую назовем доверительной вероятностью. Поставим следующую задачу:

$$\max \omega \tag{3.2}$$

при выполнении ограничения (1.1) и ограничения

$$\mathbb{P}(J(u, \lambda) \leq \omega) \geq p, \tag{3.3}$$

где операция $\mathbb{P}(\cdot)$ – вероятность события, стоящего в круглых скобках.

Ниже нам потребуется определять ω из соотношений типа (3.3). Обозначим через $\tilde{\omega}(u, p)$ верхнюю грань тех ω, для которых верно (3.3). Нетрудно видеть, что $\tilde{\omega}(u, p)$ разрешает соотношение (3.3).

Предположим, что нам удается сформировать функцию $\tilde{\omega}(u, p)$, разрешающую ограничение (3.3). Тогда искомая задача перейдет в задачу

$$\sup_{u \in U} \tilde{\omega}(u, p). \tag{3.4}$$

Заметим, что сформировать функцию $\tilde{\omega}(u, p)$ в явном виде можно довольно редко (см. [8]). Дело в том, что даже тогда, когда распределение случайной величины λ сравнительно несложно, распределение случайной величины $y = J(u, \lambda)$ может оказаться настолько сложным, что для его построения потребуется проведение сложной вычислительной работы. А если учесть то, что надо строить функцию от параметра u, которую потом использовать для решения оптимизационной задачи (3.4), то проблема еще осложнится.

В связи с этими трудностями в [9], [10] был предложен обходной путь, заменяющий решение задачи (3.2), (1.1), (3.3) решением другой задачи, сформировать которую можно намного легче.

Рассмотрим множество $\Lambda_p \subseteq \Lambda$ такое, что

$$\mathbf{P}(\lambda \in \Lambda_p) \geq p. \tag{3.5}$$

Это множество часто можно построить почти в явном виде. Приведем примеры.

Пусть λ имеет k-мерное нормальное распределение $N(\mu, \Sigma)$, где $\mu \in \mathbb{R}^k$, Σ – положительно-определенная матрица размера $k \times k$ (см. [8]). Тогда Λ_p можно строить по формуле

$$\Lambda_p = \{x \in \mathbb{R}^k : (\Sigma^{-1}(x-\mu), x-\mu) \leq c(p)\}.$$

Здесь $c(p)$ определяется из решения уравнения $\mathbf{P}(\chi^2 \leq c(p)) = p$, где случайная величина χ^2 имеет χ^2-распределение $C(k)$ (см. [8]). В этом примере Λ_p представляет собой элипсоид в $\mathbb{R}^k$.

Пусть λ имеет одномерное дискретное распределение, сосредоточенное в точках $i = 0, 1, 2, \ldots$, и пусть $p_i = \mathbf{P}(\lambda = i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $\Lambda_p = \{i \in Z : 0 \leq i \leq n(p)\}$, где $n(p)$ определяется из следующего условия.

$$\sum_{i=0}^{n(p)-1} p_i < p, \text{ но } \sum_{i=0}^{n(p)} p_i \geq p.$$

Можно привести более сложные, но и более громоздкие примеры построения Λ_p.

Введем функцию

$$\omega(u, p) = \inf_{\lambda \in \Lambda_p} J(u, \lambda) \tag{3.6}$$

и вместо задачи (3.4) поставим задачу

$$\sup_{u \in U} \omega(u, p). \tag{3.7}$$

Так как из (3.5), (3.6) имеем

$$\lambda \in \Lambda_p \longrightarrow J(u, \lambda) \geq \omega(u, p),$$

то $\mathbf{P}(J(u, \lambda) \geq \omega(u, p)) \geq p$.

Пусть $\tilde{\omega}$ – величина оптимального значения критерия в задаче (3.4) и ω^* – величина оптимального значения критерия в задаче (3.7). Так как множества вида $\{\lambda \mid J(u, \lambda) \geq \omega(u, p)\}$ представляют собой лишь часть множеств вида $\{\lambda \mid J(u, \lambda) \geq \omega\}$, то в общем случае имеем $\omega^* \leq \tilde{\omega}$.

Хотя решение задачи (3.7) не является решением задачи (3.4), но тем не менее решить задачу (3.7) более реально и тем самым получить некоторое представление о решении задачи (3.4). Заметим, что задачу (3.7) не обязательно связывать с задачей (3.4). На задачу (3.7) можно смотреть как на некоторый принцип принятия решения в подобных задачах (см. [9], [10]), представляющий собой альтернативу принципу принятия решения, использующему математическое ожидание.

Вернемся теперь к многокритериальному случаю. Здесь можно поставить следующую задачу:

$$\sup(\omega_1, \ldots, \omega_k) \tag{3.8}$$

при выполнении ограничения (1.1) и ограничений

$$\mathbf{P}(J_i(u, \lambda) \geq \omega_i) \geq p, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.9}$$

Точно так же, как и в случае $k = 1$, если бы из ограничений (3.9) можно было явно сформировать функции $\tilde{\omega}_i(u, p)$, то наша задача превратилась бы в следующую многокритериальную оптимизационную задачу:

$$\sup_{u \in U}(\tilde{\omega}_1(u, p), \ldots, \tilde{\omega}_k(u, p)). \tag{3.10}$$

Как отмечалось выше, сформировать функции $\tilde{\omega}_i(u, p)$, как правило, очень сложно. Поэтому мы предлагаем следующий подход. Выберем Λ_p, удовлетворяющее условию (3.5), и вычислим функции $\omega_i(u, p)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, по формуле (3.6), в которую будем последовательно подставлять функции $J_i(u, \lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. В результате получим следующую многокритериальную оптимизационную задачу:

$$\sup_{u \in U}(\omega_1(u, p), \ldots, \omega_k(u, p)). \tag{3.11}$$

4. ОБОБЩЕННО ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПАРЕТО И ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛУЭФФЕКТИВНЫЕ ТОЧКИ. СЛУЧАЙНЫЕ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ФАКТОРЫ

Рассмотрим многокритериальные оптимизационные задачи, неопределенность в оценках которых создает одновременное наличие случайных и неопределенных факторов.

1. Рассмотрим сначала случай, когда λ – случайная величина и о ней ЛПР известно, что она принадлежит семейству случайных величин, параметризованных параметром μ:

$$\mu \in \Omega. \tag{4.1}$$

Далее, будем предполагать, что у всех случайных величин из этого семейства одна и та же область определения Λ. Примеры подобных семейств случайных величин есть в [8].

Пусть ЛПР стремится к тому, чтобы в среднем при многих повторениях все критерии принимали как можно большие значения независимо от того, какое на самом деле будет истинное значение параметра μ. В этом случае решение поставленной задачи можно свести к следующей многокритериальной оптимизационной задаче:

$$\sup_{u \in U}(\bar{w}_1(u), \ldots, \bar{w}_k(u)),$$

где

$$\bar{w}_i(u) = \inf_{\mu \in \Omega} E_\mu(J_i(u, \lambda)), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Распространив на этот случай подход (3.8)–(3.10), получим задачу

$$\sup(\omega_1, \ldots, \omega_k)$$

при выполнении ограничения (1.1) и ограничений

$$\mathbb{P}(J_i(u, \lambda) \ge \omega_i \mid \mu) \ge p \quad \forall \mu \in \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4.2}$$

Пусть $\tilde{\omega}_i(u, p, \mu)$ – функция, разрешающая вероятностное неравенство (4.2). Так как при $\omega_1 \le \omega_2$ имеем

$$\mathbb{P}(J_i(u, \lambda) \ge \omega_1 \mid \mu) \ge \mathbb{P}(J_i(u, \lambda) \ge \omega_2 \mid \mu) \quad \forall \mu \in \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

то, взяв

$$\tilde{\omega}_i^*(u, p) = \inf_{\mu \in \Omega} \tilde{\omega}_i(u, p, \mu),$$

придем к обычной многокритериальной оптимизационной задаче

$$\sup_{u \in U}(\tilde{\omega}_1^*(u, p), \ldots, \tilde{\omega}_k^*(u, p)).$$

Выше обсуждались трудности построения функций $\tilde{\omega}_i(u, p, \mu)$. Значительно легче воспользоваться обходным путем. Пусть $\Lambda_{\mu, p} \subseteq \Lambda$ таково, что

$$\mathbb{P}(\lambda \in \Lambda_{\mu, p} \mid \mu) \ge p \quad \forall \mu \in \Omega. \tag{4.3}$$

Введем

$$\omega_i^*(u, p) = \inf_{\mu \in \Omega} \inf_{\lambda \in \Lambda_{\mu, p}} J_i(u, \lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда по аналогии с (3.10) можно получить следующую многокритериальную оптимизационную задачу:

$$\sup_{u \in U}(\omega_1^*(u, p), \ldots, \omega_k^*(u, p)).$$

2. Рассмотрим случай, когда $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, где

$$\lambda_1 \in \Lambda_1, \quad \lambda_2 \in \Lambda_2.$$

Здесь λ_1 – случайная величина, о которой ЛПР известно, что она принадлежит семейству случайных величин, параметризованному параметром μ, удовлетворяющим (4.1), Λ_1 – область определения λ_1 $\forall \mu \in \Omega$, λ_2 – неопределенный фактор и Λ_2 – область, которой он принадлежит. Предположим, что λ_1 и λ_2 независимы.

Пусть ЛПР стремится выбором u получить в среднем по многим повторениям как можно больший результат по всем критериям, каково бы ни было при этом истинное значение $\mu \in \Omega$, а относительно λ_2 ЛПР проявляет осторожность. Здесь и далее, говоря, что ЛПР по отношению к какому-либо фактору проявляет осторожность, будем иметь в виду, что ЛПР при принятии решения ориентируется на наихудшее значение этого фактора (см. [1]). В этом случае можно ввести следующие функции:

$$\bar{w}_i(u) = \inf_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \inf_{\mu \in \Omega} E_\mu(J_i(u, \lambda_1, \lambda_2)), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

и получить обычную многокритериальную оптимизационную задачу вида (2.1), (1.1).

Пусть мы вместо среднего результата критериев используем подход к принятию решения с выбором доверительной вероятности p (3.8)–(3.10). Обозначим через $\Lambda_{1\mu p}$ такое подмножество Λ_1, что для него выполнено соотношение (4.3). В этом случае придем к системе критериев

$$\bar{w}_i(u) = \inf_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \inf_{\mu \in \Omega} \inf_{\lambda_1 \in \Lambda_{1\mu p}} J_i(u, \lambda_1, \lambda_2), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

и к обычной многокритериальной оптимизационной задаче вида (3.10).

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда между λ_1 и λ_2 имеет место зависимость. Так как видов зависимости может быть много, то мы рассмотрим лишь один случай, для которого формулы получаются не слишком громоздкими.

Предположим, что функция распределения случайной величины λ_1 зависит не только от $\mu \in \Omega$, но и от λ_2. Это условие содержательно означает, что факторы (λ_1, λ_2) реализуются последовательно: сначала реализуется неопределенный фактор $\lambda_2 \in \Lambda_2$ и после этого реализуется случайный фактор λ_1.

Пусть сначала ЛПР относительно λ_1 ориентируется на получение выбором u максимально возможного в среднем результата при многих повторениях, а относительно λ_2 ЛПР осторожен. Тогда, введя функции

$$\bar{w}_i(u) = \inf_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \inf_{\mu \in \Omega} E_{\mu, \lambda_2}(J_i(u, \lambda_1, \lambda_2)), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

получим обычную многокритериальную оптимизационную задачу вида (2.1), (1.1).

Если же ЛПР использует подход к принятию решения с выбором доверительной вероятности p (3.8)–(3.10), то, введя множества $\Lambda_{1\mu\lambda_2 p}$, удовлетворяющие соотношению (4.3), и функции

$$\tilde{w}_i(u) = \inf_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \inf_{\mu \in \Omega} \inf_{\lambda_1 \in \Lambda_{1\mu\lambda_2 p}} J_i(u, \lambda_1, \lambda_2), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

придем к обычной многокритериальной оптимизационной задаче вида (3.10).

В заключение сделаем следующее замечание. При принятии решений в ситуации, когда случайная величина λ_1 принадлежит семейству случайных величин, параметризованному параметром $\mu \in \Omega$, применяют иногда байесовские методы принятия решения (см., например, [11], [12]). Здесь мы специально на этом не останавливаемся, так как при этом μ рассматривается уже не как неопределенный, а как случайный фактор, распределение которого обычно предполагается известным ЛПР. Отметим, что использование байесовских методов принятия решений требует обоснования предположения о том, что μ является случайной величиной, и также обоснования сделанных предположений о ее функции распределения. В процессе разработки ответов на эти вопросы могут встретиться весьма серьезные трудности. Однако если эти два препятствия будут успешно преодолены, то модификация приведенных выше формул на случай байесовских методов принятия решения не вызовет затруднений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. *Машунин Ю.К.* Теоретические основы и методы векторной оптимизации в управлении экономическими системами. М.: Логос, 2001.
3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
4. Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979.
5. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
6. *Поспелова И.И.* Классификация задач векторной оптимизации с неопределенными факторами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 860– 876.
7. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. М.: Сов. радио, 1972.
8. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
9. *Гурин Л.Г.* Об одном принципе принятия решений при наличии случайных и неопределенных факторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1397–1404.
10. *Гурин Л.Г.* Об управлении динамической системой при воздействии на нее случайного процесса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 10. С. 1474–1485.
11. *Хей Дж.* Введение в методы байесовского статистического вывода. М.: Финансы и статистика, 1987.
12. *Савчук В.П.* Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. М.: Наука, 1989.