Глава 6

МЕТОДОЛОГИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

В этой главе после краткого предварительного рассмотрения вопросов, связанных с процессом принятия решения человеком, излагается метод последовательного сужения множества Парето (области компромиссов) на основе количественной информации об относительной важности критериев. Теоретические предпосылки применения этого метода были разработаны в предыдущих главах, а здесь дается его описание без математических подробностей и приводятся некоторые рекомендации по применению. Кроме того, изучается возможность комбинирования этого метода с методом целевого программирования и методом достижимых целей.

6.1. Как принимает решение человек?

1. Психические составляющие процесса принятия решений. В процессе решения выделяют стадии *поиска*, *принятия* и *реализации* решения.

Принятие решений — волевой акт формирования последовательности действий, ведущих к достижению цели на основе преобразования исходной информации в ситуации неопределенности. Основные этапы процесса принятия решений включают *информационную подготовку решений* и собственно *процедуру принятия решений* — формирование и сопоставление вариантов, выбор, построение программы действий.

Принятие решений с одной стороны может выступать как особая форма мыслительной деятельности (например, управленческое решение), с другой — как один из этапов мыслительного действия при решении любых задач. Область применения этого понятия чрезвычайно широка. В этой книге под *принятием решений* обычно понимается особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий.

Процесс принятия решений обеспечивается деятельностью *интеллекта*, который складывается в основном из совместной работы *памяти*, *внимания* и *мышления*.

Память связывает прошлое субъекта с его настоящим и будущим и представляет собой особого рода процессы организации и сохранения прошлого опыта, позволяющие повторно использовать этот опыт в деятельности человека или же дающие возможность возврата в сферу сознания. Память лежит в основе любого психического явления. Собственно благодаря памяти существует как таковая личность, ее отношения, навыки, привычки, надежды, желания и притязания.

В зависимости от времени сохранения различают несколько видов памяти — *мгновенную* или *сенсорную* (обеспечивает удержание информации в течение срока менее одной секунды), *кратковременную* (время сохранения — до 30 сек.), *оперативную* (время сохранения информации до нескольких минут) и *долговременную*, которая способна удерживать информацию от нескольких часов до десятилетий. По мнению психологов, именно с оперативной памятью человека прежде всего связаны процессы принятия решений, поскольку наиболее типичным для оперативной памяти является удержание материала для использования его именно в процессе принятия решений. Оперативная память тесно связана с долговременной и опирается на способы запоминания и различные приемы, выработанные в других видах деятельности. В свою очередь, долговременная память использует приемы и способы запоминания, сложившиеся внутри оперативной памяти. Между этими видами памяти существует самая тесная связь и в отношении циркуляции информации — оперативная память использует часть информации, хранящейся в долговременной памяти и, с другой стороны, она сама постоянно передает в долговременную память какую-то часть новой информации.

Любопытно, что в оперативной памяти может храниться лишь очень ограниченное количество информации — не более 7 ± 2 единиц материала, которых называют чанками (от английского слова chunk). Этот факт составляет содержание так называемого *закона Дж. Миллера* по имени психолога, который в 1956 году на основе экспериментальных данных опубликовал свою знаменитую статью «о магическом числе 7 ± 2» (см. [14]).

Заметное влияние на постановку проблемы памяти оказала аналогия между этапами переработки информации человеком и структурными блоками компьютера. Следует, однако, заметить, что при таком сравнении функциональная структура памяти человека обнаруживает значительно большую гибкость по сравнению с компьютером.

Следующий компонент интеллекта — *внимание*, которое понимают как сосредоточенность деятельности субъекта в данный момент времени на каком-то идеальном или реальном объекте, т. е. предмете, событии, образе, рассуждении и т. п. Внимание — это динамическая сторона сознания, характеризующая степень его направленности на объект и сосредоточения на нем с целью обеспечения адекватного отражения в течение времени, необходимого для выполнения определенного акта деятельности (например, принятия решения). Внимание обеспечивает индивиду возможность сосредоточенности и направленности сознания на объекты, которые он воспринимает в ходе той или иной деятельности. Концентрация внимания позволяет человеку быстрее и качественнее выполнять ту или иную работу. С другой стороны, отсутствие должного внимания затрудняет восприятие нового, усложняет процесс обучения человека. Как известно, отсутствие внимания пагубным образом сказывается, например, на выполнении различного рода вычислительных операций: достаточно лишь одной ошибки для того, чтобы в итоге получить неверный результат.

Мышление в понимании психологов — это процесс познавательной деятельности человека, обеспечивающий организацию и переработку информации; это — анализ, синтез, а также обобщение условий и требований решаемой задачи и способов ее решения. Только с помощью развитого мышления человек получает возможность преодолевать пространственную ограниченность восприятия и может устремляться мыслью в необозримые дали макро- и микромира. При этом снимается и временная ограниченность восприятия — возникает свободное мысленное перемещение вдоль временной оси от седой древности к неопределенному будущему.

Мышление активизируется при решении любой задачи, возникающей перед человеком, коль скоро она актуальна, не имеет готового решения, и мощный мотив побуждает человека искать выход из создавшегося положения. Непосредственным толчком к развертыванию мыслительного процесса служит возникновение, осознание задачи. Следующий этап обычно связан с задержкой импульсивно возникающих реакций. Такая задержка создает паузу, необходимую для ориентировки в ее условиях, анализа компонентов, выделения наиболее существенных и соотнесения их друг с другом. Ключевой этап мышления связан с выбором одного из вариантов и формирования общей схемы решения.

Мышление включает произвольные и непроизвольные составляющие. В качестве непроизвольных могут выступать ассоциации, приводящие к образованию неуправляемых связей, которые с одной стороны определяют некоторую стереотипность, с другой —

могут способствовать появлению оригинальных и плодотворных в свете решаемой задачи идей и гипотез. Мышление характерно единством осознанного и неосознанного. Следует отметить, что большую роль в мыслительной деятельности играют эмоции, обеспечивающие управление поиском решения задачи.

Различают следующие виды мышления: наглядно-образное, словесно-образное, словесно-логическое, и др. Считается установленным, что мышление словесно-логическое является наиболее поздним продуктом развития мышления индивида и что переход от наглядного к абстрактному мышлению составляет одну из линий этого развития. Кроме того, психологи выделяют следующие в определенном плане противоположные пары типов мышления — теоретическое и практическое (эмпирическое), логическое (аналитическое) и интуитивное, реалистическое и аутистическое, связанной с уходом от действительности во внутренние переживания и др.

2. Стратегии принятия решений человеком в многокритериальной среде. Во многих ситуациях, связанных с выбором, результат выбора невозможно оценить только в одной шкале, например, в деньгах или времени. Правда, по этому поводу, как известно, существует расхожая поговорка «время — деньги», которая подразумевает, по крайней мере, теоретическую возможность выражения единиц времени в денежных единицах и, тем самым, принципиальную сводимость одной шкалы к другой. Но в противовес указанной имеется и такая поговорка — «не хлебом единым». Последняя, на взгляд автора, утверждает факт многокритериальности той среды, в которой живет человек, принципиальную несводимость духовного к материальному, а значит невозможность выражения в единой шкале многого из того, что связано с человеком.

Процитированные поговорки можно рассматривать как концентрированное выражение двух принципиально различных позиций, отражающих в определенном плане противоположные точки зрения на данный предмет. В соответствии с первой точкой зрения существует некий единый показатель или критерий, в терминах которого могут быть измерены все другие качества. Согласно второй — подобного показателя не существует в принципе. При этом чисто логическим путем, умозрительно ни одна из этих позиций, по-видимому, не может быть доказана или опровергнута, поэтому они обе имеют право на существование. Но вторая («не хлебом единым») более реалистична и жизнеспособна, поскольку знание лишь того отвлеченного факта, что все можно выразить в единой шкале, в практике принятия решений мало что

дает — ведь нужно уметь реализовать эту точку зрения. Другими словами, необходимо научиться выполнять указанное сведение к единой шкале (на языке многокритериальной оптимизации это означает — уметь производить *скаляризацию* многокритериальной задачи), а его выполнение есть не что иное, как определенный этап решения исходной по существу многокритериальной задачи.

Многокритериальные задачи принятия решений представляют собой исключительно сложный класс задач интеллектуальной деятельности человека. Наличие нескольких критериев усиливает нагрузку на ограниченную естественными пределами оперативную память человека, делает задачу, стоящую перед человеком, более неопределенной, требует высокой концентрации внимания и нередко — нестандартного мышления.

К настоящему времени еще нет полной картины того, каким образом и при помощи каких механизмов человек осуществляет выбор в многокритериальной среде. Существуют лишь определенные подходы и варианты предложений решения этих сложных вопросов. При этом они нередко в чем-то противоречат друг другу и в совокупности явно не исчерпывают все возможные способы выбора. Считается, что одной из наиболее типичных черт поведения индивида в ходе решения задачи выбора является расчленение (декомпозиция) исходной проблемы на множество более простых промежуточных задач.

Когда имеются всего два возможных варианта (решения), стратегии поведения человека в условиях многокритериальной среды в этом простейшем случае, можно разделить на два класса:

– стратегия компенсации,
– стратегия исключения.

Стратегия компенсации соответствует такой линии поведения человека, при которой низкие показатели по одному критерию (или сразу по нескольким критериям) искупаются (компенсируются) высоким показателем по другому критерию (или одновременно по некоторым другим критериям). Типичный пример выбора при использовании стратегии компенсации — покупка автомобиля, когда невысокая экономичность (т. е. большой расход горючего) может окупаться стильным видом или престижной маркой автомобиля. Другой пример подобного рода — приобретение дома с не совсем удачной планировкой комнат и несколько завышенной ценой, но в замечательном районе парковой зоны, расположенном не слишком далеко от места работы.

Стратегия исключения (или *некомпенсирующая стратегия*) состоит в удалении (исключении) из списка имеющихся возможных вариантов тех, которые заведомо не удовлетворяют по какому-то одному или же сразу по нескольким критериям одновременно. Например, при покупке автомобиля или дома покупатель, пользуясь некомпенсирующей стратегией, сразу исключает такие варианты, которые выходят за пределы его финансовых возможностей. Еще один характерный пример некомпенсирующей стратегии, связанный с покупкой автомобиля, — это такая ситуация, когда внимание покупателя сосредотачивается только на моделях с автоматической коробкой передач, а все машины с ручной передачей сразу исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что при решении многокритериальных задач с более чем двумя возможными решениями, человек обычно не придерживается лишь одной линии поведения. Он, как правило, определенным образом комбинирует указанные стратегии. Такого рода фактический материал позволил некоторым авторам выдвинуть теории человеческого поведения в процессе принятия решений [9]. Например, в соответствии с *теорией поиска доминантной структуры* человек при выборе лучшего варианта из нескольких сначала как бы окидывает взглядом все имеющиеся возможные решения и старается найти лучшее, основываясь лишь на первом впечатлении. После этого он попарно сравнивает выделенное решение со всеми остальными. Если в результате такого сравнения выбранное решение оказалось предпочтительнее остальных, то процесс выбора закончен. В противном случае то решение, которое при сравнении оказалось лучше выбранного первоначально, становится претендентом на наилучшее решение и именно оно далее сравнивается со всеми остальными возможными решениям, и т. д.

С точки зрения наличия или отсутствия гарантии полученного результата механизмы принятия решений можно разделить на два класса — *точные* (или *аналитические, логические*) и *эвристические* (или *приближенные, интуитивные*) механизмы. Механизмы первого класса характеризуются четким описанием того типа или класса задач принятия решений, в которых их применение гарантированно приводит к положительным результатам (или, по крайней мере, дает возможность избежать принятия заведомо неприемлемых решений). Что касается эвристических механизмов, то они в задачах разного типа могут давать различные с точки зрения удовлетворительности результаты. При этом точное разделение всех возможных задач на две группы, в одной из которых данный эвристический механизм работает хорошо, а в другой — его применять не стоит, осуществить не удается.

Нередко к точным механизмам и методам принятия решений причисляют все те, которые предполагают использование математического аппарата. С этим нельзя согласиться, поскольку применение языка математики для записи некоторого высказывания еще не означает точности самого высказывания! Более того, у людей, не разбирающихся в математических тонкостях, при знакомстве с такими методами или механизмами может возникнуть иллюзия их высокой точности и надежности.

Психологи продолжают заниматься изучением поведения человека при выборе различного рода решений (см. [21]). К настоящему времени сформулирован и изучен целый ряд психологических эффектов, которые человек должен учитывать для осуществления действительно наилучшего выбора. На основе этого материала специалистами предложены (см. [21]) определенные рекомендации, например:

– не позволяйте детализированным сценариям вводить вас в заблуждение,

– по возможности обращайте внимание на так называемую базовую частоту (т. е. на относительную частоту, с которой происходит то или иное событие),

– помните, что шанс не саморегулируется (т. е. после длинной череды неудач совсем необязательно наступит ряд удачных событий, или наоборот),

– не забывайте о регрессе к среднему (когда после сильных отклонений в ту или иную сторону обычно следуют более обычные, средние события).

6.2. Метод последовательного сужения множества Парето

1. Формирование математической модели. В упрощенной форме процесс принятия решений можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 6.1.

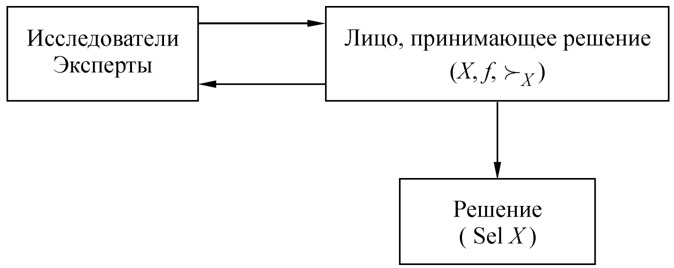

Рис. 6.1.

Собственно выбор решения (решений) осуществляет *лицо, принимающее решение* (ЛПР). Оно же несет всю ответственность за принятое решение. Результат решения задачи многокритериального выбора именуют *множеством выбираемых решений* и обозначают $\mathrm{Sel}\,X$. Нередко в реальных задачах это множество содержит лишь одно решение. Однако можно указать немало ситуаций, когда оно должно включать несколько (а иногда и бесконечное число) элементов. Например, при выборе кандидатов на вакантные места, число выбранных претендентов должно в точности совпадать с числом вакантных мест, которых может быть несколько.

Основными компонентами задачи многокритериального выбора являются*: множество возможных решений X*, *векторный критерий* $f = \left(f_1, f_2, ..., f_m\right)$ и *отношение предпочтения* $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора.

Для того чтобы решить конкретную задачу выбора, прежде всего, необходимо сформировать математическую модель этой задачи. Другими словами, следует образовать множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения, которые наиболее полно и точно отражали бы имеющуюся в наличии реальную ситуацию. Чем более адекватной реальной задаче будет построена математическая модель, тем больше будет шансов получить действительно наилучшее решение.

В построении математической модели вместе с ЛПР активно участвуют как *исследователи* (специалисты в области принятия решений), так и *эксперты* (специалисты в той области, которой принадлежит решаемая задача). Как правило, именно благодаря совместным напряженным усилиям указанных лиц удается построить приемлемую математическую модель, которая, с одной стороны, адекватно отражает конкретную ситуацию и с другой — допускает наилучшее решение за обозримое время. Этот первый этап, на котором происходит формирование математической модели (*этап формализации*), невозможно запрограммировать заранее. Здесь многое зависит от опыта и интуиции всех участвующих сторон (не зря существует такое словосочетание как *искусство формализации*, отражающее исключительную сложность этого этапа).

Множество возможных решений может состоять из конечного числа элементов, но оно может оказаться и бесконечным. Конечное множество обычно задается перечислением всех его элементов. Что касается бесконечного множества возможных решений, то его можно задавать различными способами (например, в виде множества решений некоторой системы уравнений или неравенств). Дальнейшее решение задачи выбора в сильной степени зависит от способа задания множества возможных решений. Некоторые из способов задания могут оказаться не слишком удобными для последующего оперирования с множествами. В этом вопросе свое слово должен сказать специалист по принятию решений.

Перейдем к критериям. Все участвующие в задаче функции $f_1, f_2, ..., f_m$, во-первых, должны быть числовыми и, во-вторых, ЛПР должно быть заинтересовано в максимизации каждой из них (см. аксиому 3 в разд. 1.4). Когда значения одного или сразу нескольких критериев измеряются не в количественной, а лишь в качественной шкале, опыт показывает, что в таких случаях все-таки удается тем или иным способом перейти к числовым значениям, вводя, например, балльную шкалу. Так, например, всем хорошо известна четырех балльная шкала (2, 3, 4, 5) для оценки знаний учащихся в России. Подобного рода шкалы существуют для оценки выступления спортсменов — гимнастов и фигуристов. Немало примеров введения и дальнейшего использования количественных шкал для измерения качественных характеристик можно встретить в психологии. С вопросами введения специальной девяти балльной шкалы и ее обоснованием можно ознакомиться в работах Т. Саати [27, 37].

Если какой-то из критериев для ЛПР желательно не максимизировать, а минимизировать, то его в математическую модель следует включить со знаком минус; такой распространенный прием сводит операцию минимизации к операции максимизации. Следует заметить, что критерии, как функции, также можно задавать различными способами. В некоторых случаях важно иметь критерии, которые обладали бы определенными полезными с математической точки зрения свойствами (например, непрерывностью, дифференцируемостью, вогнутостью или выпуклостью). Здесь вновь требуется консультация со специалистом по принятию решений.

Третья компонента задачи многокритериального выбора — отношение предпочтения — наиболее трудно формализуемая. Как правило, полностью построить отношение предпочтения, которым ЛПР пользуется в процессе выбора, невозможно. Об этом отношении удается получить лишь некоторые фрагментарные сведения. Среди этих сведений обязательно должна быть информация о том, что оно принадлежит определенному классу, который ограничен специальными требованиями. Напомним, что предлагаемый в данной книге подход к решению задач многокритериального выбора предполагает, что используемое ЛПР отношение предпочтения должно удовлетворять четырем аксиомам 1–4 (см. главы 1–2), которые описывают в определенном смысле последовательное (рациональное) поведение субъекта в процессе принятия решений.

Согласно *аксиоме* 1, если какое-то решение не выбирается из пары, то оно не может быть выбрано и из всего множества возможных решений. Это требование выглядит вполне разумным и не слишком обременительным, однако, в некоторых практически значимых случаях оно не может быть выполнено. Подтверждение тому — следующий простой пример. Предположим, что на два вакантных места претендуют три кандидата, причем при попарном сравнении оказалось, что первый кандидат лучше второго и третьего, а второй лучше третьего. Поскольку необходимо заполнить оба вакантных места, то ЛПР вынуждено будет остановить свой выбор на первом и втором кандидатах. Тем самым, второй кандидат войдет в множество выбираемых решений, не смотря на то, что для него существует лучшее решение — первый кандидат.

Следующая *аксиома* 2 устанавливает принципиальную возможность сравнения лицом, принимающим решение, любых векторов критериального пространства: для произвольных двух векторов $y', y'' \in R^m$ может реализоваться одна (и только одна) из следующих трех возможностей:

– y' предпочтительнее y''; при этом пишут $y' \succ y''$ (в этом случае из двух данных векторов ЛПР выбирает первый и не выбирает второй),

– y'' предпочтительнее y'; в таком случае пишут $y'' \succ y'$ (ЛПР из двух данных выбирает второй вектор),

– не выполняется ни соотношение $y' \succ y''$, ни соотношение $y'' \succ y'$ (т. е. из данных двух векторов ЛПР не в состоянии отдать предпочтение ни одному из этих векторов).

При этом согласно аксиоме 2 результаты попарного сравнения должны подчиняться так называемому *свойству транзитивности*, согласно которому для любой тройки векторов y, y', y'', удовлетворяющих соотношениям $y \succ y'$ и $y' \succ y''$, всегда имеет место соотношение $y \succ y''$. Это свойство выражает «последовательность» (логичность или рациональность) поведения ЛПР в процессе выбора. Несмотря на естественность этого требования, как утверждают психологи, человек в своем поведении не всегда следует свойству транзитивности и при сравнении трех решений, когда первое решение лучше второго, а второе — лучше третьего, из первого и третьего вполне может выбрать третье.

Смысл следующей *аксиомы* 3 заключается в том, что ЛПР заинтересовано в максимизации значений каждого из критериев f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, при условии сохранения значений всех остальных критериев. Здесь, видимо, нет особой нужды подробно объяснять, что и это требование в каких-то ситуациях может не выполняться (если, например, ЛПР заинтересовано в удержании значения какого-то критерия в определенных промежуточных пределах).

Последняя *аксиома* 4 состоит в инвариантности (сохранении) для любых двух векторов y', y'' критериального пространства R^m соотношения $y' \succ y''$ при одновременном увеличении (или уменьшении) всех компонент данных двух векторов в одно и то же число раз (свойство однородности), а также при добавлении к этим векторам одного и того же произвольного вектора критериального пространства (свойство аддитивности). Например, пусть справедливо соотношение $y' = (y_1', y_2', \ldots, y_m') \succ (y_1'', y_2'', \ldots, y_m'') = y''$. Тогда в соответствии с аксиомой 4 для произвольного положительного числа α должно выполняться соотношение $\alpha y' = (\alpha y_1', \alpha y_2', \ldots, \alpha y_m') \succ (\alpha y_1'', \alpha y_2'', \ldots, \alpha y_m'') = \alpha y''$, а для любого вектора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — соотношение $y' + c = (y_1' + c_1, y_2' + c_2, \ldots, y_m' + c_m) \succ (y_1'' + c_1, y_2'' + c_2, \ldots, y_m'' + c_m) = y'' + c$. В тех случаях, когда отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не удовлетворяет хотя бы одной из упомянутых четырех аксиом, применение излагаемого ниже подхода не гарантирует получение наилучшего результата.

Если же проверить выполнение всех указанных аксиом в какой-то конкретной ситуации не удается, то остается лишь надеяться, что применение данного подхода не приведет к заведомо неудовлетворительному решению.

2. Выявление информации об относительной важности критериев. Основная идея предлагаемого подхода состоит в использовании информации об относительной важности критериев для исключения неприемлемых парето-оптимальных решений. Существуют по меньшей мере два способа получения такого рода информации:

– на основе анализа решений, ранее принимавшихся данным ЛПР,

– в результате прямого пороса ЛПР.

Для того чтобы воспользоваться первым способом, нужно располагать сведениями о поведении данного ЛПР в прошлом при решении аналогичных задач выбора с имеющимся набором критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Если же до этого момента ЛПР не сталкивалось с необходимостью решения таких задач, то остается только второй способ — непосредственный опрос ЛПР.

Перед осуществлением опроса следует ознакомить ЛПР с определением 2.1, в котором идет речь о самой простой ситуации, когда i-й критерий (т. е. f_i) важнее j-го критерия (т. е. f_j) с положительными параметрами w_i^* и w_j^*. В основе этого определения лежит идея компенсации, упоминавшаяся в предыдущем пункте, а его смысл заключается в том, что всякий раз ради увеличения значения более важного i-го критерия на w_i^* единиц ЛПР готово пожертвовать w_j^* единицами по менее важному j-му критерию (иначе говоря, потеря в w_j^* единиц по j-му критерию всегда может быть компенсирована увеличением на w_i^* единиц значения i-го критерия) при условии сохранения значений по всем остальным критериям. При этом положительное число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \qquad (0 < \theta_{ij} < 1), \tag{6.1}$$

выражающее долю потери относительно суммы потери и прибавки, носит названия *коэффициента относительной важности* i-го критерия по сравнению с j-м критерием.

Значение этого коэффициента, близкое к единице, свидетельствует о большой степени важности i-го критерия по сравнению с j-м, поскольку за относительно небольшую добавку по более важному критерию ЛПР готово платить довольно существенной потерей по менее важному критерию. В случае, когда данный коэффициент близок к нулю, указанная степень относительной важности мала, так как здесь ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии относительно большой прибавки по более важному критерию.

Следует, однако, заметить, что сказанное не носит абсолютного характера, так как величина коэффициента относительной важности в сильной степени зависит от единиц, в которых измеряются значения сравниваемых по важности критериев (см. разд. 2.4). Вполне возможна ситуация, когда два абсолютно одинаковых (с точки зрения принятия решений) ЛПР при решении одной и той же задачи пользуются разными коэффициентами относительной важности по той простой причине, что они применяют различные единицы при измерении значений сравниваемых по важности критериев.

Сказанное выше свидетельствует о том, что конкретная величина коэффициента относительной важности зависит от единиц, в которых измеряются значения критериев. При переходе к другим единицам (в пределах той же самой шкалы!) — коэффициенты относительной важности, как правило, меняются. Например, если речь идет о прибыли, и она выражается в денежных единицах, то коэффициенты относительной важности, соответствующие двум идентичным ЛПР, но пользующихся при расчете различной валютой (рублями и долларами), будут различными.

Если в результате опроса ЛПР выясняется, что оно готово за некоторую добавку по i-у критерию пожертвовать определенным количеством по j-у критерию, то такое положение на основании определения 2.4 свидетельствует о большей важности i-го критерия по сравнению с j-м. Остается определить степень этой важности, т. е. найти конкретное значение коэффициента относительной важности. При определении этого коэффициента следует иметь в виду, что чем больше он окажется, тем более содержательной будет информация об относительной важности критериев и, тем самым, на большую степень сужения множества Парето (области компромиссов) можно рассчитывать. Поэтому у ЛПР необходимо стремиться выяснить, каким максимальным возможным количеством w_j^* по j-му критерию оно готово пожертвовать ради получения некоторой фиксированной прибавки (например, в одну единицу: $w_i^* = 1$). На основе полученных чисел w_i^* и w_j^* по формуле (6.1) вычисляется коэффициент относительной важности θ_{ij}. Этот коэффициент будет далее использоваться для пересчета менее важного критерия.

3. Метод последовательного сужения множества Парето. Опишем общую схему *метода последовательно сужения множества Парето* на основе количественной информации об относительной важности критериев. В его основу положена стратегия исключения, которая упоминалась в разд. 6.1.

Первый этап этого метода состоит в выявлении информации об относительной важности критериев. Наиболее распространенный путь выявления этой информации — прямой опрос ЛПР. В результате выявления должен быть получен коэффициент относительной важности критериев θ_{ij}.

Второй этап осуществляется без привлечения ЛПР. В соответствии с теоремой 2.5 необходимо менее важный j-й критерий в общем списке критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$ заменить новым, вычисленным по простой формуле $\theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j$. Затем следует найти множество Парето относительно нового векторного критерия.

На этом этапе могут возникнуть определенные вычислительные трудности, если множество возможных решений не является конечным. Если же число возможных решений конечно, то для нахождения множества Парето можно использовать алгоритм, о котором упоминается в п. 6 разд. 1.4.

Построенное с использованием нового векторного критерия множество Парето представляет собой оценку сверху для искомого множества выбираемых решений. Проще говоря, это означает, что дальнейший выбор следует производить в пределах найденного множества Парето. Поэтому после его отыскания на *третьем этапе* оно предъявляется для анализа ЛПР. В случае если ЛПР сочтет его приемлемым (по размерам) для окончательного выбора, то процесс принятия решений заканчивается. В противном случае (т. е. когда указанное множество «слишком широкое») необходимо попытаться получить дополнительную информацию об относительной важности критериев и затем аналогичным образом использовать ее для дальнейшего сужения области поиска множества выбираемых решений. В этом случае при формировании нового векторного критерия придется использовать набор информации об относительной важности критериев, состоящий из двух сообщений и прежде чем сделать это, необходимо убедиться в непротиворечивости данного набора из двух сообщений (по этому поводу см. разд. 4.2). Заметим, что в общем случае такая проверка сводится к решению определенной задачи линейного программирования.

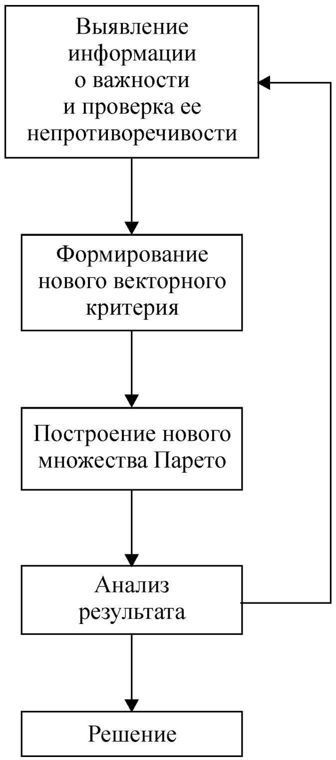

Рис. 6.2.

В результате последовательного выполнения указанных действий образуется циклический процесс, схема которого изображена на рис. 6.2. Циклы в нем повторяются до тех пор, пока не будет получен результат, приемлемый для ЛПР. Этим результатом является очередное множество Парето, размеры которого, по мнению ЛПР, соответствуют размерам множества выбираемых решений Sel X.

Теоретическое обоснование описанного метода последовательного сужения множества Парето на основе количественной информации об относительной важности критериев приведено в пятой главе. Доказанная в ней теорема 5.3 утверждает, что во многих случаях, когда множество возможных векторов состоит из конечного числа элементов (это условие заведомо выполняется, если конечным является множество возможных решений), на основе конечного набора информации об относительной важности критериев, можно точно построить неизвестное множество недоминируемых векторов (а значит, и множество недоминируемых решений). К сожалению, этот результат не является конструктивным в том смысле, что в нем не указывается, какой именно набор информации следует при этом использовать. Неизвестно также, какое количество сообщений об относительной важности при этом нужно иметь. Решение этих вопросов в сильной степени зависит от конкретного вида множества возможных решений и участвующих в задаче выбора критериев. Тем не менее, эта теорема имеет важное теоретическое значение, поскольку она обосновывает описанный метод последовательного сужения множества Парето. По сути дела она утверждает, что *при решении задач многокритериального выбора следует лишь научиться выявлять информацию об относительной важности критериев и умело ее использовать*; *на основе только такой информации можно полностью и точно построить множество недоминируемых решений для произвольной задачи многокритериального выбора из достаточно широкого класса*, в которой множество возможных решений конечно. Если же указанное множество не является конечным, то с помощью одной информации об относительной важности можно получить сколь угодно точное приближение к искомому множеству недоминируемых решений (см. теорему 5.2). Аналогичное утверждение справедливо не только для решений, но и для векторов.

Иногда за прибавку по какому-то одному очень важному критерию ЛПР согласно пойти на потери сразу по нескольким критериям. В других случаях потеря по некоторому менее важному критерию не может быть компенсирована прибавкой лишь по одному более важному критерию, а только одновременно по нескольким критериям. В общем случае могут существовать две группы критериев, номера которых принадлежат непересекающимся множествам A и B, и такие, что за прибавки в размере w_i^* единиц по всем более важным критериям f_i (для которых $i \in A$), ЛПР согласно потерять w_j^* единиц по всем менее важным критериям f_j

(для которых $j \in B$). В соответствии с определением 3.3 это означает, что *группа критериев A важнее группы критериев B* с двумя наборами положительных параметров w_i^* и w_j^* для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. При этом степень важности одной группы по сравнению с другой оценивается набором коэффициентов относительной важности θ_{ij} для всех указанных i и j, определяемых той же формулой (6.1), что и в случае двух критериев.

При выявлении информации об относительной важности для двух групп критериев следует учитывать следующее обстоятельство. В теореме 3.1 утверждается, что из бо́льшей важности группы критериев A по сравнению с группой B вытекает бо́льшая важность более широкой, чем A, группы по сравнению с более узкой группой, чем B. Грубо говоря, более важную группу всегда можно расширить, а менее важную — сузить. В силу сказанного, при выявлении информации об относительной важности одной группы по сравнению с другой всегда следует стремиться к тому, чтобы более важная группа была как можно уже, а менее важная — как можно шире. Тогда информация об относительной важности одной группы критериев по сравнению с другой будет наиболее содержательной, и последующее использование этой информации может привести к существенному сужению области компромиссов. В этом смысле самым лучшим является вариант, когда какой-то один критерий оказывается важнее группы всех остальных критериев.

Пересчет векторного критерия на основе информации об относительной важности для двух групп критериев производится с помощью теоремы 3.3. Согласно этой теореме из исходного набора критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ прежде всего удаляются все менее важные критерии, т. е. те, номера которых принадлежат множеству B. Затем к оставшимся необходимо добавить новые критерии вида $\theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j$, число которых совпадает с числом коэффициентов относительной важности (оно равно произведению чисел элементов множества A и множества B).

Нетрудно понять, что общее число новых критериев при этом может оказаться значительно больше числа первоначального набора критериев. Например, если множество A состоит из двух элементов, а B — из трех, то число коэффициентов относительной важности равно 6. Три менее важных критерия должны быть удалены, но при этом шесть новых следует добавить. В итоге общее число критериев увеличится на 3.

В случае, когда множество более важных критериев состоит в точности из одного элемента, увеличения количества критериев

при учете информации об относительной важности не произойдет (см. следствие 3.1), т. е. число новых критериев будет равно числу старых критериев.

4. Использование набора информации об относительной важности критериев. Описанный выше метод последовательного сужения на основе информации об относительной важности критериев предполагает одновременный учет сразу нескольких сообщений об относительной важности. В тех случаях, когда приходится учитывать сравнительно простой набор информации, используют процедуру пересчета менее важных критериев и формирование нового критерия с помощью заранее выведенных формул. К подобным «простым» случаям относятся следующие:

– когда имеются два критерия, причем каждый из них оказывается важнее другого (как указано в п. 2 разд. 4.1 для учета этой информации следует дважды воспользоваться результатом теоремы 2.5),

– когда один критерий важнее каждого из двух других в отдельности (в соответствии с теоремой 4.2 в этом случае новый критерий, размерность которого будет на единицу больше исходного, следует формировать по формуле (4.2)),

– когда два критерия по отдельности важнее третьего (тогда для формирования нового векторного критерия следует использовать формулу (4.7)),

– когда один критерий важнее второго, а он, в свою очередь, важнее третьего (здесь можно дважды применить теорему 2.5 — сначала пересчитывается третий критерий, а затем второй; см. п. 1 разд. 4.1),

– когда имеются два произвольных взаимно независимых сообщения (в этом случае дважды применяется теорема 3.3).

К тому же классу «простых» ситуаций относятся следующие:

– когда имеется более двух сообщений, состоящих в том, что каждый из определенного набора критериев важнее одного и того же критерия, не входящего в указанный набор (здесь рекомендуется применить теорему 4.10 с формулами пересчета (4.21)),

– когда имеется произвольное конечное число попарно взаимно независимых сообщений об относительной важности критериев (в таком случае применяется теорема 4.11).

Напомним (см. п. 1 разд. 4.1), что два сообщения об относительной важности критериев, состоящие в том, что группа критериев A_1 важнее группы B_1 и группа критериев A_2 важнее группы B_2, являются *взаимно независимыми*, если ни одна пара из указанных четырех множеств номеров не имеет ни одного общего элемента.

Вышеперечисленными ограничиваются все возможные варианты, для которых в главах 2 и 3 были выведены простые формулы пересчета векторного критерия.

Если при реализации метода последовательного сужения множества Парето необходимо учесть набор информации, который не относится ни к одному из перечисленных выше «простых» случаев, то можно воспользоваться так называемым *алгоритмическим подходом*, изложенным в разд. 4.4. Его реализация в случае бесконечного множества возможных векторов Y может натолкнуться на определенные вычислительные трудности, тогда как для конечного Y проблем подобного рода не возникает. В п. 4 указанного раздела описана соответствующая вычислительная процедура, которая при желании может быть легко запрограммирована и использована в той или иной компьютерной среде.

6.3. Комбинированные методы

1. Модифицированный метод целевого программирования. В основе круга методов, получивших название *целевого программирования* лежит довольно простое эвристическое соображение — стараться в качестве наилучшего выбрать такой возможный вектор, который в критериальном пространстве расположен ближе всех остальных допустимых векторов к некоторому идеальному или же к целому множеству идеальных векторов. При этом в качестве идеального нередко берется вектор, составленный из максимальных значений компонент векторного критерия, а варьирование метрики для измерения расстояния в критериальном пространстве приводит к целому семейству однотипных методов, которые, однако, могут приводить к различным конечным результатам. Для обоснованного выбора той или иной метрики никаких четких рекомендаций не выработано; здесь чаще всего исходят из соображений простоты, а именно, — применяют такую метрику, чтобы получающаяся в итоге экстремальная задача приближения была наиболее простой в вычислительном отношении.

Принято считать, что родоначальниками целевого программирования являются А. Чарнс и В. Купер, которые в 1953 году [36] использовали указанное выше эвристическое соображение для решения многокритериальной задачи линейного программирования. В 1961 году свой метод они изложили в книге [37]. Позже на эту тему были написаны десятки (если не сотни) статей и выпущено несколько книг. Несмотря на отсутствие логического фундамента (его заменяет указанное эвристическое соображение)

методы целевого программирования широко используются при решении различных прикладных задач, в которых присутствует несколько критериев.

Опишем в общем виде метод целевого программирования. Пусть имеется набор критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$, каждый из которых желательно максимизировать на множестве возможных решений X. В соответствии с методологией целевого программирования будем считать, что в критериальном пространстве R^m задано непустое множество U, которое обычно называют *множеством идеальных* (*наилучших* или *утопических*) *векторов*. При этом обычно считается, что это множество не достижимо, т. е. имеет место равенство $U \cap Y = \varnothing$, где Y означает множество возможных векторов. Кроме того, на критериальном пространстве должна быть задана *метрика*, т. е. такая числовая функция $\rho = \rho(y, z)$, которая каждой паре векторов y, z критериального пространства R^m сопоставляет неотрицательное число, называемое *расстоянием* между векторами y и z. Метрика для всех векторов w, y, z должна удовлетворять следующим аксиомам:

– $\rho(y, z) \geqq 0$; $\rho(y, z) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = z$,
– $\rho(y, z) = \rho(z, y)$,
– $\rho(w, z) \leqq \rho(w, y) + \rho(y, z)$.

Оптимальным (наилучшим или наиболее удовлетворительным) объявляется такое решение $x^* \in X$, для которого выполнено равенство

$$\inf_{y \in U} \rho\Big(f(x^*),\, y\Big) = \min_{x \in X} \inf_{y \in U} \rho\big(f(x),\, y\big),$$

означающее, что оценка $f(x^*)$, соответствующая наилучшему решению x^*, должна быть расположена как можно ближе к множеству идеальных оценок.

Множество идеальных оценок U может состоять и из одного элемента. Нередко таким единственным элементом является вектор, составленный из максимальных значений критериев:

$$U = \{u\}, \;\; u = \Big(\max_{x \in X} f_1(x), \ldots, \max_{x \in X} f_m(x)\Big).$$

Один из наиболее простых способов образования идеального множества восходит к Чарнсу и Куперу и состоит в задании его при помощи линейных неравенств и уравнений:

$$y_i = f_i(x) \geqq \alpha_i \quad \text{для всех } i \in I_1,$$

$$y_i = f_i(x) = \beta_i \quad \text{для всех } i \in I_2,$$

где множества I_1 и I_2 образуют разбиение множества номеров критериев I, а числа α_i и β_i определяют некоторые «пороговые» (предельно низкие) значения критериев.

Необходимо сказать, что в общем случае формирование целевого множества многокритериальной задачи, если оно естественным образом не диктуется условиями конкретной задачи, может составить непростую задачу.

Кроме того, есть еще одна проблема целевого программирования — выбор метрики. Чаще всего при решении прикладных задач используют какую-либо метрику из следующего параметрического семейства

$$\rho_a^s(y, z) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^a |y_i - z_i|^s\right)^{1/s},$$

где $s \geqq 1$ и

$$a^s \in \left\{ a^s = (a_1^s, ..., a_m^s) \Big| \sum_{i=1}^{m} a_i^s = 1,\ a_i^s > 0 \ \text{ для всех } \ i = 1, 2, ..., m \right\}.$$

Здесь может быть и $s = +\infty$; в этом случае получаем так называемую *чебышевскую* (*равномерную*) *метрику*

$$\rho_a^{+\infty}(y, z) = \max_{i=1,2,...,m} a_i^s |y_i - z_i|.$$

Чарнс и Купер использовали указанную метрику в частном случае $s = 1$; а в работе [30] эта метрика применяется при $s = 2$.

Варьируя вектор параметров a^s, стремятся учесть «неравноценность» критериев, придавая большее значение той компоненте вектора параметров, которая соответствует критерию большей ценности. Разумеется, никаких строгих определений и рассуждений на этот счет не приводится, поэтому все сказанное можно смело относить к типичным эвристическим приемам.

Необходимо отметить, что использование метрики указанного выше параметрического семейства не всегда приводит к парето-оптимальным векторам. На этот счет в литературе имеется достаточное количество примеров. Поэтому в рамках целевого программирования значительное место уделяется нахождению условий, при которых использование той или иной метрики заведомо приводит к парето-оптимальным решениям.

Например (см. [26]), если $u^i \geq \sup_{y \in Y} y_i$ для $i = 1, 2, ..., m$, то точка максимума числовой функции

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^s |u_i - y_i|^s\right)^{1/s} \quad \text{при} \quad s \in [1, +\infty)$$

на множестве возможных векторов Y всегда является парето-оптимальной.

Перейдем к обсуждению возможности комбинирования целевого программирования с описанным ранее методом последовательного сужения области компромиссов. Эта комбинация автором данной монографии использовалась еще в начале 1990-х годов для решения прикладных экономических задач и была названа *модифицированным целевым программированием*. В соответствии с последним вначале следует выявить всю возможную информацию об относительной важности критериев. В общем случае это может быть целый набор сведений. Далее на основе этого набора необходимо удалить все те возможные векторы, которые не совместимы с имеющейся информацией (т. е. необходимо применить метод последовательного сужения области компромиссов). В результате такого удаления будет получено некоторое подмножество исходного множества Парето, являющееся определенной оценкой сверху для искомого множества выбираемых векторов. Если последнее множество (оценка сверху) оказывается сравнительно широким и больше никакой дополнительной информации об относительной важности критериев для дальнейшего его сужения получить не удается, то в таком случае для завершения процесса поиска наилучшего решения можно применить метод целевого программирования. Разумеется, когда исходное множество возможных решений бесконечно, отыскание указанного подмножества может составить непростую вычислительную задачу. Однако для конечного множества возможных решений описанная процедура легко программируется и может быть реализована с помощью компьютера.

Модифицированный метод целевого программирования в 1991 году был применен автором для решения задачи оптимизации годовой производственной программы энергетического объединения [2]. Множество возможных решений в ней конечно и определялось параметрами имитационной модели, в рамках которой она использовалась. В этой задаче было выделено восемь критериев

– величина издержек,

– величины выбросов первого, второго, третьего и четвертого ингредиентов,

– величина расхода газа,

– величина расхода кислорода,

– величина расхода мазута.

Все они принимают строго положительные значения, и каждый из них необходимо минимизировать. В соответствии с этим начало координат естественно рассматривать как идеальный недостижимый вектор. Из параметрического семейства метрик была выбрана квадратичная, причем минимизировался квадрат расстояния, т. е. функция

$$\rho\left(y, 0_8\right) = \sum_{i=1}^{8} y_i^2.$$

Как видим, все коэффициенты a_i^s были выбраны равными единице, так как информация об относительной важности критериев учитывалась на этапе применения метода последовательного сужения области компромиссов. Информация об относительной важности состояла в том, что первый критерий являлся более важным, чем каждый из всех остальных с одним и тем же коэффициентом относительной важности.

Решение задачи состояло из следующих четырех этапов:

– удаление из множества возможных векторов всех тех, которые не являются парето-оптимальными,

– учет информации об относительной важности критериев (пересчет менее важных критериев и построение с его помощью нового множества парето-оптимальных векторов),

– нормализация оставшихся векторов (т. е. деление всех компонент векторов на максимальные возможные компоненты),

– нахождение наилучшего вектора (того, который следует выбрать) в результате минимизации функции $\rho\,(y, 0_8)$ на оставшемся множестве нормализованных векторов.

2. Метод достижимых целей при наличии информации об относительной важности критериев. Метод достижимых целей (МДЦ) был разработан группой сотрудников вычислительного центра РАН [12]. Основой метода является *визуализация* множества возможных (достижимых — по терминологии авторов метода) векторов при сравнительно небольшом числе критериев, т. е. наглядное представление его на дисплее компьютера посредством двумерных сечений. При этом использование метода предназначено в основном для сложных в вычислительном отношении случаев бесконечного числа возможных решений и векторов.

Один из недостатков метода целевого программирования, изложенного выше, состоит в том, что идеальный вектор (или идеальное множество) задается «вслепую», без учета реальных возможностей. Поэтому достижимые значения показателей, даже наиболее близкие к заданному идеалу, зачастую оказываются далекими от него. Метод достижимых целей направлен на преодоление отмеченного недостатка. В соответствии с этим методом исследователям, экспертам и ЛПР, — всем участвующим в решении задачи принятия решений, — в наглядной, доступной для восприятия форме представляется множество возможных (достижимых) векторов. Среди них они могут выбрать ту или иную компромиссную цель. После этого компьютер находит решение, приводящее к поставленной цели.

Таким образом, применение МДЦ содержит следующие этапы:

– построение множества возможных (достижимых) векторов,
– визуальный анализ полученного множества,
– выбор компромиссного вектора,
– определение решения, соответствующего выбранному вектору.

Остановимся подробнее на втором этапе. Как уже было сказано, множество возможных векторов визуально представляется своими двумерными сечениями (авторы метода называют их *диалоговыми картами решений*). Для того чтобы задать некоторое двумерное сечение многомерного множества, необходимо выбрать те два критерия, значения которых будут демонстрироваться на дисплей компьютера (так называемые *координатные критерии*). Затем следует зафиксировать некоторый набор значений остальных (некоординатных) критериев. Фиксируя различные наборы некоординатных критериев, будем получать соответствующие им двумерные сечения. Аналогичную процедуру можно осуществить для другой пары координатных критериев и т. д. По построенным таким способом двумерным сечениям в случае небольшого числа критериев (в основном, до пяти) можно получить наглядное представление обо всем многомерном множестве возможных оценок для того, чтобы осуществить в нем наилучший выбор.

Рассмотрим подробно случай трех критериев. Здесь имеется один некоординатный критерий. Задавая набор фиксированных значений этого критерия (обычно эти значения распределяют равномерно), получим соответствующую совокупность двумерных сечений, которую данный метод позволяет представить двумя способами — рядом и наложением друг на друга. Наложение сечений дает возможность легко сравнивать их между собой. Расположение этих сечений в ряд оказывается удобным при изучении структуры множества возможных оценок, когда границы двумерных сечений пересекаются.

Если имеется четыре критерия, то к некоординатным следует отнести два из них. В этом случае получится двумерная совокупность значений некоординатных критериев (двумерная сетка, число узлов которой совпадает с произведением числа выбранных значений каждого из некоординатных критериев). Как и в случае трех критериев, двумерные сечения при желании можно наложить друг на друга или представить их в виде двумерной матрицы, соответствующей узлам сетки значений некоординатных критериев. Для более подробного знакомства с представлением многомерных множеств на основе двумерных сечений рекомендуем обратиться к [12].

Теперь обсудим, каким образом МДЦ можно использовать при наличии дополнительной информации об относительной важности критериев в случае, когда множество возможных решений состоит из бесконечного числа элементов (например, задано в виде множества решений некоторой системы линейных неравенств). Для иллюстрации сначала рассмотрим самую простую ситуацию, — когда имеется всего три критерия и первый критерий важнее второго с некоторым коэффициентом относительной важности. Будем считать, что другой информации нет, причем получающееся в результате учета этой информации множество парето-оптимальных векторов бесконечно. Спрашивается, каким образом произвести дальнейшее сужение области поиска или же более того — остановить выбор на каком-то одном из возможных векторов? С этой целью можно по известной формуле $\theta_{12} f_1 + (1 - \theta_{12}) f_2$ пересчитать менее важный второй критерий и, тем самым, образовать новый векторный критерий, в котором первый и третий остались прежними. Именно второй, измененный критерий следует взять в качестве некоординатного и задать определенный ряд его значений для получения соответствующих двумерных сечений. Сравнивая представленные на дисплее сечения, можно получить наглядное представление о структуре множества Парето, соответствующем новому векторному критерию, и попытаться выбрать из этого множества какой-то один определенный (компромиссный) вектор (y_1^*, y_2^*, y_3^*). Этот

вектор будет соответствовать значению второго (некоординатного) критерия, равному y_2^*. Для того чтобы оценить полученный результат с точки зрения исходного второго критерия f_2, можно рассмотреть два двумерных сечения, одно их которых отвечает первому некоординатному вектору, когда его значение фиксировано и равно y_1^*, а второе — соответствует случаю, когда некоординатным является третий вектор и его значение равно y_3^*. Анализируя два последних двумерных сечения, в случае необходимости можно произвести коррекцию выбранного ранее вектора (y_1^*, y_2^*, y_3^*).

Подобным образом можно пытаться использовать МДЦ при наличии сведений об относительной важности критериев в случае четырех и пяти критериев. При этом ясно, что некоторые трудности применения МДЦ могут состоять в том, что после учета имеющейся информации об относительной важности критериев и пересчета менее важных критериев образуются новые критерии, с которыми работа ЛПР может быть затруднена. Эти измененные критерии уже не имеют прежнего «физического» смысла и с ними следует обращаться особо. Однако, как показывает приведенное выше рассмотрение для случая трех критериев, с такими затруднениями иногда можно успешно справиться.