предисловии к книге [102], до работ Л.А.Заде подобная качественная информация по существу просто терялась - было непонятно, как ее использовать в формальных схемах анализа альтернатив. В то же время, как указывалось выше, уже простейшие задачи с двумя критериями неизбежно содержат в себе элементы субъективизма.

При этом одной из важнейших проблем является формирование глобального критерия качества для равнозначимых и неравнозначимых частных критериев и ограничений.

Характерной чертой большинства реальных процессов является непрерывность изменения параметров, определяющих критерии оптимальности.

П таких условиях пространство альтернатив становится бесконечным, что делает невозможным применение методов теории принятия решений, основанных на анализе частных показателей качества при конечном наборе решений [105]. Такие задачи обычно решаются путем формирования тем или иным способом свертки частных критериев и ограничений в некоторый глобальный показатель качества, экстремум которого определяет точку оптимума. Как указывается в [88], процедура свертки не может быть до конца формализована и определяется спецификой задачи, целями, опытом и интуицией исследователя. В работе [99] показано, что различные способы свертки критериев могут приводить к существенно отличающимся итоговым результатам, что свидетельствует об определяющем значении этапа формирования глобального критерия при решении многокритериальных задач.

Поэтому, несмотря на отсутствие общей теории, целесообразно рассмотреть некоторые узловые моменты процесса формирования свертки частных критериев, провести сравнительный анализ наиболее часто употребляемых способов построения обобщенного показателя качества при описании частных критериев функциями принадлежности. Учитывая замечание, сделанное в предыдущем параграфе об эквивалентности функций принадлежности и функций желательности Харрингтона, в дальнейшем будем пользоваться термином «функция желательности» как более простым и удобным в контексте задач оптимизации.

2.2.1. Ранжирование частных критериев в условиях неопределенности

Как отмечалось ранее, при решении задач многокритериальной оценки и оптимизации необходимо учитывать неравнозначность частных критериев качества. В случае большого числа критериев задача непосредственного определения рангов критериев оказывается весьма трудной и даже неразрешимой для экспертов в силу ограниченности психико-физиологических возможностей человека. При этом в случае сравнения двух альтернатив эксперт обычно способен адекватно определить, у какой из них рассматриваемый признак (важность) выражен сильнее, а также качественно (вербально) оценить, насколько велика разница между наблюдаемыми у двух альтернатив признаками.

Рассмотрим более подробно задачу определения значимости рангов частных критериев на основе их попарного сравнения.

Попарное сравнение всех частных критериев проведем с помощью шкалы лингвистических оценок. На практике экспертные заключения часто имеют характер суждений типа: «продолжительность простоя на асфальтобетонном заводе несколько предпочтительнее продолжительности простоя автомобилей при разгрузке» или «продолжительность простоя автомобилей на погрузке и разгрузке одинаково значимы». Построение таких лингвистических оценок обычно не вызывает затруднений у специалистов.

В соответствии с широко распространенным подходом [291] лингвистическую шкалу построим состоящей из девяти градаций оценок относительной важности (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Лингвистические оценки относительной важности

Качественная оценка	Количественная оценка a_{ij}
Строго эквивалентны (одинаково значимы)	1
Слабо предпочтительнее	3
Несколько предпочтительнее	5
Значительно предпочтительнее	7
Строго предпочтительнее	9
Промежуточные значения важности	2, 4, 6, 8
Оценка сравнения элемента j с элементом i (a_{ji}) имеет обратное значение a_{ij}	$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$

Такая шкала отражает особенности человека как субъекта принятия решений и обработки информации. Человек плохо воспринимает излишне детализированные шкалы значений признаков. Психофизические данные свидетельствуют о том, что человек уверенно различает не более 7±2 градаций на шкале некоторого признака (параметра). Если же шкала содержит большее число градаций, то соседние уровни начинают сливаться, и уже не могут быть с уверенностью разграничены [83]. На практике часто используют только пять основных нечетных оценок шкалы и этого оказывается достаточно при сравнении двух альтернатив или критиериев. Сделанным лингвистическим суждениям экспертов в соответствии с таблицей 2.1 присваиваются соответствующие численные оценки от 1 до 9. В табл. 2.1 через a_{ij} обозначена оценка значимости критерия i по отношению к критерию j. На основе всех определенных попарных оценок a_{ij} далее строится матрица парных сравнений $A=\{a_{ij}\}$.

Так, пусть исследуемая система характеризуется тремя критериями x_1, x_2, x_3. Между ними существуют отношения: x_2 почти эквивалентен x_1 и строго предпочтительнее x_3, а x_3 несколько предпочтительнее x_1. Тогда в соответствии с табл. 2.1 матрица парных сравнений $A\{a_{ij}\}$ частных критериев x_i (i = 1, 2, 3) исследуемой системы будет выглядеть следующим образом:

	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1/3	1/5
x_2	3	1	9
x_3	5	1/9	1

Выбор девяти лингвистических градаций значимости далеко не случаен. Дело в том, что в естественных языках большинства народов используются также не более девяти вербальных оценок относительной значимости (предпочтительности). Формулировки оценок могут быть иными, но число их практически постоянно – таковы, как показывают результаты психофизиологических исследований, особенности нашего мышления [14]. Словесным оценкам парной важности поставлены в соответствие числа натурального ряда. Ясно, что это необходимо для получения количественных результатов. Однако на практике не рекомендуем показывать экспертам какие–либо числа. Оценки на основе лингвистической шкалы надежнее. Дело в том, что если предложить группе специалистов оценить известные им объекты, то вербальные оценки окажутся весьма близкими. Иначе и быть не может: люди учились по одним и тем же учебникам, читают одни и те же статьи, работают в общей для них отрасли. Однако если удастся уговорить их использовать для оценок цифры (цифры никто не любит), то никакого единодушия уже не будет. Последнее подтверждается результатами обширных маркетинговых исследований [349], в которых потребителям предлагалось оценить качество различных товаров. Дело в том, что «в начале было слово», цифры появились значительно позже, чем слова естественных языков.

Рассмотрим подробнее методику нахождения рангов частных критериев на основе матрицы парных сравнений [182]. Пусть A - матрица парных сравнений, построенная на основе определенных экспертами значений элементов матрицы a_{ij}. Через $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ обозначим искомые значения коэффициентов относительной значимости критериев. $W = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ - вектор коэффициентов относительной важности (рангов); n - количество частных критериев.

Для каждого элемента матрицы парных сравнений справедливо $a_{ij} = \alpha_i/\alpha_j$. По содержательному смыслу ранги α_i – это значения вкладов соответствующих частных критериев, иными словами коэффициенты предпочтительности этих критериев. Тогда их совокупность $W = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ отвечает собственному вектору матрицы A. Поэтому вектор W может быть найден как решение уравнения $AW = \lambda W$, где λ - собственное значение матрицы A. Используя условие нормализации $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i / n = 1$, применяя известные методы отыскания собственных векторов, можно рассчитать численные значения рангов α_i.

В реальных ситуациях элементы матрицы парных сравнений не точны из-за того, что они отражают субъективное мнение эксперта. В этих условиях значение W можно вычислить как вектор, минимизирующий функционал [182]:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \frac{\alpha_i}{\alpha_j})^2 \to min. \tag{2.13}$$

Легко заметить, что при этом искомые значения $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ являются решением оптимизационной задачи:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\alpha_j - \alpha_i)^2 \to \min; \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n. \tag{2.14}$$

Эффективным методом решения задачи минимизации функции многих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при наличии ограничений, заданных в форме равенств $g_i(x) = 0, i = 1,...,k$, является широко распространенный метод неопределенных множителей Лагранжа [112]. Для его использования обычно строится функция Лагранжа $n+k$ переменных:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, g_i(x), \qquad (2.15)$$

где $\lambda_i, i = 1,\dots,k$ - неопределенные множители.

В итоге исходная задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной минимизации функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0,\ j = 1,\dots,n; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_k(x) = 0,\ i = 1,\dots,k. \qquad (2.16)$$

Соотношения (2.16) образуют систему $n + k$ уравнений с $n + k$ неизвестными $x_1,..,x_n$, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$.

Для задачи (2.14) в соответствии с (2.15) функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \alpha_j - \alpha_i)^2 + \lambda(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - n). \qquad (2.17)$$

Необходимые условия оптимальности (2.16) для функции Лагранжа (2.17) прнимают вид:

$$\frac{dL}{d\alpha_i} = 0; \qquad \frac{dL}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - n = 0. \qquad (2.18)$$

Выписывая соотношения (2.18) в явном виде, получим систему n+1 уравнений:

$$
\begin{cases}
(a_{21}^2+a_{31}^2+...+a_{n1}^2+(n-1))\alpha_1-(a_{21}+a_{12})\alpha_2-(a_{31}+a_{13})\alpha_3-...-(a_{n1}+a_{1n})\alpha_n+\lambda=0,\\
-(a_{12}+a_{21})\alpha_1+(a_{12}^2+a_{32}^2+...+a_{n2}^2+(n-1)\alpha_2-(a_{32}+a_{23})\alpha_3-...-(a_{n2}+a_{2n})\alpha_n+\lambda=0,\\
........\\
........\\
-(a_{1n}+a_{n1})\alpha_1-(a_{2n}+a_{n2})\alpha_2-...-(a_{(n-1)n}+a_{n(n-1)})\alpha_{n-1}+(a_{1n}^2+a_{2n}^2+...+a_{(n-1)n}^2+\\
+(n-1))\alpha_n+\lambda=0,\\
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n=n.
\end{cases}
$$

Решением этой смстемы являются искомые коэффициенты относительной важности частных критериев – ранги α_i и множитель Лагранжа λ. Численное решение полученной системы линейных алгебраических уравнений можно найти любым методом, например, методом Гаусса.

Широкое распространение для отыскания рангов критериев на основе матрицы парных сравнений получил приближенный метод, предложенный Т. Саати [287]. Этот подход заключается в отыскании приближенных значений вектора рангов, как среднегеометрических величин каждой строки матрицы парных сравнений. Полученные таким образом среднегеометрические значения собственного вектора нормализуются делением на сумму средних геометрических:

$$
\alpha_i' = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}\,, \qquad \alpha_i = \alpha_i' \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \tag{2.19}
$$

Приближенный метод Т. Саати вследствие своей простоты получил широкое распространение. Проведем сравнение результатов его использования с результатами ранжирования критериев на основе описанной выше методики решения задачи оптимизации (2.14).

Сопоставление двух подходов выполним на основе использования классического примера, взятого из [116]. Предположим, что для общей оценки качества дома перед его