ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A \setminus B$ — теоретико-множественная разность множеств A и B

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B

R^m — евклидово пространство m-мерных векторов с вещественными компонентами

$0_m = (0, 0, ..., 0) \in R^m$ — начало координат (нуль) пространства R^m

R_+^m — неотрицательный ортант пространства R^m (т. е. множество всех векторов с неотрицательными компонентами без начала координат)

R_+ — множество положительных вещественных чисел

N^m — множество всех векторов пространства R^m, у которых имеется по крайней мере одна положительная и хотя бы одна отрицательная компоненты

$|A|$ — число элементов конечного множества A

$\sup Z$ — точная верхняя грань числового множества Z

$\inf Z$ — точная нижняя грань числового множества Z

$[z]$ — целая часть числа z

$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ — скалярное произведение векторов $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2}$

$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a_i > b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$

$a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$

$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq b$ и $a \neq b$

$\mathrm{cone}\,\{a^1, a^2, ..., a^k\}$ — выпуклый конус, порожденный векторами $a^1, a^2, ..., a^k$ (т. е. множество всех линейных неотрицательных комбинаций данных векторов)

m — число критериев

$I = \{1, 2, ..., m\}$ — множество номеров критериев

X — множество возможных решений

$f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ — векторный критерий

$Y = f(X)$ — множество возможных векторов (оценок)

$\succ_X$ — отношение предпочтения ЛПР, заданное на множестве X

$\succ_Y$ — отношение предпочтения ЛПР, индуцированное отношением $\succ_X$ и заданное на множестве Y

$\succ$ — продолжение отношения $\succ_Y$ на все пространство R^m

Sel X — множество выбираемых решений

Sel Y — множество выбираемых векторов (выбираемых оценок)

Ndom X — множество недоминируемых решений

Ndom Y — множество недоминируемых векторов (недоминируемых оценок)

$P_f(X)$ — множество парето-оптимальных решений

$P(Y)$ — множество парето-оптимальных векторов (парето-оптимальных оценок)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Моей жене Наталии Волковой

И высочайший гений не прибавит
Единой мысли к тем, что мрамор сам
Таит в избытке, — и лишь это нам
Рука, послушная рассудку, явит...

Микеланджело Буонарроти
(пер. А. Эфроса)

Практически любой вид человеческой деятельности связан с ситуациями, когда имеется несколько возможностей и человек волен из этих возможностей выбрать любую, наиболее подходящую ему.

Задачи наилучшего выбора изучает теория принятия решений. С ее помощью можно научиться осуществлять выбор более обоснованно, эффективно используя имеющуюся в наличии информацию о предпочтениях. Эта теория помогает избежать принятия заведомо негодных решений и учесть возможные отрицательные последствия непродуманного выбора.

Чрезвычайно широкий и крайне важный с практической точки зрения класс задач выбора составляют многокритериальные задачи, в которых качество принимаемого решения оценивается по нескольким критериям одновременно. Успешное решение многокритериальных задач невозможно без использования различного рода сведений о предпочтениях лица, принимающего решение. При этом одним из самых главных источников таких сведений является информация об относительной важности критериев. Но прежде чем учиться выявлять и использовать эту информацию, необходимо выяснить, что она собой представляет.

Какой смысл содержит высказывание о том, что один критерий (или одна группа критериев) важнее другого критерия (другой группы критериев)? Как имеющуюся в распоряжении информацию об относительной важности критериев можно использовать в процессе принятия решений? Существуют ли и если существуют, то каковы принципиальные границы использования произвольного набора подобного рода информации при решении вопросов выбора решений?

Обсуждению и решению этих и близких к ним вопросов посвящена эта книга. По существу, она представляет собой систематическое введение в теорию относительной важности критериев, развиваемую автором на протяжении двух десятков лет. В книге используется аксиоматический метод изложения, когда заранее формулируется ряд требований (аксиом), предъявляемых к классу рассматриваемых задач, строго определяются все ключевые понятия и результаты формулируются в виде теорем, доказываемых с применением соответствующих математических средств.

Избрав строгую форму изложения, автор стремился не потерять связи теории с практикой и использовал все доступные ему средства для неформального обсуждения и наглядной иллюстрации вводимых понятий и полученных результатов.

Предлагаемая книга, для чтения которой вполне достаточно владения курсом математики обычного технического вуза, рассчитана, прежде всего, на специалистов в области принятия решений, поскольку в ней впервые в мировой монографической литературе изложен известный принцип Эджворта–Парето, а также абсолютно новый подход к решению задач многокритериального выбора, основанный на точном введении и строгом учете количественной информации об относительной важности критериев. Несомненно, она будет полезна всем тем, кто по роду своей деятельности сталкивается с необходимостью решения многокритериальных задач — инженерам-разработчикам, конструкторам, проектировщикам, экономистам-аналитикам и т. п. Кроме того, данная книга может быть успешно использована студентами старших курсов и аспирантами математических, экономических, а также технических специальностей вузов.

Предусмотрено несколько вариантов прочтения книги. Первый вариант — полный, с изучением доказательств и деталей. Второй — когда можно пропускать все встречающиеся в тексте математические доказательства. Наконец, согласно третьему варианту, читатель, не желающий вникать в математические тонкости, и которому нужно лишь получить общее представление о предлагаемом подходе, достаточное для его применения, может после поверхностного просмотра первой главы сразу переходить к последней главе, где в доступной форме представлены основные идеи и результаты предлагаемого подхода.

Для формул, рисунков и утверждений принята двойная нумерация, причем первый номер означает номер главы.

Символом ⋏ отмечается начало доказательства утверждения, тогда как знак ⋎ означает его конец.

Автор выражает благодарность Ирине Толстых, которая, прочтя рукопись, своими многочисленными замечаниями способствовала заметному улучшению качества изложения. Кроме того, она внесла определенный вклад и в содержательную часть книги (в частности, ею, например, была получена теорема 4.10).

Особая признательность — Российскому фонду фундаментальных исследований, который, начиная с 1998 года, осуществляет финансовую поддержку исследований автора в данном направлении.

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим инструментом решения многокритериальных задач является принцип Эджворта–Парето (принцип Парето), который стали успешно применять еще в XIX веке. Однако до самого недавнего времени этот принцип не был четко сформулирован, и многие из тех специалистов и исследователей, которые его применяли и применяют, были (и до сих пор остаются) абсолютно уверены в том, что этот принцип можно использовать при решении любых многокритериальных задач. Оказывается, что это не так! Принцип Эджворта–Парето имеет вполне определенные границы применимости и его использование при решении некоторых задач рискованно или же вообще не допустимо.

В данной книге впервые принцип Эджворта–Парето получает определенную математическую формулировку, и что самое главное — четко очерчивается класс задач многокритериального выбора, в которых применение этого принципа является обоснованным. За пределами указанного класса на его основе можно получить далеко не лучшие результаты.

Для того чтобы сформулировать принцип Эджворта–Парето, постановку обычной многокритериальной задачи, включающей множество возможных решений и набор критериев (векторный критерий), необходимо дополнить бинарным отношением предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Расширенная подобным образом многокритериальная задача названа *задачей многокритериального выбора*. Ее решение заключается в отыскании так называемого множества выбираемых решений, которое может состоять из одного элемента, но, в общем случае, оно является подмножеством множества возможных решений.

Итак, постановка всякой задачи многокритериального выбора включает три объекта — множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения ЛПР. Решить эту задачу — означает, на основе векторного критерия и имеющихся сведений об отношении предпочтения ЛПР, найти множество выбираемых решений.

В рамках рассматриваемой модели многокритериального выбора принцип Эджворта–Парето может быть сформулирован в виде утверждения о том, что множество выбираемых решений содержится в множестве Парето. Иначе говоря, каждое выбираемое решение является парето-оптимальным. Математический эквивалент этому высказыванию — включение одного множества в другое. Для того чтобы доказать это включение, следует определенным образом ограничить весь класс задач многокритериального выбора, наложив специальные требования на указанные выше три объекта. Эти требования (аксиомы) относятся главным образом к отношению предпочтения ЛПР и могут быть интерпретированы как «рациональное» (или «разумное», «последовательное») поведение в процессе выбора. Кроме того, среди этих требований имеется условие согласованности отношения предпочтения ЛПР и векторного критерия, поскольку каждый из этих двух объектов выражает определенные устремления (цели) одного и того же ЛПР, и потому они обязаны быть каким-то образом связаны друг с другом.

Формулировка и доказательство принципа Эджворта–Парето вместе со всеми необходимыми начальными понятиями и сведениями из теории принятия решений даны в первой главе книги. Материал этой главы служит фундаментом для всего последующего изложения.

Применение принципа Эджворта–Парето позволяет из множества всех возможных исключить заведомо неприемлемые решения, т. е. те, которые никогда не могут оказаться выбранными, если выбор осуществляется достаточно «разумно». После такого исключения остается множество, которое называют *множеством Парето* или *областью компромиссов*. Оно, как правило, является достаточно широким, и в процессе принятия решений неизбежно встает вопрос о том, какое именно возможное решение выбрать среди парето-оптимальных? Выражаясь иначе, какие из парето-оптимальных решений следует удалить для того, чтобы произвести дальнейшее сужение области компромиссов и, тем самым, получить более точное представление об искомом множестве выбираемых решений? Этот вопрос при решении практических многокритериальных задач является наиболее трудным и наименее проработанным к настоящему времени.

В общем случае, располагая лишь множеством возможных решений и набором критериев (т. е. оставаясь в рамках модели многокритериальной задачи), обоснованного ответа на поставленный вопрос не сможет дать ни один специалист по принятию решений, поскольку осуществление компромисса (выбора того или иного парето-оптимального решения) возможно лишь при расширении модели выбора за счет привлечения дополнительной информации об этом отношении предпочтения ЛПР. В зависимости от типа, характера и объема имеющейся в наличии дополнительной информации используют тот или иной метод принятия решений (или же их комбинацию). К настоящему времени таких методов, схем и подходов поиска компромисса насчитывается не один десяток. Следует, однако, отметить, что они, как правило, имеют слабое теоретическое обоснование и носят, в основном, эвристический характер. А самое главное — авторы предложенных методов не могут четко описать класс тех задач выбора, для решения которых применение данного метода гарантированно приводит к действительно наилучшему решению.

Основной тип дополнительной информации, с которым чаще всего приходится иметь дело при решении прикладных многокритериальных задач, — это информация об относительной важности критериев. Поэтому многие из существующих подходов к решению многокритериальных задач используют именно эту информацию, чаще всего в виде так называемых коэффициентов относительной важности критериев. Формальные определения этих коэффициентов у авторов таких подходов отсутствуют. Обычно считается, что эти коэффициенты должны назначаться экспертами. Но разве эксперт может оценить все возможные последствия своего назначения, проследить и просчитать влияние каждого из оцениваемых коэффициентов на механизм выбора, соответствующий тому или иному методу? Как правило, эксперты вообще не имеют никакого представления о том методе, в котором будут использоваться назначенные ими коэффициенты. Таким образом, одни специалисты назначают коэффициенты относительной важности, затем другие специалисты применяют тот или иной метод, а ЛПР, несущее ответственность за принятое решение, является некоей третьей стороной, не разбирающейся ни в коэффициентах, ни в методах принятия решений. В итоге — низкое качество принимаемых решений со всеми вытекающими их этого последствиями.

Отсюда следует, что прежде чем строить и предлагать какой-либо метод принятия решений, использующий понятие относительной важности критериев, необходимо договориться о том, какой именно смысл вкладывать в это понятие. Другими словами, сначала нужно дать соответствующее определение, а затем строить метод. Причем это определение должно быть доступно для понимания не только специалистам, но и самому ЛПР, потому что, не разобравшись в определении относительной важности критериев, ЛПР не сможет назначить те коэффициенты относительной важности, которые наиболее точно выражают его предпочтения.

В этой книге принято последовательное изложение и основывается оно на формальном определении понятия количественной информации об относительной важности критериев. В его основе — математическое определение высказывания «один критерий важнее другого с определенным коэффициентом относительной важности». Примечательно, что предлагаемое определение имеет настолько простую логику, что вполне доступно для понимания не только специалистам, но и лицам, ответственным за принятие решений и не располагающим особыми знаниями в области математики. Последнее обстоятельство немаловажно, если учесть, что сведения об относительной важности критериев поступают чаще всего именно от этих лиц и чем лучше они понимают смысл относительной важности, тем более точную информацию о важности критериев они представят специалистам.

Располагая определением относительной важности критериев и изучив простейшие его свойства, можно приступить к решению главного вопроса, ради которого это понятие вводилось: каким образом учитывать информацию об относительной важности критериев в форме сообщения о том, что один критерий важнее другого? Оказывается (это демонстрируется во второй главе книги), если несколько ограничить класс задач многокритериального выбора, для которых справедлив принцип Эджворта–Парето, добавлением еще одного достаточно разумного требования (аксиомы) к отношению предпочтения ЛПР, то учет этой информации можно производить очень просто — нужно лишь в соответствии с выведенной несложной формулой пересчитать менее важный критерий, оставив все остальные критерии и множество возможных решений прежними. В результате получится новая многокритериальная задача, множество Парето которой будет у́же множества Парето исходной задачи, причем ни одно выбираемое решение исходной задачи не окажется за пределами нового множества Парето. Иначе говоря, при переходе от старого множества Парето к новому произойдет сужение области компромиссов и при этом не будет потеряно ни одно выбираемое (потенциально-оптимальное) решение. Область поиска выбираемых решений после указанного учета информации об относительной важности критериев станет более узкой и, тем самым, задача выбора упростится.

В третьей главе вводится общее определение относительной важности для двух групп критериев. Основной результат главы — теорема, показывающая, каким образом для сужения области компромиссов можно использовать информацию о том, что одна группа критериев важнее другой группы. Здесь принцип учета информации точно такой же, как и в случае, когда информация о важности касается двух критериев, — т. е. строится новый векторный критерий, множество Парето относительно которого является более узким, чем множество Парето исходной задачи, причем все выбираемые решения заведомо содержатся в новом множестве Парето. В новом векторном критерии по определенным несложным формулам пересчитаны все критерии менее важной группы. Любопытно, что этот новый векторный критерий кроме замененных критериев менее важной группы может содержать и некоторые дополнительные критерии. В таких случаях число критериев в новой многокритериальной задаче оказывается больше, чем в исходной задаче.

В четвертой главе выясняется, каким образом производить учет не одного сообщения об относительной важности критериев, а целого набора такого рода сообщений. Сначала подробно разбирается случай двух сообщений. В частности, выясняется, что при определенных значениях числовых коэффициентов относительной важности вполне возможен случай, когда один критерий важнее другого, а тот, в свою очередь, важнее первого. В этой же главе изучается вопрос непротиворечивости произвольного набора информации об относительной важности критериев. Приведены три утверждения, с помощью которых всегда можно проверить является ли определенный набор информации противоречивым или нет. Далее исследуется вопрос учета произвольного набора количественной информации об относительной важности критериев и предлагается отличный от упомянутого ранее так называемый алгоритмический подход. Для случая конечного множества возможных решений формулируется алгоритм этого подхода, использующий симплекс-метод решения канонической задачи линейного программирования.

Пятая глава содержит исследование вопроса полноты набора количественной информации об относительной важности критериев. Здесь выясняется, что, используя лишь конечный набор информации об относительной важности критериев, можно получить в определенном смысле сколь угодно точное приближение к неизвестному множеству недоминируемых решений в виде множества Парето некоторой новой многокритериальной задачи. Полученные результаты свидетельствуют о важной роли, которую играет информация об относительной важности критериев в вопросах принятия решений в многокритериальной среде. Эта информация полна в том смысле, что для достаточно широкого класса задач многокритериального выбора с конечным множеством возможных решений одной такой информации достаточно для того, чтобы получить точное представление о неизвестном множестве недоминируемых решений.

Результаты, полученные в предыдущих главах, аккумулируются в последней, шестой главе, где в доступной форме описывается общий *метод последовательного сужения множества Парето* на основе количественной информации об относительной важности критериев. Изложение начинается с рассмотрения психологических аспектов принятия решений человеком. Далее формулируется и обсуждается сам метод. Принцип его работы наглядно можно пояснить при помощи сравнения с творческим приемом Микеланджело. Как известно, когда великого скульптора спросили, как ему удается из бесформенной каменной глыбы создавать шедевры, он ответил: «Нужно отсечь от камня все лишнее». Та же самая идея лежит в основе метода последовательного сужения области компромиссов — из исходного множества возможных решений на основе информации об относительной важности критериев последовательно удаляются все парето-оптимальные решения, которые не могут быть выбранными согласно имеющейся информации об отношении предпочтения. Удаление осуществляется до тех пор, пока не будет получено множество решений, удовлетворяющее ЛПР.

Одно их главных достоинств метода последовательного сужения области компромиссов заключается в том, что удается аксиоматически очертить класс задач многокритериального выбора, для которых в результате применение данного метода на каждом шаге сужения заведомо не будет удалено ни одно потенциально-оптимальное решение. Тем самым, набор аксиом четко указывает возможные границы его применимости.

Кроме того, следует отметить, что данный метод можно использовать в комбинации с некоторыми другими известными приемами решения многокритериальных задач. Так например, в конце шестой главы обсуждается возможность комбинирования метода последовательного сужения области компромиссов вместе с методом целевого программирования и методом достижимых целей.

В заключение дается краткая справка о двух выдающихся экономистах — Френсисе Эджворте и Вильфредо Парето, без блестящих идей которых эта книга никогда бы не появилась.

Глава 1

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

В этой главе вводятся и обсуждаются базисные понятия, связанные с принятием решений в многокритериальной среде: множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения лица, принимающего решение. Дается постановка задачи многокритериального выбора. Кроме того, здесь определяются такие принципиально важные для дальнейшего изложения понятия, как множество недоминируемых решений и множество Парето, без которых невозможна формулировка и строгое обоснование принципа Эджворта–Парето.

Именно формулировка и обоснование этого принципа составляет центральный результат первой главы. Устанавливается, что принцип Эджворта–Парето следует применять лишь для решения задач многокритериального выбора из некоторого, хотя и достаточно широкого класса. Этот класс составляют такие задачи, которые удовлетворяют определенным трем требованиям (аксиомам), выражающим «рациональность» поведения лица, принимающего решение. За пределами указанного класса использование принципа Парето сопряжено с риском и может привести к далеко не лучшим результатам.

1.1. Задача многокритериального выбора

1. Множество возможных и множество выбираемых решений. Человек в своей деятельности постоянно сталкивается с ситуациями, в которых ему приходится осуществлять выбор. Например, зайдя в магазин, мы выбираем тот или иной товар; чтобы добраться до нужного места в городе или стране, мы выбираем маршрут и соответствующий вид транспорта. Выпускник школы выбирает вуз, в котором он собирается учиться, или же место работы, если он намерен работать. Как правило, каждый мужчина и каждая женщина в определенные моменты своей жизни выбирают представителя противоположного пола для образования семьи. Руководители различных уровней и рангов постоянно вынуждены заниматься формированием персонала возглавляемых ими подразделений, выбирать ту или иную стратегическую линию поведения, принимать конкретные хозяйственные и экономические решения. Специалисты в самых различных областях науки и техники, занимающиеся разработкой всевозможных устройств и приспособлений, проектированием тех или иных сооружений, конструированием новых моделей и типов автомобилей, самолетов и т. п., так же всякий раз стремятся выбрать наилучшее инженерное, конструкторское или проектное решение. Работники банков выбирают объекты для инвестирования, экономисты предприятий и фирм планируют оптимальную экономическую программу и т. д. и т. п.

Приведенный список практических задач выбора можно было бы продолжать и дальше. Ограничимся сказанным и выявим общие элементы, присущие всякой задаче выбора.

Прежде всего, должен быть задан набор решений (вариантов), из которого следует осуществлять выбор. Обозначим его X и будем называть *множеством возможных решений*. Минимальное число элементов этого множества — два (для того, чтобы действительно был выбор). Ограничений сверху на количество возможных решений нет, оно может быть как конечным, так и бесконечным. При этом природа самих решений не играет никакой роли; это могут быть проектные решения, варианты поведения, политические или экономические стратегии, сценарии поведения, краткосрочные или долгосрочные планы и т. п.

Собственно выбор решения состоит в указании среди всех возможных такого решения, которое объявляется выбранным. Следует заметить, что нередко происходит выбор не одного, а целого набора решений, являющегося определенным подмножеством множества возможных решений X. Простейший тому пример: требуется выбрать несколько человек, претендующих на замещение определенного числа вакантных должностей.

Обозначим *множество выбираемых решений* $\mathrm{Sel}\, X$. Оно и представляет собой решение задачи выбора. Таким образом, решить задачу выбора, значит, найти множество $\mathrm{Sel}\, X$, $\mathrm{Sel}\, X \subset X$. Когда множество выбираемых решений не содержит ни одного элемента (т. е. пусто), собственно выбора не происходит, так как ни одно решение не оказывается выбранным. Подобная ситуация не представляет практического интереса, поэтому множество $\mathrm{Sel}\, X$ должно содержать, по крайней мере, один элемент. В некоторых задачах оно может быть бесконечным.

2. Лицо, принимающее решение. Процесс выбора невозможен без наличия того, кто осуществляет этот выбор, преследуя свои цели. Человека (или целый коллектив, подчиненный достижению определенной цели), который производит выбор и несет полную ответственность за его последствия, называют *лицом, принимающим решение* (сокращенно: ЛПР).

Сама природа ЛПР при решении задачи выбора, как правило, не имеет особого значения. Например, если в качестве ЛПР выступает некоторый человек, то, как всякий человек, он представляет собой сложное биологическое и социальное существо. Это существо имеет тело определенного строения, и в этом теле протекают различные, возможно, до конца не изученные, биохимические, психофизические, физиологические и психические процессы. Однако для принятия, например, решения о выборе той или иной экономической стратегии фирмы совсем не обязательно учитывать строение черепа или состояние позвоночника этого человека. В процессе выбора важно, насколько богатым опытом в области экономики обладает этот человек, каким он представляет будущее своей фирмы, какие интересы, связанные с фирмой, он старается удовлетворить и т. п. Таким образом, говоря о ЛПР в контексте задачи выбора, мы будем иметь в виду не его целиком, а лишь ту его «часть», те его характеристики, которые так или иначе связаны с процессом выбора.

Если различные индивиды в одних и тех же ситуациях выбора ведут себя одинаковым образом, то с точки зрения теории принятия решений они ничем не отличаются друг от друга, т. е. представляют собой одно и то же ЛПР.

3. Векторный критерий. Обычно считается, что выбранным (наилучшим) является такое возможное решение, которое наиболее полно удовлетворяет желаниям, интересам или целям данного ЛПР. Стремление ЛПР достичь определенной цели нередко в математических терминах удается выразить в виде максимизации (или минимизации) некоторой числовой функции, заданной на множестве X. Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу с несколькими функциями. Так будет, например, когда исследуемое явление, объект или процесс рассматриваются с различных точек зрения и для формализации каждой точки зрения используется соответствующая функция. Если явление изучается в динамике, поэтапно и для оценки каждого этапа приходится вводить отдельную функцию, — в этом случае также приходится учитывать несколько функциональных показателей.

Данная книга посвящена рассмотрению ситуации, когда имеется сразу несколько числовых функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, $m \geqq 2$, определенных на множестве возможных решений X. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции называют *критериями оптимальности*, *критериями эффективности*, *целевыми функциями*, *показателями* или *критериями качества*.

Проиллюстрируем введенные термины, рассмотрев *задачу выбора наилучшего проектного решения*. В этой задаче множество X состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить стоимость реализации проекта f_1 и величина прибыли f_2, которую обеспечит данное проектное решение (т. е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указанным следует добавить еще один — третий критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия, и т. д. Что касается ЛПР, то в данной задаче таковым является глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие, при условии, что это предприятие является государственным. Если же предприятие — частное, то в качестве ЛПР выступает глава соответствующей фирмы.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ образуют *векторный критерий*

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m), \tag{1.1}$$

который принимает значения в пространстве m-мерных векторов R^m. Это пространство называют *критериальным пространством* или *пространством оценок*, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия f при определенном $x \in X$ именуют *векторной оценкой* возможного решения x. Все возможные векторные оценки образуют *множество возможных оценок* (*возможных векторов*)

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}.$$

Наряду с множеством выбираемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество выбираемых векторов* (*выбираемых оценок*)

$$\operatorname{Sel} Y = f(\operatorname{Sel} X) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in \operatorname{Sel} X\},$$

представляющее собой некоторое подмножество критериального пространства R^m.

4. Многокритериальная задача. Задачу выбора, содержащую множество возможных решений X и векторный критерий f, обычно называют *многокритериальной задачей*. Изучению свойств таких задач посвящена многочисленная литература (см., например, [3, 5, 17, 26]).

Как было указано выше, в рамках рассматриваемой модели выбора решений множество возможных решений X может иметь произвольную природу. В частности, если решениями являются n-мерные векторы, то $X \subset R^n$. Например, в *задачах математического программирования* X представляет собой множество решений определенной системы неравенств:

$$X = \{x \in R^n \mid g_s(x) \geqq 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — некоторые числовые функции, определенные на пространстве R^n.

Необходимо отметить, что формирование математической модели принятия решений (т. е. построение множества X и векторного критерия f) нередко представляет собой сложный процесс, в котором тесно взаимодействуют специалисты двух сторон. А именно, представители конкретной области знаний, к которой относится исследуемая проблема, и специалисты по принятию решений (математики). С одной стороны, следует учесть все важнейшие черты и детали реальной задачи, а с другой — построенная модель не должна оказаться чрезмерно сложной для того, чтобы для ее исследования и решения можно было успешно применить разработанный к настоящему времени математический аппарат. Именно поэтому этап построения математической модели в значительной степени зависит от опыта, интуиции и искусства исследователей обеих сторон. Его невозможно отождествить с простым формальным применением уже известных, хорошо описанных алгоритмов.

Здесь следует еще добавить, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) тесно связана с конкретным ЛПР. Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия дело не обходится без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит для выражения целей ЛПР. При этом ясно, что построить модель в точности соответствующую всем реальным обстоятельствам невозможно. Модель всегда является упрощением действительности. Важно добиться, чтобы она содержала те черты и детали, которые в наибольшей степени влияют на окончательный выбор наилучшего решения.

Предположим, что указанные две компоненты задачи выбора сформированы, четко описаны и зафиксированы. Опыт показывает, что в терминах критерия f чаще всего не удается выразить всю гамму «пристрастий», «вкусов» и предпочтений данного ЛПР. С помощью векторного критерия лишь намечаются определенные локальные цели, которые нередко оказываются взаимно противоречивыми. Эти цели одновременно, как правило, достигнуты быть не могут, и поэтому требуется определенная дополнительная информация для осуществления компромисса. Иначе говоря, если ограничиться лишь указанными выше двумя компонентами — множеством возможных решений и векторным критерием — то задача выбора оказывается в некотором смысле «недоопределенной». Эта «недоопределенность» сказывается затем в слабой логической обоснованности выбора наилучшего решения на основе векторного критерия. Многочисленные процедуры выбора (методы построения множества $\mathrm{Sel}\, X$), предлагаемые в литературе по принятию решений (см., например, [5, 10, 29, 35, 42, 43]) и основанные лишь на знании векторного критерия обычно содержат элементы эвристики и не имеют четкого логического обоснования.

Для того чтобы осуществить более обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения.

5. Отношение предпочтения. Рассмотрим два возможных решения x' и x''. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений, оно выбирает (отдает предпочтение) первому из них. В этом случае пишут

$$x' \succ_X x''.$$

Знак $\succ_X$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР и называется *отношением строгого предпочтения* или, короче, *отношением предпочтения*.

Следует отметить, что не всякие два возможных решения x' и x'' связаны соотношением $x' \succ_X x''$, либо соотношением $x'' \succ_X x'$. Иначе говоря, не из любой пары решений ЛПР может сделать окончательный выбор. Вполне могут существовать такие пары, что ЛПР не в состоянии отдать предпочтение какому-то одному решению этой пары, даже если это пара различных решений. Описанная ситуация вполне соответствует реальному положению вещей. Более того, если бы от ЛПР требовалась способность в произвольной паре возможных решений уметь определять решение, более предпочтительное по сравнению с другим, то в таком случае теория, построенная на указанном «жестком» требовании к ЛПР, не представляла бы практического интереса. Подобные «всемогущие» ЛПР в жизни встречаются крайне редко!

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений, естественным образом

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \quad \text{для } x',\ x'' \in X$$

индуцирует (порождает) отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов Y. Тем самым, вектор $y' = f(x')$ является предпочтительнее вектора $y'' = f(x'')$ (т. е. $y' \succ_Y y''$) тогда и только тогда, когда решение x' предпочтительнее решения x'' (т. е. $x' \succ_X x''$).

6. Задача многокритериального выбора. Теперь можно сформулировать все основные элементы задачи многокритериального выбора. Итак, постановка всякой *задачи многокритериального выбора* включает

– множество возможных решений X,

– векторный критерий f вида (1.1),

– отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений.

Само ЛПР в постановку задачи многокритериального выбора не включено. В этом нет необходимости. Подразумевается, что все его устремления, вкусы, пристрастия и предпочтения, оказывающие влияние на процесс выбора, «материализованы» в терминах векторного критерия и отношения предпочтения.

Следует, однако, заметить, что приведенный список основных компонентов задачи многокритериального выбора в дальнейшем при необходимости может быть расширен за счет добавления каких-то новых объектов, с помощью которых дополнительно удастся учесть интересы, мотивацию и пристрастия ЛПР.

Приведенная выше задача многокритериального выбора сформулирована в терминах решений. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта:

– множество возможных векторов Y, $Y \subset R^m$,

– отношение предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов.

1.2. Бинарные отношения

1. Определение бинарного отношения. Для описания и изучения введенного выше отношения предпочтения существует специальное математическое понятие — бинарное отношение. Настоящий раздел содержит вспомогательный математический аппарат, связанный с бинарными отношениями. Читатель, знакомый с бинарными отношениями, может бегло просмотреть его и переходить к следующему разделу.

Прежде всего, напомним понятие декартова произведения двух множеств. Пусть имеются два произвольных множества A и B. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество, обозначаемое $A \times B$ и определяемое равенством

$$A \times B = \{(a, b) \mid \text{при некоторых } a \in A,\ b \in B\}.$$

Иными словами, декартово произведение образуется из всех возможных пар элементов данных двух множеств, причем первым элементом пары является элемент первого множества, а вторым — элемент второго множества.

Например, декартово произведение двух конечных числовых множеств $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ содержит шесть элементов и имеет вид

$$A \times B = \{((1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (2, 4)\}.$$

Перейдем к определению бинарного отношения. *Бинарным отношением* $\Re$, заданным на множестве A, называется подмножество декартова произведения $A \times A$, т. е. $\Re \subset A \times A$. Другими словами, всякое множество пар, составленных из элементов множества A, образует некоторое бинарное отношение. В частности, самым «широким» бинарным отношением является множество $\Re = A \times A$, совпадающее с данным декартовым произведением.

Если имеет место включение $(a, b) \in \Re$, то обычно пишут $a \Re b$ и говорят, что *элемент a находится в отношении $\Re$ с элементом b.*

Заметим, что в общем случае из $a \Re b$ не следует выполнение соотношения $b \Re a$.

Приведем примеры некоторых бинарных отношений. Из курса арифметики известен целый ряд бинарных отношений, определенных на множестве вещественных чисел: $=$, $\geqq$, $\leqq$, $>$ и $<$. В теории множеств рассматривается бинарное отношение включения $\subset$, заданное на множестве всех подмножеств некоторого фиксированного множества.

Введем следующие активно используемые в дальнейшем изложении бинарные отношения для произвольных векторов $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ пространства R^m:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a_i > b_i,\ i = 1, 2, ..., m;$$

$$a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i,\ \ i = 1, 2, ..., m;$$

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq b \quad \text{и} \quad a \neq b.$$

Выполнение последнего соотношения $a \geq b$ означает, что каждая компонента вектора a больше либо равна соответствующей компоненты вектора b, причем хотя бы одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

2. Типы бинарных отношений. В зависимости от свойств, которыми обладают бинарные отношения, производят их типизацию. Приведем определения некоторых распространенных типов бинарных отношений.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют

– *рефлексивным*, если соотношение $a \Re a$ имеет место для всех $a \in A$;

– *иррефлексивным*, если соотношение $a \Re a$ не выполняется ни для одного $a \in A$;

– *симметричным*, если всякий раз из выполнения соотношения $a \Re b$ для элементов $a, b \in A$ следует выполнение соотношения $b \Re a$;

– *асимметричным*, если из выполнения соотношения $a \Re b$ для элементов $a, b \in A$ всегда следует, что соотношение $b \Re a$ места не имеет;

– *антисимметричным*, если всякий раз из выполнения соотношений $a \Re b$, $b \Re a$ для элементов $a, b \in A$ вытекает равенство $a = b$;

– *транзитивным*, если для любой тройки элементов $a, b, c \in A$ из выполнения соотношений $a \Re b$, $b \Re c$ всегда следует справедливость соотношения $a \Re c$;

– *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для любых трех элементов $a, b, c \in A$ и произвольного положительного числа α из выполнения соотношения

$a \Re b$ всегда вытекает соотношение $(\alpha \cdot a + c) \Re (\alpha \cdot b + c)$ (здесь считается, что $A = R^m$);

– *полным*, если для любой пары элементов $a, b \in A$ выполняется соотношение $a \Re b$, или соотношение $b \Re a$, или оба эти соотношения одновременно;

– *частичным*, если это отношение не является полным.

Отношения равенства $=$ и нестрогого неравенства $\geqq$ дают примеры рефлексивных, а отношение строгого неравенства $>$ и отношение $\geq$ — иррефлексивных отношений на R^m. Отношения равенства и нестрогого неравенства являются симметричным и антисимметричными, а отношения $>$ и $\geq$ — асимметричны. Все отношения $=$, $\geq$, $>$, $\geqq$ транзитивны и инвариантны относительно линейного положительного преобразования. Отношения равенства и отношение строгого неравенства, очевидно, являются частичными. Отношение нестрогого неравенства $\geqq$, рассматриваемое на множестве чисел, является полным, потому, что для любых двух чисел a и b выполнено $a \geqq b$, либо $b \geqq a$, либо оба эти неравенства одновременно. Если же отношения нестрогого неравенства рассмотреть на множестве векторов R^m при $m > 1$, то оно окажется лишь частичным.

Нетрудно проверить, что *всякое асимметричное отношение иррефлексивно.*

⮝ Действительно, если, напротив, некоторое асимметричное отношение $\Re$ не является иррефлексивным, то для некоторого $a \in A$ выполнено соотношение $a \Re a$. Но благодаря асимметричности данного отношения последнее соотношение не должно иметь места. Полученное противоречие устанавливает иррефлексивность $\Re$. ⮟

3. Отношения порядка. Комбинации некоторых типов бинарных отношений играют важную роль в последующем изложении. Введем соответствующие определения.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют

– *порядком* (*отношением порядка*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

– *строгим порядком* (*отношением строгого порядка*), если оно является иррефлексивным и транзитивным;

– *линейным порядком*, если оно является полным порядком.

Из определений следует, что строгий порядок и линейный порядок являются представителями отношений порядка.

Отношение нестрогого неравенства $\geqq$ на множестве вещественных чисел представляет собой линейный порядок, тогда как на множестве векторов это отношение будет лишь частичным.

Отношение $\geq$, рассматриваемое на множестве векторов, является строгим частичным порядком.

Лемма 1.1. *Всякое отношение строгого порядка является асимметричным.*

⮝ Предположим противное: некоторое отношение $\Re$ иррефлексивно и транзитивно, но не является асимметричным. Это означает, что найдется пара элементов $a, b \in A$, для которой выполнены соотношения $a \Re b$ и $b \Re a$ одновременно. На основании транзитивности отсюда следует $a \Re a$, что несовместимо с условием иррефлексивности отношения $\Re$. ⮟

Еще один пример строгого порядка, заданного на пространстве R^m, дает лексикографическое отношение порядка, задаваемое следующим образом. Вектор $y' = (y'_1, y'_2, ..., y'_m)$ *лексикографически больше* вектора $y'' = (y''_1, y''_2, ..., y''_m)$ тогда и только тогда, когда выполнено какое-либо одно из следующих условий

1) $y'_1 > y''_1$;

2) $y'_1 = y''_1, \ y'_2 > y''_2$;

3) $y'_1 = y''_1, \ y'_2 = y''_2, \ y'_3 > y''_3$;

....

m) $y'_i = y''_i, \ i = 1, 2, ..., m-1; \ y'_m > y''_m$.

Нетрудно понять, что любые два вектора пространства R^m либо равны друг другу, либо один из них лексикографически больше другого вектора.

1.3. Множество недоминируемых решений

1. Требование, предъявляемое к отношению предпочтения. Рассмотрим задачу многокритериального выбора, включающую множество возможных решений X, векторный критерий f и отношение предпочтения $\succ_X$. Поскольку отношение предпочтения задается на парах возможных решений, то, как нетрудно понять, оно представляет собой некоторое бинарное отношение.

Предположим, что ЛПР в процессе выбора ведет себя достаточно «разумно» и обсудим требования, которым в таком случае должно удовлетворять его бинарное отношение предпочтения.

Прежде всего, следует напомнить, что отношение предпочтения $\succ_X$ по своей сути является отношением строгого предпочтения в том смысле, что выполнение соотношения $x \succ_X x$ невозможно ни для какого решения $x \in X$, поскольку ни одно решение не может быть строго предпочтительнее самого себя. В терминах бинарных отношений, рассмотренных в предыдущем разделе, это означает, что отношение предпочтения должно быть иррефлексивным. Тем самым, далее при изучении задач выбора будут рассматриваться только такие отношения предпочтения, на которые наложено требование иррефлексивности.

Рассмотрим ситуацию, когда одно решение предпочтительнее второго, а оно, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего решения. В таком положении здравомыслящий человек при сравнении первого и третьего решения всегда выберет первое. Здесь происходит примерно то же самое, что и при сравнении чисел с помощью отношения строгого неравенства. Например, если $5 > 3$ и $3 > 1$, то непременно выполнено $5 > 1$. В терминах возможных решений это свойство может быть сформулировано следующим образом: для любой тройки возможных решений x', x'', x''' из выполнения соотношений $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'''$ обязательно следует справедливость соотношения $x' \succ_X x'''$. На языке бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения, используемое в задачах многокритериального выбора, должно быть подчинено требованию транзитивности.

В соответствии с приведенными рассуждениями сформулируем условие (требование), которому должны удовлетворять все рассматриваемые в данной книге бинарные отношения предпочтения.

Отношение предпочтения $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, представляет собой строгий порядок, т. е. является иррефлексивным и транзитивным.

На основании леммы 1.1 отношение предпочтения, удовлетворяющее данному требованию, обязательно будет асимметричным.

Забегая вперед, отметим, что последующее принятие аксиомы 2 (см. разд. 1.4) автоматически влечет выполнение сформулированного выше требования.

2. Множество недоминируемых решений. Как указано в разд. 1.1, решение задачи многокритериального выбора заключается в отыскании множества выбираемых решений $\mathrm{Sel}\, X$. Выясним, каким образом сведения об отношении предпочтения могут быть использованы в процессе решения задачи многокритериального выбора.

Рассмотрим два произвольных возможных решения x' и x''. Для них имеет место один и только один случай из следующих трех:

– справедливо соотношение $x' \succ_X x''$, а соотношение $x'' \succ_X x'$ не выполняется;

– справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$, а соотношение $x' \succ_X x''$ не выполняется;

– не выполняется ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$.

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'$ выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения $\succ_X$.

В первом указанном выше случае, т. е. при выполнении соотношения $x' \succ_X x''$, говорят, что решение x' *доминирует* решение x'' (по отношению $\succ_X$). Во втором случае x'' *доминирует* x'. Если же реализуется третий случай, то говорят, что решения x' и x'' *не сравнимы* по отношению предпочтения.

Вернемся к задаче выбора. Пусть для некоторого возможного решения x'' найдется такое возможное решение x', что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$. По определению отношения предпочтения это означает, что из данной пары решений ЛПР выберет первое решение. Тогда второе решение x'' не может быть выбранным из данной пары x'' и x', так как это означало бы выполнение соотношения $x'' \succ_X x'$, противоречащее вместе с $x' \succ_X x''$ условию асимметричности отношения $\succ_X$. Сказанное в терминах множества выбираемых решений можно выразить в виде следующей эквивалентности

$$x' \succ x'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sel}\,\{x', x''\} = \{x'\}$$

для $x', x'' \in X$.

Если второе решение x'' не выбирается из пары в силу того, что для него в этой паре есть лучшее решение, то, рассматривая x'' в пределах всего множества возможных решений X, разумно предположить, что решение x'' в таком случае не может быть выбранным и из всего множества возможных решений, так как для него в X существует, по крайней мере, одно заведомо более предпочтительное решение x'.

Приведенные рассуждения показывают, что при выборе первого решения из пары x', x'' естественно считать, что второе решение не может оказаться выбранным и из всего множества возможных решений X. Тем самым, всюду далее будет предполагаться выполненным следующее требование, которое выразим в виде следующей аксиомы.

Аксиома 1 (исключение доминируемых решений). *Если для некоторой пары решений $x', x'' \in X$ имеет место соотношение* [1]) $x' \succ_X x''$, то $x'' \notin \mathrm{Sel}\, X$.

[1]) Можно показать (см.[22]), что *обратное условие Кондорсе* [1] влечет выполнение аксиомы 1, но не наоборот.

В аксиоме 1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_X$, которым руководствуется ЛПР в процессе принятия решений, но и множество Sel X. Это означает, что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений. А именно, любое множество выбираемых решений не должно содержать ни одного такого решения, для которого может найтись более предпочтительное решение. Более точно и полно этот факт будет выражен далее в лемме 1.2.

Нетрудно привести простой содержательный пример, в котором аксиома исключения не выполняется. Рассмотрим задачу выбора из трех возможных претендентов на два вакантных места. При этом считается, что оба вакантных места обязательно должны быть заполнены. Предположим, что при сравнении претендентов выяснилось, что первый является предпочтительнее второго и третьего, а второй предпочтительнее третьего. Поскольку согласно условию из трех кандидатов обязательно следует выбрать двоих, то, очевидно, ими окажутся первый и второй. Таким образом, второй претендент из пары первых двух не выбирается, тем не менее из всего множества трех возможных претендентов он оказывается выбранным. Следовательно, аксиома исключения доминируемых решений в этом примере нарушается.

В соответствии с аксиомой 1 любое доминируемое решение следует исключать из списка решений, претендующих на роль выбираемых. Исключение всех доминируемых решений приводит к множеству, которое играет важную роль в дальнейшем изложении.

Множество недоминируемых решений [1]) обозначается Ndom X и определяется равенством

$$\mathrm{Ndom}\, X = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } x \succ_X x^*\}.$$

Таким образом, Ndom X представляет собой определенное подмножество множества возможных решений X. В зависимости от вида множества X и конкретного типа отношения предпочтения $\succ_X$ множество недоминируемых решений может

– быть пустым, т. е. не содержать ни одного решения;
– состоять в точности из одного решения;
– содержать некоторое конечное число решений;
– состоять из бесконечного числа решений.

[1]) Напоминаем, что здесь отношение предпочтения $\succ_X$ предполагается иррефлексивным и транзитивным. При этом заметим, что на самом деле для введения множества недоминируемых решений достаточно требовать от отношения предпочтения лишь свойства асимметричности.

Лемма 1.2. *Для любого непустого множества выбираемых решений* Sel X, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *справедливо включение*

$$\mathrm{Sel}\, X \subset \mathrm{Ndom}\, X. \tag{1.2}$$

⮝ Если предположить, что включение (1.2) для некоторого непустого множества Sel X не имеет места, то среди элементов этого множества найдется решение $x'' \in \mathrm{Sel}\, X$, для которого выполнено соотношение $x'' \notin \mathrm{Ndom}\, X$. Тогда, по определению множества недоминируемых решений, существует такое решение $x' \in X$, что $x' \succ_X x''$. Отсюда, используя аксиому 1, получаем $x'' \notin X$. Это противоречит начальному предположению о том, что x'' — выбранное решение. ⮟

Замечание. В формулировке леммы 1.2 утверждается, что включение 1.2 выполняется для произвольного непустого множества выбираемых решений. Если Sel $X = \varnothing$, то включение (1.2) также имеет место, поскольку, как принято в теории множеств, пустое множество содержится в качестве подмножества в любом множестве. Поэтому условие непустоты множества выбираемых решений в формулировке леммы 1.2 можно было бы опустить; при этом справедливость рассматриваемой леммы не нарушается. Но тогда при доказательстве следовало бы специально оговаривать этот «вырожденный» случай, который с практической точки зрения интереса не представляет (если нет выбора, то и нет смысла изучать законы такого выбора). По этой причине здесь и всюду далее в подобных ситуациях, когда речь пойдет о включениях, содержащих множество выбираемых решений (или множество выбираемых векторов), мы будем подчеркивать непустоту этих множеств, чтобы сразу исключить из рассмотрения бессодержательные с практической точки зрения случаи.

Включение (1.2) устанавливает, что для достаточно широкого класса задач (а именно, для тех задач, для которых выполнена аксиома 1): ***выбор решений следует производить только среди недоминируемых решений***. Кроме того, поскольку все последующие требования (аксиомы), предъявляемые к рассматриваемому здесь классу задач многокритериального выбора, как мы увидим далее, не содержат множества выбираемых решений (и выбираемых векторов), включение (1.2) показывает, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых решений.

Когда Sel $X \neq \varnothing$ и множество недоминируемых решений состоит из единственного элемента, задача выбора в принципе решена, поскольку это единственное недоминируемое решение в силу включения (1.2) является выбираемым решением и остается только найти его. Следует, однако, заметить, что подобного рода ситуации в практике встречаются крайне редко. Чаще всего, тех сведений, которые имеются об отношении предпочтения, оказывается недостаточно не только для нахождения множества выбираемых решений, но и для построения множества недоминируемых решений.

Тем не менее, даже неполные, фрагментарные сведения об отношении предпочтения ЛПР позволяют из всего множества возможных решений исключить доминируемые решения (как заведомо непригодные для выбора) и, тем самым, упростить последующий выбор.

Наряду с множеством недоминируемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество недоминируемых векторов* (*недоминируемых оценок*)

$$\operatorname{Ndom} Y = f(\operatorname{Ndom} X) =$$
$$= \{f(x^*) \in Y \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } x \succ_X x^*\} =$$
$$= \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \succ_Y y^*\}.$$

Для введенного множества недоминируемых векторов аксиому 1 и лемму 1.2 можно переформулировать следующим образом.

Аксиома 1 (исключение доминируемых векторов). *Если для некоторой пары векторов $y', y'' \in Y$ выполнено соотношение $y' \succ_Y y''$, то $y'' \notin \operatorname{Sel} Y$.*

Лемма 1.2. (в терминах оценок). *Для любого непустого множества выбираемых векторов* $\operatorname{Sel} Y$, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *справедливо включение*

$$\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y.$$

3. Алгоритм построения множества недоминируемых решений. В предыдущем пункте была отмечена важная роль множества недоминируемых решений (и векторов) в теории принятия решений. Последующее изложение книги позволит еще не раз убедиться в справедливости этого высказывания. По этой причине следует иметь в распоряжении какой-нибудь метод или алгоритм построения множества недоминируемых решений (и векторов).

В общем случае вопрос построения множества недоминируемых решений и/или векторов представляется чрезвычайно сложным, однако для конечного множества возможных решений X (множества возможных векторов Y) он решается достаточно просто.

Итак, пусть множество возможных решений X состоит из конечного числа элементов, а отношение предпочтения является

иррефлексивным и транзитивным. Для построения множества недоминируемых решений $\operatorname{Ndom} X$ прежде всего следует перенумеровать все возможные решения. Пусть, например,

$$X = X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Первый шаг алгоритма нахождения множества недоминируемых решений заключается в последовательном сравнении первого решения x_1 со всеми остальными $x_2, \ldots, x_n$. Это сравнение заключается в проверке справедливости соотношения $x_1 \succ_X x_i$ и соотношения $x_i \succ_X x_1$ при каждом $i = 2, \ldots, n$.

В случае истинности для некоторого i первого соотношения $x_1 \succ_X x_i$, доминируемое решение x_i следует удалить из множества X_1 и продолжить указанную проверку для следующего за x_i решения.

При выполнении второго соотношения $x_i \succ_X x_1$ удалению подлежит первое решение x_1, после чего сразу же следует перейти ко второму шагу. Если же ни одно из двух приведенных соотношений $x_1 \succ_X x_i$ и $x_i \succ_X x_1$ не является истинным, ничего удалять не нужно. В том случае, когда сравнения решения x_1 были проведены со всеми остальными решениями $x_2, \ldots, x_n$, и ни для какого $i = 2, \ldots, n$ не оказалось выполненным соотношение $x_i \succ_X x_1$, первое решение следует запомнить как недоминируемое и удалить его из (оставшегося) множества возможных решений. Указанные действия описывают первый шаг алгоритма.

Если после выполнения первого шага во множестве возможных решений не осталось ни одного решения (т. е. все оказались удаленными), то алгоритм заканчивает работу. При этом в памяти будет храниться одно недоминируемое решение x_1. Оно и представляет собой множество недоминируемых решений. В противном случае (т. е. когда не все решения оказались удаленными), необходимо перейти ко второму шагу.

Обозначим множество, оставшееся после выполнения первого шага X_2.

Второй шаг полностью аналогичен первому. А именно, сначала нужно перенумеровать элементы множества X_2. После этого следует провести последовательное сравнение первого решения этого множества со всеми остальными его элементами. При этом сравнение осуществляется совершенно аналогично тому, как это было описано на первом шаге. Выполнение сравнений на втором шаге либо закончится удалением первого решения множества X_2, как доминируемого, либо такого удаления не произойдет. Во втором случае это решение следует запомнить как недоминируемое, а затем удалить его из множества X_2. Если после этого во множестве возможных решений не останется ни одного решения, то вычисления заканчиваются; в памяти будет храниться множество недоминируемых решений. В противном случае к оставшемуся непустому множеству возможных решений нужно применить аналогичный третий шаг алгоритма и т. д. В результате, после окончания работы алгоритма в памяти будет храниться множество всех недоминируемых решений [1]) $\mathrm{Ndom}\, X$.

На каждом шаге алгоритма происходит удаление, по крайней мере, одного возможного решения. Следовательно, после выполнения некоторого конечного числа шагов будут удалены все возможные решения кроме некоторого одного и алгоритм закончит свою работу, так как оставшееся решение не с чем будет сравнивать и потому оно также будет недоминируемым. Это рассуждение доказывает конечность приведенного алгоритма.

Применение описанного алгоритма к произвольному конечному множеству возможных решений за конечное число шагов приведет к отысканию, по крайней мере, одного недоминируемого решения. Действительно, недоминируемым запоминается лишь первое решение из множества, которое участвует в выполнении очередного шага алгоритма. Если на всех предыдущих шагах (кроме последнего) не было выявлено ни одного недоминируемого решения, то таковым должно быть последнее решение, поскольку его не может доминировать ни одно из всех остальных возможных решений. Тем самым, получен следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть множество возможных решений X (множество возможных векторов Y) состоит из конечного числа элементов. Если отношение предпочтения $\succ_X$ является иррефлексивным и транзитивным, то множество возможных решений (векторов) содержит хотя бы одно недоминируемое решение (один недоминируемый вектор), т. е.* $\mathrm{Ndom}\, X \neq \varnothing$ ($\mathrm{Ndom}\, Y \neq \varnothing$).

Чаще всего в практических задачах выбора отношение предпочтения задано лишь частично, либо вообще не задано и его следует построить прежде, чем приступать к решению задачи. В таких случаях схему приведенного выше алгоритма можно использовать для опроса ЛПР с целью выявления его отношения предпочтения и одновременного построения множества недоминируемых решений. Для этого ЛПР сначала предлагают выбрать предпочтительное решение из каждой пары, содержащей первое решение. При этом доминируемые решения, по мере их выявления, сразу же удаляются. Далее, для сравнения предлагаются все пары, содержащие первое решение из множества, оставшегося после первого шага, и т. д.

[1]) Следует отметить, что это высказывание имеет место не только благодаря конечности множества возможных решений, но и вследствие транзитивности отношения предпочтения.

Кроме того, необходимо отметить, что схема приведенного выше алгоритма может быть использована для построения множества Парето (см. следующий разд.).

1.4. Множество Парето

1. Дальнейшие требования, предъявляемые к отношению предпочтения. В постановке задачи многокритериального выбора имеется векторный критерий $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Каждая компонента f_i векторного критерия, как правило, характеризует определенную цель ЛПР, а стремление достичь этой цели в математических терминах нередко выражается в условии максимизации (или минимизации) функции f_i на множестве X.

Необходимо отметить, что в некоторых задачах могут встретиться критерии, которые не обязательно следует максимизировать или минимизировать. Например, иногда требуется получить некоторое среднее значение критерия или «удержать» его значения в определенных заданных пределах и т. п. В таких случаях более гибким инструментом являются не критерии f_i, а («частные») отношения предпочтения $\succ_i$ (см. [32, 33]). Однако, как установлено, например, в [32], во многих важных с практической точки зрения случаях (т. е. при некоторых «разумных» требованиях к $\succ_i$ и X) существует функция полезности u_i, адекватно описывающая данное «частное» отношение предпочтения: для всех $x', x'' \in X$ верна эквивалентность $x' \succ_i x'' \iff u_i(x') > u_i(x'')$. Эти результаты показывают, что многие задачи, в которых изначально не требуется максимизация (или минимизация) критериев, могут быть, по крайней мере теоретически, сведены к подобного рода экстремальным задачам [1]).

В соответствии со сказанным будем считать, что *ЛПР заинтересовано в получении по возможности бóльших значений каждой компоненты f_i векторного критерия f.* В рамках многокритериальной задачи приходится ограничиваться уровнем строгости сформулированного допущения в том виде, в котором оно приведено выше. Однако внимательный анализ показывает его некоторую неопределенность, расплывчатость. Придадим обсуждаемому допущению строгую форму.

[1]) Следует заметить, что последующее изложение можно обобщить на случай «частных» отношений предпочтения.

Для этого перейдем к оценкам и напомним, каким образом определяется бинарное отношение $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов $Y = f(X)$, $Y \subset R^m$:

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \qquad \text{для } x', x'' \in X.$$

Всюду далее будем считать выполненным следующее допущение, формулируемое в терминах векторов критериального пространства.

Аксиома 2 (продолжение отношения предпочтения [1]). *Существует продолжение $\succ$ на все критериальное пространство R^m отношения $\succ_Y$, причем это продолжение $\succ$ является иррефлексивным и транзитивным отношением.*

Суть этого требования (не считая обязательную иррефлексивность и транзитивность) заключается в постулировании «расширенных» возможностей ЛПР сравнивать оценки по предпочтительности. В соответствии с ним для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполняется одно и только одно из следующих трех соотношений

– $y' \succ y''$;
– $y'' \succ y'$;
– не имеет места ни $y' \succ y''$, ни $y'' \succ y'$.

При этом отношение предпочтения $\succ$ на множестве возможных векторов Y совпадает с отношением $\succ_Y$, которое самым непосредственным образом связано с отношением $\succ_X$.

Поскольку иррефлексивность и транзитивность отношения $\succ$ означает наличие аналогичных свойств у отношения $\succ_Y$, что, в свою очередь, влечет иррефлексивность и транзитивность отношения $\succ_X$, необходимость требования иррефлексивности и транзитивности отношения $\succ_X$ (см. п. 1 разд. 1.3) с данного момента отпадает. Это требование автоматически выполняется в условиях справедливости аксиомы 2.

2. Согласование отношения предпочтения с критериями. Совершенно очевидно, что в задаче многокритериального выбора отношение предпочтения, равно как и критерии оптимальности, выражают интересы одного и того же ЛПР. Поэтому они должны быть каким-то образом взаимосвязаны (сопряжены) друг с другом. Настало время обсудить эту взаимосвязь.

[1]) В этом требовании для обеспечения справедливости формулируемого ниже принципа Эджворта–Парето можно предполагать существование продолжения отношения $\succ$ не на все пространство R^m, а лишь на декартово произведение множеств, являющихся значениями имеющихся критериев (см. [20]).

Будем говорить, что i-й *критерий f_i согласован с отношением предпочтения* $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких, что

$$y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, .., y'_m),$$

$$y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m), \qquad y'_i > y''_i,$$

следует $y' \succ y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения как раз и означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности больших значений этого критерия.

Взаимосвязь отношения предпочтения данного ЛПР с критериями оптимальности выразим в виде следующего требования.

Аксиома 3 (согласование критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.*

3. Аксиома Парето. Заинтересованность ЛПР в получении по возможности больших значений всех компонент векторного критерия f можно также выразить в терминах так называемой аксиомы Парето [17, 26].

Аксиома Парето (в терминах решений). *Для всех пар решений $x', x'' \in X$, для которых имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, выполняется соотношение $x' \succ_X x''$.*

Напомним (см. разд. 1.3), что запись $f(x') \geq f(x'')$ означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geqq f_i(x'')$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, причем $f(x') \neq f(x'')$.

Лемма 1.3. *Принятие аксиом* 2 *и* 3 *гарантирует выполнение аксиомы Парето.*

⮙ Пусть неравенство $f(x') \geq f(x'')$ справедливо для двух произвольных возможных решений $x', x'' \in X$. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что здесь строгие неравенства $f_k(x') > f_k(x'')$ имеют место для всех индексов $k = 1, ..., l$ при некотором $l \in \{1, 2, ..., m\}$. Для всех последующих индексов k, $k > l$ (при условии, что такие найдутся, т. е. при $l < m$), будем предполагать выполненными соответствующие равенства.

Используя согласованность первых l критериев и указанные выше строгие неравенства, получаем

$$(f_1(x'), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')),$$

$$(f_1(x''), f_2(x'), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_{l-1}(x''), f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x''), f_{l+1}(x'), \ldots, f_m(x')).$$

Отсюда на основании транзитивности отношения $\succ$ следует

$$(f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x''), f_{l+1}(x'), \ldots, f_m(x')) \quad (1.3)$$

Благодаря сделанному в начале доказательства предположению имеют место равенства $f_k(x') = f_k(x'')$, $k = l+1, \ldots, m$. Поэтому соотношение (1.3) влечет

$$f(x') = (f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x''), \ldots, f_m(x'')) = f(x''),$$

откуда, в свою очередь, по определению отношения $\succ$ вытекает требуемое соотношение $x' \succ_X x''$. ⮟

4. Множество Парето. Если для некоторой пары возможных решений имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, то благодаря аксиоме Парето первое решение будет предпочтительнее второго, т. е. $x' \succ_X x''$. Тогда в соответствии с аксиомой 1 второе решение ни при каких обстоятельствах не может оказаться выбранным и его можно исключить из последующего учета в процессе принятия решений. Исключение всех подобного рода решений приводит к множеству Парето.

Множество парето-оптимальных решений обозначается $P_f(X)$ и определяется равенством

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

Лемма 1.4. *При выполнении аксиом* 2 *и* 3 *множество недоминируемых решений* Ndom X *удовлетворяет включению*

$$\operatorname{Ndom} X \subset P_f(X). \quad (1.4)$$

⮝ Пусть, напротив, для некоторого недоминируемого решения $x \in \operatorname{Ndom} X$ выполнено соотношение $x \notin P_f(X)$. Тогда, по определению множества парето-оптимальных решений, существует такое возможное решение $x' \in X$, что $f(x') \geq f(x)$. На основании леммы 1.3 в условиях доказываемого утверждения справедлива аксиома Парето. Поэтому полученное неравенство, в силу аксиомы Парето, влечет соотношение $x' \succ_X x$, которое не совместимо с начальным предположением $x \in \operatorname{Ndom} X$. ⮟

Непосредственно из лемм 1.2 и 1.4 вытекает следующий принципиально важный для теории принятия решений результат.

Теорема 1.2. *В условиях выполнения аксиом* 1–3 *для любого непустого множества выбираемых решений* Sel X *справедливо включение*

$$\operatorname{Sel} X \subset P_f(X). \quad (1.5)$$

Включение (1.5) выражает собой так называемый *принцип Эджворта–Парето* (*принцип Парето*), согласно которому

если ЛПР ведет себя достаточно «разумно» (т. е. в соответствии с аксиомами 1–3), то выбираемые им решения обязательно являются парето-оптимальными.

Этот принцип демонстрирует особую, исключительно важную роль множества парето-оптимальных решений в теории принятия решений.

Внимательный анализ доказательств приведенных утверждений, в совокупности приводящих к теореме 1.2, показывает, что если хотя бы одна из аксиом 1, 2 или 3 нарушается, то выбираемое решение не обязано быть парето-оптимальным [1]). Отсюда следует, что *принцип Эджворта–Парето не является универсальным*, т. е. применимым во всех без исключения задачах многокритериального выбора. Более того, на основе аксиом 1, 2 и 3 (точнее говоря, на основе отрицаний этих аксиом) при желании можно сделать определенный вывод и о том, в каких именно задачах этот принцип может «не работать».

Итак, применение этого принципа рискованно или же вообще недопустимо, если:

– отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не является транзитивным;

– отношение предпочтения ЛПР не согласовано хотя бы с одним из критериев;

– не выбираемое из некоторой пары решение оказывается выбранным из всего множества возможных решений.

5. Множество парето-оптимальных векторов. Вектор $f(x^*)$ при парето-оптимальном решении x^* называют *парето-оптимальным вектором* (*парето-оптимальной оценкой*) *решения* x^* или просто *парето-оптимальным вектором*, а множество всех таких векторов — *множеством парето-оптимальных векторов* (*парето-оптимальных оценок*). Для этого множества используют обозначение $P(Y)$. Таким образом,

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{ f(x^*) \in Y \mid \text{при некотором } x^* \in P_f(X)\},$$

[1]) Примеры подобного рода можно найти в [20].

где Y так же, как и раньше, означает множество возможных векторов, т. е. $Y = f(X)$.

Равенство $P(Y) = f(P_f(X))$ естественным образом связывает множество парето-оптимальных решений и парето-оптимальных векторов. В соответствии с ним, зная множество парето-оптимальных решений, можно найти соответствующее множество парето-оптимальных векторов. Справедливо и, в определенном смысле обратное, утверждение. А именно, располагая множеством парето-оптимальных векторов $P(Y)$ по формуле $P_f = f^{-1}(P(Y))$, где в правой части равенства записан прообраз множества $P(Y)$, можно пытаться строить соответствующее множество парето-оптимальных решений. Таким образом, в идейном отношении эти два множества полностью определяют друг друга, хотя попытка построение одного из них на основе второго может натолкнуться на определенные вычислительные трудности (в большей степени это относится к построению множества парето-оптимальных решений).

Нетрудно понять, что множество парето-оптимальных векторов можно определить следующим эквивалентным образом:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}. \quad (1.6)$$

Сравнивая равенство (1.6) с аналогичным равенством из определения множества недоминируемых векторов, приведенным в разд. 1.3, нетрудно обнаружить их полное совпадение (не считая отношений $\succ_X$ и $\geq$). На основании этого совпадения множество парето-оптимальных векторов можно рассматривать как множество недоминируемых по отношению $\geq$ элементов множества Y.

Теорема 1.2 была сформулирована для решений. Ее можно переформулировать в терминах оценок. Тогда она примет следующий вид.

Теорема 1.2 (в терминах векторов). *Пусть выполняются аксиомы* 1–3. *Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* Sel Y *имеет место включение*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(Y). \quad (1.7)$$

Ранее уже говорилось о том, что результаты, связанные с недоминируемыми решениями и векторами и рассмотренные в предыдущем разделе, могут быть переформулированы применительно к множествам Парето. В частности, теорема 1.1 после такой переформулировки принимает следующий вид.

Теорема 1.3. *В случае конечного множества возможных векторов Y (в частности, если конечно множество возможных решений X) существует хотя бы одно парето-оптимальное решение и, соответственно, хотя бы один парето-оптимальный вектор, т. е. $P_f(X) \neq \varnothing$, $P(Y) \neq \varnothing$.*

Взаимосвязь между введенными выше различными подмножествами множества возможных решений при выполнении аксиом 1–3 в условиях справедливости лемм 1.2 и 1.4 имеет вид следующих включений

$$\operatorname{Sel} X \subset \operatorname{Ndom} X \subset P_f(X) \subset X. \quad (1.8)$$

Из четырех участвующих в соотношении (1.8) множеств самым широким является множество возможных решений, а самым узким — множество выбираемых решений. Наглядно эта взаимосвязь изображена на рис. 1.1.

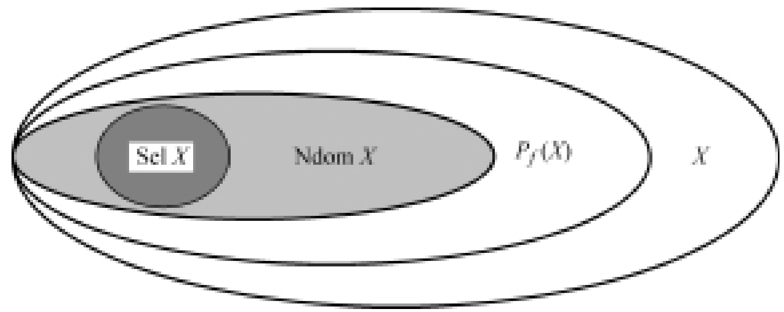

Рис. 1.1.

В терминах векторов включения (1.8) принимают вид

$$\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y \subset P(Y) \subset Y. \quad (1.9)$$

6. Алгоритм нахождения множества Парето. Благодаря наличию указанной выше прямой связи между множествами недоминируемых и парето-оптимальных векторов все результаты, полученные ранее для первого множества, нетрудно переформулировать в терминах второго множества. В частности, для построения множества $P_f(X)$ (и $P(Y)$) в случае конечного множества возможных векторов Y можно применять сформулированный в предыдущем разделе алгоритм нахождения множества недоминируемых решений, заменив в нем сравнение по отношению предпочтения $\succ_X$ сравнением по отношению $\geq$, которое является иррефлексивным и транзитивным.

Не станем заниматься изложением указанного алгоритма. Вместо этого приведем простой иллюстративный пример построения множества парето-оптимальных векторов в задаче с тремя критериями.

Таблица 1.1

y^1	4	0	3	2
y^2	5	0	2	2
y^3	2	1	1	3
y^4	5	0	1	2
y^5	3	1	2	3

Пример 1.1. Пусть $m = 4$ и $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^5\}$, где возможные векторы, записанные в виде строк, представлены в табл. 1.1.

Сначала для отыскания множества парето-оптимальных векторов полагаем $P(Y) = Y$ и сравниваем первую оценку с остальными. При этом, как легко видеть, все пары

$$y^1, y^2;\quad y^1, y^3;\quad y^1, y^4;\quad y^1, y^5$$

оказываются несравнимыми по отношению $\geq$. Поэтому вектор y^1 запоминаем как парето-оптимальный и после этого удаляем его из множества Y_1.

Получаем множество $Y_2 = \{y^2, y^3, y^4, y^5\}$. На втором шаге сравниваем вектор y^2 с остальными элементами множества Y_2. Пара y^2, y^3 не сравнима по отношению $\geq$. Поскольку $y^2 \geq y^4$, вектор y^4 удаляем из множества Y_2. Оставшаяся пара векторов y^2, y^5 не сравнима по отношению $\geq$. Так как вектор y^2 оказался недоминируемым, то его следует запомнить как парето-оптимальный, а затем удалить из множества Y_2.

Приходим к множеству $Y_3 = \{y^3, y^5\}$. Поскольку $y^5 \geq y^3$, удаляется вектор y^3 и в результате остается один вектор y^5, который также является парето-оптимальным.

В итоге получено следующее множество парето-оптимальных векторов $P(Y) = \{y^1, y^2, y^5\}$.

Несколько иначе в удобном для программной реализации виде указанный алгоритм можно сформулировать следующим образом. Пусть множество возможных векторов Y состоит из конечного числа N элементов и имеет вид

$$Y = \{y^1, y^2, \dots, y^N\}.$$

Алгоритм построения множества парето-оптимальных векторов $P(Y)$ состоит из следующих семи шагов.

Шаг 1. Положить $P(Y) = Y$, $i = 1$, $j = 2$. Тем самым образуется так называемое *текущее множество парето-оптимальных векторов*, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y, а в конце — составит искомое множество парето-оптимальных векторов. Алгоритм устроен таким образом, что искомое множество парето-оптимальных векторов получается из Y последовательным удалением заведомо неоптимальных векторов.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $y^i \geq y^j$. Если оно оказалось истинным, то перейти к Шагу 3. В противном случае перейти к Шагу 5.

Шаг 3. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^j, так как он не является парето-оптимальным. Затем перейти к Шагу 4.

Шаг 4. Проверить выполнение неравенства $j < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 2. В противном случае — перейти к Шагу 7.

Шаг 5. Проверить справедливость неравенства $y^j \geq y^i$. В том случае, когда оно является истинным, перейти к Шагу 6. В противном случае — вернуться к Шагу 4.

Шаг 6. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^i и перейти к Шагу 6.

Шаг 7. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 2. В противном случае (т. е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. Множество парето-оптимальных векторов построено полностью.

7. Геометрия множества Парето в случае двух критериев. Рассмотрим простейший случай, когда число критериев равно двум, т. е. $m = 2$. В этом случае множество Y представляет собой некоторое множество точек на плоскости.

Все точки y, для которых выполняется неравенство $y \geq y^*$, составляют угол с вершиной в точке y^* и сторонами, параллельными координатным осям. При этом сама вершина y^* этому углу не принадлежит, так как $y \neq y^*$ (см. рис. 1.2).

Рассмотрим пример, в котором множество возможных точек Y имеет вид замкнутой ограниченной фигуры, изображенной на рис. 1.3.

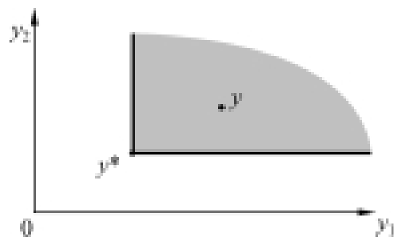

Рис. 1.2.

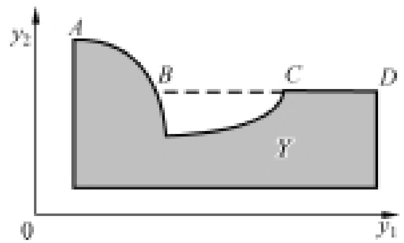

Рис. 1.3.

Для того чтобы построить множество парето-оптимальных точек $P(Y)$, можно воспользоваться геометрическим соображением, заимствованным из рис. 1.2. А именно, по определению парето-оптимального вектора y^* для него не должно существовать такой точки y, что выполняется неравенство $y \geq y^*$. Геометрически все такие точки y представляют собой угол с вершиной в y^*. Следовательно, точка $y^* \in Y$ парето-оптимальна тогда и только тогда, когда соответствующий угол, имеющий вершину в точке y^* и стороны, параллельные координатным осям, не содержит ни одной точки множества возможных векторов Y. Отсюда ясно, что ни одна внутренняя точка множества Y не может быть парето-оптимальной. А из граничных точек множества возможных точек Y на роль парето-оптимальных могут претендовать лишь те, которые располагаются в ее «северо-восточной» части (т. е. линия $ABCD$). При этом та часть границы, которая находится в «провале» (имеется в виду дуга BC) также не может принадлежать множеству Парето. Наконец, из частей северо-восточной границы, которые параллельны координатным осям, парето-оптимальными могут быть лишь крайние точки — среди точек отрезка CD таковой будет точка D. В итоге приходим к следующему множеству парето-оптимальных точек — это дуга AB (без точки B) и отдельная точка D.

В случае, когда число критериев три и более, указанным геометрическим путем множество парето-оптимальных точек построить не удастся. Тем не менее, к настоящему времени разработаны современные *методы визуализации* (графического представления данных на экране компьютера), позволяющие для относительно небольших m получить наглядное представление о множестве возможных и множестве парето-оптимальных векторов [12].