Глава 4

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ НАБОРА ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Вопросам учета набора различного рода сообщений об относительной важности критериев посвящена эта глава. Подробно рассматриваются наиболее простые варианты набора такой информации, когда каждый из двух данных критериев важнее другого, когда один критерий важнее двух других в отдельности, когда каждый из двух критериев по отдельности важнее третьего. Для всех этих вариантов получены формулы пересчета векторного критерия, на основе которого производится сужение множества Парето.

Здесь также решается практически важный вопрос непротиворечивости набора информации об относительной важности критериев. Получены критерии непротиворечивости в различных формах.

Кроме того, в данной главе предлагается принципиально отличный от использовавшегося ранее алгоритмический подход к учету произвольного конечного набора информации об относительной важности критериев.

4.1. Учет двух сообщений об относительной важности

1. Случай двух независимых сообщений. Пусть даны четыре непустых набора номеров критериев A_1, B_1, A_2, B_2, таких что $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, $A_2 \cap B_2 = \varnothing$. Предположим, что группа критериев A_1 важнее группы B_1 с набором коэффициентов относительной важности θ'_{ij} и одновременно группа критериев A_2 важнее группы B_2 с набором коэффициентов относительной важности θ''_{ij}. Тем самым, имеются два сообщения об относительной важности критериев. Будем говорить, что эти два сообщения *взаимно независимы*, если

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ B_1 \cap B_2 = \varnothing,\ A_1 \cap B_2 = \varnothing,\ A_2 \cap B_1 = \varnothing.$$

Для того чтобы использовать информацию об относительной важности критериев для сужения множества Парето, состоящую из двух независимых сообщений, следует просто дважды воспользоваться теоремой 3.3, в которой приводятся формулы для пере-

счета векторного критерия. Сначала эту теорему можно применить, например, для учета первого сообщения, т. е. к группам критериев A_1 и B_1. В результате вместо критериев менее важной группы B_1 в соответствии с формулой (3.5) необходимо вычислить новые критерии. Затем эта же теорема применяется ко второй группе критериев A_2 и B_2, что ведет к пересчету критериев группы B_2 по той же самой формуле (3.5). В итоге будет получен новый векторный критерий, множество парето-оптимальных решений (парето-оптимальных векторов) относительно которого будет оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых решений $\operatorname{Sel} X$ (выбираемых векторов $\operatorname{Sel} Y$).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда i-й критерий важнее j-го, а он, в свою очередь, важнее некоторого k-го критерия, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$. Здесь также имеются два сообщения об относительной важности критериев, но они не являются взаимно независимыми. Тем не менее, для учета этого набора информации и формирования нового векторного критерия также можно дважды применить теорему 2.5, в которой идет речь об учете информации об относительной важности одного критерия в сравнении с другим. Сначала следует пересчитать k-й критерий для того, чтобы воспользоваться информацией о том, что j-й критерий важнее k-го. Затем необходимо пересчитать j-й критерий для учета информации о том, что i-й критерий важнее j-го. В результате будет образован новый векторный критерий, у которого все компоненты за исключением j-й и k-й остались прежними. Множество парето-оптимальных решений (парето-оптимальных векторов) относительно нового векторного критерия будет представлять собой оценку сверху для неизвестного множества выбираемых решений (выбираемых векторов).

2. Случай, когда каждый из двух критериев важнее другого. Сначала сформулируем и докажем один вспомогательный результат.

Лемма 4.1. *Благодаря транзитивности и инвариантности отношения предпочтения $\succ$ соотношения $y \succ y'$ и $z \succ z'$ для произвольных векторов y, y', z, $z' \in R^m$ можно почленно складывать, т. е.*

$$y \succ y',\ z \succ z' \quad \Rightarrow \quad y + z \succ y' + z'.$$

⮝ Прибавим к обеим частям соотношения $y \succ y'$ вектор z. Благодаря аддитивности отношения $\succ$ получим $y + z \succ y' + x$. Аналогично, из соотношения $z \succ z'$ следует $z + y' \succ z' + y'$. Теперь, используя транзитивность отношения $\succ$, из полученных соотношений $y + z \succ y' + z$ и $z + y' \succ z' + y'$ приходим к требуемому результату $y + z \succ y' + z'$. ⮟

Рассмотрим два сообщения об относительной важности критериев, состоящие в том, что i-й критерий важнее j-го, а он, в свою очередь, важнее i-го. На первый взгляд эти два сообщения кажутся взаимно противоречивыми — каждый из двух критериев важнее другого. Однако, как будет показано ниже, эта ситуация противоречива не всегда. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 4.1. *Для того чтобы i-й критерий был важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ij} и одновременно j-й критерий был важнее i-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ji}, необходимо выполнение неравенства* $\theta_{ij} + \theta_{ji} < 1$.

⮝ На основании упрощенного определения 2.4 относительной важности для вектора $y \in R^m$ с компонентами

$$y_i = 1 - \theta_{ij},\ y_j = -\theta_{ij},\ y_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

по условию, имеет место соотношение $y \succ 0_m$ и одновременно для вектора $y' \in R^m$ с компонентами

$$y'_j = (1 - \theta_{ji}),\ \ y'_i = -\theta_{ji},\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

выполняется соотношение $y' \succ 0_m$.

Складывая почленно $y \succ 0_m$ и $y' \succ 0_m$, получим соотношение $\hat{y} = y + y' \succ 0_m$, где вектор $\hat{y}$ имеет компоненты

$$\hat{y}_i = \hat{y}_j = 1 - \theta_{ij} - \theta_{ji}, \quad \hat{y}_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Как видим, этот вектор имеет одинаковые i-ю и j-ю компоненты. Они не могут быть отрицательными, поскольку в этом случае будет выполнено неравенство $\hat{y} \leq 0_m$, из которого в силу аксиомы Парето следует соотношение $0_m \succ \hat{y}$, не совместимое с полученным ранее $\hat{y} \succ 0_m$. Кроме того, эти компоненты не могут быть нулевыми, так как тогда соотношение $\hat{y} \succ 0_m$ примет вид $0_m \succ 0_m$. Следовательно, указанные компоненты должны быть положительными, т. е. $1 - \theta_{ij} - \theta_{ji} > 0$.⮟

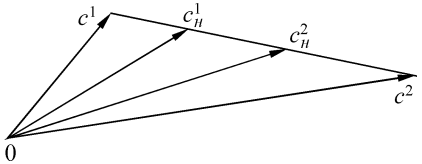

Рис. 4.1.

Геометрический смысл теоремы 4.1 лучше всего раскрывается в случае, когда критерии линейные. Пусть $m = 2$, $n = 2$, $f_1(x) = \langle c^1, x \rangle$, $f_2(x) = \langle c^2, x \rangle$, где $c^1, c^2, x \in R^2$ (рис. 4.1).

Поскольку первый критерий важнее второго (допустим, что $\theta_{12} \approx 0.4$), то вместо второго критерия в новой многокритериальной задаче, множество Парето которой является оценкой сверху для искомого множества выбираемых решений (векторов), будет участвовать новый второй критерий, градиент которого обозначен $c^2_н$. Конец этого вектора представляет собой результат перемещения конца вектора c^2 по прямой, соединяющей концы векторов c^1 и c^2, в направлении конца вектора c^1 на 40 % длины отрезка, соединяющего концы двух данных векторов. С другой стороны, поскольку второй критерий важнее первого (пусть $\theta_{21} \approx 0.25$), то новый первый критерий будет иметь градиент $c^1_н$, конец которого будет располагаться на расстоянии 25% длины указанного выше отрезка от конца вектора c^1 в направлении конца вектора c^2. Новый векторный критерий будет иметь вид $(\langle c^1_н, x \rangle, \langle c^2_н, x \rangle)$. Таким образом, при учете набора указанной информации происходит взаимное изменение направлений градиентов обоих критериев, которое можно трактовать как «сближение целей».

Если аналогичным образом интерпретировать равенство $\theta_{12} + \theta_{21} = 1$, то в этом случае концы градиентов новых векторов $c^1_н$ и $c^2_н$ должны совместиться и двухкритериальная задача превратится в однокритериальную. Как утверждает теорема 4.1, этого быть не должно. Тем более, концы векторов $c^1_н$ и $c^2_н$ не могут перемещаться в указанных направлениях еще дальше (что соответствует случаю $\theta_{12} + \theta_{21} > 1$).

Невозможность равенства $\theta_{12} + \theta_{21} = 1$ в общем случае легко установить непосредственно.

⮝ В самом деле, если указанное равенство имеет место, то для векторов y и y' вида

$$y_i > 0,\ y_j < 0,\ y_s = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}; \quad y' = -y$$

выполняются соотношения $y \succ 0_m$ и $y' \succ 0_m$. Сложив почленно последние два соотношения (это допускается леммой 4.1), получим $y + y' = 0_m \succ 0_m$, что противоречит асимметричности отношения $\succ$.⮟

Теперь перейдем к вопросу учета информации об относительной важности в случае, когда i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности θ_{ij} и одновременно j-й критерий важнее i-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ji}. Напоминаем, что в контексте данной книги учесть информацию об относительной важности критериев — означает построить новую многокритериальную задачу, множество Парето которой является оценкой сверху для множества выбираемых решений (векторов) в исходной задаче.

Для учета указанной информации можно дважды воспользоваться теоремой 2.5. В соответствии с этой теоремой в новой многокритериальной задаче критерий f_i следует заменить на $(1-\theta_{ij})f_i + \theta_{ji}f_j$, а f_i — на критерий $\theta_{ij}f_i + (1-\theta_{ij})f_j$. Все остальные критерии (если они имеются) остаются прежними.

3. Случай, когда один критерий важнее двух других. Если для сужения множества Парето используется сразу несколько сообщений об относительной важности критериев, то следует учитывать следующее обстоятельство. Пусть i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности θ_{ij} и, кроме того, i-й критерий важнее k-го ($k \neq j$) с коэффициентом относительной важности θ_{ik}. Тем самым, имеется набор из двух указанных сообщений об относительной важности критериев, причем эта ситуация внешне напоминает ту, в которой i-й критерий важнее группы критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности θ_{ij} и θ_{ik}.

Оказывается, *если i-й критерий важнее группы критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности θ_{ij} и θ_{ik}, то i-й критерий будет важнее каждого из критериев j и k в отдельности с теми же самыми коэффициентами относительной важности.*

⮝ Действительно, когда соотношение $y' \succ 0_m$ выполняется для всех векторов $y' \in R^m$ вида

$$y'_i = w^*_i,\ \ y'_j = -w^*_j,\ \ y'_k = -w^*_k,\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j, k\},$$

то аналогичное соотношение $y'' \succ 0_m$ будет иметь место и для всех векторов $y'' \in R_m$ вида

$$y''_i = w^*_i,\ \ y''_j = -w^*_j,\ \ y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

так как неравенство $y'' \geq y'$ благодаря аксиоме Парето влечет соотношение $y'' \succ y'$, что вместе с соотношением $y' \succ 0_m$ приводит к соотношению $y'' \succ 0_m$. Это означает, что i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ij}.

Точно так же можно проверить, что бóльшая важность i-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности θ_{ij} и θ_{ik} влечет бóльшую важность k-го критерия по сравнению с k-м критерием с коэффициентом относительной важности θ_{ik}.⮟

Теперь пусть i-й критерий важнее j-го и k-го в отдельности с коэффициентами относительной важности θ_{ij} и θ_{ik}. В этом слу-

чае ЛПР за прирост по i-му критерию в размере w^*_i единиц готово пожертвовать отдельно w^*_j единиц по j-му критерию, либо w^*_k единиц по k-му критерию. Нетрудно понять, что отсюда, вообще говоря, не следует, что ЛПР согласится в качестве компенсации за прирост w^*_i единиц по i-му критерию потерять одновременно и по j-му и по k-му критерию w^*_j единиц и w^*_k единиц соответственно. Это свидетельствует о том, что *если i-й критерий важнее j-го и k-го в отдельности с коэффициентами относительной важности θ_{ij} и θ_{ik}, то отсюда в общем случае не следует большая важность i-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j, k\}$ с теми же самыми коэффициентами относительной важности.*

Следует, однако, обратить внимание на то, что *из бóльшей важности i-го критерия по сравнению с j-м и k-м критериями в отдельности с коэффициентами относительной важности θ_{ij} и θ_{ik} соответственно, вытекает большая важность i-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j, k\}$, но с меньшими коэффициентами относительной важности.*

⮝ В самом деле, складывая почленно соотношения $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, где векторы y' и y'' имеют вид

$$y'_i = w^*_i,\ \ y'_j = -w^*_j,\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

$$y''_i = \bar{w}_i,\ \ y''_k = -\bar{w}_k,\ \ y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\}$$

получим соотношение $y = y' + y'' \succ 0_m$, где вектор y имеет компоненты

$$y_i = w^*_i + \bar{w}_i,\ \ y_j = -w^*_j,\ \ y_k = -\bar{w}_k,\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Полученное означает, что i-й критерий важнее группы критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности

$$\theta'_{ij} = \frac{w^*_j}{w^*_i + \bar{w}_i + w^*_j} < \theta_{ij}, \qquad \theta'_{ik} = \frac{\bar{w}_k}{w^*_i + \bar{w}_i + \bar{w}_k} < \theta_{ik}.$$ ⮟

Следующий результат показывает, каким образом следует производить пересчет векторного критерия для того, чтобы учесть набор информации, состоящей из двух сообщений о том, что i-й критерий важнее как j-го, так и k-го критериев в отдельности.

Теорема 4.2 (в терминах векторов). *Пусть выполнены аксиомы 1–4 и имеются два сообщения о том, что i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ij}, а также* *что i-й критерий важнее k-го критерия с коэффициентом относительной важности* θ_{ik}. *Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов справедливы включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{4.1}$$

где $P(\widehat{Y})$ *— множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с множеством возможных решений X и новым* $(m+1)$*-мерным векторным критерием g с компонентами*

$$g_j = \theta_{ij} f_i + (1-\theta_{ij}) f_j,\ \ g_k = \theta_{ik} f_i + (1-\theta_{ik}) f_k,$$
$$g_{m+1} = \theta_{ij}\theta_{ik} f_i + (1-\theta_{ij})\theta_{ik} f_j + \theta_{ij}(1-\theta_{ik}) f_k,$$
$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\}. \tag{4.2}$$

⮙ Вновь символом K обозначим острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$.

Согласно определению 2.4 наличие информации об относительной важности критериев в данном случае означает справедливость соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, что равносильно выполнению включений $y' \in K$ и $y'' \in K$ для векторов y' и y'' с компонентами

$$y'_i = 1-\theta_{ij},\ \ y'_j = -\theta_{ij},\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$y''_i = 1-\theta_{ik},\ \ y''_k = -\theta_{ik},\ \ y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\}.$$

Обозначим через M выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, \dots, e^m, y', y''$. Этот конус порождается тем же самым набором, но без вектора e^i, так как последний можно представить, например, в виде линейной комбинации векторов e^j, y' с положительными коэффициентами. Таким образом, конус M совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций вида

$$\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda'_i y' + \lambda''_i y'' + \lambda_{i+1} e^{i+1} + \dots + \lambda_m e^m.$$

Поскольку все указанные выше векторы, порождающие конус M, принадлежат острому конусу K, то и конус M — острый.

Установим совпадение конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$

$$\theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j \geqq 0,$$
$$\theta_{ik} y_i + (1-\theta_{ik}) y_k \geqq 0,$$
$$\theta_{ij}\theta_{ik} y_i + (1-\theta_{ij})\theta_{ik} y_j + \theta_{ij}(1-\theta_{ik}) y_k \geqq 0. \tag{4.3}$$

С этой целью найдем общее решение этой системы неравенств, введя в рассмотрение соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y\rangle = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$
$$\langle \bar{y}', y\rangle = 0,$$
$$\langle \bar{y}'', y\rangle = 0,$$
$$\langle \bar{y}, y\rangle = 0, \tag{4.4}$$

где компоненты векторов $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$ определяются равенствами

$$\bar{y}'_i = \theta_{ij},\ \ \bar{y}'_j = 1-\theta_{ij},\ \ \bar{y}'_s = y'_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$\bar{y}''_i = \theta_{ik},\ \ \bar{y}''_k = 1-\theta_{ik},\ \ \bar{y}''_s = y''_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$
$$\bar{y}_i = \theta_{ij}\theta_{ik},\ \ \bar{y}_j = (1-\theta_{ij})\theta_{ik},\ \ \bar{y}_k = \theta_{ij}(1-\theta_{ik}),$$
$$\bar{y}_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j, k\}.$$

Система (4.4) содержит $m+1$ линейное уравнение, причем любая подсистема из $m-1$ векторов набора e^s, $s \in I \setminus \{i, k\}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, $\bar{y}$, участвующих в образовании этой системы, является линейно независимой. Поэтому для отыскания общего решения системы линейных неравенств (4.3) достаточно просмотреть (одномерные) ненулевые решения всех возможных подсистем системы (4.4), получающихся из (4.4) удалением каких либо двух ее уравнений. При этом найденные таким способом решения должны удовлетворять системе неравенств (4.3).

Начнем удалять из системы (4.4) по два уравнения. Сначала рассмотрим случай, когда в каждую такую удаляемую пару уравнений входит последнее уравнение. При удалении двух последних уравнений получаем систему с ненулевым решением e^k. Если вместе с последним удалить $(m-1)$-е уравнение, то придем к системе с решением e^j. Исключение из (4.4) последнего уравнения вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$ для всех $s \neq i$ приводит к системе, обладающей решением e^s. Если же к последнему удаляемому уравнению добавить $\langle e^i, y\rangle = 0$, то полученная таким образом система уравнений не будет иметь ни одного ненулевого решения, удовлетворяющего системе неравенств (4.3).

Перейдем к разбору случая, когда из системы линейных уравнений (4.4) удаляется пара уравнений, одним из которых является предпоследнее уравнение. Если вместе с предпоследним удалить предшествующее ему уравнение, то получим систему, среди ненулевых решений которых нет ни одного, удовлетворяющего системе неравенств (4.3). Исключая предпоследнее уравнение вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s \neq i$, получим систему с решением e^s. Если же вместе с предпоследним удалить уравнение $\langle e^i, y\rangle = 0$, то придем к системе с решением y'.

Аналогично разбирается случай удаления $(m - 1)$-го уравнения вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$. При этом будет найдено еще одно ненулевое решение y'' при $s = i$, удовлетворяющее системе линейных неравенств (4.3).

Исключение из системы уравнений (4.4) пары уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$ не приведет к новым решениям.

В итоге получаем совокупность векторов $e^1, \ldots, e^{i-1}, y', y''$, $e^{i+1}, \ldots, e^m$, порождающих конус решений системы линейных неравенств (4.3). Полученная совокупность совпадает с системой векторов, порождающих конус M. Тем самым, установлено, что множество ненулевых решений системы линейных неравенств (4.3) совпадает с конусом M.

Из включений $R^m_+ \subset M \subset K$ вытекают включения

$$\operatorname{Ndom} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{4.5}$$

где

$$P(\widehat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества Y, упорядоченного конусным отношением с конусом M.

Пусть $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$ при $x, x^* \in X$. Благодаря доказанному выше совпадению множества решений системы линейных неравенств (4.3) и конуса M, включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j, k\},$$

$$\theta_{ij}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + (1 - \theta_{ij})\big(f_j(x) - f_j(x^*)\big) \geqq 0,$$

$$\theta_{ik}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + (1 - \theta_{ik})\big(f_k(x) - f_k(x^*)\big) \geqq 0,$$

$$\theta_{ij}\theta_{ik}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + (1 - \theta_{ij})\theta_{ik}\big(f_j(x) - f_j(x^*)\big) + \\ + \theta_{ij}(1 - \theta_{ik})\big(f_k(x) - f_k(x^*)\big) \geqq 0,$$

причем здесь хотя бы одно неравенство — строгое. Нетрудно понять, что эти неравенства в терминах векторной функции g, определяемой в условиях теоремы формулами (4.2), можно переписать в виде $g(x) \geq g(x^*)$. Отсюда следует, что $P(\widehat{Y})$ — это множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений X и новым векторным критерием g.

Для завершения доказательства и получения включений (4.1) остается к соотношениям (4.5) применить включение $\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y$.$\curlyvee$

Теорему 4.2 легко переформулировать в терминах решений. В результате она примет следующий вид.

Теорема 4.2 (в терминах решений). *Пусть выполнены аксиомы 1–4 и имеются два сообщения о том, что i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ij}, а также что i-й критерий важнее k-го критерия с коэффициентом относительной важности θ_{ik}. Тогда для любого непустого множества выбираемых решений справедливы включения*

$$\operatorname{Sel} X \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{4.6}$$

где $P_g(X)$ — множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений X и $(m+1)$-мерным векторным критерием g, определяемым равенствами (4.2).

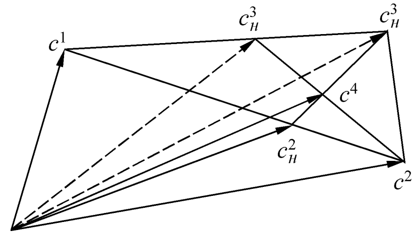

Рис. 4.2.

Приведем геометрическую иллюстрацию теоремы 4.2 для случая линейных критериев. Пусть $m = n = 3$, $f_i(x) = \langle c^i, x\rangle$, $i = 1, 2, 3$, где $c^1, c^2, c^3, x \in R^3$ (см. рис. 4.2).

Предположим, что первый критерий важнее второго с коэффициентом относительной важности $\theta_{12} \approx 0.25$, а также важнее третьего критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{13} \approx 0.4$. Учет бóльшей важности первого критерия в сравнении со вторым приводит к трехкритериальной задаче с векторами $c^1, c^2_н, c^3$, являющимися градиентами трех линейных критериев. Аналогично, учет большей важности первого критерия в сравнении с третьим ведет к трехкритериальной задаче с тремя векторами $c^1, c^2, c^3_н$. Тем самым, получаем два конуса целей, соответствующих двум имеющимся сообщениям об относительной важности критериев. Для одновременного учета обоих сообщений об относительной важности необходимо рассмотреть пересечение указанных конусов. В итоге приходим к конусу, порожденному четырьмя векторами $c^1, c^2_н, c^3_н, c^4$. Это и есть конус целей новой задачи, множество Парето которой дает оценку сверху для множества выбираемых решений.

Следующий результат показывает, что теорему 4.2 можно применять к любым критериям, значения которых вычисляются в количественных шкалах.

Теорема 4.3. *Включения* (4.1) *и* (4.6) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования компонент векторного критерия* g, *определяемого равенствами* (4.2).

⮝ Учитывая доказательство теоремы 2.7, достаточно проверить инвариантность множеств $P(\widehat{Y})$ и $P_g(X)$ из (4.1) и (4.6) относительно линейного положительного преобразования только последнего критерия g_{m+1}.

Поскольку множество Парето не изменяется, если критерии умножать на положительные числа, то доказательство можно проводить для критерия

$$\hat{g}_{m+1} = \frac{g_{m+1}}{\theta_{ij}\theta_{ik}} = y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_k = $$
$$= y_i + \frac{y'_i - y''_i}{y''_j - y'_j}\, y_j + \frac{\bar{y}'_i - \bar{y}''_i}{\bar{y}''_k - \bar{y}'_k}\, y_k,$$

где фиксированные векторы y', y'', $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ задают информацию об относительной важности критериев, т. е. имеют место соотношения $y' \succ y''$, $\bar{y}' \succ \bar{y}''$, причем

$$\theta_{ij} = \frac{y''_j - y'_j}{y'_i - y''_i + y''_j - y'_j}, \quad \theta_{ik} = \frac{\bar{y}''_j - \bar{y}'_j}{\bar{y}'_i - \bar{y}''_i + \bar{y}''_j - \bar{y}'_j}.$$

Заменим y_s на $\tilde{y}_s = \alpha_s y_s + c_s$ $(\alpha_s > 0)$, $s = i, j, k$, в формуле, задающей критерий $\hat{g}_{m+1}$:

$$\hat{\tilde{g}}_{m+1} = \alpha_i y_i + c_i + \frac{\alpha_i y'_i + c_i - \alpha_i y''_i - c_i}{\alpha_j y''_j + c_j - \alpha_j y'_j - c_j}\left(\alpha_j y_j + c_j\right) +$$
$$+ \frac{\alpha_i \bar{y}'_i + c_i - \alpha_i \bar{y}''_i - c_i}{\alpha_k \bar{y}''_k + c_k - \alpha_k \bar{y}'_k - c_k}\left(\alpha_k y_k + c_k\right) =$$
$$= \alpha_i y_i + \alpha_i \frac{y'_i - y''_i}{y''_j - y'_j}\, y_j + \alpha_i \frac{\bar{y}'_i - \bar{y}''_i}{\bar{y}''_k - \bar{y}'_k}\, y_k + C,$$

где константа C не зависит от y_i, y_j, y_k.

Нетрудно видеть, что преобразованный критерий $\hat{\tilde{g}}_{m+1}$ можно получить из $\hat{g}_{m+1}$ умножением его на положительное число α_i и прибавлением константы C. Обратно, вычитая из $\hat{\tilde{g}}_{m+1}$ константу C и деля полученный результат на число α_i, получим $\hat{g}_{m+1}$. Отсюда вытекает, что строгие неравенства

$$\hat{g}_{m+1} = y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_k >$$
$$> y^*_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) y^*_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y^*_k = \hat{g}^*$$

и

$$\hat{\tilde{g}}_{m+1} = \tilde{y}_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) \tilde{y}_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_k >$$
$$> \tilde{y}^*_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) \tilde{y}^*_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}^*_k = \hat{\tilde{g}}^*$$

для критерия $\hat{g}_{m+1}$ и преобразованного критерия $\hat{\tilde{g}}_{m+1}$ являются эквивалентными друг другу. Следовательно, включения (4.1) и (4.6) инвариантны относительно линейного положительного преобразования критерия g_{m+1}, а значит и всех компонент векторной функции g. ⮟

4. Учет информации о том, что два критерия по отдельности важнее третьего. Здесь будет рассмотрен случай, когда имеются два сообщения об относительной важности, состоящие в том, что i-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности θ_{ik}, а также что j-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности θ_{jk}.

Предварительно сравним этот случай с ситуацией, когда имеется одно сообщение о том, что группа критериев $\{i, j\}$ важнее k-го критерия; при этом коэффициенты относительной важности в обоих случаях считаются одинаковыми. Используя лемму 4.1, легко убедиться в том, что *если каждый из критериев i и j в отдельности важнее k-го критерия, то группа $\{i, j\}$ важнее критерия k с теми же самыми коэффициентами относительной важности, но не наоборот*. Следовательно, набор из двух указанных сообщений является более содержательным, чем одно сообщение о том, что группа из двух критериев важнее третьего критерия.

Учет указанных двух сообщений об относительной важности критериев следует осуществлять при помощи следующей теоремы.

Теорема 4.4 (в терминах векторов). *Предположим, что выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор из двух сообщений о том, что i-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности θ_{ik}, а также что j-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности θ_{jk}. Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* Sel Y *справедливы включения* (4.1), *где $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в задаче с множеством возможных решений X и векторным критерием g вида*

$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$g_k = \theta_{ik}\left(1-\theta_{jk}\right)f_i + \left(1-\theta_{ik}\right)\theta_{jk}f_j + \left(1-\theta_{ik}\right)\left(1-\theta_{jk}\right)f_k\,. \quad (4.7)$$

⮙ Пусть K — выпуклый острый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$.

В силу определения 2.4 наличие информации о том, что i-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности θ_{ik} и j-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности θ_{jk} означает выполнение соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$ для векторов y' и y'' вида

$$y'_i = 1-\theta_{ik}, \quad y'_k = -\theta_{ik}, \quad y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$

$$y''_j = 1-\theta_{jk}, \quad y''_k = -\theta_{jk}, \quad y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j, k\}.$$

Пусть M — выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, e^2, \ldots, e^m, y', y''$. Вектор e^i можно представить в виде линейной положительной комбинации векторов e^k и y', а вектор e^j — в виде подобной комбинации векторов e^k и y''. Следовательно, конус M порождается набором векторов

$$e^1, \ldots, e^{i-1}, y', e^{i+1}, \ldots, e^{j-1}, y'', e^{j+1}, \ldots, e^m\,, \quad (4.8)$$

а значит, этот конус совпадает с множеством всех ненулевых линейных неотрицательных комбинаций вида

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_{i-1}e^{i-1} + \lambda_i y' + \lambda_{i+1}e^{i+1} + \ldots + \lambda_{j-1}e^{j-1} + \lambda_j y'' + \\ + \lambda_{j+1}e^{j+1} + \ldots + \lambda_m e^m.$$

Конус острый, так как является подмножеством острого конуса K.

Докажем совпадение конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\theta_{ik}(1-\theta_{jk})y_i + (1-\theta_{ik})\theta_{jk}y_j + (1-\theta_{ik})(1-\theta_{jk})y_k \geqq 0. \quad (4.9)$$

Для этого найдем общее решение системы (4.9), рассматривая соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y\rangle = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\langle \bar{y}, y\rangle = 0\,, \quad (4.10)$$

где $\bar{y}_i = \theta_{ik}(1-\theta_{jk})$, $\bar{y}_j = (1-\theta_{ik})\theta_{jk}$, $\bar{y}_k = (1-\theta_{ik})(1-\theta_{jk})$, $\bar{y}_s = 0$ для всех $s \in I \setminus \{i, j, k\}$.

В системе (4.10) m уравнений. Любая подсистема из $m-1$ вектора системы векторов $e^1, \ldots, e^{k-1}, \bar{y}, e^{k+1}, \ldots, e^m$ является линейно независимой. Поэтому для отыскания фундаментальной совокупности решений системы линейных неравенств (4.9) достаточно найти по одному ненулевому решению каждой из подсистем системы (4.10), получающейся из (4.10) удалением какого-то одного из ее уравнений (при этом найденное решение должно удовлетворять системе неравенств (4.9)).

Если из системы уравнений (4.10) удалить последнее уравнение, то полученная система будет иметь решение e^k. Если из системы (4.10) удалить уравнение $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s = i$ (или $s = j$), то соответствующая система уравнений будет обладать решением y' (или y''). Удаление уравнения $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s \in I \setminus \{i, j, k\}$ приводит к подсистеме, имеющей решение e^s.

Таким образом, одна из фундаментальных совокупностей решений системы линейных неравенств (4.9) имеет вид (4.8). Следовательно, конус M совпадает с множеством ненулевых неотрицательных решений системы линейных неравенств (4.9).

Из включений

$$R_+^m \subset M \subset K$$

вытекают включения

$$\operatorname{Ndom} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{4.11}$$

где

$$P(\widehat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества Y относительно конусного отношения с конусом M.

Пусть $x, x^* \in X$, $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$. На основании установленного выше совпадения конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (4.9) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда вектор $f(x) - f(x^*)$ удовлетворяет системе неравенств

$$f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\theta_{ik}(1-\theta_{jk})\Big(f_i(x) - f_i(x^*)\Big) + (1-\theta_{ik})\theta_{jk}\Big(f_j(x) - f_j(x^*)\Big) +$$
$$+ (1-\theta_{ik})\Big(1-\theta_{jk}\Big)\Big(f_k(x) - f_k(x^*)\Big) \geqq 0,$$

причем хотя бы одно из неравенств этой системы должно быть строгим (чтобы исключить случай $f(x) = f(x^*)$). Эту систему неравенств можно переписать в виде $g(x) \geq g(x^*)$ с векторной функцией g, определяемой равенствами (4.7). Для завершения доказательства включений (4.1) остается в (4.11) воспользоваться включением $\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y$.

В терминах решений установленный результат принимает следующий вид.

Теорема 4.4 (в терминах решений). *Пусть выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор из двух сообщений о том, что i-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности* θ_{ik}, *а также что j-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности* θ_{jk}. *Тогда для любого непустого множества выбираемых решений выполняются включения* (4.6), *где* $P_g(X)$ — *множество парето-оптимальных решений в задаче с множеством возможных решений* X *и векторным критерием* g *вида* (4.7).

Для геометрической иллюстрации теоремы 4.4 обратимся к многокритериальной задаче выбора с линейными критериями, в которой $m = n = 3$, $f_s(x) = \langle c^s, x\rangle$, $s = 1, 2, 3$, причем первый и второй критерии важнее третьего критерия по отдельности с коэффициентами относительной важности $\theta_{13} \approx 0.2$, $\theta_{23} \approx 0.6$ (см. рис. 4.3).

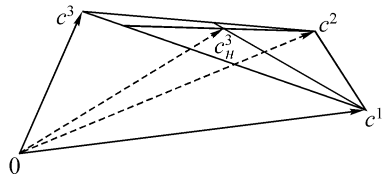

Рис. 4.3.

Конус целей, соответствующий новой многокритериальной задаче, является трехгранным и порождается векторами $c^1, c^2, c_н^3$. Этот конус представляет собой пересечение двух трехгранных конусов, один из которых соответствует многокритериальной задаче, в которой учитывается информация о том, что первый критерий важнее третьего, а второй — многокритериальной задаче, где учтена информация о бóльшей важности второго критерия по сравнению с третьим.

Теорема 4.5 применима к любой многокритериальной задаче, значения критериев в которой измеряются в количественной шкале. Об этом свидетельствует следующий результат.

Теорема 4.5. *Включения* (4.1) *и* (4.6) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования всех компонент векторного критерия* g *вида* (4.7).

⮝ Здесь так же, как и при доказательстве теоремы 4.4, достаточно проверить инвариантность множеств $P(\overline{Y})$ и $P_g(X)$ из (4.1) и (4.6) относительно линейного положительного преобразования только критерия g_k.

Поскольку множество Парето не изменяется, если критерии умножать на положительные числа, то для доказательства введем

$$\hat{g}_k = \frac{g_k}{\theta_{ik}\theta_{ik}} = \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_k =$$
$$= \frac{\overline{y}_j' - \overline{y}_j''}{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'} y_i + \frac{y_i' - y_i''}{y_k'' - y_k'} y_j + \frac{y_i' - y_i''}{y_k'' - y_k'} \cdot \frac{\overline{y}_j' - \overline{y}_j''}{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'} y_k,$$

где фиксированные векторы y', y'', $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ задают информацию об относительной важности критериев, т. е. имеют место соотношения $y' \succ y''$, $\overline{y}' \succ \overline{y}''$, причем

$$\theta_{ik} = \frac{y_k'' - y_k'}{y_i' - y_i'' + y_k'' - y_k'}, \quad \theta_{jk} = \frac{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'}{\overline{y}_j' - \overline{y}_j'' + \overline{y}_k'' - \overline{y}_k'}.$$

Заменим y_s на $\tilde{y}_s = \alpha_s y_s + c_s$ ($\alpha_s > 0$), $s = i, j, k$, в формуле, определяющей критерий $\hat{g}_k$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{g}}_k &= \frac{\alpha_j \overline{y}_j'' + c_j - \alpha_j \overline{y}_j' - c_j}{\alpha_k \overline{y}_k'' + c_k - \alpha_k \overline{y}_k' - c_k}(\alpha_i y_i + c_i) + \\
&+ \frac{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i}{\alpha_k y_k'' + c_k - \alpha_k y_k' - c_k}(\alpha_j y_j + c_j) + \\
&+ \frac{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i}{\alpha_k y_k'' + c_k - \alpha_k y_k' - c_k} \cdot \frac{\alpha_j \overline{y}_j' + c_j - \alpha_j \overline{y}_j'' - c_j}{\alpha_k \overline{y}_k'' + c_k - \alpha_k \overline{y}_k' - c_k}(\alpha_k y_k + c_k) = \\
&= \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k} \cdot \frac{\overline{y}_j'' - \overline{y}_j'}{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'} y_i + \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k} \frac{y_i' - y_i''}{y_k'' - y_k'} y_j + \\
&+ \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k} \cdot \frac{y_i' - y_i''}{y_k'' - y_k'} \cdot \frac{\overline{y}_j' - \overline{y}_y''}{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'} y_k + C,
\end{aligned}$$

где константа C не зависит от y_i, y_j, y_k.

Из последнего представления видно, что преобразованный критерий $\tilde{\hat{g}}_k$ можно получить из $\hat{g}_k$ умножением его на положительное число $\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k}$ и прибавлением константы C. Обратно, вычитая из $\tilde{\hat{g}}_k$ константу C и деля полученный результат на число $\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k}$, придем к $\hat{g}_k$. Отсюда вытекает, что строгие неравенства

$$\begin{aligned}
\hat{g}_k &= \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_k > \\
&> \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_j^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_k^* = \hat{g}_k^*
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{g}}_k &= \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_k > \\
&> \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_j^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_k^* = \tilde{\hat{g}}_k^*
\end{aligned}$$

для критерия $\hat{g}_k$ и преобразованного критерия $\tilde{\hat{g}}_k$ являются эквивалентными друг другу. Следовательно, включения (4.1) и (4.6) инвариантны относительно линейного положительного преобразования критерия g_k. ∀

4.2. Непротиворечивость набора информации об относительной важности критериев

1. Предварительное рассмотрение. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. В соответствии с определением 3.3 задание вектора $y' \in R^m$ с компонентами

$$y_i' = w_i^* \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_j' = -w_j^* \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s' = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup B),$$

для которого верно соотношение $y' \succ 0_m$, означает, что группа критериев A важнее группы критериев B с двумя наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Поскольку $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, указанный вектор y' имеет по крайней мере одну положительную и по крайней мере одну отрицательную компоненты. Введем множество всех подобного рода векторов:

$$N^m = R^m / \left[R_+^m \cup (-R_+^m) \cup \{0_m\}\right].$$

Предположим, что в результате прямого опроса ЛПР или же на основе анализа действий, ранее предпринимавшихся данным ЛПР, была выявлена такая пара различных векторов $u, v \in R^m$, что вектор u предпочтительнее вектора v, т. е. $u \succ_Y v$. Согласно аксиоме 2 последнее соотношение эквивалентно $u \succ v$. Пусть $u - v \in N^m$. Обозначим множество номеров положительных компонент вектора $u - v$ через A, а множество номеров отрицательных компонент — через B. Очевидно, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Поэтому задание произвольной пары векторов $u, v \in R^m$, для которых выполнены соотношения $u \succ v$ и $u - v \in N^m$, можно рассматривать как наличие информации о том, что группа критериев A важнее группы критериев B (с соответствующими двумя наборами положительных параметров). Тем самым, любая пара векторов $u, v \in R^m$, для которой справедливо соотношение $u - v \in N^m$, может при определенном условии (т. е. при выполнении соотношения $u \succ v$) задавать информацию об относительной важности критериев.

Теперь допустим, что имеется набор пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \quad u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1, 2, ..., k. \tag{4.12}$$

Возникает вопрос: могут ли все эти пары векторов участвовать в задании определенного набора информации об относительной важности критериев? Простые примеры показывают, что в общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным.

Пример 4.1. Пусть $m = 2, k = 2$ и

$$u^1 = (1, -3), \quad u^2 = (-2, 1), \ v^1 = v^2 = 0_2.$$

Допустим, что данный набор из двух пар векторов задает информацию об относительной важности критериев, так что имеют место соотношения $u^1 \succ v^1$ и $u^2 \succ v^2$. Складывая эти соотношения почленно, на основе леммы 4.1 получим $u^1 + u^2 \succ v^1 + v^2$ или, что то же самое, $(-1, -2) \succ 0_2$. С другой стороны, справедливо соотношение $0_2 \succ (-1, -2)$, так как $0_2 \geq (-1, -2)$. Полученные два соотношения $(-1, -2) \succ 0_2$ и $0_2 \succ (-1, -2)$ противоречат асимметричности отношения $\succ$. Следовательно, одновременное выполнение обоих соотношений $u^1 \succ v^1$ и $u^2 \succ v^2$ для указанных выше пар векторов невозможно ни для какого бинарного отношения, удовлетворяющего аксиомам 2–4.

2. Определение непротиворечивого набора векторов.

Определение 4.1. Пусть имеется набор пар векторов (4.12). Будем называть этот набор *непротиворечивым* (*совместным*), если существует хотя бы одно бинарное отношение $\succ'$, подчиненное аксиомам 2–4 и такое, что выполняются соотношения $u^s \succ' v^s$, $s = 1, 2, ..., k$ [1]).

Непротиворечивость набора векторов является необходимым условием того, чтобы он задавал набор информации об относительной важности критериев хотя бы в какой-то одной многокритериальной задаче выбора. Таким образом, непротиворечивый набор векторов (4.12) является своеобразной «заготовкой» для набора информации об относительной важности критериев, которым может располагать некоторое ЛПР.

[1]) На основе аддитивности отношения $\succ'$ в этом определении и во всем последующем рассмотрении, связанном с непротиворечивостью информации об относительной важности критериев, можно было бы положить $v^s = 0_m$, $s = 1, 2, ..., k$. Однако, здесь, по мнению автора, удобнее использовать принятую начиная с данного определения несколько более громоздкую форму с ненулевыми в общем случае векторами v^s, поскольку именно эта форма больше соответствует практике получения дополнительной информации об относительной важности критериев.

При решении реальных задач принятия решений, когда в наличии имеется целое семейство различного рода сообщений об относительной важности критериев, может оказаться так, что векторы, участвующие в задании набора информации, образуют противоречивый набор. Это связано с тем, что информация об относительной важности, как правило, не точна и чаще всего отражает лишь желательную, а не действительную картину предпочтений ЛПР. Кроме того, ЛПР, само того не желая, иногда может несколько отклоняться от класса задач многокритериального выбора, ограниченных аксиомами 2–4, и в таком случае его поведение следует подкорректировать, объявив о противоречивости его предпочтений, выраженных в форме набора информации об относительной важности критериев.

Так или иначе, если в процессе принятия решений на основе количественной информации об относительной важности критериев присутствует набор такого рода информации, то его обязательно следует проверять на непротиворечивость (совместность). А для осуществления такой проверки необходимо располагать соответствующим инструментарием, поскольку использовать для этой цели лишь определение 4.1 не представляется возможным.

3. Критерии непротиворечивости. Здесь будут даны три критерия непротиворечивости конечного набора векторов. Один из них имеет геометрическую форму, второй представляет собой алгебраический вариант, а третий — алгоритмический, удобный для реализации в среде программирования.

Теорема 4.6 (геометрический критерий непротиворечивости). *Для того чтобы набор пар векторов* (4.12) *был непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы конус, порожденный векторами*

$$e^1, e^2, ..., e^m, u^1 - v^1, u^2 - v^2, ..., u^k - v^k, \tag{4.13}$$

являлся острым.

⮙ На основе определения 4.1 и следствия 2.1 можно заключить, что набор векторов (4.12) будет непротиворечивым тогда и только тогда, когда существует конусное отношение с острым выпуклым конусом M (без нуля), для которого выполняются соотношения

$$R^m_+ \subset M, \ \ u^s - v^s \in M, \ \ s = 1, 2, ..., k. \tag{4.14}$$

Необходимость. Пусть набор векторов (4.12) является непротиворечивым. Тогда в силу сказанного в начале доказательства существует острый выпуклый конус M (без нуля), для которого верно (4.14). Векторы (4.13) принадлежат конусу M и порождают в общем случае некоторый выпуклый подконус конуса M. Поскольку подконус острого конуса сам является острым, то набор векторов (4.13) порождает острый выпуклый конус.

Достаточность. Рассмотрим выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами (4.13). Обозначим его M. По условию он — острый. Поскольку все единичные векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m$ входят в набор векторов, порождающих M, то $R_+^m \subset M$. Следовательно, для этого конуса справедливы соотношения (4.14).⮟

Теорема 4.7 (алгебраический критерий непротиворечивости). *Для того чтобы набор пар векторов* (4.12) *был непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы однородная система линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) = 0_m \tag{4.15}$$

не имела ни одного ненулевого неотрицательного решения относительно [1]) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

⮝ Теорема является следствием предыдущей теоремы и одного утверждения из теории систем линейных неравенств (см. [34], с. 269).⮟

Рассмотрим самую простую ситуацию, когда информация об относительной важности критериев состоит из одного сообщения (т. е. $k = 1$). Соответствующая этому случаю система линейных уравнений (4.15) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i = -\mu_1(u^1 - v^1). \tag{4.16}$$

Допустим, что эта система имеет ненулевое неотрицательное решение $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1$. Если $\mu_1 = 0$, то (4.16) превращается в равенство $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i = 0_m$, где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ строго положителен. Но тогда это равенство является ложным.

[1]) Отсутствие ненулевых неотрицательных решений означает, что данная система если и имеет некоторое решение $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, то либо все эти числа равны нулю, либо по крайней мере одно из них — отрицательное.

Пусть $\mu_1 \neq 0$. Вектор $u^1 - v^1$ имеет хотя бы одну положительную компоненту и поэтому вектор $-\mu_1(u^1 - v^1)$, записанный в правой части равенства (4.16) и имеющий по крайней мере одну отрицательную компоненту, невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации единичных векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m$. Следовательно, равенство (4.16) вновь невозможно, а значит система (4.15) не имеет ни одного ненулевого неотрицательного решения.

В итоге приходим к следующему результату.

Следствие 4.1. *Если имеется в точности одно сообщение об относительной важности критериев, то вектор, порождающий эту информацию, образует непротиворечивый набор. Набор пар векторов* (4.12) *может оказаться противоречивым лишь в том случае, когда число пар векторов данного набора более одной.*

Тот факт, что уже при $k = 2$ противоречивая ситуация возможна, демонстрирует рассмотренный ранее пример 4.1, для которого система уравнений (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 \qquad + \mu_2(-2) &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_1(-3) + \mu_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

и, как нетрудно в том убедиться, имеет, например, следующее ненулевое неотрицательное решение $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

Следствие 4.2. *Пусть имеются две группы номеров критериев* $i_s \in I, j_s \in I, s = 1, 2, \ldots, k, \{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_k\} = \varnothing$, *причем среди номеров первой группы* (*так же, как среди номеров второй группы*) *могут быть* (*и даже все*) *одинаковые. Непротиворечивым является набор пар таких векторов* (4.12), *что у каждого вектора* $u^s - v^s$ *компонента с номером* i_s *— положительна, с номером* j_s *— отрицательна, а все остальные компоненты — равны нулю,* $s = 1, 2, \ldots, k$.

⮝ Предположим противное: система линейных уравнений (4.15) обладает ненулевым неотрицательным решением $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. Сначала рассмотрим случай, когда среди чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ имеется, по крайней мере, одно положительное. В этом случае у вектора $\sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s)$ существует хотя бы одна положительная компонента среди тех, которые принадлежат номерам первой группы. Отсюда получаем противоречие начальному предположению о том, что сумма $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s)$ равна нулевому вектору.

Если же все коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ равны нулю, то система (4.15) превращается в $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i = 0_m$, где хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля. Но такая система ненулевых решений не имеет, что вновь противоречит начальному предположению.⮟

При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве последнего следствия, можно получить следующий более общий результат.

Следствие 4.3. *Набор пар векторов* (4.12) *является непротиворечивым, если он удовлетворяет следующим условиям: у каждого вектора* $u^s - v^s$ *все компоненты, номера которых принадлежат множеству* A_s, $A_s \subset I$, *положительны, все компоненты, номера которых принадлежат множеству* B_s, $B_s \subset I$, *отрицательны, а все остальные компоненты равны нулю,* $s = 1, 2, ..., k$, *причем для любой пары различных номеров* $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$ *выполняется равенство* $A_i \cap B_j = \varnothing$.

Теперь сформулируем еще один критерий для проверки непротиворечивости (точнее говоря, противоречивости) набора векторов.

Теорема 4.8 (алгоритмический критерий противоречивости). *Для того чтобы набор векторов* (4.12) *был противоречивым, необходимо и достаточно, чтобы в задаче линейного программирования*

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m \to \min,$$

$$\lambda_1 + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u_1^s - v_1^s) + \xi_1 = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_m + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u_m^s - v_m^s) + \xi_m = 0\,,$$

$$\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k = 1,$$

$$\lambda_i \geqq 0,\ \xi_i \geqq 0,\ i = 1, 2, ..., m;\ \mu_s \geqq 0,\ s = 1, 2, ..., k, \qquad (4.17)$$

оптимальное значение целевой функции было равно нулю.

⮝ Нетрудно видеть, что система ограничений в форме равенств в задаче линейного программирования (4.17) без учета искусственных переменных $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ и равенства $\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k = 1$ полностью совпадает с системой линейных уравнений (4.15). В силу теоремы 4.8 набор пар векторов (4.12) является противоречивым тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений (4.15) имеет по крайней мере одно ненулевое неотрицательное решение. Это, в свою очередь, справедливо тогда и только тогда, когда в задаче линейного программирования (4.17) существует допустимое решение, в котором все искусственные переменные равны нулю: $\xi_i = 0$ для $i = 1, 2, ..., m$. Последнее равносильно тому, что оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования (4.17) равно нулю.⮟

Замечание. Следует отметить, что задача линейного программирования (4.17) всегда имеет оптимальное решение, так как значения ее целевой функции ограничены снизу нулем. Поэтому оптимальное значение целевой функции в этой задаче всегда существует и либо равно нулю, либо строго больше нуля.

4. Существенность информации об относительной важности критериев. Выше уже отмечалось, что на практике процесс получения информации об относительной важности критериев часто носит последовательный характер, т. е. сначала получают одно сообщение, затем — второе и т. д. В этом случае важно уметь распознавать сообщения о важности, противоречащие полученным ранее. Кроме того, крайне полезно уметь отличать существенную информацию от несущественной. Например, если уже было известно, что i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности 0.5, то аналогичное сообщение с меньшим коэффициентом не вносит ничего нового, существенного по сравнению с первым сообщением и поэтому его можно просто проигнорировать.

Пусть имеется непротиворечивый набор пар векторов (4.12). Добавим к нему еще одну такую пару векторов u^{k+1}, v^{k+1}, что $u^{k+1} - v^{k+1} \in N^m$. В результате получим «расширенный» набор пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m,\ u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1, 2, ..., k+1. \qquad (4.18)$$

Определение 4.2. Для непротиворечивого набора пар векторов (4.12) пару u^{k+1}, v^{k+1} будем называть *существенной*, если выпуклый конус, порожденный единичными векторами $e^1, e^2, ..., e^m$ вместе с векторами $u^i - v^i$, $i = 1, 2, ..., k+1$, не совпадает с выпуклым конусом, порожденным теми же самыми единичными векторами и векторами $u^i - v^i$, $i = 1, 2, ..., k+1$.

Смысл введенного определения состоит в том, что существенная дополнительная информация об относительной важности критериев должна изменять имеющееся конусное отношение предпочтения. Нетрудно понять, что несовпадение конусов, в которых участвуют наборы (4.12) и (4.18), может произойти лишь за счет того, что конус, порожденный расширенным набором векторов, будет шире конуса, образованного исходным набором k векторов.

Теорема 4.9 (критерий непротиворечивости и существенности). *Пусть набор пар векторов* (4.12) *является непротиворечивым. Для того чтобы расширенный набор* (4.18) *одновременно был непротиворечивым, а пара векторов* u^{k+1}, v^{k+1} *являлась существенной, необходимо и достаточно, чтобы обе системы однородных линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) = \pm\left(u^{k+1} - v^{k+1}\right) \tag{4.19}$$

не имели ни одного неотрицательного решения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

⮙ Сначала решим вопрос с непротиворечивостью. Согласно алгебраическому критерию непротиворечивости расширенный набор векторов (4.18) будет совместным тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) + \mu_{k+1}\left(u^{k+1} - v^{k+1}\right) = 0_m \tag{4.20}$$

не имеет ни одного ненулевого неотрицательного решения. Проверим, что это равносильно тому, что система уравнений (4.19−), т. е. система (4.19), в правой части которой взят знак минус, не имеет неотрицательного решения. Действительно, если система уравнений (4.20) не имеет ненулевых неотрицательных решений, то система (4.19−) не может иметь неотрицательного решения. Обратно, если вторая из указанных систем (т. е. (4.19−)) не имеет неотрицательного решения, а первая обладает ненулевым неотрицательным решением $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, то нетрудно прийти к противоречию. В самом деле, случай $\mu_{k+1} = 0$ невозможен из-за того, что набор векторов (4.12) является непротиворечивым. Значит, $\mu_{k+1} > 0$. В таком случае, разделив обе части равенства (4.20) на μ_{k+1}, придем к тому, что система линейных уравнений (4.19−) имеет неотрицательное решение. Это противоречит начальному предположению. Тем самым, первая часть теоремы, связанная с непротиворечивостью доказана.

Перейдем к доказательству второй части, посвященной существенности пары векторов u^{k+1}, v^{k+1}. Согласно определению 4.2 эта пара векторов является существенной тогда и только тогда, когда вектор $u^{k+1} - v^{k+1}$ не принадлежит выпуклому конусу, порожденному векторами $e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1 - v^1, u^2 - v^2, \ldots, u^k - v^k$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда неоднородная система линейных уравнений (4.19+) не имеет ни одного неотрицательного решения. ⮛

Замечание. В доказанной теореме есть две части — одна посвящена непротиворечивости, а вторая — существенности пары векторов u^{k+1}, v^{k+1}. Из доказательства видно, что первая часть теоремы связана с существованием неотрицательного решения системы уравнений (4.19−), тогда как вопрос существенности решается в терминах системы уравнений (4.19+).

4.3. Использование набора информации об относительной важности критериев

1. Случай, когда несколько критериев по отдельности важнее одного критерия. В п. 4 разд. 4.2 была рассмотрена ситуация, когда два критерия по отдельности важнее третьего. Ниже изучается общий случай, где число критериев, которые являются более важными, чем некоторый один данный критерий, может быть больше двух.

Теорема 4.10. *Пусть* $k, i_1, i_2, \ldots, i_l \in I$, $l \leqq m - 1$. *Предположим, что выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор информации об относительной важности, состоящей из* l *сообщений о том, что* i_1*-й критерий важнее* k*-го с коэффициентом относительной важности* θ_{i_1k}, i_2*-й критерий важнее* k*-го с коэффициентом относительной важности* θ_{i_2k}, ..., i_l*-й критерий важнее* k*-го с коэффициентом относительной важности* θ_{i_lk}. *Тогда для любых непустых множеств выбираемых векторов и решений выполняются включения*

$$\mathrm{Sel}\, Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y) \tag{4.1}$$

и

$$\mathrm{Sel}\, X \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{4.6}$$

где $P(\widehat{Y})$ ($P_g(Y)$) — *множество парето-оптимальных векторов (парето-оптимальных решений) в многокритериальной задаче с множеством возможных решений* X *и векторным критерием* g, *имеющим компоненты*

$$g_s = f_s, \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$g_k = f_k + \sum_{p=1}^{l} \frac{\theta_{i_p k}}{1-\theta_{i_p k}} f_{i_p}. \qquad (4.21)$$

⮝ Как обычно, пусть K означает острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$. Наличие имеющейся в условиях теоремы информации об относительной важности критериев означает выполнение включения $y^{i_p} \in K$ для каждого $p = 1, 2, ..., l$, где у m-мерного вектора y^{i_p} все компоненты равны нулю, кроме i_p-й и k-й, которые определяются равенствами $y^{i_p}_{i_p} = 1 - \theta_{i_p k}$ и $y^{i_p}_k = -\theta_{i_p k}$.

Через M обозначим выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, y^{i_1}, y^{i_2}, ..., y^{i_l}$. Вектор e^{i_p} можно представить в виде линейной комбинации векторов e^k и y^{i_p} с положительными коэффициентами. Следовательно, конус M порождается набором векторов вида

$$e^i, \; i = 1, 2, ..., m \quad (i \neq i_p \text{ для всех } p = 1, 2, ..., l);$$

$$y^{i_1}, y^{i_2}, ..., y^{i_l}, \qquad (4.22)$$

а значит, этот конус совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций векторов (4.22).

Установим совпадение конуса M с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$y_k + \sum_{p=1}^{l} \frac{\theta_{i_p k}}{1-\theta_{i_p k}} y_{i_p} \geqq 0. \qquad (4.23)$$

С этой целью найдем общее решение системы линейных неравенств (4.23), рассмотрев соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y \rangle = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\langle \bar{y}, y \rangle = 0, \qquad (4.24)$$

где

$$\bar{y}_k = 1, \quad \bar{y}_{i_p} = \frac{\theta_{i_p k}}{1-\theta_{i_p k}}, \; p = 1, 2, ..., l,$$

а все остальные компоненты вектора $\bar{y}$ равны нулю.

В системе (4.24) имеется m уравнений. Любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, ..., e^{k-1}, \bar{y}, e^{k+1}, ..., e^m$ линейно независима. Поэтому для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (4.23) достаточно найти по одному ненулевому решению каждой из подсистем системы уравнений (4.24), получающейся из (4.24) удалением какого-то одного уравнения (при этом все найденные решения должны удовлетворять системе неравенств (4.23)).

При удалении последнего уравнения из (4.24) получим подсистему с решением e^k. Если из (4.24) удалить уравнение $\langle e^s, y \rangle = 0$ при $s = i_p$ ($p \in \{1, 2, ..., l\}$), то соответствующая подсистема будет обладать решением y^{i_p}. Удаление уравнения $\langle e^s, y \rangle = 0$ при $s \in I \setminus \{k, i_1, i_2, ..., i_l\}$ приводит к подсистеме, имеющей решение e^s.

Итак, фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (4.23) имеет вид (4.22). Поэтому конус M действительно совпадает с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (4.23).

Остальная часть доказательства почти дословно повторяет соответствующую часть доказательств теорем 4.4 и 4.5 с очевидными изменениями в формулах, и поэтому здесь не приводится.⮟

2. Использование набора взаимно независимой информации об относительной важности критериев. Как было указано в п. 1 предыдущего раздела, учет набора взаимно независимой информации, состоящей из двух сообщений, происходит последовательно. Идея последовательного учета набора взаимно независимой информации может быть применена и в случае более двух сообщений. Например, имеет место следующий результат.

Теорема 4.11. *Пусть выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор взаимно независимой информации об относительной важности критериев, состоящий из k сообщений о том, что группа критериев A_s важнее группы критериев B_s с коэффициентами относительной важности θ^s_{ij} для всех $i \in A_s, j \in B_s, s = 1, 2, ..., k$ $\left(1 < k \leqq \frac{m}{2}\right)$. Обозначим*

$$A = \bigcup_{s=1}^{k} A_s, \quad B = \bigcup_{s=1}^{k} B_s.$$

Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов и непустого множества выбираемых решений выполняются включения

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\hat{Y}) \subset P(Y), \quad \operatorname{Sel} X \subset P_g(X) \subset P_f(X),$$

где $\widehat{Y}$ *— множество значений векторной функции* g (т. е. $\widehat{Y} = g(X)$), *а* g *—* p*-мерная векторная функция,* $p = m - |B| + \sum_{s=1}^{k} |A_s| \cdot |B_s|$, *с компонентами, составленными из тех компонент* f_i *векторного критерия* f, *для которых* $i \in I \setminus B$, *а также компонент*

$$g_{is}^{s} = \theta_{ij}^{s} f_i + \left(1 - \theta_{ij}^{s}\right) f_j \quad \text{для всех } i \in A_s,\ j \in B_s,\ s = 1, 2, \ldots, k.$$

3. Задача выпуклого анализа. Легко понять, что рассмотренные выше случаи использования набора информации об относительной важности критериев далеко не исчерпывают всех возможных вариантов. Разумеется, это относится к наборам информации, которые не являются взаимно независимыми. Например, выше не приводились формулы для пересчета нового критерия для случая, когда одна группа критериев важнее другой группы критериев, а вторая, в свою очередь, является более важной, чем первая. Ждет своего разрешения ситуация, в которой один критерий важнее каждого из некоторого набора более чем двух критериев в отдельности. И этот список можно легко продолжить.

Из приведенных доказательств теорем, посвященных учету различного рода информации об относительной важности критериев, можно усмотреть вполне определенную схему, на основе которой получаются соответствующие формулы для пересчета нового критерия. Кратко эту схему можно описать следующим образом. С самого начала, когда еще нет никакой информации об относительной важности критериев, справедливо лишь включение $R_+^m \subset K$, где символом K обозначен острый выпуклый конус (неизвестного) конусного отношения $\succ$. Указанное включение выполняется благодаря аксиоме Парето. Наличие в общем случае некоторого набора информации, состоящего из k сообщений об относительной важности критериев, на геометрическом языке означает задание k векторов $y^i \in R^m$, для которых выполнено $y^i \succ 0_m$, или, что то же самое, $y^i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Далее вводится острый выпуклый конус M, порожденный векторами $e^1, e^2, \ldots, e^m, y^1, y^2, \ldots, y^k$. Этот конус определяет конусное отношение того же самого класса, что и неизвестное отношение предпочтения $\succ$, но более широкое, так как $M \subset K$. Конус M является конечнопорожденным, а значит многогранным. Число компонент нового векторного критерия в точности совпадает с числом $(m-1)$-мерных граней конуса M, а нормальные (направленные внутрь конуса) векторы этих граней дают возможность получить формулы для пересчета нового векторного критерия.

Например, в самом простом случае, когда i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности θ_{ij}, конус M (см. теорему 2.5) имел следующие нормальные векторы, направленные внутрь конуса — $e^1, \ldots, e^{j-1}, \theta_{ij} e^i + \left(1 - \theta_{ij}\right) e^j, e^{j+1}, \ldots, e^m$. Поэтому в данном случае формула для пересчета нового j-го критерия принимает вид $g_j = \theta_{ij} f_i + \left(1 - \theta_{ij}\right) f_j$.

В соответствии со сказанным, сформулируем общую задачу (она формулируется в терминах выпуклого анализа), решение которой позволило бы получать формулы для пересчета новых критериев в любых ситуациях с произвольными наборами информации об относительной важности критериев.

Сначала, однако, напомним определение двойственного конуса. Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^k$ — конечный набор векторов m-мерного евклидова пространства. Выпуклый конус, порожденный указанными векторами, обозначим

$$M = \operatorname{cone}\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}.$$

Он представляет собой множество всех неотрицательных линейных комбинаций указанных векторов. Будем считать, что этот конус острый и его размерность [1]) равна m.

Двойственный конус [4] по отношению к конусу M обозначим символом C. Он определяется равенством

$$C = \{x \in R^m \mid \langle x, y \rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } y \in M\}.$$

Например, двойственным конусом для неотрицательного ортанта будет сам неотрицательный ортант.

Двойственный конус для многогранного (или конечнопорожденного) конуса так же является многогранным конусом, а значит, порождается некоторым конечным набором векторов. Известно также [28], что двойственный для острого m-мерного конуса сам является острым и m-мерным.

Задача. *Найти алгоритм, который для произвольного заданного конечного набора векторов* $a^1, a^2, \ldots, a^k$, *порождающих выпуклый острый* m*-мерный конус* M, *дает возможность за обозримое время построить минимальный набор векторов* $b^1, b^2, \ldots, b^n$, *порождающих двойственный конус* C, *т. е. таких, что*

$$C = \operatorname{cone}\{b^1, b^2, \ldots, b^n\}.$$

[1]) *Размерность конуса* совпадает с размерностью минимального подпространства, содержащего данный конус.

На геометрическом языке сформулированная задача заключается в построении на основе ребер конуса M, набора нормальных векторов всех гиперплоскостей, являющихся $(m-1)$-мерными гранями M.

В частном случае, когда конусом M является неотрицательный ортант пространства R^m, сформулированная задача тривиальна и ее решением будет, например, набор единичных ортов этого пространства (тех самых, которые порождают данный неотрицательный ортант).

Имея в распоряжении алгоритм, о котором идет речь в сформулированной выше задаче, можно для любого конечного непротиворечивого набора информации об относительной важности критериев за обозримое время получать формулы для пересчета старого векторного критерия и образования нового, на основе которого строится оценка сверху для множества выбираемых решений (векторов).

4.4. Алгоритмический подход к использованию произвольного набора информации об относительной важности критериев

1. Идея алгоритмического подхода. Рассмотрим ситуацию, когда информация об относительной важности критериев содержит произвольный конечный набор k сообщений, каждое из которых состоит в том, что некоторая группа критериев важнее какой-то другой группы критериев с определенными коэффициентами относительной важности. При этом предполагается, что участвующие в данном наборе пары сообщений в общем случае не являются взаимно независимыми.

Как указывалось выше, задание подобной информации равносильно указанию набора из k пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \ u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

для которых выполнены соотношения $u^i \succ v^i$, $i = 1, 2, ..., k$. Напомним, что множество N^m составляют все m-мерные векторы, имеющие по крайней мере одну положительную и хотя бы одну отрицательные компоненты.

Введем выпуклый конус M (без нуля), порожденный векторами

$$e^1, e^2, ..., e^m, u^1 - v^1, ..., u^k - v^k. \tag{4.25}$$

Все указанные векторы принадлежит острому выпуклому конусу K, который задает конусное отношение предпочтения $\succ$. Поэтому справедливо включение $M \subset K$, а значит конус M — острый. Кроме того, благодаря аксиоме Парето он содержит неотрицательный ортант R^m_+, т. е. $R^m_+ \subset M$.

Обозначим через $\succ_M$ конусное отношение с конусом M. В силу следствия 2.1 это конусное отношение удовлетворяет аксиомам 2–4, т. е. относится к отношениям того же класса, что и исходное отношение $\succ$. Следует, правда, заметить, что отношение $\succ$ удовлетворяет еще и аксиоме 1, а для отношения $\succ_M$ оно может оказаться не выполненным. Но его выполнение для дальнейшего и не понадобится.

Таким образом, имеются два конусных отношения $\succ$ и $\succ_M$, которые в силу включения $M \subset K$ связаны друг с другом импликацией

$$y' \succ_M y'' \ \Rightarrow \ y' \succ y''$$

для $y', y'' \in R^m$.

Наличие этой связи приводит к тому, что множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}\, Y$, построенное на основе отношения $\succ$, является подмножеством множества недоминируемых векторов, определяемого с помощью отношения $\succ_M$, т. е.

$$\mathrm{Ndom}\, Y \subset \mathrm{N\,dom}_M\, Y, \tag{4.26}$$

где

$$\mathrm{Ndom}_M\, Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \succ_M y^*\}.$$

Включение (4.26) означает, что множество $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ является некоторой оценкой сверху для множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}\, Y$, а значит и для множества выбираемых векторов $\mathrm{Sel}\, Y$. Построив множество $\mathrm{Ndom}_M\, Y$, получим в общем случае более узкое множество, чем множество Парето, и, тем самым, за счет удаления некоторых парето-оптимальных векторов произойдет сужение множества Парето. В этом и заключается существо подхода, предлагаемого ниже.

2. Мажорантное отношение. Конусное отношение $\succ_M$ с острым выпуклым конусом M (без нуля), порожденным векторами (4.25), будем называть *мажорантным отношением*. Это наименование обуславливается тем, что на его основе далее будет построена оценка сверху (т. е. мажоранта) для множества выбираемых векторов (решений).

Предлагаемый алгоритмический подход основан на применении следующего утверждения.

Теорема 4.12. *Пусть* $y', y'' \in R^m$, $y' \neq y''$. *Соотношение* $y' \succ_M y''$ *имеет место тогда и только тогда, когда равно нулю оптимальное значение целевой функции в следующей канонической задаче линейного программирования*

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_s^i \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_s^i - v_s^i) \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) + \xi_s = \\ = |y'_s - y''_s|, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \geqq 0. \tag{4.27}$$

Здесь символ sign (a) определяется равенством

$$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0 \text{ или } a = 0, \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

⮝ Прежде всего, заметим, что соотношение $y' \succ_M y''$ выполняется тогда и только тогда, когда верно включение $y' - y'' \in M$, что равносильно выполнению равенства

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u^i - v^i) = y' - y'' \tag{4.28}$$

при некоторых одновременно не равных нулю неотрицательных коэффициентах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. В свою очередь, равенство (4.28) при указанных коэффициентах имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_s^i \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_s^i - v_s^i) \operatorname{sign}(y'_s - y''_s) = \\ = |y'_s - y''_s|, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.29}$$

Далее, для того чтобы выполнялись равенства (4.29) при некоторых одновременно не равных нулю неотрицательных числах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ необходимо и достаточно, чтобы каноническая задача линейного программирования (4.27) имела оптимальное решение, в котором $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$. Последнее эквивалентно равенству нулю оптимального значения целевой функции в задаче линейного программирования (4.27).⮟

В соответствии с теоремой 4.12 проверка справедливости соотношения $y' \succ_M y''$ сводится к решению канонической задачи линейного программирования (4.27). Это решение может быть осуществлено с помощью известного алгоритма симплекс-метода. Такой способ проверки соотношения $y' \succ_M y''$ удобен при создании общего алгоритма построения оценки сверху в случае конечного множества возможных векторов Y. Если же требуется решить задачу невысокой размерности «вручную», то более удобным оказывается использование следующего результата, который представляет собой частный случай теоремы 4.12, установленный в ходе доказательства этой теоремы.

Следствие 4.4. *Пусть* $y', y'' \in R^m$, $y' \neq y''$. *Соотношение* $y' \succ_M y''$ *имеет место тогда и только тогда, когда неоднородная система линейных уравнений* (4.28) *имеет ненулевое неотрицательное решение относительно* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

3. Пример. Пусть $m = 3$, $k = 2$, $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\}$, где

$$y^1 = (1, 4.5, 2),\ y^2 = (2, 3, 1),\ y^3 = (3, 2, 1.5),\ y^4 = (5, 1.5, 2),$$
$$u^1 = (0, 5, 1),\ v^1 = (2, 2, 0),\ u^2 = (5, 0, 2),\ v^2 = (1, 1, 1).$$

Поскольку

$$u^1 - v^1 = (-2, 3, 1),\ u^2 - v^2 = (4, -1, 1),$$

то данные две пары векторов u^1, v^1, u^2, v^2 могут задавать (если они непротиворечивы) информацию об относительной важности критериев, состоящую их двух сообщений. Первое из этих сообщений о том, что группа из второго и третьего критериев, важнее первого критерия. Второе сообщение — о бóльшей важности группы, состоящей из первого и третьего критериев по сравнению со вторым критерием. Обращаем внимание на то, что имеющаяся информация не является взаимно независимой и для учета этой информации ни одна из полученных ранее формул непригодна.

Сначала убедимся в совместности имеющихся пар векторов u^1, v^1, u^2, v^2. Для этого воспользуемся теоремой 4.6 и запишем для данного случая однородную систему линейных уравнений (4.15):

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= 0, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= 0, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения благодаря неотрицательности чисел λ_3, μ_1, μ_2 следует их равенство нулю: $\lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. В таком случае из первого и второго уравнений получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, рассматриваемая система линейных уравнений не имеет ненулевых неотрицательных решений. Согласно теореме 4.6 это означает совместность двух пар векторов u^1, v^1, u^2, v^2.

Теперь построим оценку сверху для множества недоминируемых векторов Ndom Y (а значит и для множества выбираемых векторов Sel Y). С этой целью сначала запишем систему линейных уравнений (4.28) для векторов $y' = y^1$ и $y'' = y^2$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= -1, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= 1.5, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 1. \end{aligned}$$

Она имеет ненулевое неотрицатательное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$, $\lambda_3 = \mu_1 = 0.5$. Следовательно, выполняется соотношение $y^1 \succ_M y^2$, а значит, вектор y^2 не может входить в множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$.

Для векторов $y' = y^4$ и $y'' = y^3$ система линейных уравнений (4.28) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= 2, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= -0.5, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0.5. \end{aligned}$$

У этой системы имеются ненулевые неотрицательные решения, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.5$. Поэтому вектор y^3 так же не входит в множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$.

Выпишем пару систем линейных уравнений (4.28) для векторов $y' = y^1$, $y'' = y^4$ и $y' = y^4$, $y'' = y^1$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= -4, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= 3, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= 4, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= -3, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0.5. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что ни одна из этих двух систем не имеет ненулевых неотрицательных решений, а, значит, ни одно из соотношений $y^1 \succ_M y^4$, $y^4 \succ_M y^1$ не выполняется.

В итоге получено следующее двухэлементное множество недоминируемых векторов

$$\mathrm{Ndom}_M\, Y = \{y^1, y^4\}.$$

Это множество представляет собой оценку сверху для множества выбираемых векторов Sel Y, т. е. Sel $Y \subset \{y^1, y^4\}$. Как видим, ни один из возможных векторов y^2, y^3 не вошел в это множество, а, значит, ни один из них заведомо не должен быть выбранным.

4. Алгоритм построения оценки сверху в случае конечного множества Y. Здесь будем считать, что множество возможных векторов Y состоит из конечного числа элементов:

$$Y = \{y^1, y^2, \ldots, y^N\}.$$

Алгоритм построения множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ состоит из следующих восьми шагов.

Шаг 1. Прежде всего, рекомендуется проверить совместность (непротиворечивость) набора пар векторов $u^i, v^i \in R^m$, для которых выполняется $u^i - v^i \in N^m$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Такая проверка сводится к решению канонической задачи линейного программирования (4.15). Если в результате решения этой задачи оптимальное значение целевой функции оказалось равным нулю, то вычисления следует закончить, так как данный набор пар векторов противоречив. Если же это значение положительно, то необходимо перейти к следующему шагу.

Шаг 2. Положить $\mathrm{Ndom}_M\, Y = y$, $i = 1$, $j = 2$. Тем самым образуется так называемое текущее множество недоминируемых векторов, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y, а в конце — составит искомую оценку сверху. Алгоритм устроен таким образом, что эта оценка получается из Y последовательным удалением заведомо доминируемых векторов.

Шаг 3. Проверить выполнение соотношения $y^i \succ_M y^j$. Для этого нужно решить каноническую задачу линейного программирования (4.27) при $y' = y^i$, $y'' = y^j$. Если оптимальное значение целевой функции в этой задаче оказалось равным нулю, то перейти к Шагу 4. В противном случае (т. е. когда это значение положительно) перейти к Шагу 6.

Шаг 4. Удалить из текущего множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ вектор y^j, так как он не может входить в это множество.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $i < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 3. В противном случае — перейти к Шагу 8.

Шаг 6. Проверить справедливость соотношения $y^j \succ_M y^i$. Для этого необходимо решить каноническую задачу линейного программирования (4.27) при $y' = y^i$, $y'' = y^i$. В том случае, когда оптимальное значение целевой функции этой задачи окажется равным нулю, перейти к Шагу 7. В противном случае (т. е. когда это оптимальное значение положительно) — вернуться к Шагу 5.

Шаг 7. Удалить из текущего множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M Y$ вектор y^i.

Шаг 8. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 3. В противном случае (т. е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. Множество недоминируемых векторов построено полностью.