Глава 3

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВАЖНОСТЬ ДЛЯ ДВУХ ГРУПП КРИТЕРИЕВ

Предложенное в предыдущей главе понятие относительной важности критериев здесь распространяется на общий случай двух групп критериев. Изучаются его простейшие свойства и показывается, каким образом производить учет информации о том, что одна группа критериев важнее другой группы с определенным набором коэффициентов относительной важности. Этот учет, как и в случае двух критериев, сводится к построению множества Парето относительно нового векторного критерия. Но при этом размерность последнего может быть существенно выше размерности исходного критерия.

Приведены геометрические иллюстрации для задачи выбора с тремя критериями.

3.1. Определение и важнейшие свойства относительной важности критериев

1. Основные определения. Введем общее определение относительной важности для двух групп критериев.

Определение 3.1. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Будем говорить, что *группа критериев A важнее группы критериев B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$*, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$y_i' - y_i'' = w_i^* > 0 \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_j'' - y_j' = w_j^* > 0 \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s' = y_s'' \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup B), \tag{3.1}$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Другими словами, для ЛПР группа критериев A важнее другой группы B, если всякий раз при выборе из пары векторных оценок ЛПР готово пожертвовать определенным количеством w_j^* по каждому менее важному j-му критерию f_j ($j \in B$) ради получения дополнительного количества w_i^* по каждому более важному i-му критерию f_i ($i \in A$) при условии сохранения значений всех остальных критериев.

Нетрудно видеть, что в частном случае $A = \{i\}$ и $B = \{j\}$ определение 3.1 совпадает с определением 2.1 относительной важности для двух критериев. Иначе говоря, определение относительной важности для двух групп критериев является прямым обобщением определения относительной важности для двух критериев.

Соотношение между числами w_i^* и w_j^*, как и в случае двух критериев, позволяет количественно оценить степень важности одной группы критериев по сравнению с другой группой.

Определение 3.2. Пусть группа критериев A важнее группы критериев B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Положительные числа

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \quad \text{для } i \in A \text{ и } j \in B \tag{3.2}$$

будем называть *коэффициентами относительной важности* для указанной пары групп критериев.

Если через $|A|$ и $|B|$ обозначить число элементов множества A и B соответственно, то число всех коэффициентов относительной важности, вводимых определением 3.2, равно произведению $|A| \cdot |B|$. Например, если $A = \{i\}$, т. е. $|A| = 1$, то указанное число коэффициентов относительной важности будет равно $|B|$ — количеству элементов менее важных критериев.

2. Свойства относительной важности. Имеет место следующий результат, в соответствии с которым, в случае, когда одна группа критериев важнее другой, данное соотношение важности будет сохраняться, если более важную группу расширять, добавляя к ней другие критерии, а менее важную сужать, удаляя из нее какие-то критерии.

Теорема 3.1. *Пусть отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам* 2, 3 *и группа критериев A важнее группы критериев B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Тогда*

– группа критериев $A \cup \{k\}$ при $k \in I \setminus (A \cup B)$ будет важнее группы B с положительными параметрами w_i^* для всех $i \in A$, w_j^* для всех $j \in B$ и произвольным положительным параметром w_k^*;

– группа критериев $A \cup \{k\}$ при $k \in B$ будет важнее группы критериев $B \setminus \{k\}$ с положительными параметрами w_i^* для всех $i \in A$, w_j^* для всех $j \in B \setminus \{k\}$ и произвольным положительным параметром w_k^*;

– группа критериев A будет важнее группы критериев $B \setminus \{k\}$ с положительными параметрами w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B \setminus \{k\}$.

⮙ Пусть в соответствии с определением 3.1 для векторов y', y'', удовлетворяющих (3.1), выполнено соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим при $k \in I \setminus (a \cup B)$ произвольный вектор $y \in R^m$, для которого выполнено

$$y_k > y'_k; \quad y_s = y'_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\}.$$

Очевидно, $y \geq y'$. Отсюда согласно аксиоме 3 следует соотношение $y \succ y'$, которое вместе с $y' \succ y''$ в силу транзитивности отношения предпочтения влечет соотношение $y \succ y''$. Поскольку

$$y_i - y''_i = w_i^* > 0 \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_k > y'_k = y''_k, \; y''_j - y_j = w_j^* > 0 \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s = y''_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \big(A \cup B \cup \{k\}\big)$$

и разность $w_k^* = y_k - y''_k$ может быть любым положительным числом, то доказательство первого утверждения завершено.

Для проверки истинности второго утверждения при $k \in B$ введем вектор y с компонентами

$$y_k > y''_k; \quad y_s = y'_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\}.$$

Для этого вектора аналогично рассмотренному выше получим соотношение $y \succ y''$, которое устанавливает справедливость требуемого второго утверждения.

Доказательство третьего утверждения проводится по той же самой схеме и не составляет труда.⮛

Из общих соображений ясно, что в случае, когда ЛПР готово за определенный прирост по первой группе критериев пожертвовать некоторым количеством по критериям менее важной группы, то это ЛПР должно согласиться как на больший прирост по тем же самым критериям, так и на меньшую потерю по менее важным критериям. Действительно, справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть отношение предпочтения* $\succ$ *удовлетворяет аксиомам* 2 *и* 3. *Предположим, что группа критериев* A *важнее группы критериев* B *с двумя заданными наборами положительных параметров* w_i^* *для всех* $i \in A$ *и* w_j^* *для всех* $j \in B$. *Тогда группа критериев* A *будет важнее группы критериев* B *с любой парой наборов положительных параметров* w_i' *для всех* $i \in A$ *и всех* w_j' *для всех* $j \in B$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$w_i' > w_i^* \quad \text{для всех } i \in A, \; w_j' < w_j^* \quad \text{для всех } j \in B.$$

Иначе говоря, если первая группа критериев A *важнее второй группы критериев* B *с коэффициентами относительной важности* θ_{ij} *для всех* $i \in A$ *и всех* $j \in B$, *то первая группа будет важнее второй и с любыми коэффициентами относительной важности* θ'_{ij}, *меньшими, чем* θ_{ij}, *т. е.* $\theta'_{ij} < \theta_{ij}$ *для всех* $i \in A$ *и всех* $j \in B$.

Доказательство теоремы 3.1 проводится аналогично доказательству теоремы 2.1; поэтому воспроизводить его здесь не будем.

По аналогии с рассмотрениями предыдущей главы можно ввести *предельные коэффициенты относительной важности для двух групп критериев*.

Кроме того, можно определить и отношение несравнимой важности одной группы критериев по сравнению с другой группой. А именно, если любое положительной число $\theta_{ij} \in (0, 1)$ (при всех $i \in A$ и $j \in B$) является коэффициентом относительной важности для группы критериев A по сравнению с группой критериев B, то в таком случае будем говорить, что *первая группа критериев несравнимо важнее второй группы*.

Во второй главе уже была получена характеризация лексикографического [1]) отношения в терминах последовательного набора несравнимо боле важных критериев (см. теорему 2.2). Ниже формулируется аналогичное утверждение в терминах групп критериев, которое эквивалентно теореме 2.2.

Теорема 3.3. *Заданное на пространстве* R^m *бинарное отношение* $\succ$, *удовлетворяющее аксиомам* 2 *и* 3, *является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо важнее группы* $\{2, 3, ..., m\}$ *всех остальных критериев, второй критерий несравнимо важнее группы* $\{3, ..., m\}$ *всех последующих критериев и т. д.* $(m-1)$*-й критерий несравнимо важнее* m*-го критерия*.

⮙ Необходимость. Пусть отношение $\succ$ является лексикографическим. По определению лексикографического отношения для

[1]) Определение лексикографического отношения можно найти в разд. 1.2.

произвольных двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполнены следующие m высказываний

1) $y_1' > y_1'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

2) $y_1' = y_1'', \; y_2' > y_2'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

3) $y_1' = y_1'', \; y_2' = y_2'', \; y_3' > y_3'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

....

m) $y_i' = y_i'', \; i = 1, 2, ..., m-1; \; y_m' > y_m'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$.

Из высказывания 1) следует, что первый критерий несравнимо важнее группы всех остальных критериев. Действительно, согласно высказыванию 1), для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, у которых разности $y_2'' - y_2', ..., y_m'' - y_m'$ положительны, все числа

$$\theta_{12} = \frac{y_2'' - y_2'}{y_1' - y_1'' + y_2'' - y_2'},$$

$$\theta_{13} = \frac{y_3'' - y_3'}{y_1' - y_1'' + y_3'' - y_3'},$$

....

$$\theta_{1m} = \frac{y_m'' - y_m'}{y_1' - y_1'' + y_m'' - y_m'}$$

являются коэффициентами относительной важности, причем поскольку указанные выше разности вместе с разностью $y_1' - y_1''$ могут принимать все возможные значения в пределах от 0 до $+\infty$, выписанные коэффициенты относительной важности являются произвольными числами, сплошь заполняющими интервал (0, 1). Это означает, что первый критерий несравнимо важнее группы всех остальных критериев.

Аналогично, из высказывания 2) можно прийти к выводу, что второй критерий несравнимо важнее группы всех последующих критериев $(3, ..., m)$, ..., из $(m-1)$-го высказывания следует несравнимая важность $(m-1)$-го критерия по сравнению с m-м критерием.

Достаточность. Пусть первый критерий несравнимо важнее группы $(2, 3, ..., m)$ всех остальных критериев, второй — несравнимо важнее группы $(3, ..., m)$ всех последующих критериев и т. д. Выберем два произвольных вектора $y', y'' \in R^m$, для которых верно неравенство $y_1' > y_1''$. Для доказательства высказывания 1) следует убедиться в том, что имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Если дополнительно к неравенству $y_1' > y_1''$ выполнено $y_i' \geq y_i''$, $i = 2, \ldots, m$, то благодаря аксиоме Парето получаем соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим случай, когда в дополнение к неравенству $y_1' > y_1''$ имеет место обратное неравенство $y_s' < y_s''$ для некоторого (или некоторых) $s \in \{2, \ldots, m\}$. Введем в рассмотрение вектор y, у которого $y_1 = y_1'$, для всех указанных номеров s выполнено равенство $y_s = y_s' - 1$, а все остальные компоненты имеют вид $y_k = y_k'' - 1$. Очевидно, справедливо неравенство $y' \geq y$. Следовательно, согласно аксиоме Парето верно соотношение $y' \succ y$. У вектора y только первая компонента больше первой компоненты вектора y'', а все остальные — меньше соответствующих компонент y''. Поэтому благодаря тому, что первый критерий несравнимо важнее набора всех остальных критериев, получаем $y \succ y''$. В силу транзитивности отношения $\succ$ из соотношений $y' \succ y$ и $y \succ y''$ приходим к требуемому результату $y' \succ y''$.

Точно так же, используя аксиому Парето и тот факт, что второй критерий несравнимо важнее группы $(3, \ldots, m)$ всех последующих критериев, проверяется истинность высказывания 2) и т. д.

Действуя подобным образом, в конце концов, получим справедливость высказывания m – 1). Высказывание m) вытекает из аксиомы 3.$\curlyvee$

3.2. Использование информации об относительной важности критериев для двух групп критериев

1. Эквивалентное более простое определение относительной важности для двух групп критериев. Для того чтобы в соответствии с определением 3.1 проверить, действительно ли одна группа критериев важнее другой группы, необходимо предложить ЛПР для сравнения бесконечное число пар векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям (3.1) при некоторых положительных параметрах w_i^*, w_j^*. Очевидно, что на практике подобную проверку осуществить невозможно из-за бесконечного числа сравниваемых пар векторов. На самом деле, как и в случае двух критериев (см. теорему 2.4), такая проверка в условиях инвариантности отношения предпочтения и не требуется. Достаточно убедиться в выполнении соотношений (3.1) лишь для некоторой одной фиксированной пары векторов y', y''. Об этом свидетельствует следующий результат, который доказывается по той же схеме, что и теорема 2.4.

Теорема 3.4. *В силу инвариантности отношения предпочтения $\succ$ можно считать, что в определении* 3. 1 *векторы y', y'' фиксированы. В частности, в нем можно положить*

$$y_i' = w_i^* \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_j' = -w_j^* \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s' = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{a \cup B\} \tag{3.3}$$

и $y'' = 0_m$.

Поскольку отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования, на основании сформулированной теоремы 3.4 приведем более простое определение относительной важности, которое эквивалентно определению 3.1.

Определение 3.3. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. *Группа критериев A важнее группы критериев B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$, если для вектора y' вида* (3.3) *верно соотношение $y' \succ 0_m$.*

В соответствии с данным определением, если, например, вектор (0.7, –0.3, 1) оказывается для ЛПР предпочтительнее нулевого вектора (0, 0, 0), то группа из первого и третьего критериев будет важнее группы, состоящей из одного второго критерия, причем соответствующие коэффициенты относительной важности равны

$$\theta_{12} = \frac{0.3}{0.7 + 0.3} = 0.7, \quad \theta_{32} = \frac{0.3}{1 + 0.3} \approx 0.23.$$

2. Сужение множества Парето на основе информации о том, что одна группа критериев важнее другой группы. На основе следующей теоремы в процессе принятия решений из множества всех парето-оптимальных векторов можно удалять те, которые заведомо не могут оказаться выбранными.

Теорема 3.5 (в терминах векторов). *Предположим, что $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$ и группа критериев A важнее группы критериев B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов имеют место включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{3.4}$$

где $P(Y)$ есть множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с множеством возможных решений X и векторным критерием f, а $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в задаче с исходным множеством решений X и новым p-мерным $(p = m - |B| + |A| \cdot |B|)$ векторным критерием g, составленном из тех компонент f_i векторного критерия f, для которых $i \in I \setminus B$, а также компонент вида

$$g_{ij} = \theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j \quad \text{для всех } i \in A \text{ и всех } j \in B. \tag{3.5}$$

⮙ Вновь через K обозначим острый выпуклый конус конусного отношения $\succ$. По условию для вектора y' вида (3.3) выполняется соотношение $y' \succ 0_m$, а значит $y' \in K$. В соответствии со следствием 2.1 справедливо включение $R_+^m \subset K$.

Введем в рассмотрение множество M — совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций конечного набора векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$, где $e^1, e^2, \ldots, e^m$ — единичные орты пространства R^m. Множество M является выпуклым конусом, не содержащим начало координат (так как коэффициенты линейных комбинаций одновременно в нуль не обращаются). В силу включений $e^1, e^2, \ldots, e^m \in R_+^m \subset K$ и $y' \in K$ введенное множество M представляет собой подмножество конуса K. Более того, M — острый конус, так как он — подмножество острого выпуклого конуса K.

Введем так называемый *двойственный* [1]) *конус* (без нуля) по отношению к конусу M, т. е.

$$C = \{y \in R^m \mid \langle z, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

На основании теории двойственности выпуклого анализа ([28], с. 175) образующими конуса C являются внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса M, и обратно: образующими конуса M служат внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса C.

Возможны два случая: $|A| > 1$ и $|A| = 1$. В первом случае образующими конуса M являются все векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$, поскольку ни один из этих векторов нельзя представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этого набора. Во втором случае (т. е. тогда, когда $A = \{i\}$) вектор e^i можно представить в виде положительной линейной комбинации вектора y' и всех

[1]) О двойственном конусе см. также п. 3.3.

векторов e^s при $s \in B$. Значит, во втором случае образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$ без вектора e^i. Далее сначала рассматривается первый случай, а затем — второй.

Так как образующими конуса M являются векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$, то множество ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\langle e^i, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } i \in I,$$
$$\langle y', y \rangle \geqq 0 \tag{3.6}$$

совпадает с двойственным конусом C.

Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6). Это должна быть такая система векторов, множество неотрицательных линейных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (3.6). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Сначала укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (3.6). Прежде всего, заметим, что каждый единичный орт e^i пространства R^m при $i \in I \setminus B$ является решением (3.6). Далее, введем векторы

$$e^{ij} = \theta_{ij} e^i + (1 - \theta_{ij}) e^j$$

для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Компоненты этих векторов неотрицательны, и потому все они удовлетворяют неравенствам $\langle e^i, y \rangle \geqq 0$ для каждого $i \in I$. Более того, они удовлетворяют и последнему неравенству $\langle y', y \rangle \geqq 0$ системы (3.6), так как

$$\langle y', e^{ij} \rangle = y'_i \theta_{ij} + y'_j (1 - \theta_{ij}) = w_i^* \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} - w_j^* \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} = 0$$

для всех $i \in A$ и $j \in B$.

Таким образом, набор, состоящий из векторов e^i для всех $i \in I \setminus B$ и векторов e^{ij} для всех $i \in A$ и $j \in B$, принадлежит двойственному конусу C. При этом, как нетрудно убедиться, ни один из векторов этой совокупности невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов. Общее число p всех векторов указанного набора равно

$$p = m - |B| + |A| \cdot |B|.$$

Для того чтобы проверить, что указанный набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (3.6), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (3.6) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных неотрицательных линейных комбинаций векторов указанного выше набора. С этой целью наряду с системой (3.6) рассмотрим соответствующую ей систему из $m + 1$ линейных уравнений:

$$\langle e^i, y\rangle = 0 \text{ для всех } i \in I,$$
$$\langle y', y\rangle = 0. \tag{3.7}$$

Любая подсистема из $m - 1$ векторов системы $e^1, e^2, ..., e^m, y'$ является линейно независимой. Следовательно, искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (3.6) содержится среди (одномерных) ненулевых решений подсистем из $m - 1$ уравнений системы линейных уравнений (3.7).

Начнем удалять из системы (3.7) по два уравнения и выписывать решения получающихся в результате такого удаления подсистем, удовлетворяющие, кроме того, системе неравенств (3.6). Найденные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (3.6).

Если в число удаляемых входит последнее уравнение системы (3.7), то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут служить (с точностью до положительного множителя), например, единичные орты $e^1, e^2, ..., e^m$. Однако, как легко видеть, из этого набора лишь те векторы, для которых $i \in I \setminus B$, удовлетворяют системе неравенств (3.6).

Если последнее уравнение системы линейных уравнений (3.7) не удаляется, то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут являться (с точностью до положительного множителя) векторы e^{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Все эти векторы, как было установлено ранее, удовлетворяют системе неравенств (3.6).

Поскольку все возможные варианты удаления пар уравнений из системы линейных уравнений (3.7) рассмотрены, то никаких других (с точностью до положительного множителя) решений подсистем из $m - 1$ уравнений системы (3.7), удовлетворяющих (3.6), не существует. Это означает, что система векторов, составленная из e^i для всех $i \in I \setminus B$ и e^{ij} для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6). Следовательно, любое решение системы неравенств (3.6) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Будем далее для удобства обозначать эту совокупность $a^1, a^2, ..., a^p$. Рассмотрение первого случая завершено.

Несколько слов о втором случае. Когда $A = \{i\}$, рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из m уравнений, которая отличается от (3.7) отсутствием уравнения $\langle e^i, y\rangle = 0$, соответствующего единичному орту e^i. Здесь удалять следует лишь одно уравнение, чтобы получить ту же самую фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6).

Итак, в силу доказанного выше, множество решений системы линейных неравенств (3.6), т. е. конус C (вместе с нулем), совпадает с множеством всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $a^1, a^2, ..., a^p$. Поэтому включение $z \in C$ для вектора z имеет место тогда и только тогда, когда этот вектор можно представить в виде некоторой ненулевой неотрицательной линейной комбинации векторов указанного набора.

Благодаря последнему обстоятельству неравенство

$$\langle z, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in C \tag{3.8}$$

для произвольного фиксированного вектора $y \neq 0_m$ оказывается эквивалентным неравенству

$$\langle a^i, y\rangle \geq 0, \; i = 1, 2, ..., p, \tag{3.9}$$

где знак $\geq$ указывает, что хотя бы для одного $i \in \{1, 2, ..., p\}$ неравенство строгое. В самом деле, если вектор y удовлетворяет неравенствам (3.9), то поскольку всякий вектор $z \in C$ можно представить в виде некоторой ненулевой неотрицательной линейной комбинации векторов $a^1, a^2, ..., a^p$, например, $z = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_p a^p$, то, умножая неравенства (3.9) на соответствующие одновременно не равные нулю неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ и почленно складывая полученные таким образом неравенства, придем к неравенству

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^i, y \right\rangle = \langle z, y\rangle \geqq 0$$

из (3.8). Обратно, из (3.8) вытекает (3.9), так как $a^i \in C$ для всех $i = 1, 2, ..., p$. При этом одновременно все неравенства (3.9) как равенства выполняться не могут. В самом деле, если для ненулевого вектора y неравенства (3.9) выполняются как равенства, то эти же неравенства будут иметь место и для противоположного вектора $-y$. Отсюда следует, что конус, двойственный по отношению к C, не является острым. Но этот двойственный конус есть

$$M = \{y \in R^m \mid \langle z, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } z \in C\} \setminus \{0_m\},$$

так как C является двойственным по отношению к конусу M[1]). Тем самым, приходим к противоречию — конус M не является острым. Полученное противоречие означает, что для ненулевого вектора y одновременно все неравенства (3.9) выполняться как равенства не могут.

На основании установленной эквивалентности неравенств (3.6) и (3.9) заключаем, что включение $y \in M$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливы неравенства (3.9), и поэтому

$$y \in M \quad \Leftrightarrow \quad \langle a^i, y\rangle \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.10}$$

Переходим к завершающему этапу доказательства теоремы. Из включений

$$R_+^m \subset M \subset K$$

следует

$$\operatorname{Ndom} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{3.11}$$

где

$$P(\widehat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества Y, упорядоченного конусным отношением с острым выпуклым конусом M.

Пусть $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$ при некоторых $x, x^* \in X$. Благодаря эквивалентности (3.10) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\langle a^i, f(x^*) - f(x^*)\rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

или, что то же самое,

$$\langle a^i, f(x)\rangle \geq \langle a^i, f(x^*)\rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Если вспомнить конкретный вид векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$, то последние неравенства можно переписать в виде

$$g(x) \geq g(x^*),$$

[1]) В случае многогранного конуса M двойственным по отношению к двойственному конусу C является исходный конус M [28].

где g — p-мерная векторная функция, участвующая в формулировке доказываемой теоремы. Следовательно, $P(\widehat{Y})$ — это множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений X и векторным критерием g.

Для завершения доказательства теоремы остается в (3.11) воспользоваться включением $\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y$, которое имеет место в силу леммы 1.2.⮟

Полученный результат можно легко переформулировать в терминах решений. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4 (в терминах решений). *Предположим, что выполнены аксиомы* 1–4 , *$A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$ и группа критериев A важнее группы критериев B с двумя заданными наборами положительных параметров w_i^* для всех $i \in A$ и w_j^* для всех $j \in B$. Тогда для любого непустого множества выбираемых решений имеют место включения*

$$\operatorname{Sel} X \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{3.12}$$

где $P_f(X)$ есть множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений X и векторным критерием f, а $P_g(X)$ — множество парето-оптимальных решений в задаче с исходным множеством решений X и новым p-мерным векторным критерием g, который определяется в формулировке предыдущей теоремы.

Согласно полученному результату новый векторный критерий g состоит из $p = m - |B| + |A| \cdot |B| \geqq m$ компонент. Значит, число новых критериев может совпадать с числом «старых» критериев, но может и превосходить его.

Следствие 3. 1. *В условиях теоремы* 3.4 *равенство $p = m$ выполняется тогда и только тогда, когда $|A| = 1$.*

⮝ Пусть $p = m - |B| + |A| \cdot |B| = m$. Тогда $|A| \cdot |B| = |B|$, а значит $|A| = 1$.

Обратно, если $|A| = 1$, то $p = m - |B| + 1 \cdot |B| = m$.⮟

Пример 3.1. Пусть в многокритериальной задаче имеется десять критериев, т. е. $m = 10$ и некоторая половина критериев важнее оставшейся половины, т. е. $|A| = |B| = 5$. В этом случае согласно теореме 3.5 имеем $p = 10 - 5 + 5 \cdot 5 = 30$. Следовательно, новый векторный критерий g в данном случае будет содержать пять старых критериев и двадцать пять новых, которые можно вычислить на основе старых, используя формулу (3.5).

Следующий результат показывает, при каких условиях число компонент нового векторного критерия оказывается наибольшим возможным.

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.4 *максимальное значение* p *достигается в случае*

$$|A| = \left[\frac{m+1}{2}\right], \quad |B| = m - |A|,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

⮝ Обозначим $x = |A|$, $y = |B|$ и рассмотрим задачу максимизации

$$p = m - y + xy \to \max$$

при условии $x + y \leqq m$. Нетрудно понять, что максимум в сформулированной задаче может достигаться лишь при выполнении равенства $x + y = m$. Выразив из этого равенства y через x и подставив его в выражение для p, получим $p = m - (m - x) + x(m - x) = x(m + 1 - x)$. Эта квадратичная функция одной переменной x принимает наибольшее значение в точке $x = |A| = \frac{m+1}{2}$. Если m является нечетным числом, полученный результат представляет целое число. Когда число критериев m — четное, максимум в целочисленной точке будет достигаться на ближайшем целом $x = |A| = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ $\left(\text{равно как и при } x = \left[\frac{m+2}{2}\right]\right)$. ⮟

Следствие 3.2 показывает, что в приведенном выше примере 3.1 (где $m = 10$) максимальное возможное число компонент нового векторного критерия равно 30 и может достигаться в случае, когда одна половина критериев важнее другой половины (либо когда некоторая группа из шести критериев важнее оставшейся группы из четырех критериев).

В теореме 2.7 была установлена инвариантность включений (2.12) и (2.15) относительно линейного положительного преобразования критериев в случае относительной важности для двух критериев. Поскольку формулы для определения коэффициентов относительной важности и пересчета новых критериев абсолютно идентичны как в случае двух критериев, так и в случае двух групп критериев, то рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2.7, можно применить в данном случае двух групп критериев. В итоге придем к следующему результату, имеющему несомненное практическое значение.

Следствие 3.3. *Включения* (3.4) *и* (3.12) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев* f_1, $f_2, \ldots, f_m$, *а значит, результаты теоремы* 3.4 *могут быть использованы для задач многокритериального выбора, в которых значения указанных критериев вычисляются в количественных шкалах* (*интервалов, отношений и разностей*).

3.3. Геометрические иллюстрации к задаче с тремя критериями

1. Трехкритериальная задача общего вида. В двухкритериальной задаче информация об относительной важности может иметь только такую форму, когда группа из одного критерия важнее группы из другого критерия. В этом случае число новых критериев (число p) будет совпадать с числом «старых» критериев, т. е. $p = 2$. Таким образом, в двухкритериальной задаче учет информации об относительной важности критериев не приводит к увеличению критериев (собственно говоря, этот же вывод можно получить и из результатов предыдущей главы).

Рассмотрим многокритериальную задачу с тремя критериями, т. е. будем считать $m = 3$. Предположим, что имеется информация о том, что группа из первых двух критериев f_1, f_2 важнее третьего критерия f_3. Согласно определению 3.3 это означает, что включение $y' \succ 0_3$ имеет место для некоторого вектора $y' = (w_1^*, w_2^*, -w_3^*) = OD$ при определенных положительных параметрах w_1^*, w_2^*, w_3^* (рис. 3.1). Конкретные значения данных параметров в дальнейшем изложении существенной роли не играют. Неотрицательный ортант (октант) R_+^3 — это острый выпуклый конус (без нуля) $OABC$, порожденный единичными ортами $e^1 = OA$, $e^2 = OB$ и $e^3 = OC$. Этот конус имеет три двумерные грани, представляющие собой соответствующие части координатных плоскостей: OBC, OAC и OAB. Выпуклый конус M, порожденный единичными ортами пространства R^3 и вектором y' — это острый выпуклый конус (без нуля), имеющий уже четыре двумерные грани: OBC, OAC,

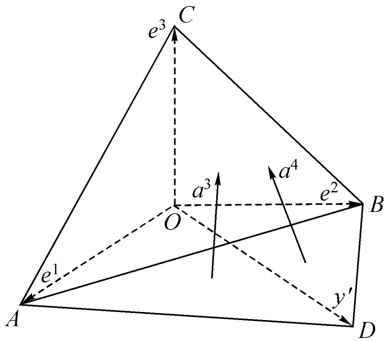

Рис. 3.1.

OAD и OBD. Нормальные векторы этих граней (направленные внутрь конуса M), а именно векторы a^1, a^2, a^3, a^4, являются образующими двойственного (по отношению к M) конуса C. Здесь

$$a^1 = e^1 \perp OBC, \; a^2 = e^2 \perp OAC, \; a^3 \perp OAD, \; a^4 \perp OBD.$$

Поскольку трехмерный конус M имеет четыре двумерные грани, то двойственный конус C порождается четырьмя векторами e^1, e^2, a^3, a^4, а значит, новый векторный критерий g в данном случае будет содержать четыре компоненты. Действительно, как утверждает теорема 3.5, выполняется равенство $p = 3 - 1 + 2 \cdot 1 = 4$.

В рассмотренном примере число критериев $m = 3$ при учете информации об относительной важности критериев увеличилось на одну единицу.

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть один из критериев будет важнее группы из двух оставшихся. Как легко вычислить, $p = 3 - 2 + 1 \cdot 2 = 3$, т. е. число новых критериев будет совпадать с числом «старых» критериев. То же самое произойдет и в случае, когда один из критериев важнее другого.

Никаких других возможностей группировки критериев по важности не существует, поэтому можно сделать следующий вывод: *в трехкритериальной задаче учет информации об относительной важности критериев для двух произвольных групп критериев может привести к увеличению критериев лишь одну единицу и только в том случае, когда два критерия важнее оставшегося третьего критерия*.

2. Случай линейных критериев. Здесь снова рассмотрим трехкритериальную задачу, в которой, кроме того, множеством возможных решений служит подмножество векторного пространства R^3, т. е. $X \subset R^3$, а все критерии являются линейными:

$$f_1(x) = \langle c^1, x \rangle, \quad f_2(x) = \langle c^2, x \rangle, \quad f_3(x) = \langle c^3, x \rangle,$$

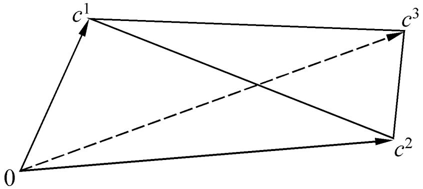

Рис. 3.2.

где $c^1, c^2, c^3, x \in R^3$. Конус, порожденный векторами c^1, c^2, c^3 (градиентами линейных целевых функций f_1, f_2, f_3), называют *конусом целей*. Пусть эти векторы не компланарны и имеют вид, изображенный на рис. 3.2. Они порождают определенный трехмерный трехгранный конус.

Допустим, что первый критерий важнее группы, состоящей из второго и третьего критерия с коэффициентами относительной важности $\theta_{12} = \theta_{13} = 0.5$. В этом случае, согласно теореме 3.4 при учете подобного рода информации об относительной важности критериев следует рассмотреть новую многокритериальную задачу, в которой первый критерий остается прежним, а вместо двух менее важных второго и третьего критериев будут участвовать два новых критерия вида $g_{12}(x) = \langle c_н^2, x \rangle$ и $g_{13}(x) = \langle c_н^3, x \rangle$ (см. рис. 3.3). Тем самым, конус целей, который образуется градиентами целевых функций в новой многокритериальной задаче, так же как и в исходной, имеет три ребра и три грани, но он существенно у́же исходного конуса, образованного векторами c^1, c^2 и c^3.

А теперь предположим, что группа, состоящая из второго и третьего критерия, важнее первого критерия, причем $\theta_{21} = \theta_{31} = 0.5$. Тогда в соответствии с теоремой 3.4 при учете этой информации об относительной важности критериев следует рассматривать новую многокритериальную задачу, в которой остаются прежними второй и третий критерий, а вместо первого образуются два новых: $g_{21} = \langle c^{11}, x \rangle$ и $g_{31} = \langle c^{12}, x \rangle$ (см. рис. 3.4).

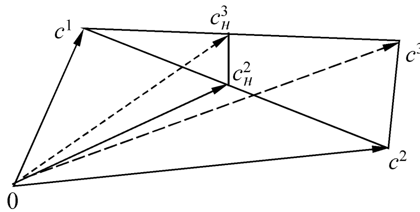

Рис. 3.3.

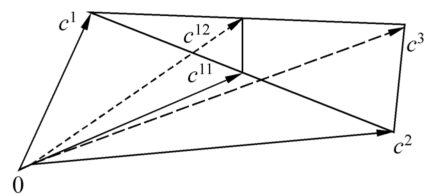

Рис. 3.4.

При этом, как нетрудно видеть, конус целей, образуемый градиентами c^{11}, c^{12}, c^3, c^4 компонент нового векторного критерия, имеет четыре образующие и является четырехгранным.